

Le Frido 2025
volume 1
Laurent Claessens

Plusieurs extensions et versions de ce livre.

1. La version courante, régulièrement mise à jour et qui deviendra petit à petit le Frido 2026.
Téléchargeable sur

<https://laurent.claessens-donadello.eu/pdf/lefrido.pdf>

2. La version la plus complète, contenant beaucoup de géométrie différentielle

<https://laurent.claessens-donadello.eu/pdf/giulietta.pdf>

3. Et bien entendu les sources $\text{\LaTeX}$

<https://github.com/LaurentClaessens/mazhe>

Copyright 2011-2025 Laurent Claessens, and many contributors. A complete list could be retrieved from the git log.

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the chapter entitled “GNU Free Documentation License”.

(c) 2015-2022 David Revoy pour les illustrations de couverture CC-BY,
<https://www.peppercarrot.com/>

ISBN : 979-10-97085-42-1

subpotence, et démontrer un certain nombre de résultats en utilisant sans retenue le lemme de Zorn 1.37.

- (1) Ensemble infini, définition 1.68.
- (2) Ensemble dénombrable, définition 1.212.
- (3) Cardinal d'un ensemble fini, définition 1.204.
- (4) Définition d'équipotence, surpotence et subpotence, notations $A > B$ et $A \approx B$, définition 1.65.
- (5) Toute partie d'un ensemble fini est finie, lemme 1.70.
- (6) Si A est un ensemble fini ou dénombrable, alors il existe une surjection $\mathbb{N} \rightarrow A$, lemme 1.222.
- (7) Si A est un ensemble infini et si $f: A \rightarrow B$ est une application injective, alors $f(A)$ est infini, proposition 1.72.
- (8) Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable, proposition 1.213
- (9) Une bijection $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, proposition 1.216.
- (10) Une décomposition de $\mathbb{N}$ en une infinité de parties équipotentes à $\mathbb{N}$, corolaire 1.218.
- (11) Si il existe une surjection $\mathbb{N} \rightarrow A$, alors A est fini ou dénombrable, lemme 1.219.
- (12) Une union dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable, proposition 1.220
- (13) Tout ensemble infini contient une partie en bijection avec $\mathbb{N}$, proposition 1.227.
- (14) Toute partie d'un ensemble fini est finie, et toute partie d'un ensemble dénombrable est finie ou dénombrable, proposition 1.228.
- (15) Si $A \geq B$ et $B \geq A$, alors $A \approx B$, théorème de Cantor-Schröder-Bernstein 1.75
- (16) Le théorème de Cantor 1.79 dit qu'il n'existe pas de surjection d'un ensemble vers son ensemble des parties. On en déduit qu'il n'existe pas d'ensemble contenant tous les ensembles (corolaire 1.81).
- (17) Si A est infini et si $A \geq B$, alors $A \approx A \cup B$ par le lemme 1.232.
- (18) Si S est un ensemble infini alors il existe une bijection $\varphi: \{0, 1\} \times S \rightarrow S$, proposition 1.234.
- (19) Si A est infini, alors $A \times \mathbb{N} \approx A$, proposition 1.237.
- (20) Si A est infini et si $B < A$, alors $A \setminus B \approx A$, lemme 1.239.
- (21) Si A est infini, alors $A \approx A \times A$, théorème 1.244.

Il y a aussi des résultats de cardinalité autour des extensions de corps.

- (1) Si $\mathbb{K}$ est un corps infini, alors $\mathbb{K}[X] \approx \mathbb{K}$.
- (2) Le théorème de Steinitz 6.134 affirme que tout corps admet une unique clôture algébrique. La preuve utilise pas mal de cardinalité ainsi que le lemme de Zorn 1.37.

THEME 00 Morphisme

Thème 2 : morphismes et compagnie Un morphisme est un concept algébrique. Il s'agit d'une application (pas spécialement inversible) qui préserve la structure. Quand on parle de morphisme, il faut donc préciser la structure. On dit « morphisme de groupe », « morphisme d'espace vectoriel », « morphisme d'anneaux », etc.

- (1) Un morphisme de module est la définition 1.432.
- (2) Un morphisme de groupes est la définition 1.86.
- (3) Un morphisme d'anneaux est la définition 1.96.
- (4) Un morphisme de corps est aussi la définition 1.96. Un corps n'a pas plus de structure qu'un anneau.
- (5) Un isomorphisme d'espaces topologiques est une application continue, inversible, dont l'inverse est continue, 7.51. On dit aussi un homéomorphisme.
- (6) Un difféomorphisme est différentiable d'inverse différentiable, définition 10.289.
- (7) Un C^k -difféomorphisme est une application C^k d'inverse C^k . Définition 10.289.

Le mot « homomorphisme » signifie exactement « morphisme », et, sauf incohérence de ma part, il n'est pas utilisé dans le Frido.

Thème 3 : arithmétique modulo, théorème de Bézout, théorème chinois

- (1) Pour $\mathbb{Z}^*$ c'est le théorème 1.349.
- (2) Existence d'un pgcd et d'un ppcm pour tout partie d'un anneau principal, proposition 3.50.
- (3) Théorème de Bézout dans un anneau principal : proposition 3.59 qui dit que si $\delta \in \text{pgcd}(a, b)$ alors il existe u, v tels que $ua + vb = \delta$
- (4) Théorème de Bézout dans un anneau de polynômes : théorème 6.47.
- (5) En parlant des racines de l'unité et des générateurs du groupe unitaire dans le lemme 19.8. Au passage nous y parlerons de solfège.
- (6) La proposition 1.358 qui donne tout entier assez grand comme combinaisons de a et b à coefficients positifs est utilisée en chaînes de Markov, voir la définition 38.33 et ce qui suit.
- (7) PGCD et PPCM sont dans la définition 1.103.
- (8) Calcul effectif du PGCD puis des coefficients de Bézout : sous-sections 3.2.1.1 et 3.2.1.2.
- (9) Dans un anneau principal il y a une relation entre idéal engendré et pgcd, ppcm : $(a) + (b) = \text{pgcd}(a, b)$ et $(a) \cap (b) = \text{ppcm}(a, b)$. C'est la proposition 3.62.
- (10) Théorème des restes chinois. Il existe beaucoup de théorèmes chinois.
 - (10a) Dans un anneau principal, si $a = a_1 \dots a_r$ alors on a isomorphisme $A/(a) \simeq A/(a_1) \times \dots \times A/(a_r)$ par le théorème 3.63.
 - (10b) Version anneaux quotients : théorème 1.408.
 - (10c) Version congruence. Si les I_i sont des idéaux solutions à l'équation $x \in [a_i]_{I_i}$ sont donnés par la proposition 1.407.

<++>

Thème 4 : divisibilité

- (1) Si a divise ² bc et si a est premier avec c , alors a divise b . Lemme de Gauss 1.361. Pour les anneaux principaux, lemme 3.60.
- (2) Si a divise b et b divise a , alors $a = b$, lemme 1.363.

Thème 5 : équations diophantiennes

- (1) Équation $ax + by = c$ dans $\mathbb{N}$, équation (3.53).
- (2) Dans 3.2.6, nous résolvons $ax + by = c$ en utilisant Bézout (théorème 1.349).
- (3) L'exemple 3.79 donne une application de la pure notion de modulo pour $x^2 = 3y^2 + 8$. Pas de solutions.
- (4) L'exemple 3.80 résout l'équation $x^2 + 2 = y^3$ en parlant de l'extension $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ et de stathme.
- (5) Les propositions 3.84 et 3.86 parlent de triplets pythagoriciens.
- (6) Le dénombrement des solutions de l'équation $\alpha_1 n_1 + \dots \alpha_p n_p = n$ utilise des séries entières et des décompositions de fractions en éléments simples, théorème 26.102.
- (7) La proposition 1.216 donne une bijection $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ en résolvant dans $\mathbb{N}$ (entre autres) l'équation $k = y^2 + x$ pour k fixé.

Thème 6 : types d'anneaux

- (1) Définition d'anneau : définition 1.90.
- (2) La définition d'anneau principal est 1.340 ; pour un idéal principal, c'est 1.339.
- (3) $\mathbb{Z}$ est intègre, lemme 1.337, principal et euclidien (proposition 1.342).
- (4) $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal (voir (5)).

2. Divise, définition 1.99.

- (5) Si A est un anneau intègre³ qui n'est pas un corps, alors $A[X]$ n'est pas principal, lemme 1.409.
- (6) L'anneau des fonctions holomorphes sur un compact donné est principal, proposition 26.68.
- (7) L'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ n'est pas factoriel, exemple 3.58.
- (8) L'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ n'est ni factoriel ni principal, exemple 3.70.
- (9) Tous les idéaux de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ sont principaux, mais $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ n'est pas principal. Exemple 1.404.

anneau principal

- Définition 1.340.
- Il est intègre, définition 1.340.
- Il est noetherien, lemme 3.66.
- il est factoriel, théorème 3.68.

anneau euclidien

- Définition 1.336.
- Il est principal par 1.341

anneau intègre

- Définition 1.326.

anneau noetherien

- Définition 3.65.

anneau factoriel

- Définition 3.53.
- Il est intègre, définition 3.53.

corps

- Corps, définition 1.378.
- Il est un anneau intègre, lemme 1.327.
- Il est un anneau principal, proposition 3.69.
- Il est un anneau factoriel, proposition 3.69.

Dans un anneau intègre

- Un anneau fini intègre est un corps, proposition 3.51.
- A est intègre si et seulement si $A[X]$ est intègre, théorème 3.92.
- Si un pgcd⁴ est inversible, tous les pgcd sont inversibles, lemme 1.329.

Dans un anneau principal

- p est premier si et seulement si il est irréductible si et seulement si l'idéal pA est maximal, proposition 1.396.
- Tous les idéaux sont principaux, définition 1.340.
- Si $\text{pgcd}(a, b) = 1$, $\text{pgcd}(a, c) = 1$, alors $\text{pgcd}(a, bc) = 1$, lemme 3.61.

Dans un anneau factoriel

- Si p est irréductible et si $p \mid ab$, alors p divise a ou b , lemme 3.54.
- Tout élément irréductible est premier, proposition 3.55.
- Si p est irréductible, pA est un idéal premier, lemme 3.56.
- Si p est irréductible, A/pA est un anneau intègre, lemme 3.56 et proposition 1.393.
- P et Q sont primitifs si et seulement si PQ est primitif, lemme 3.107.
- Formule $c(PQ) = c(P)c(Q)$. Lemme 3.107.
- L'anneau des polynômes $\mathcal{P}(A) = A[X]$ est factoriel, théorème 6.35.

3. Définition 1.326.

4. pgcd, définition 1.103.

Dans un corps commutatif

- L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est factoriel, proposition 6.36, euclidien et principal, lemme 3.98.
- Les seuls idéaux de $\mathbb{K}$ sont $\{0\}$ et $\mathbb{K}$, lemme 1.309.
- L'anneau $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ est euclidien, lemme 3.98.

élément irréductible

- Définition 1.318

élément premier

- Définition 1.317
- Si A est intègre et unitaire, l'élément p est premier si et seulement si l'idéal pA est premier, proposition 1.328.

éléments associés

- Définition 3.43.

Dans un anneau, un idéal est 1.307.

idéal premier

- Définition 1.391.
- Idéal premier si et seulement si A/I est anneau intègre, proposition 1.393.

idéal maximal

- Idéal maximal si et seulement si A/I est un corps, proposition 1.393.

idéal principal

- Définition 1.339.
- Dans un anneau unitaire intègre, p est irréductible si et seulement si il n'y a pas d'idéal principal I tel que $pA \subsetneq I \subsetneq A$, proposition 1.328.

THEME00Sou3C#TQz5

Thème 7 : sous-groupes

- (1) Théorème de Burnside sur les sous-groupes d'exposant fini de $GL(n, \mathbb{C})$, théorème 8.311.
- (2) Sous-groupes compacts de $GL(n, \mathbb{R})$, lemme 13.46 ou proposition 13.47.

THEME00QEEW64XDKG8

Thème 8 : groupe symétrique

- (1) Définition 1.261.
- (2) La signature $\epsilon: S_n \rightarrow \{-1, 1\}$ est l'unique morphisme surjectif de S_n sur $\{-1, 1\}$, proposition 1.291(1).
- (3) La table des caractères du groupe symétrique S_4 est donné dans la section 16.5.
- (4) Le groupe symétrique S_4 est le groupe des symétries affines du tétraèdre régulier⁵, proposition 18.194.
- (5) Le groupe alterné A_5 est l'unique groupe simple d'ordre⁶ 60, proposition 5.55.
- (6) La proposition 5.45 donne la position du groupe alterné dans le groupe symétrique : A_n est un sous-groupe caractéristique de S_n , et l'unique sous-groupe d'indice 2.

THEME00KZHB64BQIC9

Thème 9 : action de groupe

- (1) Définition d'une action de groupe sur un ensemble : 1.469.
- (2) Action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré, théorème 23.96.
- (3) La formule de Burnside (théorème 2.41) parle du nombre d'orbites pour l'action d'un groupe fini sur un ensemble fini.
- (4) Des applications de la formule de Burnside : le jeu de la roulette et l'affaire du collier, 18.10.14.1 et 18.10.14.2.
- (5) Le groupe symétrique S_n agit sur l'anneau $\mathbb{K}[T_1, \dots, T_n]$, lemme 1.470.

5. Définition 12.180.

6. Ordre d'un groupe, définition 1.249.

Thème 10 : classification de groupes

- (1) Ordre d'un groupe, définition 1.249.
- (2) Structure des groupes d'ordre pq , théorème 5.25.
- (3) Le groupe alterné est simple, théorème 5.51.
- (4) Définition 5.6 d'un p -groupe.
- (5) Théorème de Sylow 5.11.
- (6) Théorème de Burnside sur les sous-groupes d'exposant fini de $GL(n, \mathbb{C})$, théorème 8.311.
- (7) $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, corolaire 19.34.
- (8) Le groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ est cyclique, proposition 3.125.
- (9) Le premier théorème d'isomorphisme 2.7 dit que si θ est un morphisme de groupes, alors $G/\ker(\theta) = \text{Image}(\theta)$.
- (10) Le deuxième théorème d'isomorphisme 2.8 dit que si N est normal dans G , alors $NH/N = H/(H \cap N)$.
- (11) Le troisième théorème d'isomorphisme 2.10 dit que, avec des hypothèses de normalité, $(G/M)/(N/M) = G/N$.

À propos d'ordre dans un groupe.

- (1) L'ordre d'un groupe est son cardinal. L'ordre d'un élément est le plus petit n tel que $g^n = e$, définition 1.250.
- (2) L'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe, corolaire 2.15.
- (3) Si H est normal dans G , alors $|G/H| = |G|/|H|$, théorème de Lagrange 2.14.
- (4) Si G est un groupe cyclique, pour tout diviseur p de $|G|$, le groupe G contient au moins un élément d'ordre p . Théorème de Cauchy 3.22.

Thème 11 : fonction indicatrice d'Euler

- (1) Définition de $\varphi: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ dans 5.29.
- (2) Propriétés genre $\varphi(pq) = \varphi(p)\varphi(q)$, corolaire 5.43.
- (3) $\varphi(n) = \text{Card}(\Delta_n)$, proposition 19.14.
- (4) $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$, lemme 5.38.
- (5) Le théorème de Euler-Fermat 5.34 donne $a^{\varphi(n)} \in [1]_n$ dès que a et n sont premiers entre eux.
- (6) Si A et B sont premiers entre eux, il existe p, m tels que $A^p = mB + 1$, proposition 5.34.

Thème 12 : produit semi-direct de groupes

- (1) Définition 2.48.
- (2) Le corolaire 2.50 donne un critère pour prouver qu'un produit NH est un produit semi-direct.
- (3) L'exemple 18.176 donne le groupe des isométries du carré comme un produit semi-direct.
- (4) Le théorème 5.25 classe les groupes d'ordre pq (p, q premiers distincts) à grands coups de produit semi-directs.
- (5) Le théorème 18.80 donne les isométries de $\mathbb{R}^n$ par $\text{Isom}(\mathbb{R}^n) = T(n) \times_{\rho} O(n)$ où $T(n)$ est le groupe des translations.
- (6) La proposition 18.82 donne une décomposition du groupe orthogonal $O(n) = SO(n) \times_{\rho} C_2$ où $C_2 = \{\text{Id}, R\}$ où R est de déterminant -1 .
- (7) La proposition 11.63 donne $\text{Aff}(\mathbb{R}^n) = T(n) \times_{\rho} GL(n, \mathbb{R})$ où $\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ est le groupe des applications affines bijectives de $\mathbb{R}^n$.

Thème 13 : théorie des représentations

- (1) Définition 4.145.
- (2) Table des caractères du groupe diédral, section 18.17.
- (3) Table des caractères du groupe symétrique S_4 , section 16.5.

Thème 14 : espaces vectoriels

- (1) Les notations $\mathcal{L}(V, W)$, $\mathcal{L}^0(V, W)$, $\text{GL}(V, W)$ ainsi que les notions de morphismes et d'isomorphismes d'espaces vectoriels normés sont dans la définition 10.299.
- (2) Existence d'une base. Pour un espace vectoriel quelconque, proposition 4.25.
- (3) Théorème de la base incomplète. Pour un espace vectoriel quelconque, théorème 4.26.
- (4) En dimension finie, tout sous-espace vectoriel est fermé, corolaire 7.229.

Thème 15 : rang

- (1) Définition pour une application linéaire : 4.48, pour une matrice : 4.111. L'équivalence est la proposition 4.115.
- (2) Le théorème du rang, théorème 4.49
- (3) Pour une applicaton linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension finie, il est équivalent d'être injectif, surjectif ou bijectif, c'est le corolaire 4.51.
- (4) Pour prouver que des matrices sont équivalentes et pour les mettre sous des formes canoniques, nous avons le lemme 4.118 et son corolaire 4.119.
- (5) Tout hyperplan de $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ coupe $\text{GL}(n, \mathbb{K})$, corolaire 4.119. Cela utilise la forme canonique sus-mentionnée.
- (6) Le lien entre application duale et orthogonal de la proposition 8.191 utilise la notion de rang.
- (7) Le lemme 8.301 parle de commutant et utilise la notion de rang. Ce lemme sert à prouver diverses conditions équivalentes à être un endomorphisme cyclique dans le théorème 8.302.

Thème 16 : formes bilinéaires et quadratiques

- (1) Les formes bilinéaires sont définies en 8.121.
- (2) Forme quadratique, définition 8.122.
- (3) Équivalence de forme quadratiques, définition 8.251. Deux formes quadratiques sont équivalentes si et seulement si elles ont même signature, proposition 8.252.
- (4) Une isométrie d'une forme bilinéaire est affine ou linéaire, théorème 8.154.
- (5) Forme bilinéaire dégénérée, définition 8.126.
- (6) Une forme bilinéaire est non-dégénérée si et seulement si sa matrice associée est inversible, c'est la proposition 8.228.
- (7) Une isométrie d'une forme bilinéaire est linéaire ou affine par le théorème 8.154.
- (8) Toute forme quadratique admet des bases orthogonales, théorème 8.244 pour le cas général ; proposition 8.255 pour le cas de $\mathbb{R}^n$, en se basant sur le théorème spectral.
- (9) Base q -orthogonale pour une forme quadratique, théorème 8.244.
- (10) Le concept de projection orthogonale est la définition 12.150 en dimension finie et la définition 25.7 dans le cas des espaces de Hilbert.
- (11) Produit hermitien, définition 8.172. Opérateur hermitien ($A^\dagger = A$), opérateur unitaire ($A^\dagger A = 1$), définition 8.175

matrice

- (1) Matrice d'une forme quadratique, définition 8.145.

- (2) Théorème de Sylvester à propos de signature (définition 8.160) de forme quadratique réelle : 8.250.

orthogonalité

- (1) Il existe une base q -orthogonale, proposition 8.242 et théorème 8.244.
- (2) Définition de l'orthogonal $A^\perp$ et du noyau $\ker(b)$, définitions 8.128, 8.129.
- (3) Diverses propriétés comme $A^\perp = \text{Span}(A)^\perp$ et $V \cap V^\perp = \ker(b_V)$, propositions 8.130 et 8.131.
- (4) En dimension finie, $(V^\perp)^\perp = V$, lemme 8.134.
- (5) Nous avons $\dim(V) + \dim(V^\perp) = \dim(E)$, lemme 8.133.
- (6) Pour une forme quadratique strictement définie positive ou négative, $E = F \oplus E^\perp$, lemme 8.136.

THEMEooEndoQyFDqz

Thème 17 : endomorphismes cycliques

- (1) Définition 8.102.
- (2) Groupe cyclique, définition 1.428.
- (3) Son lien avec le commutant donné dans la proposition 8.299 et le théorème 8.302.
- (4) Utilisation dans le théorème de Frobenius (invariants de similitude), théorème 8.290.

THEMEooZYKFGXKQz

Thème 18 : extension de corps et polynômes

- (1) Définition d'une extension de corps 6.59.
- (2) Définition de polynôme minimal : 6.64.
- (3) Pour l'extension du corps de base d'un espace vectoriel et les propriétés d'extension des applications linéaires, voir la section 8.15.
- (4) Extension de corps de base et similitude d'application linéaire (ou de matrices, c'est la même chose), théorème 8.304.
- (5) Extension de corps de base et cyclicité des applications linéaires, corolaire 8.303.
- (6) À propos d'extensions de $\mathbb{Q}$, le lemme 6.182.
- (7) Corps de rupture : définition 6.113 existence par la proposition 6.119. Il n'y a pas unicité.
- (8) Corps de décomposition : définition 6.141. Attention : le plus souvent nous parlons de corps de décomposition d'un seul polynôme. Cette définition est un peu surfaite. Existence par la proposition 6.142 qui le donne même comme extension par toutes les racines, et unicité à isomorphisme près par le théorème 6.144, énoncé de façon plus simple (mais pas indépendante !) en la proposition 6.145.
- (9) Si $\mathbb{K}$ est algébrique clos et si $\alpha : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$ est une extension algébrique, alors $\alpha(\mathbb{K}) = \mathbb{L}$ par le lemme 6.80.

Un trio de résultats d'enfer est :

- (1) Dans un anneau principal qui n'est pas un corps, un idéal est maximal si et seulement si il est engendré par un irréductible⁷ (proposition 1.400).
- (2) Dans un anneau, un idéal I est maximal si et seulement si A/I est un corps (proposition 1.389)
- (3) Si $\mathbb{K}$ est un corps, $\mathbb{K}[X]$ est principal (lemme 3.98).

THEMEooPqHhQz

Thème 19 : polynômes

Définitions Soient un anneau A , un corps $\mathbb{K}$, une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ et un élément $\alpha \in \mathbb{L}$.

- (1) La définition la plus formelle est en tant que module produit $A^{(\mathbb{N})}$, définition 1.461. Le produit et l'évaluation sont définis en 1.464 et la formule $(PQ)(x) = P(x)Q(x)$ dans 1.465.

7. Irréductibilité, y compris polynôme irréductible, définition 1.318.

- (2) Si $\mathbb{A}$ est commutatif, alors $\mathbb{A}[X]$ est également commutatif, lemme 1.466.
- (3) En ce qui concerne la notation $A[X]$, elle ne devrait pas être utilisée, voir 1.19.2. L'ensemble des polynômes sera noté $\mathcal{P}(A)$ et ceux de degré n (définition 1.463), $\mathcal{P}_n(A)$.
- (4) $A[X]$, définition 1.461 ; l'anneau $\mathbb{K}[X]$ a même définition parce que c'est un cas particulier. L'évaluation d'un polynôme en un élément de l'anneau, $P(\alpha)$ est définie en 1.464.
- (5) Liens entre $\mathbb{K}[\alpha]$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}(\alpha)$ et $\mathbb{K}(X)$ lorsque α est transcendant, proposition 6.100. Et la proposition 6.103 pour le cas où α est algébrique⁸.
- (6) Si A est un anneau et si α est un élément d'une extension de A (comme anneau), nous écrivons $A[\alpha]$ pour le plus petit sous-anneau de B contenant A et α . C'est la définition 3.90.
- (7) $\mathbb{K}(X)$, le corps des fractions de $\mathbb{K}[X]$, définition 6.84. Si $R = P/Q$ dans $\mathbb{K}(X)$, l'évaluation est $R(\alpha) = P(\alpha)Q(\alpha)^{-1}$, définition 6.85.
- (8) $\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}}$ est le plus petit corps de $\mathbb{L}$ contenant $\mathbb{K}$ et α , définition 6.86.
- (9) À propos de polynômes à plusieurs variables.
 - Anneau de polynômes : $A[X_1, \dots, X_n]$ est la définition 3.39.
 - Corps engendré : $\mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est la définition 6.138.
 - Corps des fractions rationnelles : $\mathbb{K}(X_1, \dots, X_n)$ est la définition 6.139.

contenu À propos de $c(P)$.

- (1) Définition du contenu $c(P)$, 3.101.
- (2) $c(PQ) = c(P)c(Q)$, lemme de Gauss 19.48, et lemme 3.107 pour un anneau factoriel.
- (3) Si $c(P) = 1$, on dit que P est primitif au sens des pgcd, définition 3.103.
- (4) Si $a \in A$ nous avons $c(aP) = ac(P)$ par le lemme 1.330.
- (5) Un polynôme primitif est la définition 3.103.

Dérivation Plusieurs propriétés du polynôme dérivé P' .

- (1) La définition 6.154 donne $P' = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1}$.
- (2) Règle de Leibniz, lemme 6.155.
- (3) Caractérisation de $P' = 0$ en fonction de la caractéristique de $\mathbb{K}$, lemme 6.156.

Coefficients dans un anneau commutatif (1) Les polynômes à coefficients dans un anneau commutatif sont à la section 3.7.

- (2) Un anneau A est intègre si et seulement si $A[X]$ est intègre ; théorème 3.92.

Coefficients dans un corps Les polynômes à coefficients dans un corps sont à la section 6.3.

- (1) Si $\mathbb{K}$ est un corps, $\mathbb{K}[X]$ est euclidien et principal, lemme 3.98.
- (2) Nous parlons de l'idéal des polynômes annulateurs dans le théorème 6.43.
- (3) Le théorème 6.43 dit que $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal et que tous ses idéaux sont engendrés par un unique polynôme unitaire.
- (4) Le polynôme minimal est irréductible, proposition 6.67.
- (5) Quelques formules sur le pgcd, lemme 6.57.

Polynôme primitif (1) Un polynôme est irréductible sur A si et seulement si il est irréductible et primitif sur le corps des fractions, corolaire 3.122.

Polynôme d'endomorphisme C'est la section 8.7.

Racines et factorisation (1) Si $\mathbb{A}$ est un anneau, la proposition 3.111 factorise une racine.

- (2) Si $\mathbb{A}$ est un anneau, la proposition 3.116 factorise une racine avec sa multiplicité.
- (3) Si $\mathbb{A}$ est un anneau, le théorème 3.118 factorise plusieurs racines avec leurs multiplicités.
- (4) Le théorème 3.118 nous indique que lorsqu'on a autant de racines (multiplicité comprise) que le degré, alors nous avons toutes les racines.

8. Définition 6.71.

- (5) Si $\mathbb{K}$ est un corps et α une racine dans une extension, le polynôme minimal de α divise tout polynôme annulateur par la proposition 6.101.
- (6) Le théorème 6.110 annule un polynôme de degré n ayant $n + 1$ racines distinctes.
- (7) La proposition 6.185 nous annule un polynôme à plusieurs variables lorsqu'il a trop de racines.
- (8) En analyse complexe, le principe des zéros isolés 17.136 annule en gros toute série entière possédant un zéro non isolé.
- (9) Polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$.

THEMEooPolynomeEndomBHT0628

Thème 20 : polynôme d'endomorphismes

- (1) Endomorphismes cycliques et commutant dans le cas diagonalisable, proposition 8.299.
- (2) Racine carrée d'une matrice hermitienne positive, proposition 13.33.
- (3) Théorème de Burnside sur les sous-groupes d'exposant fini de $GL(n, \mathbb{C})$, théorème 8.311.
- (4) Décomposition de Dunford, théorème 8.263.
- (5) Algorithme des facteurs invariants 4.120.

THEMEooULGFBBHSC0628

Thème 21 : dualité Ne pas confondre dual algébrique et dual topologique d'un espace vectoriel.

- (1) Dual algébrique E^* , définition 4.135.
- (2) Dual topologique E' , définition 25.1.
- (3) Le dual d'un espace de Banach est de Banach, proposition 7.319.
- (4) Définition de la base duale 4.136.
- (5) $\dim(E) = \dim(E^*)$, lemme 4.136.
- (6) Base préduale (existence, unicité) : proposition 4.140.
- (7) Théorème de représentation de Riez 27.187 : $L^p = (L^q)'$, et en particulier $L^\infty = (L^1)'$.
- (8) Il n'est pas vrai que $(L^\infty)' = L^1$, voir la proposition 27.241.
- (9) Dans un espace de Banach⁹, $\|x\| = \max_{\substack{\varphi \in E' \\ \|\varphi\|=1}} |\varphi(x)|$, proposition 27.172.

Dual topologique et algébrique Ils sont définis par 4.135. Le dual algébrique est l'ensemble des formes linéaires, et le dual topologique ne considère que les formes linéaires continues (en dimension infinie, les applications linéaires ne sont pas toutes continues).

Topologie Une topologie possible sur le dual d'un espace vectoriel topologique est celle *-faible de la définition 7.410.

Nous comparons les topologies faibles et de la norme en la section 10.16.

Théorèmes de dualité Quelques théorèmes établissent des dualités entre des espaces courants.

- (1) En dimension finie, $x \mapsto b(x, \cdot)$ est isomorphisme $E \rightarrow E^*$ lorsque b est une forme bilinéaire, proposition 8.132.
- (2) Le théorème de représentation de Riesz 25.18 pour les espaces de Hilbert.
- (3) La proposition 27.185 pour les espaces $L^p([0, 1])$ avec $1 < p < 2$.
- (4) Le théorème de représentation de Riesz 27.187 pour les espaces L^p en général.

Tous ces théorèmes donnent la dualité par l'application $\Phi_x = \langle x, \cdot \rangle$.

THEMEooInjectionHES0628

Thème 22 : injections

- (1) L'espace de Sobolev $H^1(I)$ s'injecte de façon compacte dans $C^0(\bar{I})$, proposition 31.6.
- (2) L'espace de Sobolev $H^1(I)$ s'injecte de façon continue dans $L^2(I)$, proposition 31.6.
- (3) L'espace $L^2(\Omega)$ s'injecte continument dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ (les distributions), proposition 30.34.

9. Espace de Banach, définition 7.315.

Thème 23 : tribu, algèbre de parties, λ -systèmes et co. Il existe des centaines de notions de mesures et de classes de parties.

- (1) Le plus souvent lorsque nous parlons de mesure est que nous parlons de mesure positive, définition 14.18 sur un espace mesuré avec une tribu, définition 14.1.
- (2) Une mesure extérieure est la définition 14.10
- (3) Une algèbre de partie : définition 14.13. Une mesure sur une algèbre de parties : définition 14.11. L'intérêt est que si on connaît une mesure sur une algèbre de parties, elle se prolonge en une mesure sur la tribu engendrée par le théorème de prolongement de Hahn 14.80.
- (4) Un λ -système : définition 14.31.
- (5) Une mesure complexe : définition 14.239.

En théorie de l'intégration, si X est une partie de $\mathbb{R}^n$, la convention est de considérer des fonctions

$$f: (X, \mathcal{L}eb(X)) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R})).$$

Voir les points 14.120 et 14.166 pour les conventions à ce propos.

À propos d'applications mesurables :

- (1) Définition d'une application mesurable, définition 14.44.
- (2) Une fonction continue est borélienne, théorème 14.56.
- (3) Si les f_n sont mesurables (au sens des boréliens), alors $\sup_n f_n$ est mesurable, lemme 14.100.

À propos de tribu induite :

- (1) Définition 14.8.
- (2) Les boréliens induits sont bien les boréliens de la topologie induite¹⁰ : $\mathcal{B}or(Y) = \mathcal{B}or(X)_Y$, théorème 14.57.

Tribu engendrée.

- (1) Tribu engendrée par des parties, définition 14.4.

Thème 24 : théorie de la mesure

Mesure À propos de mesure.

- (1) Tribu des boréliens, définition 14.50.
- (2) Mesure positive, mesure finie et σ -finie, c'est la définition 14.18.
- (3) Le produit de tribus est donné par la définition 14.127,
- (4) Produit d'une mesure par une fonction, définition 14.212.
- (5) le produit d'espaces mesurés est donné par la définition 14.247.
- (6) Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, définition 14.143.
- (7) Une partie de $\mathbb{R}$ non mesurable au sens de Lebesgue : l'exemple 14.157.
- (8) Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$, définition 14.249.
- (9) Mesure à densité, définition 14.212.

Opérations On peut faire quelques opérations sur les mesures.

- (1) Si w est une fonction et μ une mesure, on définit $w \cdot \mu$ par 14.212 : $(w \cdot \mu)(A) = \int_A w d\mu$.

Théorèmes d'approximation Il est important de pouvoir approcher des fonctions continues ou L^p par des fonctions étagées, sinon on ne parvient pas à faire tourner la machine de l'intégration de Lebesgue.

- (1) Si $(S, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré et si $f: S \rightarrow [0, +\infty]$ est une fonction mesurable, le théorème fondamental d'approximation 14.118 dit qu'il existe une suite croissante de fonctions étagées qui converge vers f .

10. Topologie induite, définition 7.27.

- (2) Les fonctions étagées sont denses dans L^p , proposition 27.59.
- (3) Encadrement d'un borélien A par un fermé F et un ouvert V par le lemme 14.86 : $F \subset A \subset V$ avec $\mu(V \setminus F) < \epsilon$.
- (4) Approximation L^p de la fonction caractéristique d'un borélien par une fonction continue par le théorème 14.242.

Produit (1) La tribu produit, définition 14.127.
 (2) La mesure produit, définition 14.246.

THEMEooUJVXBHXR06E5

Thème 25 : normes

Définitions (1) Espace vectoriel normé : définition 7.212.

- (2) Produit scalaire, définition 8.164.
- (3) Norme associée à un produit scalaire (cas réel), théorème 10.1.
- (4) Norme associée à une forme sesquilinéaire (cas complexe), proposition 9.116.
- (5) Produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, définition 8.169. Norme sur $\mathbb{R}^n$, définition 10.3.
- (6) Forme hermitienne sur $\mathbb{C}^n$, définition 8.179. Norme sur $\mathbb{C}^n$, définition 9.117.
- (7) La proposition 10.52 donne les normes $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ et $\|x\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.
- (8) Sur $\mathbb{R}^n$, la proposition 17.105 dit que $\|x\|_p$ est une norme.

Topologie (1) Métrique associée à une norme $d(x, y) = \|x - y\|$, définition 7.217.
 (2) La topologie d'un espace vectoriel normé est la topologie métrique du théorème 7.142.
 (3) Les boules sont les boules métrique définies en (7.124).

Inégalités (1) En général pour les normes $\|\cdot\|_p$, il y a des inégalités dans 17.106 et 17.98.

- (2) La proposition 17.111 donne l'inégalité $\|x\|_q \leq n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|x\|_p$ dès que $0 < q < p$.

Équivalence de norme (1) Définition de l'équivalence de norme 10.54.

- (2) La proposition 10.55 sur l'équivalence des normes $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ dans $\mathbb{R}^n$.
- (3) Toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes par le théorème 10.57.

Autres (1) Montrer que le problème $a - b$ est stable dans l'exemple 34.27.

- (2) La proposition 12.116 donnant $\rho(A) \leq \|A\|$ utilise l'équivalence de toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie (théorème 10.57).
- (3) La norme $x \mapsto \|x\|$ est une application continue, proposition 7.287.

Norme opérateur et d'algèbre voir le thème 40.

THEMEooInegalitesNormes06E6

Thème 26 : inégalités Dans $\mathbb{C}$ nous avons $|a + b| \leq |a| + |b|$ par la proposition 9.105(1).

Inégalité de Clarkson Pour $f, g \in L^p$ nous avons l'inégalité de Clarkson 27.147 :

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_p^p \leq \frac{1}{2} (\|f\|_p^p + \|g\|_p^p). \quad (-1.1)$$

Inégalité de Young Nous avons

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (-1.2)$$

par la proposition 27.36.

Inégalité de Jensen (1) Une version discrète pour $f(\sum_i \lambda_i x_i)$, la proposition 17.102.

- (2) Une version intégrale pour $f(\int \alpha d\mu)$, la proposition 27.37.
- (3) Une version pour l'espérance conditionnelle, la proposition 36.86.

Inégalité de Hölder Il en existe de nombreuses versions et variations.

- (1) Hölder pour L^p : $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$, proposition 27.39.
- (2) Hölder pour ℓ^p : $\|x\|_q \leq n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|x\|_p$, proposition 17.111.

(3) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty$, théorème 17.106

(4) $\|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_q$, corolaire 17.107.

Inégalité de Minkowsky (1) Pour une forme quadratique¹¹ q sur $\mathbb{R}^n$ nous avons $\sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$. Proposition 10.20.

(2) Si $1 \leq p < \infty$ et si $f, g \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ alors $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. Proposition 27.45.

(3) L'inégalité de Minkowsky sous forme intégrale s'écrit sous forme déballée

$$\left[\int_X \left(\int_Y |f(x,y)|^p d\nu(y) \right) d\mu(x) \right]^{1/p} \leq \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} d\nu(y).$$

ou sous forme compacte

$$\left\| x \mapsto \int_Y f(x,y) d\nu(y) \right\|_p \leq \int_Y \|f_y\|_p d\nu(y)$$

C'est la proposition 27.50.

Transformée de Fourier Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ nous avons $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$, lemme 29.12.

Inégalité des normes Inégalité de normes : si $f \in L^p$ et $g \in L^1$, alors $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$, proposition 27.83.

c_r **inégalité** La proposition 27.137 donne $|f(\omega) + g(\omega)|^r \leq c_r |f(\omega)|^r + c_r |g(\omega)|^r$.

THEMEooYRIW6BX062X

Thème 27 : constructions topologiques

topologie produit Si X et Y sont des espaces topologiques, nous pouvons construire une topologie sur $X \times Y$.

(1) Dans le cas d'un produit infini, c'est la définition 7.62.

(2) La définition de la topologie produit est 7.63.

(3) Pour les espaces vectoriels normés, le produit est donné par la définition 7.281.

(4) L'équivalence entre la topologie de la norme produit et la topologie produit est le lemme 7.281.

(5) Quand V et W sont des espaces métriques, la topologie considérée sur $V \times W$ est celle de la définition 7.281. C'est à la fois la topologie de la norme produit et la topologie produit.

(6) La convergence dans un espace vectoriel est si et seulement si il y a convergence composante par composante, proposition 7.85.

(7) Dans le cas d'espaces normés, la topologie produit est la même que celle de la norme produit, lemme 7.282.

topologie induite Si X est un espace topologique et si A est une partie de X , nous mettons une topologie sur A .

(1) La topologie induite, définition 7.27.

(2) Si X est un espace vectoriel normé, la topologie induite est celle de la norme restreinte : lemme 7.163.

topologie quotient Si X est topologique et si $\sim$ est une relation d'équivalence¹², nous définissons une topologie sur $X/\sim$.

(1) La topologie quotient est définie en 7.67.

(2) Si X est vectoriel normé, la topologie sur $X/\sim$ est aussi donnée par une norme quotient de la définition 7.407. La proposition 7.409 donne l'équivalence entre la topologie quotient et la norme quotient.

topologie rendant continues des applications Si nous avons une application $f: X \rightarrow Y$ et si Y est topologique, nous mettons une topologie sur X rendant f continue.

(1) Définition de la plus petite topologie rendant des applications continues, proposition 7.55.

11. Définition 8.122.

12. Définition 1.50 pour relation d'équivalence.

Thème 28 : espaces métriques, normés

- (1) Un espace métrique est un ensemble muni d'une distance, définition 7.139.
- (2) La distance uniforme dans le cas de fonctions à support compact est 7.275.
- (3) La distance entre un point et un ensemble est la définition 7.198.
- (4) Le théorème-définition 7.142 donne la topologie sur un espace métrique en disant que les boules ouvertes sont une base de la topologie (définition 7.2).
- (5) La définition de la convergence d'une suite est la définition 7.14.
- (6) Dans un espace vectoriel normé, une application est continue si et seulement si elle est bornée, proposition 10.81.
- (7) Un espace vectoriel topologique¹³ qui possède en tout point une base dénombrable de topologie accepte une distance, théorème 7.334.

Thème 29 : limite et continuité

- (1) Limite d'une fonction en un point : définition 7.135. Il n'y a pas unicité en général comme le montre l'exemple 7.73 dans un espace non séparé.
- (2) Définition de la continuité d'une fonction en un point et sur une partie de l'espace de départ : définition 7.45.
- (3) Caractérisation de la limite dans $\mathbb{R}$, proposition 12.1.
- (4) Unicité de la limite d'une suite dans un espace séparé : proposition 7.82. Unicité de la limite d'une fonction, toujours dans le cas d'un espace séparé : proposition 7.138.
- (5) La proposition 7.413 donne l'unicité de la limite dans le cas des espaces duaux pour la topologie *-faible. La proposition 7.138 nous dira qu'il y a unicité dès que l'espace d'arrivée est séparé.
- (6) Continuité sur une partie si et seulement si continue en chaque point, c'est le théorème 7.262.
- (7) Voir l'exemple 12.56 traité en détail pour la (non) continuité d'une fonction qui fait un saut en un point.
- (8) La fonction $f(x, y) = x + y$ est continue, lemme 9.30.

Thème 30 : intégration À propos d'intégration.

Vocabulaire La différence entre une intégrale qui existe fonction intégrable est dans 14.187.

L'ordre dans lequel les choses sont faites — Nous commençons par considérer des fonctions $f: \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ dans la définition 14.167.

— Nous donnerons ensuite quelques propriétés restreintes aux fonctions à valeurs positives, par exemple

- (1) La convergence monotone 14.178,
- (2) Lemme de Fatou 14.182.
- (3) (presque) linéarité pour les fonctions positives, théorème 14.183.

— La définition pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ puis $\mathbb{C}$ est 14.186.

— Pour les fonctions à valeurs dans un espace vectoriel, c'est la définition 14.197.

primitive et intégrale (1) La définition 14.286 donne $\int_a^b f = \int_{]a, b[} f$ lorsque f est intégrable sur $]a, b[$.

(2) Lorsque f n'est pas intégrable sur $]a, b[$ nous pouvons poser $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f$ et dire que c'est une intégrale impropre, définition 14.298.

(3) Si F et G sont primitives de f , alors $F = G + cst$, corolaire 12.224.

13. Définition 7.219.

Quelque résultats (1) Intégrale associée à une mesure, définition 14.167

- (2) L'existence d'une primitive pour toute fonction continue est le théorème 12.450.
- (3) La définition d'une primitive est la définition 12.223.
- (4) Primitive et intégrale, proposition 14.287.
- (5) Intégrale impropre, définition 14.298.

Intégrale et mesure (1) L'intégrale de la fonction 1 donne la mesure : $\int_B 1 d\mu = \mu(B)$, c'est le lemme 14.175.

- (2) Le théorème de Radon-Nikodym 14.235 donne une densité pour certaines mesures.
- (3) Le produit d'une mesure par une fonction donnée par la définition 14.212 introduit aussi une densité : $(w \cdot \mu)(A) = \int_A w d\mu$.

Limite dans les bornes (1) Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable alors $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} f = \int_{[0,\infty[} f$.

- (2) Nous avons $\int_{\mathbb{R}} f = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f$ par la proposition 14.263.

Autre résultats (1) Si $A, B \subset \Omega$ sont des parties disjointes, alors $\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$, proposition 14.194.

- (2) La σ -additivité dénombrable, $\int_{\bigcup_i A_i} f d\mu = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{A_i} f d\mu$ est dans les propositions 14.210 et 14.211.

THEME00CH06334

Thème 31 : connexité

- (1) Définition 7.102
- (2) L'image d'un connexe par une fonction continue est connexe, lemme 7.272.
- (3) Un espace topologique est connexe si et seulement si il vérifie les valeurs intermédiaires, proposition 9.58.
- (4) Dans un connexe, une partie ouverte et fermée est soit vide soit l'espace entier, proposition 7.105(4).
- (5) Connexité par arcs, définition 9.65.
- (6) Si U est connexe et si $U \subset S \subset \bar{U}$, alors S est connexe, proposition 7.106.
- (7) Une partie de $\mathbb{R}^2$ qui est connexe, mais pas connexe par arcs, proposition 21.56.
- (8) Une partie de $\mathbb{R}$ est connexe si et seulement si elle est un intervalle, proposition 9.54.
- (9) Le groupe $SL(n, \mathbb{K})$ est connexe par arcs, proposition 13.24.
- (10) Le groupe $GL(n, \mathbb{C})$ est connexe par arcs, proposition 13.25.
- (11) Le groupe $GL(n, \mathbb{R})$ a exactement deux composantes connexes par arcs, proposition 13.26.
- (12) Le groupe $O(n, \mathbb{R})$ n'est pas connexe, lemme 13.21.
- (13) Les groupes $U(n)$ et $SU(n)$ sont connexes par arcs, lemme 13.22.
- (14) Pour tout $n \geq 2$, le groupe $SO(n)$ est connexe, le groupe $O(n)$ a deux composantes connexes, proposition 13.8.
- (15) Connexité des formes quadratiques de signature donnée, proposition 17.117.
- (16) Dans un espace vectoriel normé, les connexes par arcs sont connexes par arcs C^1 , proposition 15.6.

THEME00S0417400332

Thème 32 : séparabilité

- (1) Espace topologique normal, définition 7.90.
- (2) Le dual d'un espace vectoriel normé sépare les points, corolaire 27.173.
- (3) Les fermés et les compacts sont séparés dans un espace vectoriel topologique, proposition 7.323.
- (4) Le théorème de Hahn-Banach 27.167 parle d'hyperplan qui sépare des parties convexes disjointes (et autres hypothèses).
- (5) Les ouverts séparent les points et les compacts, lemme 7.132.

Thème 33 : compacts**Propriétés générales** Quelques propriétés de compacts.

- (1) La définition d'un ensemble compact est la définition 7.109.
- (2) Ne pas confondre le compactifié d'Alexandrov 7.185 avec la droite réelle achevée 12.26.
- (3) Une partie est relativement compacte si sa fermeture est compacte, définition 7.129. Une union finie de relativement compacts est relativement compacte, lemme 7.131.
- (4) Si M est un compact de $A \times B$, alors $M \subset K \times L$ où K est compact de A et L de B , proposition 7.127.
- (5) Un fermé dans un compact est compact, lemme 7.121. L'intersection entre un compact et un fermé est compacte, proposition 7.122.
- (6) Dans un espace Hausdorff¹⁴, les compacts sont fermés, 7.121(2).
- (7) Un espace est compact si et seulement si toute intersection finie de fermé est non vide, théorème 7.134.
- (8) Tout compact d'un espace topologique séparé est fermé, lemme 7.121(2).
- (9) Dans un espace vectoriel réel de dimension finie, les compacts sont les fermés bornés par le théorème 9.24.
- (10) Le théorème de Borel-Lebesgue 9.19 dit qu'un intervalle¹⁵ de $\mathbb{R}$ est compact si et seulement si il est de la forme $[a, b]$.
- (11) Théorème des fermés emboîtés dans le cas compact, corolaire 7.118. À ne pas confondre avec celui dans le cas des espaces métrique, théorème 7.351.
- (12) Théorème des compacts emboîtés, proposition 7.123. Une intersection dénombrable de compacts emboîtés est compacte et non vide.
- (13) L'image d'un compact par une fonction continue est un compact, théorème 7.274.
- (14) Si $f: K \rightarrow X$ est une bijection continue, sa réciproque est continue, lemme 7.277.
- (15) Suites dans un compact
 - (15a) Toute suite dans un compact admet une sous-suite convergente, théorème 7.342.
 - (15b) Dans $\mathbb{R}^n$, toute suite dans un compact admet une sous-suite convergente, théorème 9.59. La démonstration de ce théorème est non seulement plus compliquée que le cas général, mais utilise en plus le cas dans $\mathbb{R}$; lequel cas n'est pas démontré de façon directe dans le Frido.
 - (15c) Un espace métrique est compact si et seulement si toute suite contient une sous-suite convergente. C'est le théorème de Bolzano-Weierstrass 7.194. La démonstration de ce théorème est indépendante.
 - (15d) Si une suite de fonctions continues converge simplement vers une fonction continue, alors la convergence est uniforme sur tout compact, proposition 12.388.
- (16) Une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes, théorème 7.196.
- (17) Une fonction continue sur un compact Y est uniformément continue, théorème de Heine 12.80.
- (18) Une bijection continue $f: K \rightarrow X$ entre un compact et un séparé est un isomorphisme, 7.276.

Produits de compacts Le théorème de Tychonoff dit que tout produit de compact est compact pour la topologie produit. Nous allons en voir diverses versions.

- $\mathbb{R}$, lemme 9.21.
- Produit fini d'espaces métriques compacts, théorème 7.367.
- Produit dénombrable d'espaces métriques compacts, théorème 7.369.
- En général, théorème 7.360.

14. Hausdorff, définition 7.74.

15. Définition 1.27.

Composante connexe À propos de composantes connexes et de compacts.

- (1) Si K est compact dans $\mathbb{C}$, alors la partie $\mathbb{C} \setminus K$ possède exactement une composante connexe non bornée. Lemme 26.50.

THEEooPUII6BHDFC34

Thème 34 : densité

- (1) Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, proposition 9.16.
- (2) Densité des polynômes dans $(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$, théorème de Bernstein 36.185, ou une conséquence de Stone-Weierstrass 12.444.
- (3) Densité des polynômes dans $(C^0(I), \|\cdot\|_\infty)$ lorsque $I = [a, b]$, corolaire 36.186.
- (4) Densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $1 \leq p < \infty$, théorème 27.65.
- (5) Densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$, proposition 31.15.
- (6) Densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$, proposition 31.17.
Cela est utilisé pour le théorème de trace 31.19.
- (7) Les applications étagées dans les applications mesurables (qui plus est avec limite croissante), théorème fondamental d'approximation 14.118.
- (8) Les fonctions étagées dans les fonctions continues à support compact (pour la norme uniforme), proposition 29.19.
- (9) Les fonctions continues à support compact dans $L^2(I)$, théorème 27.68.
- (10) Les polynômes trigonométriques sont denses dans $L^p(S^1)$ pour $1 \leq p < \infty$. Deux démonstrations indépendantes par le théorème 28.8 et le théorème 27.102.

Les densités sont bien entendu utilisées pour prouver des formules sur un espace en sachant qu'elles sont vraies sur une partie dense. Mais également pour étendre une application définie seulement sur une partie dense. C'est par exemple ce qui est fait pour définir la trace γ_0 sur les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ en utilisant le théorème d'extension 17.127.

Comme presque tous les théorèmes importants, le théorème de Stone-Weierstrass possède de nombreuses formulations à divers degrés de généralité.

- Le lemme 12.440 le donne pour la racine carré.
- Le théorème 12.446 donne la densité des polynômes dans les fonctions continues sur un compact.
- Le théorème 12.443 est une généralisation qui donne la densité uniforme d'une sous-algèbre de $C(X, \mathbb{R})$ dès que X sépare les points.
- Le théorème 12.444 donne le même résultat pour la densité dans $C(X, \mathbb{C})$.
- Le lemme 28.1 est une version pour les polynômes trigonométriques.
- Le lemme 12.440 est un cas particulier du théorème 12.446, mais nous en donnons une démonstration indépendante afin d'isoler la preuve de la généralisation 12.444. Une version pour les polynômes trigonométriques sera donnée dans le lemme 28.1.

Le théorème de Stone-Weierstrass est utilisé, entre autres nombreuses choses, pour prouver la densité des polynômes trigonométriques dans les fonctions continues sur S^1 , voir la proposition 27.119.

THEMEooOXNQo6HFKCK35

Thème 35 : application réciproque

- (1) Définition 1.19.
- (2) Dans le cas des réels, des exemples sont donnés en 9.9.
- (3) Continuité, théorème de la bijection 12.53.
- (4) Continuité de la réciproque pour $f: K \rightarrow X$, lemme 7.277.
- (5) Si f est strictement monotone sur un intervalle, son inverse est continue, théorème de la bijection 12.53.

- (6) Théorème de la bijection 12.53 (qui contient aussi de la continuité).
- (7) Dérivabilité, proposition 12.202.
- (8) Une application continue est injective si et seulement si elle est strictement monotone, lemme 12.50.

THEMEooYCBUa3H7603g

Thème 36 : applications continues et bornées

- (1) Une application linéaire entre espaces vectoriels topologiques est continue si et seulement si elle est continue en 0. Proposition 7.223.
- (2) Application continue, définition 7.45.
- (3) Une application linéaire non continue : exemple 10.82 de $e_k \mapsto ke_k$. Les dérivées partielles sont calculées en (25.156).
- (4) La dérivation sur les polynômes (exemple 10.83) donne un autre exemple d'application linéaire non continue.
- (5) Une application linéaire est bornée si et seulement si elle est continue, proposition 10.81.
- (6) Une forme sesquilinéaire est bornée si et seulement si elle est continue, proposition 25.2.

THMooOCXT66W60CB7

Thème 37 : suite de Cauchy, espace complet

Nous parlons d'espaces topologiques complets. À ne pas confondre avec un espace mesuré complet, définition 14.68.

Quand nous parlons de suite de Cauchy dans les rationnels, ce sera la définition 1.481(1).

- (1) Corps complet : définition 1.481(3), espace métrique complet : définition 7.312.
- (2) L'image d'une suite de Cauchy est de Cauchy. Si (x_n) est de Cauchy, alors $(f(x_n))$ est de Cauchy quand f est une isométrie, lemme 17.131.
- (3) La définition 7.311 donne la notion de suite de Cauchy dans un espace métrique.
- (4) La définition 7.309 donne la notion de suite de τ -Cauchy dans un espace vectoriel topologique.
- (5) Deux espaces métriques (avec une distance) peuvent être isomorphes en tant qu'espaces topologiques, mais ne pas avoir les mêmes suites de Cauchy, exemple 7.316.
- (6) La proposition 7.321 donne l'équivalence entre les suites de Cauchy et les suites τ -Cauchy dans le cas des espaces vectoriels topologiques *normés*.
- (7) L'exemple 7.316 est un exemple pire que simplement une suite de Cauchy qui ne converge pas. Le problème de convergence de cette suite n'est pas simplement que la limite n'est pas dans l'espace ; c'est que la suite de Cauchy donnée ne convergerait même pas dans $\mathbb{R}$.
- (8) Le théorème 17.135 est un théorème de complétion d'un espace métrique.
- (9) Dans $\mathbb{R}$, une suite est convergente si et seulement si elle est de Cauchy, théorème 7.339(2).
- (10) Toute suite convergente dans un espace métrique est de Cauchy, proposition 7.322.

Quelques espaces qui sont complets sont listés ci-dessous. Attention : la complétude est bien une propriété de la métrique ; le même ensemble peut être complet pour une distance et pas pour une autre. Souvent, cependant la distance à considérer est donnée par le contexte.

(1) Les réels $\mathbb{R}$, théorème 7.339.	(4a) $(C_b^0(X, Y), \ \cdot\ _\infty)$
(2) Les complexes $\mathbb{C}$, proposition 7.341.	(4b) $(C_0^0(X, Y), \ \cdot\ _\infty)$
(3) Un espace vectoriel normé sur un corps complet est complet, proposition 7.345.	(4c) $(C_0^k(X, Y), \ \cdot\ _\infty)$
	sont complets.
(4) La proposition 12.383 donne quelques espaces complets. Soit X un espace topologique métrique, (Y, d) un espace métrique complet. Alors les espaces	(5) Le lemme 12.384 dit que $(C^0(A, B), \ \cdot\ _\infty)$ est complet dès que A est compact et B est complet.
	(6) L'espace $\mathcal{D}(K)$ est complet tant pour la

16. Seminorme, définition 7.380, et la topologie des seminormes est la définition 7.396.

topologie des seminormes¹⁶ que pour la topologie métrique (qui sont les mêmes).

C'est la proposition 30.27.

(7) L'espace $\mathcal{S}(\Omega)$ est complet et métrisable

par la proposition 30.78.

(8) L'espace $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ par le théorème 27.55.

La limite uniforme d'une suite de fonctions dérivables n'est pas spécialement dérivable. Même si les fonctions sont de classe C^∞ , la limite n'est pas spécialement mieux que continue. En effet, le théorème de Stone-Weierstrass 12.446 nous dit que les polynômes (qui sont C^∞) sont denses dans les fonctions continues sur un compact pour la norme uniforme. Vous ne pouvez donc pas espérer que $(C^p(X, Y), \|\cdot\|_\infty)$ soit complet en général.

Thème 38 : caractérisations séquentielles

THEMEooCaF4T5G638

continuité Des résultats de continuité séquentielle.

- (1) Fonction séquentiellement continue, définition 7.150. Dans un espace métrisable séparé, la continuité séquentielle est équivalente à la continuité, proposition 7.157.
- (2) Quand une topologie est donnée par un ensemble dénombrable de seminormes, il est métrisable, proposition 7.402.
- (3) La continuité implique la continuité séquentielle, proposition 7.146 et corolaire 7.187.
- (4) Une version spéciale pour $\mathbb{R}^m$ est donnée par le théorème 12.244.

fermeture Fermeture séquentielle, proposition 7.154.

compacité Un espace topologique séquentiellement compact : toute suite possède une sous-suite convergente, définition 7.114.

Thème 39 : valeurs propres, définie positive

THEMEooYEVLo6W6Q039

À propos de valeurs propres (1) Définition des valeurs propres d'une forme quadratique : définition 8.253.

- (2) Définition de valeur propre et vecteur propre pour un endomorphisme $f: V \rightarrow V$, définition 8.85.

À propos de choses définies positives (1) Une application bilinéaire est définie positive lorsque $g(u, u) \geq 0$ et $g(u, u) = 0$ si et seulement si $u = 0$ est la définition 8.123.

- (2) Un opérateur ou une matrice est défini positif si toutes ses valeurs propres sont positives, c'est la définition 8.229.
- (3) Pour une matrice symétrique, définie positive si et seulement si $\langle Ax, x \rangle > 0$ pour tout x . C'est le lemme 8.233.
- (4) Une application linéaire est définie positive si et seulement si sa matrice associée l'est. C'est la proposition 8.234.

Remarque : nous ne définissons pas la notion de matrice définie positive dans le cas d'une matrice non symétrique.

Thème 40 : norme matricielle, norme opérateur et rayon spectral

THEMEooOJJFo8W1S64D

Quelques définitions

- (1) Définition de la norme opérateur : définition 10.63.
- (2) Définition du rayon spectral 10.75.

La norme matricielle n'est rien d'autre que la norme opérateur de l'application linéaire donnée par la matrice.

- (1) Lien entre norme matricielle et rayon spectral, le théorème 12.122 assure que $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)}$.
- (2) Lien entre valeurs propres et norme opérateur : le lemme 12.123 pour les matrices symétriques strictement définies positives donne $\|A\|_2 = \lambda_{\max}$.
- (3) Pour une matrice diagonale, $\|D\|_2 = \max\{|\lambda_i|\}$, lemme 12.124.
- (4) Pour toute norme algébrique nous avons $\rho(A) \leq \|A\|$, proposition 12.116.

- (5) Dans le cadre du conditionnement de matrice. Voir en particulier la proposition 34.110 qui utilise le théorème 12.122.
- (6) Rayon spectral et convergence de méthode itérative, proposition 34.148.

Pour la norme opérateur nous avons les résultats suivants.

- (1) La majoration $\|Au\| \leq \|A\|\|u\|$ est le lemme 10.77.
- (2) Définition d'une algèbre : 1.449 et pour une norme d'algèbre : 10.74.
- (3) La norme opérateur est une norme d'algèbre : $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, lemme 10.80.
- (4) Pour des espaces vectoriels normés, être borné est équivalent à être continu : proposition 10.81.
- (5) Le lemme à propos d'exponentielle de matrice 15.168 donne :

$$\|e^{tA}\| \leq P(|t|) \sum_{i=1}^r e^{t \operatorname{Re}(\lambda_i)}.$$

La norme opérateur est utilisée pour donner une norme sur les produits tensoriels, définition 10.256.

Une norme matricielle donne une topologie. Il y a donc également des liens entre rayon spectral et convergence de série. Dans cette optique, pour les séries de matrices, voir le thème 41.

Notations :

- (1) $\mathcal{L}(E, F)$ est l'ensemble des applications linéaires $E \rightarrow F$.
- (2) $\mathcal{L}^0(E, F)$ est l'ensemble des applications linéaires continues $E \rightarrow F$ (par analogie avec C^0). Pour définir $\mathcal{L}^0(E, F)$ il faut que E et F soient des espaces vectoriels topologiques ; le plus souvent ce seront des espaces vectoriels normés.
- (3) $\operatorname{End}(E)$ est l'ensemble des applications linéaires $E \rightarrow E$.
- (4) $\operatorname{End}^0(E)$ est l'ensemble des applications linéaires continues $E \rightarrow E$.

THEMEooPQKDooTHAVOCFH

Thème 41 : série de matrices

- (1) Rayon spectral et norme opérateur : thème 40.
- (2) Exponentielle de matrices : thème 50.
- (3) Série entière de matrices : section 15.13.
- (4) Pour la série $\sum_k A^k = (1 - A)^{-1}$.
 - Pour un espace de Banach : proposition 10.331.
 - Pour les matrices nilpotentes : proposition 8.212.
 - En lien avec le rayon spectral (si et seulement si $\rho(A) < 1$) dans la proposition 15.164.
 - Le lemme 15.53 parle de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} z^{nk} = (1 - z^k)^{-1}$.

Cette série est utilisée entre autres dans la proposition 34.168 pour prouver qu'une M-matrice irréductible vérifie $A^{-1} > 0$.

DECooWTAIGBNROCFB

Thème 42 : décomposition de matrices

- (1) Décomposition de Bruhat, théorème 13.45.
- (2) Décomposition de Dunford, théorème 8.263.
- (3) Décomposition polaire 13.38 des matrices symétriques et la proposition 17.57 pour la régularité.

THEMEooSysCFHUAOC43

Thème 43 : systèmes d'équations linéaires

- Algorithme des facteurs invariants 4.120.
- La méthode du gradient à pas optimal permet de résoudre par itérations $Ax = b$ lorsque A est symétrique strictement définie positive. Il s'agit de minimiser une fonction bien choisie. Propositions 17.113 pour l'existence et 17.114 pour la méthode.

Thème 44 : réduction, diagonalisation Des résultats qui parlent diagonalisation

- (1) Définition d'un endomorphisme diagonalisable : 8.213.
- (2) Conditions équivalentes au fait d'être diagonalisable en termes de polynôme minimal, y compris la décomposition en espaces propres : théorème 8.218.
- (3) Diagonalisation simultanée 8.221, pseudo-diagonalisation simultanée 10.48.
- (4) Diagonalisation d'exponentielle 15.146 utilisant la décomposition de Dunford.
- (5) Décomposition polaire théorème 13.38. $M = SQ$, S est symétrique, réelle, définie positive, Q est orthogonale.
- (6) Décomposition de Dunford 8.263. $u = s + n$ où s est diagonalisable et n est nilpotent, $[s, n] = 0$.
- (7) Réduction de Jordan (bloc-diagonale) 8.293.
- (8) L'algorithme des facteurs invariants 4.120 donne $U = PDQ$ avec P et Q inversibles, D diagonale, sans hypothèse sur U . De plus les éléments de D forment une chaîne d'éléments qui se divisent l'un l'autre.

Le théorème spectral et ses variantes :

- (1) Théorème spectral, matrice symétrique, théorème 8.226. Via le lemme de Schur complexe 12.102.
- (2) Théorème spectral autoadjoint (c'est le même, mais vu sans matrices), théorème 10.16
- (3) Théorème spectral hermitien, lemme 10.28.
- (4) Théorème spectral, matrice normales, théorème 12.104.

Pour les résultats de décomposition dont une partie est diagonale, voir le thème 42 sur les décompositions. Réduction de quadriques :

- (1) Réduction de Gauss, théorème 8.240.

Trigonalisation.

- (1) Le lemme de Schur complexe 12.102 dit que toute matrice est unitairement équivalente à une matrice triangulaire supérieure.

Thème 45 : déterminant

- (1) Déterminant d'une matrice : définition 4.83.
- (2) Déterminant d'un endomorphisme 8.15.
- (3) Déterminant $\det_{\varphi}$ d'une application linéaire entre espaces différents, proposition 10.87.
- (4) Le lemme 10.5 donne la formule $\det(f) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \langle e_{\sigma(i)}, f(e_i) \rangle$.
- (5) Principales propriétés algébriques du déterminant : la proposition 8.16.
- (6) La formule $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ est la proposition 8.248 pour des matrices et la proposition 8.16(1) pour les applications linéaires.
- (7) Déterminant et manipulations de lignes et colonnes, section 4.3.11 et les propositions qui précèdent à partir du lemme 4.85 qui dit que $\det(A) = \det(A^t)$.
- (8) Les n -formes alternées forment un espace de dimension 1, proposition 8.9.
- (9) Déterminant d'une famille de vecteurs 8.10.
- (10) Calcul d'un déterminant de taille 2×2 : équation (4.107).
- (11) Interprétations géométriques
 - (11a) À propos d'orthogonalité, le déterminant est très lié au produit vectoriel en dimension 3. Et il le généralise en dimension supérieure.
 - (11a.i) Liaison au produit vectoriel (orthogonalité) dans la proposition 10.45.

(11a.ii) En particulier le lemme 10.46 nous dit comment un déterminant donne un vecteur orthogonal à une famille donnée de vecteurs.

(11b) Déterminant et aires, volumes

(11b.i) Déterminant et mesure de Lebesgue : théorème 14.272.

(11b.ii) Aire du parallélogramme : il y a la formule avec le produit vectoriel dans la proposition 18.56, mais l'aire proprement dite, avec une intégrale est dans la proposition 20.26.

(11b.iii) Volume du parallélépipède avec le produit mixte et le déterminant 3×3 , 18.57.

Tant que nous en sommes dans les interprétations géométriques, il faut lier déterminant, produit vectoriel, orthogonalité et mesure en notant que l'élément de volume lors de l'intégration en dimension 3 est donné par (20.211) : $dS = \|T_u \times T_v\|$ qui est la norme du produit vectoriel des vecteurs tangents au paramétrage.

Nous voyons dans l'équation (20.208) que l'élément de volume pour une partie de dimension n dans $\mathbb{R}^m$ (à l'occasion d'y intégrer une fonction) est donné par un déterminant mettant en jeu les vecteurs tangents du paramétrage.

(12) Le déterminant de Vandermonde est à la proposition 4.126. Il est utilisé à divers endroits :

(12a) Pour prouver que u est nilpotente si et seulement si $\text{Tr}(u^p) = 0$ pour tout p (lemme 8.210)

(12b) Pour prouver qu'un endomorphisme possédant $\dim(E)$ valeurs propres distinctes est cyclique (proposition 8.299).

(12c) Pour montrer qu'un polynôme ayant $n + 1$ racines a tout ses coefficients nuls (proposition 4.127), et donc que les monômes forment une base de l'espace des polynômes (proposition 4.128).

THEMOONMYKOTVWQPL6

Thème 46 : espaces de fonctions En ce qui concerne les densités, voir le thème 34.

(1) $C^\infty(A)$ est l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur A . Les éléments de $C^\infty(A)$ peuvent être à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$ selon le contexte.

(2) $\mathcal{D}(A)$ est l'ensemble des fonctions de classe C^∞ dont le support est un compact dans A .

Pour les ensembles $\mathcal{S}(A)$, $\mathcal{D}(A)$ et $L^p(A)$, les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{C}$. La raison est que, de toutes façons, le passage à la transformée de Fourier produit en général des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ même si les fonctions de départ sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Topologie Les espaces de fonctions sont souvent munis de topologies définies par des seminormes 17.

(1) La topologie des seminormes est la définition 7.380.

(2) La définition 30.14 donne les topologies sur $C^\infty(\Omega)$, $\mathcal{D}(K)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$.

(3) La topologie *-faible sur $\mathcal{D}'(\Omega)$ est donnée par la définition 30.30.

(4) $p_{K,m}(f) = \sum_{|\mu| \leq m} \|\partial^\mu f\|_K$ est une seminorme sur $C^\infty(\Omega)$, proposition 30.9.

L'espace $L^2([0, 2\pi])$ C'est un espace très important, entre autres parce qu'il est de Hilbert et est bien adapté à la transformée de Fourier.

(1) Un rappel de la construction en 27.104.

(2) Le produit scalaire 18 $\langle f, g \rangle$ est donné en (29.184) et la base trigonométrique est (29.185).

(3) La densité des polynômes trigonométriques dans $L^2(S^2)$ est le théorème 27.102 ou le théorème 28.8, au choix.

(4) Une conséquence de cette densité est que le système trigonométrique est une base hilbertienne 19 de L^2 par le lemme 29.47.

17. Définition 7.380.

18. Produit scalaire, définition 8.164.

19. Définition 25.27.

L'espace L^2 est discuté en analyse fonctionnelle, dans la section 27.7 et les suivantes parce que l'étude de L^2 utilise entre autres l'inégalité de Hölder 27.39.

Le fait que L^2 soit un espace de Hilbert est utilisé dans la preuve du théorème de représentation de Riesz 27.185.

Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré, alors $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de Banach ; c'est le théorème de Riesz-Fischer 27.56.

THEMEooFonctionHilbert647

Thème 47 : fonctions Lipschitz

- (1) Définition : 12.342.
- (2) La notion de Lipschitz est utilisée pour définir la stabilité d'un problème, définition 34.26.
- (3) Toute fonction Lipschitz est uniformément continue, proposition 12.347.

THEMEooSuiteS648

Thème 48 : suites et séries

Opérations sur les suites (1) Les limites $x_k + y_k \rightarrow x + y$ et $\lambda x_k \rightarrow \lambda x$ sont la proposition 7.259.

- (2) La limite $x_k y_k \rightarrow xy$ est la proposition 9.28.

Suites La proposition 9.27 donne une caractérisation de limite de suite dans un espace vectoriel normé.

- (1) Les suites adjacentes, c'est la définition 9.40.
- (2) Les séries alternées, théorème 10.163. Il s'agit de dire que $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ converge quand a_k est décroissante et tend vers zéro.
- (3) Le concept de suite adjacente sert à étudier la série de Taylor de $\ln(x+1)$, voir le lemme 15.109 et ce qui l'entoure.
- (4) La définition de la convergence absolue est la définition 10.109.
- (5) Une suite réelle croissante et majorée converge, proposition 9.36.
- (6) Toute suite dans un compact admet une sous-suite convergente, théorème 7.342.
- (7) Pour tout réel, il existe une suite croissante de rationnels qui y converge, proposition 9.17.

Produit de Cauchy (1) Dans une algèbre normée, proposition 10.151,

- (2) Dans $\mathbb{C}$, théorème 15.27.

Calcul de suites (1) Somme : $x_n + y_n \rightarrow x + y$ est la proposition 9.29.

Série Les séries sont en général dans la section 10.7.

- (1) Quelques séries usuelles en 10.10.3 : série harmonique, géométrique, de Riemann, et la mythique arithmético-géométrique.
 - (1a) La série est associative : $\sum_k (a_k + b_k) = \sum_k a_k + \sum_k b_k$. C'est la proposition 10.146.
 - (1b) La série harmonique diverge : $\sum_k \frac{1}{k} = \infty$, exemple 10.157.
 - (1c) La série géométrique : $\sum_{k=0}^N q^k = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$, proposition 10.159.
 - (1d) Une autre cool série : $\sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)} = \frac{N}{N+1}$, lemme 10.162.
- (2) La série de Riemann $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^\alpha$ (définition 15.133) converge ou non selon les valeurs de α . Proposition 14.301 pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et 15.135 pour $\alpha \in \mathbb{C}$.
- (3) Critère des séries alternées, théorème 10.163.
- (4) Convergence d'une série implique convergence vers zéro du terme général, proposition 10.112.
- (5) Dans une algèbre normée : $(\sum_{k=0}^{\infty} a_k)b = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k b)$, proposition 10.150.
- (6) Produit de Cauchy : théorème 15.27 et proposition 10.151.

Sommes infinies En ce qui concerne les sommes finies, la notation $\sum_{i=1}^N$ est définie en 1.156. Pour permuter les termes d'une somme avec un élément du groupe symétrique, nous avons la proposition 1.297.

Voici quelques résultats à propos de sommes infinies.

- (1) Une somme indexée par un ensemble quelconque est la définition 10.118.
- (2) La proposition 10.122 donne une caractérisation pour le sommes de réels positifs.
- (3) La définition de la somme d'une infinité de termes est donnée par la définition 10.102.
- (4) Une somme de termes positifs indexée par un ensemble indénombrable est toujours infinie par le lemme 10.128.
- (5) si la série converge, on peut regrouper ses termes sans modifier la convergence ni la somme (associativité); pour les sommes infinies l'associativité et la commutativité dans une série sont perdues. Néanmoins, il subsiste que
 - (5a) si la série converge absolument, on peut modifier l'ordre des termes sans modifier la convergence ni la somme (commutativité, proposition 10.115).
- (6) Permuter une somme infinie avec une application linéaire : $f(\sum_{i \in I} v_i) = \sum_{i \in I} f(v_i)$, c'est la proposition 10.133.

Série entières (1) Rayon de convergence, définition 15.12.

- (2) Critère de Hadamard, théorème 15.39. Il donne le rayon de convergence $1/R = \limsup \sqrt[k]{|a_k|}$ ou $1/R = \lim_{k \rightarrow \infty} |a_{k+1}/a_k|$.
- (3) Convergence absolue à l'intérieur du rayon de convergence, lemme d'Abel 15.18.
- (4) La fonction définie par la série entière $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est holomorphe dans son disque de convergence par la proposition 15.48.
- (5) La série entière pour $\frac{1}{1-z^k}$, pour $\frac{1}{\omega-z}$ et pour $\frac{1}{(\omega-z)^k}$ sont dans le lemme 15.53.
- (6) Les séries entières se généralisent sur les espaces de Banache en séries de puissances, définition 12.464.

THEMEooSuite9H6W69G49

Thème 49 : suite de fonctions

- (1) Une limite uniforme de fonctions continues est continue, proposition 12.382.
- (2) Sous certaines hypothèses, si $f_i \rightarrow f$, alors $f'_i \rightarrow f'$, théorème 12.398.
- (3) Si les f_k sont continues et si la convergence $\sum_k f_k$ est uniforme, alors la somme est continue, théorème 12.394.

THEMEooKXSG6BF3QNG50

Thème 50 : exponentielle Toutes les exponentielles sont définies par la série

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

tant que la somme a un sens.

Réels Voici le plan que nous suivons dans le Frido :

- L'exponentielle est définie par sa série en 15.66.
- Nous démontrons qu'elle vérifie l'équation différentielle $y' = y$, $y(0) = 1$ (théorème 15.84).
- L'équation différentielle $y' = \lambda y$ est dans la proposition 15.88.
- Nous démontrons l'unicité de la solution à cette équation différentielle.
- Nous démontrons qu'elle est égale à $x \mapsto y(1)^x$. Cela donne la définition du nombre e comme valant $y(1)$.
- Nous définissons le logarithme comme l'application réciproque de l'exponentielle (définition 15.91).

- Les fonctions trigonométriques (sinus et cosinus) sont définies par leurs séries. Il est alors montré que $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ (lemme 18.11).

Propriétés

- La formule $a^{-x} = 1/a^x$ est la proposition 12.422(3).
- $\exp(x) = e^x$, proposition 15.87.
- Nous avons l'encadrement $2.5 < e < 3$, lemme 15.89.
- Le nombre e est irrationnel, proposition 15.90.

Complexes (1) La définition de $\exp(a + ib)$ est la définition 15.66.

- (2) Les principales propriétés, dont $e^{z+w} = e^z e^w$, sont dans la proposition 18.9.
- (3) Nous avons $e^{ix} = e^{iy}$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = x + 2k\pi$, corolaire 18.25.
- (4) Le fait que $e^{i\theta}$ donne tous les nombres complexes de norme 1 est la proposition 18.62(1).
- (5) Le groupe des racines de l'unité est donné par l'équation (19.1).

Algèbre normée commutative Pour la définition c'est la proposition 15.66 et pour la régularité C^∞ c'est la proposition 15.71.

Idem non commutatif Il y a une tentative de théorème 15.72, mais c'est principalement pour les matrices qu'il y a des résultats.

Matrices De nombreux résultats sont disponibles pour les exponentielles de matrices.

- (1) $e^{sA} e^{tA} = e^{(s+t)A}$, proposition 15.76.
- (2) Si A est une matrice, alors $(e^{tA})'(u) = A e^{uA}$, proposition 15.78.
- (3) Les sections 10.15 et 15.5.3 parlent d'exponentielle de matrices.
- (4) L'exponentielle donne lieu à une fonction de classe C^∞ , proposition 15.165.
- (5) Le lemme à propos d'exponentielle de matrice 15.168 donne :

$$\|e^{tA}\| \leq P(|t|) \sum_{i=1}^r e^{t \operatorname{Re}(\lambda_i)}.$$

- (6) La proposition 15.146 : si $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ a un polynôme caractéristique scindé, alors A est diagonalisable si et seulement si e^A est diagonalisable.
- (7) La section 15.13.3 parle des fonctions exponentielle et logarithme pour les matrices. Entre autres la dérivation et les séries.
- (8) Pour résoudre des équations différentielles linéaires : sous-section 32.6.1.
- (9) La proposition 15.145 dit que l'exponentielle est surjective sur $\operatorname{GL}(n, \mathbb{C})$.
- (10) La proposition 10.334 : si u est un endomorphisme, alors $\exp(u)$ est un polynôme en u .
- (11) Calcul effectif : sous-section 15.13.4.
- (12) Proposition 13.29 : si $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ alors $e^{\operatorname{Tr}(A)} = \det(e^A)$.
- (13) Les séries entières de matrices sont traitées autour de la proposition 15.162.

Paramétrisation du cercle (1) La proposition 18.62 parle des propriétés de

$$\begin{aligned} \varphi:]0, 2\pi[&\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto e^{it}. \end{aligned} \tag{-1.3}$$

Thème 51 : logarithme

THEME001644F0656

- (1) Le logarithme pour les réels strictement positifs $\ln:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est donné en la définition 15.91 ; c'est l'application réciproque de $\exp$.
- (2) Les principales propriétés sont dans la proposition 15.94 : $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ etc.
- (3) Dérivée : $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, proposition 15.93.

(4) La proposition 15.110 donne la série

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k. \quad (-1.4)$$

(5) L'exemple 20.152 donne l'encadrement $0.644 \leq \ln(2) \leq 0.846$.

(6) La proposition 15.145 dit que toute matrice complexe admet un logarithme. En particulier une série explicite est donnée pour le logarithme d'un bloc de Jordan ²⁰.

(7) Sur les complexes, le logarithme $\ln: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ est la définition 26.30. Attention : ce n'est pas la seule définition possible.

(8) La série harmonique diverge à vitesse logarithmique, et la série des inverses des nombres premiers, c'est encore plus lent : théorème 15.129.

(9) Détermination du logarithme le long d'un chemin dans $\mathbb{C}$, définition 26.46.

(10) Un logarithme continu d'une fonction, définition 26.45.

(11) Théorème de Borsuk 26.48 : il y a toujours un logarithme continu le long d'un chemin homotope à une constante (et il y a même équivalence avec admettre une extension sur $\mathbb{C}^*$).

(12) Si $z \in \mathbb{C}$, nous avons $\int \frac{1}{x+z} dx = \ln(x+z)$, proposition 26.43.

(13) La proposition 26.59 dit qu'une application f a un logarithme continu si et seulement si $\text{Ind}(f \circ \gamma, 0) = 0$.

THEME00BSBL6BMT4QjH2

Thème 52 : fonction puissance Il y a beaucoup de choses à dire...

Définition Nous considérons, pour $a > 0$, la fonction $g_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $g_a(x) = a^x$. La définition de cette fonction se fait en de nombreuses étapes.

- (1) a^n pour $n \in \mathbb{N}$ en la définition 1.333.
- (2) a^n pour $n \in \mathbb{Z}$ en la définition 12.402.
- (3) $a^{1/n}$ pour $n \in \mathbb{Z}$ en la définition 12.405.
- (4) a^q pour $q \in \mathbb{Q}$ en la définition 12.405.
- (5) $\sqrt[n]{x}$ en la définition 12.407.
- (6) La fonction g_a est Cauchy-continue sur $\mathbb{Q}$, c'est la proposition 12.419.
- (7) a^x pour $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ en la définition 12.421.
- (8) a^z pour $a > 0$ et $z \in \mathbb{C}$ en la définition 18.5.

Quelques propriétés Quelques propriétés.

- (1) Si b, m sont des entiers, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $b^n > m$, proposition 1.335.
- (2) Pour tout $q \in \mathbb{Q}$, il y a un $\sqrt[q]{q}$ dans $\mathbb{R}$, proposition 1.581.
- (3) Pour $a > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$ nous avons $a^x a^y = a^{x+y}$, proposition 12.422.
- (4) Nous avons $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$, proposition 12.433.
- (5) Si $a > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$ nous avons $(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}$ par la proposition 12.432.
- (6) Si $\alpha > 0$, alors $x \mapsto x^\alpha$ est strictement croissante pour $x \geq 0$, proposition 12.427.
- (7) La formule $a^{-x} = 1/a^x$ est la proposition 12.422(3).
- (8) La fonction puissance $g_a(x) = a^x$ est continue, proposition 12.422.

Croissance (1) La fonction puissance $f_\alpha(x) = x^\alpha$ est strictement croissante pour les $x > 0$, proposition 12.427

- (2) La fonction puissance $g_a(x) = a^x$ est strictement croissante, proposition 12.422.
- (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha = \infty$, proposition 12.434.

Continuité, Dérivation Comme toutes les choses sur la fonction puissance, les preuves sont assez différentes selon que l'on parle de a^x ou de x^a .

20. Jordan, théorème 8.293.

- (1) La fonction $f_\alpha(x) = x^\alpha$ est continue, proposition 12.431.
- (2) La fonction a^x est dérivable et sa dérivée vérifie $g'_a(x) = g_a(x)g'_a(0)$, proposition 12.451.
- (3) La formule de dérivation pour $x \mapsto x^q$ avec $q \in \mathbb{Q}$ est la proposition 12.461.
- (4) La dérivation de $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ est la proposition 14.295. Si elle est tellement loin, c'est parce qu'elle nécessite de permuter une limite de fonctions avec une dérivée.
- (5) Pour la formule générale de dérivation de $x \mapsto a^x$ demande de savoir les logarithmes (proposition 15.103).

L'équation fonctionnelle L'exponentielle et plus généralement la fonction puissance $g_a(x) = a^x$ peut être introduite au moyen d'une équation fonctionnelle au lieu de l'équation différentielle usuelle. Cette fameuse équation fonctionnelle est

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad (-1.5)$$

en la définition 12.453.

- (1) L'équivalence entre l'équation fonctionnelle et l'équation différentielle est donnée par la proposition 12.459.
- (2) La fonction $g_a(x) = a^x$ vérifie l'équation fonctionnelle $g_a(x+y) = g_a(x)g_a(y)$ et les conséquences. C'est la définition 12.453 et les choses qui suivent.
- (3) L'équation fonctionnelle pour une fonction continue $f: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ est traitée dans la proposition 12.463.

Une définition alternative de la fonction puissance serait de poser directement

$$a^x = e^{x \ln(a)}.$$

De là les propriétés se déduisent facilement. Dans cette approche, les choses se mettent dans l'ordre suivant :

- Définir $\exp(x)$ par sa série pour tout x .
- Démontrer que $\exp(q) = \exp(1)^q$ pour tout rationnel q (première partie de la proposition 15.87).
- Définir $e = \exp(1)$.
- Définir, pour x irrationnel, $a^x = \exp(x \ln(a))$.
- Prouver que $e^x = \exp(x)$ pour tout x .

Thème 53 : sommation finie et infinie La définition du symbole $\sum_{i \in I}$ se fait en trois étapes et deux demi, chacune se basant sur la précédente.

- (1) Si $(A, +)$ est un ensemble avec une loi de composition interne, $\sum_{i=0}^n a_i$ est en 1.156.
- (2) Si I est fini et si est à valeur dans un groupe commutatif, $\sum_{i \in I} f(i)$ est 1.296.
- (3) Enfin si I est un ensemble quelconque, la définition 10.118 introduit la notion de famille sommable dans un espace vectoriel normé.
- (4) Si (a_k) est une suite dans un espace vectoriel normé, la somme $\sum_{k=0}^\infty a_k$ est avec les sommes partielles dans la définition 10.102.
- (5) La somme au sens de Cesàro est la somme des moyennes partielles, définition 10.164.

Notez que $\sum_{k=0}^\infty a_k$ n'est pas un cas particulier de $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k$. Une différence de taille entre les deux est que pour que $\sum_{k=0}^\infty a_k$ existe, il suffit que les a_k puissent être sommés dans cet ordre. À l'inverse pour que $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k$ existe, il faut que l'ordre de sommation puisse être arbitraire.

Si vous voulez sommer des séries encore moins convergentes, vous pouvez avoir envie d'utiliser la supersomme[2], ou la η -régularisation[3].

Thème 54 : polynôme de Taylor

Énoncés Il existe de nombreux énoncés du théorème de Taylor, et en particulier beaucoup de formules pour le reste.

- (1) Énoncé : théorème 12.498.
- (2) Une majoration du reste est dans le théorème 15.59
- (3) De classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$, proposition 12.505.
- (4) Avec un reste donné par un point dans $]x, a[$, proposition 12.509.
- (5) Avec reste intégral, théorème 20.149, et théorème 20.147 pour le cas simple $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- (6) Le polynôme de Taylor généralise à l'utilisation de toutes les dérivées disponibles le résultat de développement limité donné par la proposition 10.280.
- (7) Pour les fonctions holomorphes, il y a le théorème 26.76 qui donne une série de Taylor sur un disque de convergence.

Utilisation Des polynômes de Taylor sont utilisés pour démontrer des théorèmes par-ci par-là.

- (1) Il est utilisé pour justifier la méthode de Newton autour de l'équation (34.95).
- (2) On utilise pas mal de Taylor dans les résultats liant extrémum et différentielle/hessienne. Par exemple la proposition 17.70.

Quelques développements Voici quelques développements limités à savoir. Ils sont calculables en utilisant la formule de Taylor-Young (proposition 12.514).

$$\begin{aligned}
 e^x &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + x^n \alpha(x) && \text{ordre } n, \text{ proposition 15.105} \\
 \cos(x) &= \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + x^{2p+1} \alpha(x) && \text{ordre } 2p+1, \text{ proposition 18.76} \\
 \sin(x) &= \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2p+2} \alpha(x) && \text{ordre } 2p+1, \text{ proposition 18.76} \\
 \ln(1+x) &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + \alpha(x) x^n && \text{ordre } n, \text{ proposition 15.108} \\
 \ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k && \text{exact proposition 15.110} \\
 \ln(2) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} && \text{exact proposition 15.110} \\
 (1+x)^l &= \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} x^k && \text{exact si } l \text{ est entier.} \\
 (1+x)^l &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{l(l-1)\dots(l-k+1)}{k!} x^k + x^n \alpha(x) && \text{ordre } n.
 \end{aligned}$$

Dans toutes ces formules, la fonction $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie $\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = 0$.

Le développement limité en 0 d'une fonction paire ne contient que les puissances de x d'exposant pair. Voir comme exemple le développement de la fonction cosinus.

Thème 55 : formule des accroissements finis Il en existe plusieurs formes :

- (1) Une version adaptée aux espaces normés de dimension finie, avec hypothèse de différentiabilité, est le théorème 12.340. La formule $\|f(b) - f(a)\|_n \leq \sup_{x \in [a,b]} \|df_x\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)} \|b - a\|_m$.
- (2) Une version pour les dérivées partielles est dans le lemme 12.262. Pour rappel, la définition de la dérivation partielle est 10.267.

(3) La formule $f(a + \epsilon e_i) = f(a) + \epsilon(\partial_i f)(a) + \epsilon\alpha(\epsilon)$, proposition 12.263.

(4) L'existence de $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (-1.7)$$

est le théorème des accroissements finis proprement dit. C'est le théorème 12.216.

(5) Il existe un c entre a et b tel que

$$f(b) = f(a) + (b - a)(\partial_\beta f)(c) \quad (-1.8)$$

où $\beta = b - a$ est la proposition 12.261.

(6) La formule $f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \alpha(h)$ pour une fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en le théorème 10.280.

(7) Une généralisation pour les intervalles non bornés : théorème 12.218.

(8) Espaces vectoriels normés, théorème 10.324

(9) La formule

$$f(a + h) = f(a) = df_a(h) + \alpha(h) \quad (-1.9)$$

est le lemme 10.298.

THEMEooDIFF@656

Thème 56 : dérivation

(1) Définition de la dérivée, définition 10.268.

(2) Dérivée de fonction composée, proposition 12.205 dans le cas réel.

(3) Dérivée partielle de fonction composée, théorème 12.327.

(4) La formule $(f \circ \gamma)'(a) = (\nabla f)(\gamma(a)) \cdot \gamma'(a)$, corolaire 12.328.

(5) $f(\lambda x)' = \lambda f'(x)$, lemme 12.199.

(6) Toute fonction dérivable est continue, 12.187.

THEMEooDIFF@656

Thème 57 : différentielle

Généralités (1) La différentielle est définie en général pour des espaces vectoriels normés par la proposition 10.266

(2) Différentielle et dérivées partielles continues, théorème 12.320.

(3) Différentielle d'une application linéaire, lemme 10.294.

(4) Nous parlons de différentielle en dimension finie et donnons une interprétation géométrique en 12.25.1.

(5) La recherche d'extrémums d'une fonction sur $\mathbb{R}^n$ passe par la seconde différentielle, proposition 17.70.

(6) Lien entre différentielle seconde (hessienne) et convexité en la proposition 17.97 et le corolaire 17.98.

(7) La différentielle est liée aux dérivées partielles par les formules données au lemme 12.280

$$df_a(u) = \frac{\partial f}{\partial u}(a) = \frac{d}{dt} \left[f(a + tu) \right]_{t=0} = \sum_{i=1}^m u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \nabla f(a) \cdot u. \quad (-1.10)$$

(8) La matrice de df en a est $(df_a)_{ij} = df_a(e_j) \cdot e_i = (\partial_j f_i)(a)$, proposition 12.281.

Différentielle et dérivées partielles À propos de fonctions de classe C^k , définition 10.284.

(1) Une fonction est de classe C^1 si et seulement si ses dérivées partielles sont continues, théorème 12.320.

(2) Une fonction est C^n si et seulement si ses dérivées partielles sont C^{n-1} , c'est le théorème 12.356.

(3) Différentiabilité en un seul point si les dérivées partielles sont continues en ce point : proposition 12.318.

Fonctions composées À propos de la formule $d(f \circ g)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$, il y a deux théorèmes très semblables.

- (1) Le théorème 10.303 insiste sur des hypothèses locales.
- (2) Le théorème 10.304 fait des hypothèses plus globales pour s'alléger l'esprit, mais fait une récurrence pour dire que $f \circ g$ est de classe C^r si f et g le sont.
- (3) Dans le cas d'espaces vectoriels normés de dimension finie, proposition 10.307.
- (4) Composée avec une application linéaire, propositions 10.306 et 10.305.

Applications à valeurs dans les endomorphismes (1) $A: U \rightarrow \text{End}(V, W)$ est C^p si ses composantes le sont, proposition 12.361.

- (2) $A: U \rightarrow \text{End}(V, W)$ est C^p si $s \mapsto A(s)v$ est C^p pour tout v , proposition 12.361

Thème 58 : équations différentielles L'utilisation des théorèmes de point fixe pour l'existence de solutions à des équations différentielles est fait dans le chapitre sur les points fixes.

- (1) Le théorème de Schauder a pour conséquence le théorème de Cauchy-Arzela 20.34 pour les équations différentielles.
- (2) Le théorème de Schauder 20.33 permet de démontrer une version du théorème de Cauchy-Lipschitz (théorème 17.39) sans la condition Lipschitz
- (3) Le théorème de Cauchy-Lipschitz 17.39 est utilisé à plusieurs endroits :
 - Pour calculer la transformée de Fourier de $e^{-x^2/2}$ dans le lemme 29.24.
- (4) Théorème de stabilité de Lyapunov 32.46.
- (5) Le système proie-prédateur de Lotka-Volterra 32.47
- (6) Équation de Schrödinger, théorème 32.54.
- (7) L'équation $(x - x_0)^\alpha u = 0$ pour $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, théorème 30.50.
- (8) La proposition 32.49 donne un résultat sur $y'' + qy = 0$ à partir d'une hypothèse de croissance.
- (9) Équation de Hill $y'' + qy = 0$, proposition 32.51.

Thème 59 : convexité

Fonctions convexes L'essentiel des résultats sur les fonctions convexes sont dans la section 17.12.

On a surtout :

- (1) Définition des fonctions convexes : 17.76 et 17.94 en dimension supérieure.
- (2) En termes de différentielles, 17.95 pour la différentielle première et 17.98 pour la hessienne.
- (3) Une courbe paramétrée convexe est la définition 21.90.
- (4) L'enveloppe convexe d'une courbe fermée simple et convexe : 21.92.
- (5) Courbure et convexité d'une courbe paramétrée : section 21.13.4.
- (6) Une courbe paramétrée convexe est localement le graphe d'une fonction convexe par le lemme 21.91.
- (7) La convexité est utilisée dans la méthode du gradient à pas optimal de la proposition 17.114.
- (8) La fonction $t \mapsto t^p$ est strictement convexe sur les positifs dans le lemme 17.87.
- (9) Une inégalité sympa : $a^r + b^r \leq (a + b)^r \leq 2^{r-1}(a^r + b^r)$ pour $a, b > 0$ et $r > 1$, lemme 27.134.

En termes de parties convexes, on a :

Parties convexes (1) Définition 7.208 d'une partie convexe d'un espace vectoriel.

- (2) Une boule est convexe, proposition 7.254.
- (3) Un polygone convexe est défini en 18.167, et les racines de l'unité forment un polygone convexe par la proposition 18.168.

THEME60Hilbert

Thème 60 : espaces de Hilbert, base hilbertienne Beaucoup de choses concernant les espaces L^2 , et en particulier la base trigonométrique sont dans le thème 46.

- (1) Toute partie orthonormale d'un espace de Hilbert est libre, proposition 25.24.
- (2) Tout espace de Hilbert possède une base hilbertienne, proposition 25.37.
- (3) Unicité de la décomposition dans une base hilbertienne, proposition 25.38.

THEME61AnalyseComplexe

Thème 61 : analyse complexe, fonctions holomorphes

- (1) Le lien entre différentielle et dérivée complexe est donné par les équations

$$df_{z_0}(z) = f'(z_0)z = (\partial_z f)(z_0)z \quad (-1.11)$$

par (12.911) et la proposition 26.5. Cela se résume par la formulation lapidaire $f' = \partial_z f$.

- (2) Série de Laurent $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$, théorème 29.58.

THEME62Permuter des limites

Thème 62 : permuter des limites

Permuter des dérivées partielles Pour permuter les dérivées partielles, la clef est d'être C^k .

- (1) Si une fonction est de classe C^2 , le théorème de Schwarz 12.370 dit que

$$\partial_k \partial_l f = \partial_l \partial_k f. \quad (-1.12)$$

- (2) Pour une fonction de classe C^m , on peut permuter m dérivées partielles avec la proposition 12.379.

Fonctions définies par une intégrale Les théorèmes sur les fonctions définies par une intégrale, section 17.4. Nous avons entre autres

- (1) $\partial_i \int_B f = \int_B \partial_i f$, avec B compact, proposition 17.24.
- (2) Si f est majorée par une fonction ne dépendant pas de x , nous avons le théorème 17.15 pour la continuité de $x \mapsto \int_\Omega f(x, \omega) d\mu(\omega)$.
- (3) Pour la fonction $F(x) = \int_\Omega f(x, \omega) d\mu(\omega)$, nous avons la dérivation sous l'intégrale par la formule de Leibniz

$$F'(a) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}(a, \omega) d\mu(\omega) \quad (-1.13)$$

démontrée en le théorème 17.19 ou 17.23.

Des variations avec des dérivées partielles et des différentielles sont dans 17.24 et dans 17.25.

- (4) Si $f: \mathbb{C} \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe (pour $\mathbb{C}$), alors F est holomorphe et

$$F'(z) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial z}(z, \omega) d\mu(\omega). \quad (-1.14)$$

- (5) Pour des dérivées partielles multiples, nous avons la formule

$$(\partial^\alpha F)(x) = \int_\Omega (\partial^\alpha f_\omega)(a) d\mu(\omega) \quad (-1.15)$$

dans la proposition 17.21.

- (6) Si l'intégrale est uniformément convergente, nous avons le théorème 17.16 qui donne la continuité de $F(x) = \int_\Omega f(x, \omega) d\mu(\omega)$.
- (7) Pour dériver $\int_B g(t, z) dt$ avec B compact dans $\mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, il faut aller voir la proposition 26.64.
- (8) En ce qui concerne le x dans la borne, le théorème 14.287 lie primitive et intégrale en montrant que $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f (sous certaines conditions). Le théorème fondamental de l'analyse 14.288 en est une conséquence.

(9) Si T est une **distribution**, alors nous avons

$$T(x \mapsto (\partial_y^\alpha \phi)(x, y_0)) = \partial_y^\alpha \left(T(x \mapsto \phi(x, y)) \right)_{y=y_0}. \quad (-1.16)$$

C'est la proposition 30.54.

Dérivée et intégrale (1) Dériver $\int_\Omega f(x, \omega) d\omega$, théorème 17.23.

Limite et intégrale (1) Théorème de la convergence monotone, théorème 14.178.

(2) $\int \sum_n f_n = \sum_n \int f_n$ dans le corolaire 14.181.

Fubini Le théorème de Fubini permet non seulement de permuter des intégrales, mais également des sommes parce que ces dernières peuvent être vues comme des intégrales sur $\mathbb{N}$ muni de la tribu des parties et de la mesure de comptage²¹. Nous utilisons cette technique pour permuter une somme et une intégrale dans l'équation (26.309).

L'utilisation de Fubini pour permuter des intégrales (sur deux variables différentes) ou deux sommes est expliquée dans 14.306.

C'est par exemple utilisé pour permuter deux sommes dans le cadre des chaînes de Markov en 38.8.

- le théorème de Fubini-Tonelli 14.302 demande que la fonction soit mesurable et positive ;
- le théorème de Fubini 14.305 demande que la fonction soit intégrable (mais pas spécialement positive) ;
- le corolaire 14.304 demande l'intégrabilité de la valeur absolue des intégrales partielles pour déduire que la fonction elle-même est intégrable.

Limite et dérivées, différentielle (1) Permuter limite et dérivée dans le cas $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, théorème 12.398.

(2) Permuter limite et dérivées partielles, théorème 12.401.

(3) Permuter limite et différentielle, théorème 15.9.

Quelques remarques sur les techniques de démonstration.

- (1) Le résultat fondamental 12.398 est démontré sans recourir à des intégrales. Une preuve alternative, plus courte, avec des intégrales est donnée en 14.327.
- (2) Permuter limite et dérivée partielle, théorème 12.401.
- (3) Permuter série et différentielle, théorème 15.9.

Somme et dérivée Permuter somme et différentielle, théorème 15.9.

Limite et mesure Une mesure n'est pas toujours une limite, mais la définition d'une mesure positive sur un espace mesurable parle de permuter limite et mesure : définition 14.18(2).

Norme et intégrale L'inégalité de Minkowski (27.183) permute la norme L^p et l'intégrale. Il n'y a cependant pas vraiment permutation, mais inégalité. C'est déjà mieux que rien.

Distribution et intégrale C'est le théorème 30.55.

Pour les fonctions holomorphes (1) Une série convergent uniformément de fonctions holomorphes est holomorphe, proposition 26.84.

Régularité dans les bornes.

- Le corolaire 27.61 dit que $\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^{a+h} f = 0$.
- La proposition 27.62 dit que $x \mapsto \int_a^x f$ est continue.

Thème 63 : déduire la nullité d'une fonction depuis son intégrale Des résultats qui disent que si $\int f = 0$ c'est que $f = 0$ dans un sens ou dans un autre.

(1) Il y a le lemme 14.199 qui dit ça.

(2) Un lemme du genre dans L^2 existe aussi pour $\int f \varphi = 0$ pour tout φ . C'est le lemme 27.89.

21. Mesure de comptage, définition 14.264.

- (3) En utilisant le théorème de représentation de Riesz, on peut prouver que $\int_{\Omega} f\chi = 0$ implique $f = 0$ pour tout $f \in L^p$, proposition 27.190.
- (4) Si $\int f\chi = 0$ pour tout χ à support compact alors $f = 0$ presque partout, proposition 29.28.
- (5) Si $\int_a^x f = 0$ pour tout x , alors $f = 0$, proposition 29.29.
- (6) La proposition 27.26 donne $f = 0$ dans L^p lorsque $\int fg = 0$ pour tout $g \in L^q$.
- (7) Une fonction $h \in C_c^\infty(I)$ admet une primitive dans $C_c^\infty(I)$ si et seulement si $\int_I h = 0$. Théorème 17.2.

Dans le même ordre d'idées, si $f > 0$ et si $\mu(X) > 0$ alors $\int_X f > 0$ par le lemme 14.201.

THEMEooInver3H710C64

Thème 64 : inversion locale, fonction implicite

- (1) Théorème d'inversion locale dans un Banach : théorème 17.47.
- (2) Inversion locale version analytique : théorème 12.481.
- (3) Fonction implicite dans un Banach : théorème 17.48.
- (4) Utilisé pour montrer que le flot d'une équation différentielle est un C^p -difféomorphisme local, voir 32.39.
- (5) Pour le théorème de Von Neumann 17.61.

THEMEooWAYJo4U56C65

Thème 65 : points fixes

- (1) Il y a plusieurs théorèmes de points fixes.

Théorème de Picard 17.34 donne un point fixe comme limite d'itérés d'une fonction Lipschitz. Il aura pour conséquence le théorème de Cauchy-Lipschitz 17.39, l'équation de Fredholm, théorème 17.38 et le théorème d'inversion locale dans le cas des espaces de Banach 17.47.

Théorème de Brouwer qui donne un point fixe pour une application d'une boule vers elle-même. Nous allons donner plusieurs versions et preuves.

- (1a) Dans $\mathbb{R}^n$ en version C^∞ via le théorème de Stokes, proposition 20.30.
- (1b) Dans $\mathbb{R}^n$ en version continue, en s'appuyant sur le cas C^∞ et en faisant un passage à la limite, théorème 20.32.
- (1c) Dans $\mathbb{R}^2$ via l'homotopie, théorème 26.66. Oui, c'est très loin. Et c'est normal parce que ça va utiliser la formule de l'indice qui est de l'analyse complexe²².

Théorème de Markov-Kakutani 20.36 qui donne un point fixe à une application affine continue d'un convexe fermé borné dans lui-même.

Théorème de Schauder C'est une version valable en dimension infinie du théorème de Brouwer. Théorème 20.33

- (2) Pour les équations différentielles
 - (2a) Le théorème de Schauder a pour conséquence le théorème de Cauchy-Arzela 20.34 pour les équations différentielles.
 - (2b) Le théorème de Schauder 20.33 permet de démontrer une version du théorème de Cauchy-Lipschitz (théorème 17.39) sans la condition Lipschitz, mais alors sans unicité de la solution. Notons que de ce point de vue nous sommes dans la même situation que la différence entre le théorème de Brouwer et celui de Picard : hors hypothèse de type « contraction », point d'unicité.
- (3) En calcul numérique
 - La convergence d'une méthode de point fixe est donnée par la proposition 34.48.
 - La convergence quadratique de la méthode de Newton est donnée par le théorème 34.54.
 - En calcul numérique, section 34.5

22. On aime bien parce que ça ne demande pas Stokes, mais quand même hein, c'est pas gratos non plus.

- Méthode de Newton comme méthode de point fixe, sous-section 34.6.2.
- (4) D'autres utilisations de points fixes.
 - Processus de Galton-Watson, théorème 38.59.
 - Dans le théorème de Max-Milgram 25.61, le théorème de Picard est utilisé.

THEMEooChangementTHF0666

Thème 66 : changement de variables Il n'existe rien en mathématique qui s'appelle « changement de variables » : il n'existe que des compositions de fonctions. Ce snobisme terminologique étant, voici un certain nombre de résultats de changement de variables.

- (1) Dans des intégrales, théorème 14.282.
- (2) Dans des limites, le lemme 7.230 donne $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} f(x + a - b)$ si la limite existe.
- (3) Dans des limites, la proposition 7.231 dit que $\lim_{x \rightarrow b} f(x + a) = \lim_{x \rightarrow a+b} f(x)$.
- (4) Dans une équation aux dérivées partielles, exemple 33.132.
- (5) Limite de fonction composée $\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)$, propositions 7.232 et 7.233.

THEMEooLTCI66666667

Thème 67 : techniques de calcul Il y en a pour tous les goûts.

Primitives et intégrales Toute la section 18.2 donne des trucs et astuces pour trouver des primitives et des intégrales.

Limite à deux variables Les exemples de limites à plusieurs variables font souvent intervenir des coordonnées polaires (du théorème 18.226) ou autres fonctions trigonométriques. Ils sont donc placés beaucoup plus bas que la théorie.

- Méthode du développement asymptotique, sous-section 18.14.2.
- Méthode des coordonnées polaires, sous-section 18.14.1.
- Utilisation du théorème de la fonction implicite, dans l'exemple 18.228.

THEMEooMeth66666668

Thème 68 : méthodes de calcul

- (1) Théorème de Rothstein-Trager 20.97.
- (2) Algorithme des facteurs invariants 4.120.
- (3) Méthode de Newton, théorème 34.63
- (4) Calcul d'intégrale par suite équirépartie 28.10.

THEMEooMeth66666669

Thème 69 : méthode de Newton

- (1) Nous parlons un petit peu de méthode de Newton en dimension 1 dans 34.6.
- (2) La méthode de Newton fonctionne bien avec les fonctions convexes par la proposition 34.56.
- (3) La méthode de Newton en dimension n est le théorème 34.63.
- (4) Un intervalle de convergence autour de α s'obtient par majoration de $|g'|$, proposition 34.48.
- (5) Un intervalle de convergence quadratique s'obtient par majoration de $|g''|$, théorème 34.54.
- (6) En calcul numérique, section 34.6.
- (7) Méthode de Newton pour calculer $\sqrt{A}$, exemple 34.57.

THEMEooProlongeTHF06670

Thème 70 : prolongement d'applications

- (1) Prolongement de fonction définie sur une partie dense, théorème 17.128
- (2) Lemme de Borel 15.182.
- (3) Prolongement méromorphe de la fonction Γ d'Euler.
- (4) Le théorème de Tietze prolonge des fonction continues définies sur un fermé. Prolongement continu dans le cas métrique, théorème 27.176. Dans le cas d'un espace normal, théorème 26.22.

Thème 71 : opérations sur les distributions

- (1) Convolution d'une distribution par une fonction, définition par l'équation (30.221).
- (2) Dérivation d'une distribution, proposition-définition 30.36.
- (3) Produit d'une distribution par une fonction, définition 30.35.

Thème 72 : convolution

- (1) Définition 27.78, et principales propriétés sur $L^1(\mathbb{R})$ dans le théorème 27.79.
- (2) Inégalité de normes : si $f \in L^p$ et $g \in L^1$, alors $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$, proposition 27.83.
- (3) $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ et $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\varphi * \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, proposition 27.254.
- (4) Les suites régularisantes : $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n * f = f$ dans la proposition 29.18.
- (5) Convolution d'une distribution par une fonction, définition par l'équation (30.221).
- (6) Nous avons $(f * g)' = f * g'$, proposition 27.84.
- (7) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors $f * g \in C^\infty$, corolaire 27.85.
- (8) Somme de variables aléatoires : $f_{x+Y} = f_X * f_Y$, proposition 36.42.

Thème 73 : séries de Fourier

- Le système trigonométrique est donné en la définition 27.97.
- Les coefficients de Fourier de $c_n(f)$ sont donnés par 27.99.
- Formule sommatoire de Poisson, proposition 29.15.
- Inégalité isopérimétrique, théorème 29.61.
- Fonction continue et périodique dont la série de Fourier ne converge pas, proposition 29.56.
- Nous allons montrer la convergence de $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{inx}$ vers $f(x)$ dans divers cas :
 - (1) Si f est continue et périodique, convergence au sens de Cesàro, théorème de Fejér 28.7.
 - (2) Convergence au sens $L^2([0, 2\pi])$ dans le théorème 29.48.
 - (3) Si f est continue, périodique et si sa série de Fourier converge uniformément, théorème 28.15.
 - (4) Si f est périodique et la série des coefficients converge absolument pour tout x , proposition 28.16.
 - (5) Si f est périodique et de classe C^1 , théorème 28.17.
 - (6) Unicité des coefficients de Fourier, corolaire 29.51.

Il est cependant faux de croire que la continuité et la périodicité suffisent à obtenir une convergence, comme le montre la proposition 29.56.

Thème 74 : transformée de Fourier

- (1) Définition sur L^1 , définition 29.1.
- (2) La transformée de Fourier d'une fonction $L^1(\mathbb{R}^d)$ est continue, proposition 29.11.
- (3) L'espace de Schwartz²³ est stable par transformée de Fourier. L'application $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est continue. Proposition 29.22
- (4) L'application $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est une bijection. Formule d'inversion, proposition 29.62.

23. Définition 27.242.

Thème 75 : gaussienne

- (1) Le calcul de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

est fait de deux façons dans l'exemple 14.308. Dans les deux cas, le théorème de Fubini 14.305 est utilisé.

- (2) Le lemme 29.24 calcule la transformée de Fourier de $g_{\epsilon}(x) = e^{-\epsilon\|x\|^2}$ qui donne $\hat{g}_{\epsilon}(\xi) = \left(\frac{\pi}{\epsilon}\right)^{d/2} e^{-\|\xi\|^2/4\epsilon}$.
- (3) Le lemme 29.25 donne une suite régularisante à base de gaussienne.
- (4) Elle est utilisée pour régulariser une intégrale dans la preuve de la formule d'inversion de Fourier 29.62

Thème 76 : lemme de transfert Il y a deux résultats qui portent ce nom. Le premier est dans la théorie de Fourier, le résultat $\hat{f}' = i\xi\hat{f}$.

- (1) Lemme 29.21 sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$
- (2) Lemme 31.10 pour L^2 .

L'autre lemme de transfert est en théorie des tribus, le résultat $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ du lemme 14.48. Celui-ci est d'ailleurs plutôt nommé « lemme de transport ».

Il existe aussi un théorème de transfert 36.96 qui parle de variables aléatoires :

$$E(f \circ X) = \int_{\Omega} f(X(\omega)) dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dP_X(x) \quad (-1.17)$$

Thème 77 : invariants de similitude

- (1) Théorème 8.290.
- (2) Pour prouver que la similitude d'applications linéaires résiste à l'extension du corps de base, théorème 8.304.
- (3) Pour prouver que la dimension du commutant d'un endomorphisme de E est de dimension au moins $\dim(E)$, lemme 8.301.
- (4) Nous verrons dans la remarque 8.291 à propos des invariants de similitude que toute matrice est semblable²⁴ à la matrice bloc-diagonale constituées des matrices compagnon (définition 8.285) de la suite des polynômes minimaux.

Thème 78 : isométries Il y a $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ et $(\mathbb{R}^n, d)$.

Les isométries de $\|\cdot\|$ sont linéaires, tandis que les isométries de la distance contiennent aussi les translations et les rotations de centre différent de l'origine.

Né pas confondre une isométrie d'un espace affine avec une isométrie d'un espace euclidien²⁵. Les isométries d'un espace euclidien préservent le produit scalaire et fixent donc l'origine (lemme 10.25). Les isométries des espaces affines par contre conservent les distances (définition 11.64) et peuvent donc déplacer l'origine de l'espace vectoriel sur lequel il est modélisé; typiquement les translations sont des isométries de l'espace affine mais pas de l'espace euclidien.

Parfois, lorsqu'on coupe les cheveux en quatre, il faut faire attention en parlant de $\mathbb{R}^n$: soit on en parle comme d'un espace métrique (muni de la distance), soit on en parle comme d'un espace normé (muni de la norme ou du produit scalaire).

Général Quelques résultats généraux et en vrac à propos d'isométries.

- (1) Définition d'une isométrie pour une forme bilinéaire, 8.152. Pour une forme quadratique : définition 8.151.

24. Définition 4.117.

25. Définition 8.168.

- (2) Définition du groupe orthogonal 8.43, et le spécial orthogonal $SO(n)$ en la définition 8.46. Le groupe $SO(2)$ est le groupe des rotations, par corolaire 18.137.
- (3) La rotation $R_A(\theta)$ d'un angle θ autour du point $A \in \mathbb{R}^2$ est donnée par la définition 18.126.
- (4) La proposition 18.138 donne à toute rotation $R_0(\theta)$ une matrice de la forme connue. C'est autour de cela que nous définissons les angles, définition 18.156.
- (5) Le groupe orthogonal est le groupe des isométries de $\mathbb{R}^n$, proposition 8.45.
- (6) Les isométries de l'espace euclidien sont affines, 8.154.
- (7) Les isométries de l'espace euclidien comme produit semi-direct : $\text{Isom}(\mathbb{R}^n) \simeq T(n) \times_{\rho} O(n)$, théorème 18.80.
- (8) Isométries du cube, section 5.7.
- (9) Nous parlons des isométries affines du tétraèdre régulier dans la proposition 18.194.

Groupe diédral Le groupe diédral est un peu central dans la théorie des isométries de $(\mathbb{R}^2, d)$ parce que beaucoup de sous-groupes finis des isométries de $(\mathbb{R}^2, d)$ sont en fait isomorphes au groupe diédral.

- (1) Générateurs du groupe diédral, proposition 18.174.
- (2) Un sous-groupe fini des isométries de $(\mathbb{R}^2, d)$ contenant au moins une réflexion est isomorphe au groupe diédral par le théorème 18.199.
- (3) Le théorème 18.201 dit que le groupe des isométries propres d'une partie quelconque de $(\mathbb{R}^2, d)$ est soit cyclique soit isomorphe au groupe diédral.

Isométries et réflexions Dans un espace euclidien, toute isométrie peut être décomposée en réflexions autour d'hyperplans. Voici quelques énoncés à ce propos.

- (1) Définition d'une réflexion dans $\mathbb{R}^2$ 18.120.
- (2) La caractérisation en termes de projection orthogonale est le lemme 18.107 ; en termes de médiatrice c'est le lemme 18.111.
- (3) Définition d'un hyperplan 8.305.
- (4) En dimension 2, une rotation est définie comme composée de deux réflexions en la définition 18.117.
- (5) En dimension 2, les réflexions ont un déterminant -1 par le lemme 18.130.
- (6) Les isométries du plan $(\mathbb{R}^2, d)$ sont données dans le théorème 18.190, et sont au plus 3 réflexions par le théorème 18.188.
- (7) Décomposition des isométries de $\mathbb{R}^n$ en réflexions par le lemme 18.88.
- (8) En particulier, les éléments de $SO(3)$ sont des compositions de deux réflexions par le corolaire 18.90.
- (9) Une isométrie de $\mathbb{R}^n$ préserve l'orientation si et seulement si elle est la composition d'un nombre pair de réflexions. C'est le théorème 18.96.

Sous-groupe fini (1) Les sous-groupes finis des isométries de $(\mathbb{R}^2, d)$ sont cycliques, théorème 18.199.

- (2) Les sous-groupes finis de $SO(3)$ sont listés dans 18.223.
- (3) Les sous-groupes finis de $SO(2)$ sont cycliques, lemme 18.141.

THEME00FIN6Gp79

Thème 79 : enveloppes

- (1) L'ellipse de John-Loewner donne un ellipsoïde de volume minimum autour d'un compact dans $\mathbb{R}^n$, théorème 17.122.
- (2) Le cercle circonscrit à une courbe donne un cercle de rayon minimal contenant une courbe fermée simple, proposition 21.89.
- (3) Enveloppe convexe du groupe orthogonal 13.44.
- (4) Enveloppe convexe d'une courbe fermée plane comme intersection des demi-plans tangents, proposition 21.95.

Thème 80 : intégration sur des variétés Définition d'une variété : 20.1.

orientation La notion d'orientation commence avec l'orientation des bases d'un espace vectoriel et continue jusqu'à orienter des variétés à partir de ses cartes.

- (1) Classe d'orientation sur les bases d'un espace vectoriel, définition 8.28.
- (2) Orientation sur une surface, définition 20.60.
- (3) Variété orientable, définition 20.17.

Intégrale Nous définissons d'abord l'intégrale sur une carte, et ensuite sur une variété. En ce qui concerne les formes différentielles, nous n'intégrons que des n -formes sur des variétés de dimension n .

- (1) Intégrale d'une fonction sur une carte, définition 20.9.

théorème de Stokes, théorème de Green et compagnie Tous ces théorèmes sont des conséquences plus ou moins directes de celui de Stokes, et des généralisations du théorème fondamental de l'analyse.

- (1) Forme générale, théorème 20.71.
- (2) Rotationnel et circulation, théorème 24.8.

Le théorème de Stokes peut être utilisé pour montrer le théorème de Brouwer, proposition 20.30.

Thème 81 : dénombrements

- Coloriage de roulette (18.10.14.1) et composition de colliers (18.10.14.2).
- Nombres de Bell, théorème 15.184.
- Le dénombrement des solutions de l'équation $\alpha_1 n_1 + \dots + \alpha_p n_p = n$ utilise des séries entières et des décompositions de fractions en éléments simples²⁶, théorème 26.102.

Thème 82 : caractérisation de distributions en probabilités

- (1) La probabilité conjointe est la définition 36.24.
- (2) La fonction de répartition est la définition 36.87.
- (3) La fonction caractéristique est la définition 36.90.

Thème 83 : théorème central limite

- (1) Pour les processus de Poisson²⁷, théorème 40.22.

Thème 84 : indépendance d'événements et de variables aléatoires

- (1) Événements indépendants, définition 36.9.
- (2) Variables aléatoires indépendantes, définition 36.13.
- (3) Espérance de variables aléatoires indépendantes : $E(X_1 \cdots X_n) = E(X_1) \cdots E(X_n)$, proposition 36.37.
- (4) Densité de variables aléatoires indépendantes : $f_X(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n)$, proposition 36.27.

26. Éléments simples, lemme 19.15.

27. Définition 40.5.

Thème 85 : probabilités et espérances conditionnelles Les deux définitions de base, sur lesquelles se basent toutes les choses conditionnelles sont :

- L'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire sachant une tribu : $E(X|\mathcal{F})$ de la définition 36.63.

Les autres sont listées ci-dessous.

Probabilité conditionnelle .

Plusieurs probabilités conditionnelles.

- D'un événement en sachant un autre : la définition 36.55 donne

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Cela est la définition de base. L'autre est une définition dérivée.

- D'un événement vis-à-vis d'une variable aléatoire discrète. C'est par la définition 36.81 qui définit la variable aléatoire

$$P(A|X)(\omega) = P(A|X = X(\omega)).$$

Dans le cas continu, c'est la définition 36.82 :

$$P(A|X) = P(A|\sigma(X)) = E(\mathbb{1}_A|\sigma(X)).$$

- D'un événement par rapport à une tribu. C'est la variable aléatoire

$$P(A|\mathcal{F}) = E(\mathbb{1}_A|\mathcal{F}).$$

Espérances conditionnelles

Plusieurs espérances conditionnelles.

- D'une variable aléatoire par rapport à un événement, définition 36.75 :

$$E(X|A) = \frac{E(X\mathbb{1}_A)}{P(A)}. \quad (-1.18)$$

- d'une variable aléatoire par rapport à une tribu. La variable aléatoire $E(X|\mathcal{F})$ est la variable aléatoire $\mathcal{F}$ -mesurable telle que

$$\int_B E(X|\mathcal{F}) = \int_B X$$

pour tout $X \in \mathcal{F}$. Si $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ alors $E(X|\mathcal{F}) = \text{proj}_K(X)$ où K est le sous-ensemble de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ des fonctions $\mathcal{F}$ -mesurables (théorème 36.63). Cela au sens des projections orthogonales.

- d'une variable aléatoire par rapport à une autre. La définition 36.65 est une variation sur le même thème :

$$E(X|Y) = E(X|\sigma(Y)),$$

Notons que partout, si X est une variable aléatoire, la notation « sachant X » est un raccourci pour dire « sachant la tribu engendrée par X ».

Quelques formules.

- (1) Pour l'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire prenant seulement une quantité dénombrable de valeurs : $E(X|A) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k P(X = y_k|A)$ par le lemme 36.76.
- (2) La probabilité conditionnelle se factorise par rapport à l'union disjointe par le lemme 36.59 : $P(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=0}^{\infty} P(A_i|B)$.

Thème 86 : chaine de Markov

- (1) Construction d'une chaine de Markov dont la matrice de transition est donnée, lemme 38.42.
- (2) Principales propriétés d'une chaine de Markov homogène, proposition 38.39.
- (3) Si la chaine de Markov est irréductible, alors il y a unicité de l'état stationnaire, proposition 38.16. Mais attention : cela ne veut pas encore dire que la chaine converge effectivement vers cet état.
- (4) Si la chaine est irréductible et apériodique, alors il y a convergence en loi vers l'unique loi invariante, théorème 38.37.
- (5) État absorbant, définition 38.44.

-1.1 Conventions sur les matrices et changement de bases

SECooBT'TTooZZABWA

-1.1.1 Matrices et applications linéaires

SUBSECooAFPDoOzXdGz

Le lien entre matrice et application linéaire est donné par la définition 4.72. L'application d'une matrice à un vecteur est (4.87). Le lien le plus simple entre l'application linéaire et les éléments de matrice est donné par la proposition 4.75. Voici les relations :

$$T_{\alpha i} = T(e_i)_\alpha \quad (-1.19a)$$

$$T(e_i) = \sum_{\alpha} T_{\alpha i} f_{\alpha} \quad (-1.19b)$$

$$T(x) = \sum_{i, \alpha} T_{\alpha i} x_i f_{\alpha} \quad (-1.19c)$$

$$T(x)_\alpha = \sum_i T_{\alpha i} x_i. \quad (-1.19d)$$

De la même manière nous utiliserons (rarement) la notation suivante (définition 9.112) si $x \in \mathbb{R}^n$ et $T \in \mathbb{M}(n \times n)$:

$$xT = \sum_{ij} x_i T_{ij} e_j. \quad (-1.20)$$

À partir de là, il est possible de parler de vecteur propre à gauche lorsque $xT = \lambda x$.

Cela définit une application $\psi: \mathbb{M}(n \times m, \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ qui a plein de propriétés.

- (1) C'est une bijection, proposition 4.75(4).
- (2) C'est un isomorphisme d'algèbre, proposition 4.78.
- (3) C'est un isomorphisme d'espaces vectoriels, proposition 4.76.
- (4) Isomorphisme d'algèbres et d'anneaux, proposition 4.78.
- (5) Isomorphisme d'espaces topologiques, proposition 4.78.

Lorsque nous avons une base orthonormée²⁸ nous avons aussi les propositions 8.180 et 8.180 qui donnent des formules avec produit scalaire :

$$(1) T_{\alpha i} = e_{\alpha} \cdot T(e_i)$$

$$(2) x \cdot Ay = \sum_{kl} A_{kl} x_k y_l.$$

où le point est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.

28. Définition 8.166.

-1.1.2 Le changement de base

Soit un espace vectoriel V muni de deux bases $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ et $(f_\alpha)_{\alpha=1,\dots,n}$. Le lemme 4.121 donne le lien entre les vecteurs de base :

$$(1) f_\alpha = \sum_i Q_{i\alpha} e_i$$

$$(2) e_i = \sum_\alpha Q_{\alpha i}^{-1} f_\alpha$$

La proposition 4.122 donne un certain nombre de formules pour les coordonnées des vecteurs :

$$(1) y_\alpha = \sum_i Q_{\alpha i}^{-1} x_i$$

$$(2) x_i = \sum_\alpha Q_{i\alpha} y_\alpha.$$

$$(3) x_i = (Qy)_i$$

$$(4) x = Qy$$

La transformation de la matrice d'une application linéaire lors d'un changement de base est la proposition 4.125. Soit une application linéaire $T: V \rightarrow V$ de matrices A et B dans les bases $\{e_i\}$ et $\{f_\alpha\}$. Si les bases sont liées par $f_\alpha = \sum_i Q_{i\alpha} e_i$, alors les matrices A et B sont liées par

$$B = Q^{-1} A Q. \quad (-1.21)$$

En ce qui concerne la base duale, si $e'_j = \sum_i A_{ij} e_i$, alors

$$\alpha'_j = \sum_k A_{jk}^{-1} \alpha_k, \quad (-1.22)$$

proposition 4.142.

-1.1.3 Changement de base : matrice d'une forme bilinéaire

La proposition 8.148 fait le changement de matrice d'une forme bilinéaire lors d'un changement de base. Si la matrice de q dans la base $\{e_i\}$ est A et celle dans la base $\{f_\alpha\}$ est B , alors

$$B = Q^t A Q. \quad (-1.23)$$

Pour comparaison avec la loi de transformation des matrices des applications linéaires, voir la remarque 8.149.

Plus généralement, si ϕ est une application linéaire, la matrice de $q \circ \phi$ est $\phi^t q \phi$, proposition 8.147.

-1.2 Multiindice et liste d'indices

NORMooRRZCooMOKAzY

-1.1.

Je crois qu'il y a quelques incohérences de notations/dénominations dans le texte. En principe quand on parle de $\mathbb{R}^n$, un **multiindice** [4] est un vecteur d'entiers positifs à n composantes. Si $\alpha = (2, 1)$ alors nous avons la notation

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^2}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} f \quad (-1.24)$$

Cette notation pose problème lorsque, par exemple, $\partial_1^2 \partial_2 f \neq \partial_1 \partial_2 \partial_1 f$.

Elle pose également problème lorsque l'on veut faire une récurrence sur l'ordre de dérivation en ajoutant une seule dérivation à la fois.

C'est pourquoi nous introduisons le concept de **liste d'indices**. En parlant de $\mathbb{R}^n$, une liste d'indices est un vecteur arbitrairement long (mais fini) d'entiers dans $\{1, \dots, n\}$. Si, dans $\mathbb{R}^7$, $\alpha = (1, 3, 1, 5)$, alors

$$\partial^\alpha f = \partial_1 \partial_3 \partial_1 \partial_5 f. \quad (-1.25)$$

Si α est une liste d'indices de longueur p , une **queue de α** est une liste d'indices de longueur $0 < k \leq p$ de la forme $(\alpha_{p-k+1}, \alpha_{p-k+2}, \dots, \alpha_p)$.

Voir aussi la définition 3.36 pour $\alpha!$ et $< ++ >$

-1.3 Anglicismes

SECooPBZVooCVInFT

Voici quelques anglicismes dont je ne me souviens jamais.

- (1) Une σ -algèbre est une tribu, définition 14.1.
- (2) Le « uniform boundedness principle » est le théorème de Banach-Steinhaus 10.174.
- (3) Un anneau est ce qu'on appelle « *ring* » en anglais. Un corps est en anglais « *field* ». De plus le mot « *field* » comprend la commutativité. Donc certains utilisent le mot « corps » pour dire « corps commutatif » et parlent alors d'anneau à *division* pour parler de corps non commutatifs.

Table des matières

Thématique	1
-1.1 Conventions sur les matrices et changement de bases	40
-1.1.1 Matrices et applications linéaires	40
-1.1.2 Le changement de base	41
-1.1.3 Changement de base : matrice d'une forme bilinéaire	41
-1.2 Multiindice et liste d'indices	41
-1.3 Anglicismes	42
Table des matières	43
Index	78
Liste des notations	103
I Le Frido	107
0 Introduction	109
0.1 Auteurs, contributeurs, sources et remerciements	109
0.1.1 Ceux qui ont travaillé sur le Frido	109
0.1.2 Aide directe, mais pas volontairement sur le Frido	110
0.1.3 Des gens qui ont fait un travail qui m'a bien servi	111
0.2 Originalité	111
0.3 Les choses qui doivent vous faire tiquer	112
0.4 Quelques choix qui peuvent provoquer des quiproquos	112
0.5 Autres choix pas spécialement standards	113
0.5.1 Mathématique intéressante	113
0.6 Sage est là pour vous aider	113
0.6.1 Lancez-vous dans Sage	114
0.6.2 Exemples de ce que Sage peut faire pour vous	114
0.7 Comment contribuer et aider ?	115
0.7.1 Des preuves qui manquent	115
0.7.2 Du texte qui manque	115
0.7.3 Des exemples qui manquent	115
0.7.4 Trucs de programmation et de L ^A T _E X	115
0.8 Les politiques éditoriales	116
0.8.1 Licence libre	116
0.8.2 pdf _l atex	116
0.8.3 utf8	116
0.8.4 Notations	116
0.8.5 De la bibliographie	116
0.8.6 Faire des références à tout	116
0.8.7 Des listes de liens internes	116
0.8.8 Pas de références vers le futur	116

1	Construction des ensembles de nombres	117
1.1	Les bases	117
1.1.1	Axiomatique et grammaire	117
1.1.2	Les théorèmes encapsulants	117
1.2	Ensembles, relations, fonctions	118
1.2.1	Opérations ensemblistes	118
1.2.2	Des relations aux bijections	119
1.2.3	Ensemble ordonné	121
1.2.4	Lemme de Zorn	123
1.2.5	Quelques relations ensemblistes	124
1.2.6	Relations d'équivalence	129
1.2.7	Relations ternaires, opérations	131
1.3	Cardinalité	132
1.3.1	Équipotence, surpotence, subpotence	132
1.3.2	Un peu d'infinité	133
1.3.3	Théorème de Cantor-Schröder-Bernstein	136
1.3.4	Comparabilité cardinale	139
1.3.5	Théorème de Cantor, ensemble des ensembles	140
1.4	Quelques structures algébriques	140
1.4.1	Positivité	144
1.4.2	Diviseurs, pgcd et ppcm	144
1.4.3	Règle des signes dans un anneau totalement ordonné	145
1.4.4	Valeur absolue, corps valué	146
1.5	Les entiers naturels	148
1.5.1	Triplet naturel	149
1.5.2	Applications définies par récurrence	150
1.5.3	Addition sur les naturels	153
1.5.4	Ordre sur les naturels	156
1.5.5	Multiplication dans les naturels	161
1.5.6	Presque unicité des triplets naturels	164
1.5.7	Écriture d'un naturel dans une base	168
1.6	Les entiers relatifs	173
1.6.1	Opposé	174
1.6.2	Ordre sur $\mathbb{Z}$	176
1.7	Quelques résultats de cardinalité	180
1.7.1	Ensembles dénombrables	180
1.7.2	Minimum, maximum	183
1.7.3	Dénombrabilité et ensemble des naturels	184
1.7.4	Ajouter ou soustraire des cardinalités	190
1.8	Groupe	195
1.8.1	Définition, unicité du neutre	195
1.8.2	Ordre d'un groupe et d'un élément	196
1.8.3	Groupe ordonné	196
1.8.4	Classes de conjugaison	196
1.8.5	Permutations, groupe symétrique	197
1.8.6	Décomposition en cycles	198
1.8.7	Parité d'une permutation, signature	204
1.8.8	Permutation un peu ordonnées	207
1.9	Symbole de sommation	208
1.9.1	Somme à valeurs dans un groupe commutatif	208
1.9.2	Symbole de produit	212
1.10	Anneaux	212
1.10.1	Idéal dans un anneau	213

1.10.2	Idéal engendré	213
1.10.3	Autres trucs sur les idéaux	215
1.10.4	Élément irréductible et premier	216
1.10.5	Anneau intègre	217
1.10.6	Fonction puissance	221
1.10.7	Anneau euclidien	221
1.10.8	Anneau principal et idéal premier	222
1.11	Le groupe et anneau des entiers	223
1.11.1	Division euclidienne	223
1.11.2	Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$	225
1.11.3	Théorème de Bézout	226
1.11.4	PGCD, PPCM	227
1.11.5	Décomposition en facteurs premiers	229
1.11.6	Binôme de Newton	231
1.11.7	Divisibilité des coefficients binomiaux	232
1.11.8	Coefficient binomiaux et polynômes	233
1.12	Idéal dans un anneau	234
1.13	Anneau intègre	238
1.14	Théorèmes chinois et idéaux	240
1.15	Sous-groupe normal	244
1.16	Corps	247
1.16.1	Définitions, morphismes	247
1.16.2	Sous-groupe engendré	248
1.17	Module sur un anneau	250
1.17.1	Module produit	251
1.17.2	Sous-module	253
1.18	Caractéristique d'un anneau	255
1.18.1	Endomorphisme de Frobenius	257
1.18.2	Caractéristique deux	258
1.19	Polynômes	258
1.19.1	Polynômes d'une variable	258
1.19.2	La notation $A[X]$	260
1.19.3	Action du groupe symétrique	261
1.19.4	Corps des fractions	262
1.19.5	Corps totalement ordonné	267
1.20	Les rationnels	269
1.20.1	Relation d'ordre	269
1.20.2	Caractéristique	272
1.21	Suite de Cauchy dans un corps totalement ordonné	272
1.21.1	Suites de Cauchy dans les rationnels	274
1.22	Insuffisance des rationnels	276
1.23	Les réels	279
1.23.1	L'ensemble	279
1.23.2	Relation d'ordre	282
1.23.3	Complétude	289
1.23.4	Intervalles	293
1.23.5	Maximum, supremum et compagnie	293
1.23.6	Racines	300
1.23.7	Partie entière, partie fractionnaire	301
1.23.8	Le tore	301
1.24	Les complexes	303
1.24.1	Norme et inégalités	304

2.1	Groupe dérivé	305
2.2	Théorèmes d'isomorphismes	306
2.3	Indice d'un sous-groupe et ordre des éléments	308
2.4	Suite de composition	310
2.5	Groupes résolubles	313
2.6	Action de groupes	314
2.7	Produit semi-direct de groupes	320
2.8	Groupe de torsion	323
2.9	Famille presque nulle	323
3	Anneaux	325
3.1	Inversibles et nilpotents	325
3.2	PGCD, PPCM et éléments inversibles	326
3.2.1	Calcul effectif du PGCD et théorème de Bézout	326
3.2.2	Générateurs	329
3.2.3	pgcd, ppcm dans $\mathbb{N}$	330
3.2.4	Ordre d'un élément dans un groupe fini	333
3.2.5	Écriture des fractions	335
3.2.6	Équation diophantienne linéaire à deux inconnues	336
3.2.7	Quotients	337
3.3	Coefficients multinomiaux	338
3.3.1	Théorème multinomial	338
3.4	Polynômes de plusieurs variables	340
3.4.1	Divisibilité et classes d'association	340
3.4.2	PGCD et PPCM	341
3.4.3	pgcd, ppcm dans un anneau principal	342
3.4.4	Anneaux intègres et corps	342
3.5	Anneau factoriel	343
3.5.1	Autour du théorème de Bézout	345
3.5.2	Théorème chinois	346
3.5.3	Idéal premier	347
3.5.4	Anneau noethérien	348
3.6	Anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	351
3.6.1	Équations diophantiennes	353
3.6.2	Triplets pythagoriciens et équation de Fermat pour $n = 4$	355
3.7	Polynômes à coefficients dans un anneau commutatif	357
3.7.1	Monômes	358
3.7.2	Évaluation	358
3.7.3	Polynômes sur un anneau intègre	358
3.7.4	Division euclidienne	359
3.7.5	Polynôme primitif	360
3.7.6	Racines des polynômes	362
3.7.7	Quelques identités	365
3.7.8	Générateurs pour le groupe multiplicatif	366
4	Espaces vectoriels (début)	369
4.1	Parties libres, génératrices, bases et dimension	369
4.1.1	Et en dimension infinie	376
4.1.2	Espace librement engendré	378
4.2	Applications linéaires	379
4.2.1	Définition	379
4.2.2	Linéarité et bases	382
4.2.3	Rang	383
4.3	Matrices	388

4.3.1	Définitions	388
4.3.2	Identifier matrices et applications linéaires	390
4.3.3	Ensemble des applications linéaires	394
4.3.4	Déterminant	395
4.3.5	Déterminant en petite dimension	395
4.3.6	Manipulations de lignes et de colonnes	395
4.3.7	Réduction de Gauss	401
4.3.8	Matrices inversibles	403
4.3.9	Inversibilité et déterminant	404
4.3.10	Quelques ensembles de matrices particuliers	405
4.3.11	Déterminant et combinaisons de lignes et colonnes	405
4.3.12	Transvections	406
4.3.13	Mineur, rang	407
4.3.14	Matrices équivalentes et semblables	409
4.3.15	Algorithme des facteurs invariants	410
4.4	Changement de base	412
4.4.1	Changement de base : vecteurs de base	412
4.4.2	Changement de base : coordonnées	412
4.4.3	Changement de base : matrice d'une application linéaire	413
4.4.4	Déterminant de Vandermonde	414
4.5	Espaces de polynômes	416
4.6	Projection et orthogonalité	417
4.7	Dualité	418
4.7.1	Changement de base duale	420
4.7.2	Orthogonal	421
4.8	Représentation de groupe	422
4.9	Somme directe d'espaces vectoriels	422
4.9.1	Structure réelle	425
5	Classification de certains groupes	427
5.1	Théorèmes de Sylow	427
5.2	Groupe monogène	431
5.3	Automorphismes du groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	432
5.4	Groupes abéliens finis	434
5.5	Groupes d'ordre pq	436
5.5.1	Fonction indicatrice d'Euler	439
5.5.2	Générateurs	442
5.5.3	Fonction indicatrice d'Euler (propriétés)	443
5.6	Groupe symétrique, groupe alterné	443
5.6.1	Le groupe alterné	443
5.6.2	Sous-groupes normaux	449
5.6.3	Indice	450
5.7	Isométries du cube	452
6	Corps	455
6.1	Généralités	455
6.1.1	Corps ordonnés	455
6.1.2	Automorphismes de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$	455
6.1.3	Corps premier	457
6.1.4	Petit théorème de Fermat	459
6.1.5	Nombres de Sophie Germain	459
6.2	Théorème des deux carrés	462
6.2.1	Un peu de structure dans $\mathbb{Z}[i]$	462
6.2.2	Résultats chinois	466

6.3	Polynômes à coefficients dans un corps	468
6.3.1	Irréductibilité	473
6.3.2	Idéaux	474
6.3.3	Identité de Bézout	476
6.3.4	Lemme et théorème de Gauss	477
6.3.5	Polynômes sur un corps et pgcd	477
6.4	Extension de corps	480
6.4.1	Extension et polynôme minimal	481
6.4.2	Extensions algébriques et éléments transcendants	483
6.4.3	Extension algébrique et polynôme minimal	485
6.4.4	Extensions et polynômes	487
6.4.5	Racines de polynômes	496
6.4.6	Corps de rupture	497
6.4.7	Pile d'extensions	500
6.4.8	Clôture algébrique	501
6.4.9	Polynômes à plusieurs variables	507
6.4.10	Corps de décomposition	508
6.4.11	Non irréductible ou pas corps ?	512
6.4.12	Clôture algébrique	512
6.4.13	Dérivée de polynômes	513
6.4.14	Extensions séparables	514
6.5	Idéal maximum	520
6.5.1	Idéal maximum	520
6.6	Polynômes symétriques et alternés	522
6.6.1	Polynômes symétriques, alternés ou semi-symétriques	522
6.6.2	Polynôme symétrique élémentaire	522
6.6.3	Relations coefficients racines	524
6.7	Minuscule morceau sur la théorie de Galois	526
7	Topologie générale	527
7.1	Éléments généraux de topologie	527
7.1.1	Définitions et propriétés de base	527
7.1.2	Base de topologie	527
7.1.3	Fermés	528
7.1.4	Quelques exemples	529
7.1.5	Adhérence, fermeture, intérieur, point d'accumulation et point isolé	531
7.1.6	Topologie sur $\mathbb{Q}$	536
7.1.7	Applications continues	537
7.2	Topologie rendant continue (topologie initiale)	539
7.2.1	Topologie produit	542
7.2.2	Topologie de la convergence simple	544
7.2.3	Topologie quotient	544
7.3	Espace séparable	545
7.4	Suites et convergence	546
7.4.1	Convergence dans un fermé	546
7.4.2	Pour des limites uniques : séparabilité	546
7.4.3	Topologie induite	548
7.4.4	Fonctions équivalentes	548
7.5	Espace topologique normal et complètement normal	549
7.6	Connexité	550
7.7	Compacité	554
7.7.1	Définition et notions connexes	554
7.7.2	Autres compacité	555
7.7.3	Quelques propriétés	556

7.7.4	Espace relativement compact	560
7.7.5	Propriété d'intersection finie	561
7.8	Limite de fonction	561
7.9	Topologie, distances et normes	562
7.9.1	Distance et topologie métrique	562
7.9.2	Précompact	564
7.9.3	Caractérisations séquentielles	564
7.9.4	Suites et espaces métriques	565
7.9.5	Continuité de la distance	567
7.9.6	Topologie métrique et induite	567
7.9.7	Intérieur, adhérence et frontière	567
7.9.8	Boules ouvertes, fermées, sphères	569
7.9.9	Espace localement compact	570
7.9.10	Compactifié d'Alexandrov	571
7.9.11	Continuité séquentielle	573
7.9.12	Continuité et compacité	574
7.9.13	Distance à un ensemble	576
7.9.14	Espace métrisable	578
7.9.15	Connexité	579
7.9.16	Convexité	579
7.9.17	Norme	580
7.9.18	Topologie	582
7.10	Espaces vectoriels topologiques	582
7.10.1	De complexe à réel	583
7.10.2	Base de topologie	584
7.10.3	Corps topologique	587
7.10.4	Voisinage symétrique et équilibré	587
7.10.5	Espace topologique localement convexe	590
7.10.6	Limite de suites	592
7.10.7	Limite de suites	592
7.11	Applications continues	593
7.11.1	Continuité	593
7.11.2	Continuité et topologie induite	595
7.11.3	Continuité et connexité	596
7.11.4	Continuité et compacité	598
7.11.5	Distance uniforme	598
7.11.6	Continuité de la réciproque sur un compact	599
7.11.7	Espace vectoriel topologique	599
7.12	Produit fini d'espaces vectoriels normés	599
7.12.1	Distance et norme produit	600
7.13	Topologie réelle en dimension n	604
7.13.1	Ouverts et fermés	604
7.13.2	Point d'accumulation, point isolé	604
7.13.3	Limite de suite	605
7.14	Topologie et distance	606
7.15	Suites de Cauchy, métrique et espaces complets	607
7.15.1	Généralités	607
7.15.2	Espace de Banach	608
7.15.3	Espace topologique métrique	610
7.15.4	Compacts, fermés	611
7.15.5	Équivalence entre Cauchy et τ -Cauchy	619
7.16	Norme, espace vectoriel normé	620
7.17	Espaces métriques	623

7.17.1	Espaces métrisables	623
7.17.2	Fonctions continues	624
7.17.3	Théorème de Tykhonov	630
7.17.4	Ensembles enchainés	630
7.17.5	Produit fini d'espaces métriques	631
7.17.6	Équicontinuité	632
7.17.7	Continuité uniforme	633
7.18	Partie maigre et nulle part dense	634
7.19	Seminormes	634
7.19.1	Seminorme	634
7.19.2	Fonctionnelle de Minkowski	636
7.20	Topologie des seminormes	640
7.20.1	Topologie initiale des seminormes	640
7.20.2	Topologie avec des boules	641
7.20.3	Seminorme et métrisable	647
7.20.4	Boules et topologie	648
7.20.5	Espace dual	651
7.20.6	Espace $C^k(\mathbb{R}, E')$	651
7.21	Espaces de Baire	653
8	Espaces vectoriels (encore)	657
8.1	Déterminants	657
8.2	Applications multilinéaires	657
8.2.1	Continuité	658
8.2.2	Formes multilinéaires alternées	659
8.2.3	Déterminant d'une famille de vecteurs	661
8.2.4	Déterminant d'un endomorphisme	663
8.2.5	Déterminant de Gram	667
8.2.6	Déterminant de Cauchy	668
8.2.7	Matrice de Sylvester	668
8.2.8	Théorème de Kronecker	671
8.3	Orientation	672
8.3.1	Cas vectoriel	672
8.3.2	Cas affine	674
8.4	Hermitien, orthogonal, adjoint	674
8.4.1	Opérateur orthogonal, matrice orthogonale	676
8.5	Topologie	677
8.5.1	Boules et sphères	677
8.5.2	Ouverts, fermés, intérieur et adhérence	679
8.5.3	Point isolé, point d'accumulation	685
8.5.4	Des exemples	686
8.6	Valeur propre et vecteur propre	689
8.6.1	Généralités	689
8.6.2	Dans le vif du sujet	690
8.7	Polynômes d'endomorphismes	691
8.7.1	Polynômes d'endomorphismes	691
8.7.2	Polynôme minimal et minimal ponctuel	695
8.7.3	Polynôme caractéristique	701
8.8	Formes bilinéaires et quadratiques	704
8.8.1	Dégénérescence d'une forme bilinéaire	705
8.8.2	Orthogonal pour une forme bilinéaire	706
8.8.3	Formes quadratiques	708
8.8.4	Isotropie	710
8.9	Formes bilinéaires et quadratiques	711

8.9.1	Matrice associée à une forme bilinéaire	711
8.9.2	Changement de base : matrice d'une forme bilinéaire	712
8.9.3	Isométrie, forme quadratique et bilinéaire	713
8.9.4	Isométries	714
8.10	Signature, théorème de Sylvester	716
8.11	Produit scalaire, produit hermitien	717
8.11.1	Hermitien, unitaire, etc.	719
8.11.2	Éléments de matrice	720
8.11.3	Transposée : pas d'approche naïve	721
8.11.4	Transposée : la bonne approche	723
8.11.5	Polynômes de Lagrange	725
8.11.6	Dual de $M(n, K)$	726
8.12	Diagonalisation et trigonalisation	727
8.12.1	Matrices semblables	727
8.12.2	Trace de matrices semblables	728
8.12.3	Endomorphismes nilpotents	729
8.12.4	Endomorphismes diagonalisables	732
8.12.5	Diagonalisation : cas complexe, pas toujours	735
8.12.6	Diagonalisation : cas réel	736
8.12.7	Matrice définie positive	738
8.12.8	Réduction de Gauss	741
8.12.9	Orthogonalité pour une forme bilinéaire	744
8.12.10	Équivalence de formes quadratiques	749
8.12.11	Diagonalisation	749
8.13	Fonctions	751
8.14	Sous espaces caractéristiques	751
8.14.1	Théorèmes de décomposition	753
8.14.2	Valeurs singulières	756
8.15	Extension du corps de base	756
8.15.1	Extension des applications linéaires	757
8.15.2	Projections	759
8.15.3	Rang, polynôme minimal, polynôme caractéristique	762
8.16	Frobenius et Jordan	763
8.16.1	Matrice compagnon	763
8.16.2	Réduction de Frobenius	765
8.16.3	Forme normale de Jordan	768
8.17	Commutant et endomorphismes cycliques	769
8.17.1	Endomorphisme cyclique	769
8.17.2	Commutant : cas diagonalisable	769
8.17.3	Commutant : cas général	772
8.18	Hyperplans et formes linéaires	774
8.18.1	Trouver la matrice d'une symétrie donnée	776
8.19	Théorème de Burnside	778
8.20	Ellipsoïde	780
8.21	Système d'équations linéaires : méthode de Gauss	781
9	Analyse réelle : topologie et continuité	783
9.1	Intervalles	783
9.2	Application réciproque	784
9.2.1	Définitions	784
9.2.2	Graphe de la fonction réciproque	785
9.3	Topologie sur l'ensemble des réels	785
9.3.1	Compacité pour les réels	786
9.3.2	Conséquence : les fermés bornés sont compacts	789

9.3.3	Suites et limites dans les réels	790
9.3.4	Opérations sur les limites	790
9.3.5	Exemples	791
9.3.6	Limites infinies	792
9.3.7	Topologie et matrices	792
9.3.8	Suites croissantes et bornées	793
9.3.9	Suites adjacentes	795
9.3.10	Limite supérieure et inférieure	796
9.3.11	Ouverts, voisinage, topologie	798
9.3.12	Intervalles et connexité	799
9.3.13	Théorème de Bolzano-Weierstrass	802
9.3.14	Recouvrement par des intervalles ouverts	804
9.4	Connexité par arcs	805
9.4.1	Des exemples	807
9.4.2	Quelques mots à propos de la droite réelle achevée	809
9.5	Continuité	810
9.5.1	Opération sur la continuité	811
9.5.2	La fonction la moins continue du monde	813
9.5.3	Approche topologique	813
9.5.4	Limite sur des chemins	815
9.5.5	Racine carrée	815
9.5.6	Module sur les nombres complexes	816
9.5.7	Théorème de Perron-Frobenius	819
9.5.8	Limite à gauche et à droite	823
9.6	Norme à partir d'un produit scalaire	824
9.6.1	Continuité de la racine carrée, invitation à la topologie induite	824
9.6.2	Second degré	825
10	Espaces vectoriels normés	827
10.0.1	Norme, produit scalaire et Cauchy-Schwarz (cas réel)	827
10.0.2	Topologie	830
10.0.3	Le tore	831
10.1	Théorème spectral autoadjoint	835
10.1.1	Inégalité de Minkowski	837
10.1.2	Cauchy-Schwarz etc. cas complexe	839
10.1.3	Diagonalisation : cas complexe, ce qu'on a	840
10.1.4	Projection et orthogonalité	840
10.1.5	Théorème de Pythagore	842
10.1.6	Produit vectoriel	842
10.1.7	Produit mixte	846
10.1.8	Procédé de Gram-Schmidt	847
10.1.9	Pseudo-réduction simultanée	848
10.2	Approximations	849
10.2.1	Quelques exemples de normes sur $\mathbb{R}^n$	850
10.3	Équivalence des normes	851
10.3.1	En dimension finie	851
10.3.2	Contre-exemple en dimension infinie	855
10.4	Norme opérateur	856
10.4.1	Matrice bloc-diagonale	857
10.4.2	Norme d'algèbre	859
10.5	Application linéaire continue et bornée	860
10.5.1	Déterminant entre espaces différents	862
10.5.2	Suites	864
10.5.3	Continuité du produit de matrices	867

10.5.4	Continuité de la composition	867
10.6	Applications multilinéaires	868
10.7	Séries	869
10.8	Sommes de familles infinies	870
10.8.1	Suites	870
10.8.2	Séries	871
10.8.3	Terme général	871
10.8.4	Convergence commutative	872
10.8.5	Somme non dénombrables	879
10.8.6	Sommes dénombrables	880
10.9	Liens entre différents types de sommabilité	883
10.9.1	Séries entières	888
10.9.2	Somme télescopique	889
10.9.3	Distributivité	889
10.9.4	Produit de Cauchy	890
10.10	Série réelle	891
10.10.1	Critères de convergence absolue	891
10.10.2	Critères de convergence simple	893
10.10.3	Quelques séries usuelles	893
10.10.4	Séries alternées	896
10.10.5	Moyenne de Cesàro	896
10.10.6	Écriture décimale d'un réel	897
10.10.7	Théorème de Banach-Steinhaus	901
10.10.8	Convergence forte	903
10.11	Application ouverte	904
10.12	Produit tensoriel d'espaces vectoriels	907
10.13	Produit tensoriel	908
10.13.1	Définition générale	908
10.13.2	Constructions du produit tensoriel	910
10.13.3	Construction abstraite	911
10.13.4	Bases	915
10.13.5	Construction par les formes multilinéaires	916
10.13.6	Décomposabilité	919
10.13.7	Produit tensoriel d'applications linéaires	920
10.13.8	Contraction	922
10.13.9	Tenseurs symétriques et alternés	923
10.13.10	Décomposition	928
10.13.11	Règle de Leibniz pour le produit extérieur	930
10.13.12	Produit intérieur	938
10.13.13	Pull back	941
10.13.14	Norme	941
10.13.15	Applications bilinéaires, matrices et produit tensoriel	942
10.13.16	Application d'opérateurs	943
10.13.17	Convergence en norme et par composante	944
10.14	Calcul différentiel dans un espace vectoriel normé	944
10.14.1	Limite de fonctions	944
10.14.2	Définition de la différentielle	944
10.14.3	Pas en dimension infinie	945
10.14.4	Dérivée directionnelle	946
10.14.5	Théorème des accroissements finis	949
10.14.6	Différentielle d'ordre 2	951
10.14.7	Quelques mots à propos des différentielles d'ordre supérieur	951
10.14.8	Topologie et norme induite	953

10.14.9	Différentielle d'applications linéaires	953
10.14.10	Différentielle d'applications multilinéaires	954
10.14.11	Accroissements finis	956
10.14.12	Notations pour les applications linéaires	956
10.14.13	(non ?) Différentiabilité des applications linéaires	957
10.14.14	Dérivation en chaine et formule de Leibniz	957
10.14.15	Composition	959
10.14.16	Règle de Leibniz	963
10.14.17	Inverse	963
10.14.18	Différentiation de produit tensoriel	963
10.14.19	Produit cartésien	967
10.14.20	Formule des accroissements finis	969
10.14.21	Applications multilinéaires	972
10.14.22	Différentielle partielle	973
10.14.23	L'inverse, sa différentielle	974
10.15	Exponentielle de matrice	977
10.16	Espace dual	978
10.16.1	Topologies	978
10.16.2	Module de continuité	980
10.17	Mini introduction aux nombres p -adiques	981
10.17.1	La flèche d'Achille	981
10.17.2	La tortue et Achille	982
10.17.3	Dans les nombres p -adiques, c'est vrai	982
11	Espaces affines	985
11.1	Vecteurs agissant sur un espace	985
11.2	Repères cartésiens affines	986
11.3	Classification affine des coniques	986
11.4	Applications affines	990
11.4.1	Autres propriétés	991
11.5	Isomorphismes	994
11.6	Sous espaces affines	994
11.7	Barycentre	996
11.7.1	Sous-espaces affines	996
11.7.2	Enveloppe convexe	998
11.7.3	Applications affines et barycentre	1001
11.8	Repères, coordonnées cartésiennes et barycentriques	1002
11.8.1	Équation de droite	1006
11.8.2	Associativité, coordonnées barycentriques dans un triangle	1006
11.9	Applications affines sur $\mathbb{R}^n$	1008
11.9.1	Structure de groupe pour les applications affines	1009
11.10	Isométries	1010
12	Analyse réelle : limites et dérivation	1013
12.1	Limite de fonctions	1013
12.1.1	Définition	1013
12.1.2	Quelques règles de calcul	1015
12.2	Limites pointées et époutées	1019
12.2.1	Théorèmes de composition de limites	1021
12.2.2	Discussion pointée Vs époutée	1024
12.3	Limites en l'infini	1027
12.3.1	Droite réelle achevée	1027
12.3.2	Limites en l'infini	1028
12.3.3	Limite en des nombres	1029

12.3.4	Limites quand tout va bien	1030
12.3.5	Limites de fonctions	1030
12.3.6	Limite à gauche et à droite	1031
12.4	Limite en compactifié d'Alexandrov	1032
12.4.1	Prolongement par continuité	1033
12.4.2	Prolongement par continuité	1035
12.4.3	Théorème de la bijection	1035
12.5	Limite et continuité	1038
12.5.1	Prolongement des rationnels vers les réels	1041
12.6	Espace des fonctions continues	1044
12.7	Uniforme continuité	1048
12.8	Fonctions sur un compact	1051
12.9	Polynômes, théorème de d'Alembert	1051
12.9.1	Polynômes sur les réels	1051
12.9.2	Polynômes sur les complexes	1052
12.10	Trigonalisation	1058
12.10.1	Trigonalisation : généralités	1058
12.10.2	Trigonalisation : cas complexe	1059
12.11	Matrices, spectre et norme	1066
12.11.1	Rayon spectral	1066
12.11.2	Normes de matrices et d'applications linéaires	1071
12.12	Droites dans un espace vectoriel	1076
12.12.1	Parallélisme et perpendicularité	1077
12.12.2	Droites et applications linéaires	1079
12.12.3	Projection orthogonale	1080
12.13	Géométrie dans le plan	1082
12.13.1	Segment, médiatrice et équidistance	1085
12.14	Géométrie dans l'espace	1091
12.14.1	Droites et plans dans l'espace	1092
12.14.2	Plan médiateur	1093
12.14.3	Tétraèdre	1094
12.15	Plan médiateur dans l'espace	1096
12.16	Dérivée : exemples introductifs	1096
12.16.1	La vitesse	1096
12.16.2	La tangente à une courbe	1096
12.16.3	L'aire en dessous d'une courbe	1097
12.17	Dérivation de fonctions réelles	1098
12.17.1	Exemples	1100
12.17.2	Interprétation géométrique : tangente	1101
12.17.3	Interprétation géométrique : approximation affine	1102
12.18	Règles de calcul	1102
12.18.1	Dérivée de la réciproque	1107
12.18.2	Dérivée de fonction composée	1110
12.18.3	Dérivée de fonction périodique	1111
12.19	Dérivation et croissance	1111
12.19.1	Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	1113
12.19.2	Règle de l'Hospital	1116
12.19.3	Dérivée et primitive	1117
12.20	Fonctions de plusieurs variables	1118
12.20.1	Graphes de fonctions à plusieurs variables	1121
12.20.2	Courbes de niveau	1122
12.21	Limites à plusieurs variables	1127
12.21.1	Caractérisation de la limite par les suites	1129

12.21.2	Règle de l'étau	1130
12.21.3	Méthode des chemins	1131
12.22	Dérivée directionnelle	1133
12.22.1	Dérivée partielle et directionnelles	1134
12.22.2	Gradient : direction de plus grande pente	1134
12.22.3	Gradient : orthogonal au plan tangent	1135
12.22.4	Mise en bouche en dimension 2	1135
12.23	Accroissements finis et dérivées partielles	1137
12.24	Formes différentielles	1138
12.24.1	Décomposition dans la base duale	1139
12.24.2	L'isomorphisme musical	1139
12.25	Différentielle	1140
12.25.1	Exemples introductifs	1140
12.25.2	Différentielle	1141
12.25.3	Matrice de la différentielle	1142
12.25.4	Différentielle, dual et forme différentielle	1143
12.25.5	Ce n'est pas la différentielle extérieure	1144
12.25.6	Continuité, dérivabilité et différentiabilité	1145
12.25.7	Calcul de valeurs approchées	1148
12.25.8	Différentielle et tangente	1149
12.25.9	Prouver qu'une fonction n'est pas différentiable	1151
12.25.10	Gradient	1155
12.25.11	Linéarité	1155
12.26	Produit	1155
12.26.1	Difficulté d'ordre supérieur	1157
12.26.2	Solution : produit tensoriel	1158
12.26.3	Formes bilinéaires	1158
12.27	Différentielle de fonction composée	1159
12.27.1	Fonctions composées	1161
12.28	Autres trucs sur la différentielle	1162
12.28.1	Différentielle et dérivées partielles	1162
12.28.2	Plan tangent	1163
12.28.3	Notes idéologiques quant au concept de plan tangent	1163
12.28.4	Gradient et recherche du plan tangent	1163
12.29	Jacobienne	1168
12.29.1	Rappels et définitions	1168
12.30	Fonctions de classe C^1	1169
12.31	Différentielle et dérivée complexe	1178
12.31.1	Quelques règles de calcul	1181
12.32	Théorèmes des accroissements finis	1181
12.33	Fonctions Lipschitziennes	1182
12.34	Différentielles d'ordre supérieur	1184
12.34.1	Différentielle et dérivées partielles	1184
12.34.2	Application à valeurs dans les opérateurs	1188
12.34.3	Espaces d'applications multilinéaires et identifications	1189
12.34.4	Fonctions différentiables plusieurs fois	1193
12.34.5	Différentielle seconde, fonction de classe C^2	1194
12.34.6	Ordre supérieur	1197
12.35	Suites et séries : généralités	1200
12.35.1	Norme suprénum	1200
12.35.2	Convergence uniforme	1200
12.35.3	Série de fonctions	1203
12.36	Permuter limite et dérivée	1205

12.37 La fonction puissance	1212
12.37.1 Sur les naturels	1212
12.37.2 Sur les rationnels, racines	1214
12.38 Densité des polynômes	1230
12.38.1 Théorème de Stone-Weierstrass	1230
12.39 Primitive de fonction continue	1234
12.39.1 Dérivation de la fonction puissance (première)	1235
12.39.2 Équation fonctionnelle	1237
12.39.3 Dérivation de la fonction puissance (seconde)	1241
12.39.4 Vers les complexes	1242
12.40 Applications analytique entre espaces de Banach	1243
12.40.1 Série de puissance	1243
12.40.2 Applications analytiques	1244
12.40.3 Série de puissance $\mathbb{C}$	1248
12.40.4 L'opérateur d'inversion est analytique	1249
12.41 Polynômes de Taylor	1253
12.41.1 Fonctions « petit o »	1257
12.41.2 Autres formulations	1259
12.41.3 Formule et reste	1259
12.41.4 Reste intégral	1260
12.42 Développement limité autour de zéro	1260
12.42.1 Généralités	1260
12.42.2 Formule de Taylor-Young	1261
12.42.3 Règles de calcul	1263
12.43 Développement ailleurs qu'à l'origine	1265
12.44 Développement au voisinage de l'infini	1265
12.44.1 La fonction puissance : remarques pour la suite	1265
12.45 Fonctions réelles de deux variables réelles	1265
12.45.1 Limites de fonctions à deux variables	1266
12.45.2 Dérivées partielles	1267
12.45.3 Différentielle et accroissement	1267
12.46 Les fonctions à valeurs vectorielles	1268
12.47 Fonctions vectorielles de plusieurs variables	1268
12.48 Limites à plusieurs variables	1269
12.49 Champs de vecteurs	1272
12.49.1 Matrice jacobienne	1273
12.50 Divergence, rotationnel et l'opérateur nabla	1273
12.51 Interprétation de la divergence	1275
12.52 Quelques formules de Leibniz	1277
13 Analyse sur des groupes	1279
13.0.1 Groupe topologique	1279
13.1 Action de groupe et connexité	1280
13.2 Espaces de matrices	1283
13.2.1 Dilatations et transvections	1283
13.2.2 Connexité de certains groupes	1290
13.2.3 Densité	1291
13.2.4 Racine carrée d'une matrice hermitienne positive	1294
13.2.5 Racine carrée d'une matrice symétrique positive	1295
13.2.6 Décomposition polaires : cas réel	1296
13.2.7 Enveloppe convexe	1298
13.2.8 Décomposition de Bruhat	1300
13.3 Sous-groupes du groupe linéaire	1303

14 Tribus, théorie de la mesure, intégration	1307
14.1 Tribus	1307
14.1.1 Généralités	1307
14.1.2 Tribu engendrée	1308
14.1.3 Tribu induite	1309
14.2 Théorie de la mesure	1309
14.2.1 Mesure sur un ensemble de parties	1309
14.2.2 Mesure sur une algèbre de parties	1310
14.2.3 Mesure sur une tribu, espace mesuré	1312
14.2.4 Mesures sigma-finies	1312
14.2.5 Suite du texte	1313
14.2.6 Mesure extérieure	1319
14.3 Applications mesurables	1322
14.3.1 Propriétés	1322
14.3.2 D'une tribu à l'autre	1322
14.4 Tribu borélienne	1323
14.4.1 Applications continues et boréliennes	1325
14.4.2 Tribu de Baire	1327
14.5 Espace mesuré complet	1329
14.5.1 Partie négligeable	1329
14.5.2 Prolongement	1338
14.5.3 Mesure image	1340
14.5.4 Régularité d'une mesure	1341
14.5.5 Théorème de récurrence	1348
14.6 Mesurabilité des fonctions à valeurs réelles	1349
14.6.1 Fonctions à valeurs réelles sur un espace mesurable	1349
14.6.2 Fonction étagée	1356
14.6.3 Fonctions réelles à variables réelles	1359
14.7 Tribu produit	1360
14.7.1 Produit d'espaces mesurables	1360
14.7.2 Le cas des boréliens	1362
14.8 Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$	1363
14.8.1 Mesure et tribu de Lebesgue	1368
14.8.2 Propriétés de la mesure de Lebesgue	1369
14.8.3 Fonctions mesurables	1374
14.8.4 Ensemble de Vitali (non mesurable)	1374
14.8.5 Ensemble de Cantor	1375
14.8.6 Mesure positive sans intervalle	1377
14.9 Intégrale par rapport à une mesure	1378
14.9.1 Définition pour les fonctions à valeurs positives	1378
14.9.2 Premières propriétés	1380
14.9.3 Propriétés plus avancées	1383
14.9.4 Fonctions à valeurs réelles	1387
14.9.5 Additivité de l'intégrale	1388
14.9.6 Fonctions à valeurs vectorielles (dimension finie)	1389
14.9.7 Quelques propriétés	1392
14.9.8 Permuter limite et intégrale	1393
14.9.9 Additivité de l'intégrale de Lebesgue	1396
14.9.10 Produit d'une mesure par une fonction (mesure à densité)	1397
14.9.11 Mesure et topologie	1399
14.10 Mesure à densité	1402
14.10.1 Théorème de Radon-Nikodym	1402
14.10.2 Mesure complexe	1417

14.10.3	Théorème d'approximation	1418
14.11	Produit de mesures	1419
14.12	Tribu et mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$	1424
14.12.1	Propriétés d'unicité	1425
14.12.2	Régularité	1427
14.13	Propriétés de l'intégrale de Lebesgue	1427
14.13.1	Quelques limites dans les bornes	1428
14.13.2	Mesure de comptage et série	1431
14.13.3	Théorème de la moyenne	1433
14.14	Changement de variables dans une intégrale multiple	1434
14.14.1	Des lemmes	1434
14.14.2	Déterminant et mesure de Lebesgue	1435
14.14.3	Ensembles négligeables	1436
14.14.4	Parties et fonctions mesurables	1437
14.14.5	Le théorème et sa démonstration	1438
14.14.6	Exemples	1443
14.15	Changement d'espace mesuré	1443
14.16	Primitives et intégrales	1445
14.16.1	Théorème fondamental du calcul intégral	1446
14.16.2	Exemples et applications	1447
14.16.3	Intégrales impropres	1448
14.17	Théorème de Fubini-Tonelli et de Fubini	1450
14.17.1	Utiliser Fubini sur $\mathbb{R}^n$	1458
14.17.2	Absolue continuité et variation bornée	1459
14.17.3	Dérivation dans les bornes	1460
14.17.4	Permuter limite et dérivée	1462
15	Suites et séries de fonctions	1465
15.1	Séries de fonctions	1465
15.1.1	Intégration de séries de fonctions	1465
15.1.2	Différentiabilité	1467
15.2	Séries entières	1472
15.2.1	Disque de convergence	1472
15.2.2	Somme et produit de séries	1475
15.2.3	Séries entières et polynômes	1480
15.2.4	Critère de comparaison	1487
15.2.5	Convergence normale	1487
15.2.6	Unicité	1489
15.2.7	Dérivation	1490
15.2.8	Intégration	1493
15.3	Séries de Taylor	1493
15.3.1	Polynôme de Taylor d'une série entière	1494
15.3.2	Une majoration pour le reste	1494
15.3.3	Fonctions analytiques	1496
15.4	Algèbre engendrée par une matrice	1497
15.5	Exponentielle sur une algèbre normée	1498
15.5.1	Définition	1498
15.5.2	Différentielles	1500
15.5.3	Exponentielle de matrice	1503
15.6	Exponentielle et logarithme dans les réels	1506
15.6.1	L'équation différentielle	1506
15.6.2	Existence	1507
15.6.3	Le nombre de Neper e	1508
15.6.4	Application réciproque : logarithme	1510

15.6.5	Approximations numériques de e	1513
15.6.6	Résumé des propriétés de l'exponentielle	1514
15.6.7	Dérivée de la fonction puissance	1515
15.6.8	Dérivée du logarithme	1516
15.6.9	Taylor pour l'exponentielle	1516
15.6.10	Analycité	1517
15.6.11	Autres propriétés et petits calculs	1517
15.6.12	Taylor pour le logarithme	1517
15.6.13	Développements et calcul de limites	1521
15.6.14	Une petite intégrale	1521
15.7	Vitesses des puissances, de l'exponentielle et du logarithme	1522
15.7.1	Un peu de théorie	1522
15.7.2	Nombres premiers	1528
15.7.3	Quelques limites	1529
15.8	Trigonométrie hyperbolique	1533
15.9	Séries entières de matrices	1535
15.9.1	Différentiabilité	1535
15.10	Exponentielle de matrices	1537
15.10.1	Diagonalisabilité d'exponentielle	1538
15.11	Étude d'asymptote	1540
15.12	Développement en série	1541
15.12.1	Série génératrice d'une suite	1541
15.12.2	Développement en série et Taylor	1541
15.12.3	Resommer une série	1543
15.13	Séries entières de matrices	1548
15.13.1	Rayon de convergence	1548
15.13.2	Convergence et rayon spectral	1548
15.13.3	Exponentielle et logarithme de matrice	1550
15.13.4	Calcul effectif de l'exponentielle d'une matrice	1553
15.13.5	Opérateur d'inversion	1554
15.14	Lemme de Borel	1555
15.14.1	Fonctions plateaux, Urysohn, partition de l'unité	1555
15.14.2	Lemme de Urysohn	1558
15.14.3	Le lemme de Borel	1559
15.15	Nombres de Bell	1561
16	Représentations et caractères	1565
16.1	Représentations et caractères	1565
16.1.1	Crochet de dualité et transformée de Fourier	1567
16.1.2	Groupes non abéliens	1568
16.1.3	Représentations linéaires des groupes finis	1568
16.1.4	Module	1570
16.1.5	Structure hermitienne	1571
16.1.6	Caractères	1572
16.2	Équivalence de représentations et caractères	1572
16.2.1	Représentation régulière	1575
16.2.2	Caractères et représentations : suite et fin	1576
16.3	Représentation produit tensoriel	1578
16.4	Exemple sur le groupe symétrique	1579
16.5	Table des caractères du groupe symétrique S_4	1579
16.5.1	Calculs à partir de rien ou presque	1579
16.5.2	À propos de la représentation ρ_s	1581
16.5.3	À propos de la représentation ρ_u	1582

17 Encore de l'analyse (et c'est pas fini)	1585
17.1 Densité des polynômes	1585
17.2 Primitive et intégrale	1585
17.2.1 Théorème taubérien de Hardy-Littlewood	1586
17.2.2 Théorème de Müntz	1590
17.3 Intégrales convergeant uniformément	1592
17.3.1 Définition et propriété	1592
17.3.2 Critères de convergence uniforme	1593
17.4 Fonctions définies par une intégrale	1593
17.4.1 Continuité sous l'intégrale	1594
17.4.2 Le coup du compact	1595
17.4.3 Dérivabilité sous l'intégrale	1596
17.4.4 Dérivation et intégrale	1598
17.4.5 Différentiabilité sous l'intégrale	1599
17.5 Théorème d'Hadamard	1601
17.6 Deux théorèmes de point fixe	1602
17.6.1 Points fixes attractifs et répulsifs	1602
17.6.2 Picard	1603
17.7 Théorèmes de point fixes et équations différentielles	1606
17.7.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz	1606
17.8 Théorèmes d'inversion locale et de la fonction implicite	1614
17.8.1 Mise en situation	1614
17.8.2 Théorème d'inversion locale	1615
17.8.3 Théorème de la fonction implicite	1618
17.8.4 Exemple	1620
17.9 Décomposition polaire (régularité)	1621
17.10 Théorème de Von Neumann	1623
17.11 Recherche d'extrémums	1626
17.11.1 Extrema à une variable	1626
17.11.2 Extrema libre	1627
17.11.3 Extremums et Hessienne	1628
17.11.4 Un peu de recettes de cuisine	1630
17.11.5 Extrema liés	1631
17.12 Fonctions convexes	1633
17.12.1 Inégalité des pentes	1633
17.12.2 Convexité et régularité	1635
17.12.3 Dérivées d'une fonction convexe	1635
17.12.4 Graphe d'une fonction convexe	1637
17.12.5 Convexité et hessienne	1643
17.12.6 Quelques inégalités	1648
17.12.7 Norme l^p	1650
17.12.8 Hölder	1651
17.13 Algorithme du gradient à pas optimal	1656
17.14 Formes quadratiques, signature, et lemme de Morse	1660
17.15 Ellipsoïde de John-Loewner	1664
17.16 Prolongement de fonctions	1670
17.16.1 Encore du prolongement	1672
17.17 Complétion d'un espace métrique	1674
17.17.1 Principe des zéros isolés	1678
17.18 Un petit extra	1679
18 Trigonométrie, isométries	1683
18.1 Trigonométrie	1683
18.1.1 Définitions, périodicité et quelques valeurs remarquables	1683

18.1.2	Fonction puissance (pour les complexes)	1684
18.1.3	Formules de trigonométrie	1686
18.2	Trucs et astuces de calcul d'intégrales	1696
18.2.1	Quelques intégrales « usuelles »	1697
18.2.2	Reformer un carré au dénominateur	1699
18.2.3	Décomposition en fractions simples	1699
18.3	Très modeste approximation de π	1700
18.3.1	Les fonctions tangente et arc tangente	1701
18.3.2	La fonction arc sinus	1703
18.3.3	La fonction arc cosinus	1705
18.3.4	Une meilleure approximation de π	1707
18.3.5	Angle entre deux vecteurs	1707
18.3.6	Aire du parallélogramme	1708
18.4	Paramétrisation du cercle	1710
18.5	Cercle trigonométriques	1710
18.5.1	Bijection continue	1711
18.5.2	Inverse	1714
18.5.3	Cercle trigonométrique	1714
18.5.4	Du point de vue de la tribu, mesure et co.	1715
18.6	Exemples trigonométriques	1718
18.6.1	Quelques équations trigonométriques	1719
18.6.2	Développements en série	1719
18.7	Isométries de l'espace euclidien	1720
18.7.1	Structure du groupe $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$	1721
18.8	Isométries dans $\mathbb{R}^n$	1723
18.8.1	Préserver l'orientation	1727
18.9	Groupes finis d'isométries	1728
18.9.1	Points fixés par une affinité	1730
18.10	Classification des isométries dans $\mathbb{R}^2$	1731
18.10.1	Projection orthogonale	1731
18.10.2	Réflexions	1732
18.10.3	Translations et réflexions	1734
18.10.4	Rotations	1735
18.10.5	Rotation d'un angle donné	1738
18.10.6	Rotations vectorielles	1740
18.10.7	Matrice des transformations orthogonales	1742
18.10.8	Rotations, $\text{SO}(2)$ et matrice de rotation	1744
18.10.9	Rotation et application affine	1745
18.10.10	Angle orienté	1746
18.10.11	Angles et nombres complexes	1750
18.10.12	Polygone convexe	1754
18.10.13	Groupe diédral	1756
18.10.14	Applications : du dénombrement	1763
18.10.15	Classification	1764
18.10.16	Classification des isométries de $\mathbb{R}$	1767
18.10.17	Isométries du tétraèdre régulier	1767
18.10.18	Représentation de S_4 via les isométries du tétraèdre	1769
18.11	Transformations de Lorentz	1770
18.11.1	Sous-groupe fini d'isométries du plan	1773
18.11.2	Relations trigonométriques dans un triangle rectangle	1777
18.11.3	Pavages du plan	1779
18.12	Un peu de structure de $\text{O}(n)$	1794
18.12.1	Valeurs propres dans $\text{O}(n)$	1794

18.12.2	Sous-groupes finis de $SO(3)$	1797
18.13	Systèmes de coordonnées	1806
18.13.1	Coordonnées polaires	1806
18.13.2	Coordonnées cylindriques	1814
18.13.3	Coordonnées sphériques	1815
18.14	Calcul de limites	1816
18.14.1	Méthode des coordonnées polaires	1817
18.14.2	Méthode du développement asymptotique	1820
18.15	Quelques intégrales avec de la trigonométrie	1821
18.15.1	Changement de variables	1821
18.15.2	Coordonnées polaires	1822
18.15.3	Coordonnées cylindriques	1823
18.15.4	Un autre système utile	1824
18.16	Aire d'une surface de révolution	1826
18.17	Table de caractères du groupe diédral	1828
18.17.1	Représentations de dimension un	1828
18.17.2	Représentations de dimension deux	1828
18.17.3	Le compte pour n pair	1830
18.17.4	Le compte pour n impair	1830
19	Corps finis, racines de l'unité	1831
19.1	Le groupe des racines de l'unité dans les nombres complexes	1831
19.1.1	Le groupe	1831
19.1.2	Fonction indicatrice d'Euler	1834
19.1.3	Décomposition en éléments simples	1836
19.2	Chiffrement RSA	1837
19.2.1	Mise en place par Bob	1837
19.2.2	Chiffrement	1837
19.2.3	Déchiffrement	1838
19.2.4	Une imprudence à ne pas commettre	1838
19.2.5	Problèmes calculatoires	1839
19.2.6	La solidité de RSA	1839
19.2.7	Note non mathématique pour doucher l'enthousiasme	1839
19.3	Polynômes cyclotomiques	1839
19.3.1	Définitions et propriétés	1839
19.3.2	Nombres premiers	1844
19.4	Corps finis	1845
19.4.1	Théorème de Wedderburn	1845
19.4.2	Existence, unicité	1847
19.4.3	Symboles de Legendre et carrés	1850
19.4.4	Théorème de Chevalley-Waring	1855
19.4.5	Contenu d'un polynôme	1858
19.4.6	Théorème de l'élément primitif	1858
19.4.7	Construction de $\mathbb{F}_{p^n}$	1863
19.4.8	Exemple : étude de $\mathbb{F}_{16}$	1865
19.4.9	Polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$	1867
19.4.10	Matrices	1870
19.5	Constructions à la règle et au compas	1871
19.5.1	Quelques constructions	1871
19.5.2	Nombres constructibles	1873
19.5.3	Polygones constructibles	1875
20	Intégration sur des variétés	1881
20.1	Variétés	1881

20.1.1	Introduction	1881
20.1.2	Définition, carte	1881
20.1.3	Ancienne définition	1882
20.1.4	Espace tangent	1884
20.2	Intégration	1884
20.2.1	Le problème pour une intégration globale	1884
20.2.2	Intégrale sur une carte	1884
20.2.3	Quelques expressions pour l'élément de volume	1887
20.3	Intégrale sur une variété	1888
20.3.1	Mesure sur une carte	1888
20.3.2	Intégrale sur une carte	1889
20.3.3	Exemples	1890
20.3.4	Orientation	1890
20.4	Longueur, aire, volumes etc.	1892
20.4.1	Quelques aires faciles	1892
20.5	Autres théorèmes de points fixes	1894
20.5.1	Brouwer	1894
20.5.2	Théorème de Schauder	1899
20.5.3	Théorème de Cauchy-Arzella	1900
20.5.4	Théorème de Markov-Kakutani	1901
20.6	Intégrales curvilignes	1902
20.6.1	Chemins de classe C^1	1902
20.6.2	Intégrer une fonction	1903
20.6.3	Intégrer un champ de vecteurs	1904
20.6.4	Intégrer une forme différentielle sur un chemin	1904
20.6.5	Intégration d'une forme différentielle sur un chemin	1905
20.6.6	Interprétation physique : travail	1907
20.6.7	Intégrer un champ de vecteurs sur un bord en $2D$	1907
20.6.8	Intégrer une forme différentielle sur un bord en $2D$	1908
20.6.9	Intégrer une forme différentielle sur un bord en $3D$	1908
20.6.10	Intégrer un champ de vecteurs sur un bord en $3D$	1908
20.6.11	Dérivées croisées et forme différentielle exacte	1908
20.7	Surfaces paramétrées	1910
20.7.1	Graphe d'une fonction	1911
20.7.2	Intégrale sur une partie de $\mathbb{R}^m$	1912
20.8	Intégrales de surface	1912
20.8.1	Intégrale d'un champ de vecteurs	1912
20.9	Aires et intégrales	1913
20.9.1	Aire d'une surface paramétrée	1913
20.9.2	Intégrale d'une fonction sur une surface	1915
20.9.3	Intégrale d'une 2-forme	1915
20.10	Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface	1916
20.11	Divergence, Green, Stokes	1918
20.11.1	Théorème de la divergence	1919
20.11.2	Lacets et homotopie	1920
20.11.3	Formule de Green	1920
20.11.4	Formule de Stokes	1922
20.12	Résumé des intégrales vues	1923
20.12.1	L'intégrale d'une fonction sur les réels	1923
20.12.2	Intégrale d'une fonction sur un chemin	1924
20.12.3	Intégrale d'une fonction sur une surface	1924
20.12.4	Intégrale d'une fonction sur un volume	1924
20.12.5	Conclusion pour les fonctions	1925

20.12.6	Circulation d'un champ de vecteurs	1925
20.12.7	Flux d'un champ de vecteurs	1925
20.12.8	Conclusion pour les champs de vecteurs	1926
20.12.9	Attention pour les surfaces fermées !	1926
20.13	Formes différentielles exactes et fermées	1928
20.14	Théorème d'Abel angulaire	1930
20.15	Passage à la limite sous le signe intégral	1933
20.15.1	Intégrale en dimension un	1933
20.15.2	Intégrales convergentes	1934
20.15.3	La méthode de Rothstein-Trager	1934
20.16	Rappel sur les intégrales usuelles	1940
20.17	Intégrales le long de chemins	1940
20.17.1	Circulation d'un champ de vecteur	1940
20.18	Circulation d'un champ conservatif	1942
20.19	Intégration de fonction à deux variables	1944
20.19.1	Intégration sur un domaine rectangulaire	1944
20.19.2	Intégration sur un domaine non rectangulaire	1945
20.19.3	Changement de variables	1947
20.20	Les intégrales triples	1947
20.20.1	Volume	1949
20.21	Un petit peu plus formel	1950
20.21.1	Intégration sur un domaine non rectangulaire	1950
20.22	Aire et primitive	1952
20.22.1	Longueur d'arc de courbe	1952
20.22.2	Aire de révolution	1953
20.23	L'aire en dessous d'une courbe	1953
20.24	Propriétés des intégrales	1954
20.25	Techniques d'intégration	1955
20.25.1	Intégration par parties	1956
20.25.2	Changement de variables – pour trouver des primitives	1957
20.25.3	Changement de variables – pour calculer des intégrales	1959
20.25.4	Intégrations des fractions rationnelles réduites	1961
20.25.5	Quelques formules à connaître	1962
20.25.6	Taylor avec reste intégral	1962
20.25.7	Approximation de $\ln(2)$	1966
20.26	Constructions plus naïves de l'intégrale dans le cas réel	1967
20.26.1	Mesure de Lebesgue, version rapide	1967
20.26.2	Pavés et subdivisions	1968
20.26.3	Intégrale d'une fonction en escalier	1971
20.26.4	Intégrales partielles	1971
20.26.5	Réduction d'une intégrale multiple	1972
20.26.6	Propriétés de l'intégrale	1974
20.26.7	Intégrales multiples, cas général	1974
20.26.8	Réduction d'une intégrale multiple	1975
20.26.9	Intégrales sur des parties de $\mathbb{R}^2$	1976
20.26.10	Intégrales sur des parties de $\mathbb{R}^3$	1979
20.26.11	Fonctions et ensembles non bornés	1982
20.26.12	Lemme de Morse	1982
20.27	Autres intégrales sympathiques	1984
20.27.1	Intégrale de Wallis	1984
20.27.2	Formule de Stirling	1988
20.27.3	La fonction sinus cardinal, intégrale de Dirichlet	1991

21.1	Définitions	2001
21.2	Longueur d'arc	2001
21.3	Abscisse curviligne	2004
21.3.1	Formule intégrale de la longueur	2005
21.4	Suite du chapitre	2011
21.5	Autres exemples	2012
21.6	Élément de longueur	2013
21.6.1	Élément de longueur : cartésiennes	2013
21.6.2	Élément de longueur : polaires (1)	2013
21.6.3	Élément de longueur : polaires (2)	2014
21.6.4	Approximation de la longueur par des cordes	2016
21.7	Arc géométrique	2017
21.7.1	Abscisse curviligne et paramétrage normal	2019
21.7.2	Tangente à une courbe paramétrée	2024
21.8	Un peu de topologie	2025
21.9	Repère de Frenet	2028
21.9.1	Torsion	2030
21.10	Hors des coordonnées normales	2031
21.11	Tracer des courbes paramétriques dans $\mathbb{R}^2$	2034
21.12	Courbes planes	2035
21.12.1	Angle	2035
21.12.2	Courbure signée	2036
21.12.3	Degré, indice et homotopie	2039
21.13	Courbes fermées planes	2046
21.13.1	Cercle circonscrit	2046
21.13.2	Description locale	2048
21.13.3	Enveloppe convexe	2049
21.13.4	Courbure et convexité	2053
21.13.5	Théorème des quatre sommets	2054
21.13.6	Théorème d'Urysohn	2056
22	Géométrie hyperbolique	2061
22.1	Inversion	2061
22.1.1	Cercles perpendiculaires	2061
22.1.2	Inversion	2062
23	Espaces projectifs	2067
23.1	Sous espaces projectifs	2067
23.2	Espace projectifs comme « complétés » d'espaces affines	2070
23.3	Théorème de Pappus	2072
23.4	Homographies	2073
23.4.1	Homographies	2073
23.4.2	Le groupe projectif	2074
23.4.3	Repères projectifs	2075
23.4.4	Identifications $P(\mathbb{K}^2)$ vers $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$	2079
23.4.5	Birapport	2081
23.5	Coordonnées homogènes	2086
23.5.1	Curiosité : matrice de translation	2087
23.5.2	Dualité	2087
23.5.3	Polynômes	2089
23.6	La sphère de Riemann $P_1(\mathbb{C})$	2090
23.6.1	Éléments de géométrie dans $P_1(\mathbb{C})$	2091
23.6.2	Homographies	2094
23.6.3	Birapport	2100

23.6.4	Division harmonique	2103
23.6.5	Groupe circulaire	2107
23.6.6	Action du groupe modulaire	2110
24	Analyse vectorielle	2115
24.1	Le théorème de Green	2115
24.2	Théorème de la divergence dans le plan	2119
24.2.1	La convention de sens de parcours	2119
24.2.2	Théorème de la divergence	2120
24.3	Théorème de Stokes	2120
24.4	Théorème de Gauss	2122
24.5	Coordonnées curvilignes	2124
24.5.1	Base locale	2124
24.5.2	Importance de l'orthogonalité	2124
24.5.3	Coordonnées polaires	2126
24.5.4	Coordonnées cylindriques	2126
24.5.5	Coordonnées sphériques	2127
24.5.6	Gradient en coordonnées curvilignes	2127
24.5.7	Divergence en coordonnées curvilignes	2128
24.5.8	Laplacien en coordonnées curvilignes orthogonales	2131
24.5.9	Rotationnel en coordonnées curvilignes orthogonales	2131
24.6	Les formules	2132
24.6.1	Coordonnées polaires	2132
24.6.2	Coordonnées cylindriques	2132
24.6.3	Coordonnées sphériques	2133
25	Espaces de Hilbert	2135
25.1	Espaces de Hilbert	2135
25.1.1	Sous-espace vectoriel fermé ???	2138
25.2	Théorème de la projection	2139
25.3	Systèmes orthogonaux et bases	2142
25.3.1	Orthogonal d'une partie	2142
25.3.2	Dual, théorème de représentation de Riesz	2143
25.3.3	Séparabilité	2144
25.3.4	Base hilbertienne	2146
25.3.5	Décomposition dans une base hilbertienne	2152
25.3.6	Digression sur les normes opérateurs	2156
25.3.7	Applications linéaires et continuité	2157
25.4	Théorème de Kochen-Specker	2159
25.5	Théorème de Lax-Milgram	2160
26	Analyse complexe	2165
26.1	Fonctions holomorphes	2165
26.1.1	Équations de Cauchy-Riemann	2165
26.1.2	Intégrale sur un chemin dans $\mathbb{C}$	2169
26.1.3	Intégrales sur des chemins fermés	2169
26.1.4	Homotopie entre applications	2172
26.1.5	Intégrale et homotopie	2173
26.1.6	Théorème de Tietze (espace normal)	2175
26.2	Logarithme complexe	2178
26.2.1	La fonction argument	2178
26.2.2	Une définition possible du logarithme	2180
26.2.3	Pas plus de continuité	2183
26.2.4	Pas d'unicité : autres déterminations de l'argument	2184

26.2.5	Pas d'unicité : développement en série	2185
26.2.6	Pas d'unicité : laquelle choisir ?	2185
26.2.7	Logarithme comme primitive	2186
26.2.8	Logarithme sur un chemin	2187
26.2.9	Lacets, indice et homotopie	2190
26.2.10	Théorème de Cauchy et analytité	2196
26.2.11	Théorème de Brouwer en dimension 2	2200
26.2.12	Principe des zéros isolés	2201
26.2.13	Prolongement de fonctions holomorphes	2203
26.2.14	Théorème de Runge	2203
26.3	Intégrales de fonctions holomorphes	2205
26.3.1	Holomorphie sous l'intégrale	2206
26.3.2	Mesure de Radon	2210
26.4	Conditions équivalentes à l'holomorphie	2212
26.5	Limites, séries et dérivée	2213
26.6	Singularités, pôles et méromorphe	2213
26.7	Dénombrement des solutions d'une équation diophantienne	2218
26.8	Fonctions d'Euler	2224
26.8.1	Euler et factorielle	2227
26.9	Exponentielle et logarithme complexe	2227
26.9.1	Propriétés de l'exponentielle	2227
26.9.2	Intégrale de Fresnel	2228
26.10	Théorème de Weierstrass	2231
26.11	Analyse complexe en plusieurs variables	2232
27	Analyse fonctionnelle	2233
27.1	Théorème d'isomorphisme de Banach	2233
27.2	Théorème d'Ascoli	2233
27.3	Espaces de Lebesgue L^p	2241
27.3.1	Généralités	2241
27.3.2	Un peu de convergence de suites	2245
27.3.3	L'espace L^∞	2246
27.3.4	Quelques identifications	2248
27.3.5	Inégalité de Young, Jensen, Hölder et de Minkowski	2249
27.3.6	Inégalité de Minkowski	2253
27.3.7	Ni inclusions ni inégalités	2267
27.3.8	Complétude	2269
27.3.9	Théorèmes d'approximation	2274
27.3.10	Densité des fonctions infiniment dérivables à support compact	2276
27.3.11	Approximation	2279
27.3.12	Partie uniformément intégrable	2280
27.4	Autres résultats de convergence	2281
27.5	Convolution	2282
27.5.1	Fonction plateau, lemme d'Urysohn	2286
27.5.2	Partition de l'unité	2288
27.5.3	Approximation de l'unité	2289
27.6	Intégrale sur des variétés	2291
27.6.1	Formes différentielles	2291
27.6.2	Intégrale d'une fonction sur une sous-variété	2292
27.6.3	Densité des polynômes trigonométriques	2293
27.7	Espaces L^2 , généralités	2294
27.8	L'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$	2296
27.9	L'espace $L^2(S^1)$	2296
27.9.1	Espace mesuré	2297

27.9.2	Topologie	2298
27.9.3	Système trigonométrique	2304
27.9.4	Convolution	2305
27.9.5	Approximation de l'unité	2307
27.9.6	Base hilbertienne (suite des polynômes trigonométriques)	2311
27.9.7	Convolution, bis	2313
27.10	Sur $[0, 2\pi[$	2313
27.11	Des inégalités	2313
27.11.1	c-r inégalité	2314
27.11.2	Inégalité de Hanner	2316
27.11.3	Inégalités de Clarkson	2322
27.12	Théorème de la projection normale	2326
27.12.1	Espace uniformément convexe	2326
27.12.2	Uniforme convexité des espaces de Lebesgue	2328
27.12.3	Théorème de la projection normale	2329
27.13	Jauge	2331
27.14	Théorèmes de Hahn-Banach	2332
27.14.1	Applications $\mathbb{R}$ -linéaires et $\mathbb{C}$ -linéaires	2332
27.14.2	Hahn-Banach, théorème d'extension dominée	2335
27.14.3	Hyperplan séparateur	2338
27.14.4	Prolongement de fonctionnelles (dimension finie)	2340
27.14.5	Prolongement de fonctionnelles (dimension infinie)	2343
27.15	Théorème de Tietze	2345
27.15.1	Pas de bicontinues entre dimensions différentes	2348
27.16	Dualité, réflexivité et théorème de représentation de Riesz	2351
27.16.1	Le théorème de Jordan	2366
27.16.2	Théorème de Jordan	2379
27.17	Topologie faible	2379
27.17.1	Bases de topologie	2381
27.17.2	Convergence	2382
27.17.3	Helly et Goldstine	2385
27.17.4	Banach-Alaoglu	2388
27.17.5	Espace de Banach réflexif, Kakutani	2391
27.17.6	Espaces L^∞	2393
27.18	Espace de Schwartz	2393
27.18.1	Topologie	2395
27.18.2	Produit de convolution	2397
27.19	Théorème de Montel	2397
27.20	Espaces de Bergman	2399
28	Séries de Fourier	2403
28.1	Densité des polynômes trigonométriques	2403
28.1.1	Convergence pour les fonctions continues (via Weierstrass)	2403
28.1.2	Convergence pour les fonctions continues (via Fejér)	2403
28.1.3	Densité dans L^p	2407
28.1.4	Suite équirépartie, critère de Weyl	2407
28.2	Fonctions de Dirichlet	2410
28.3	Coefficients et série de Fourier	2411
29	Transformation de Fourier	2415
29.1	Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^d)$	2416
29.1.1	Formule sommatoire de Poisson	2419
29.2	Suite régularisante	2422
29.3	Dérivation dans les bornes	2424

29.4	Transformée de Fourier dans l'espace de Schwartz	2424
29.4.1	Quelques transformées de Fourier	2427
29.5	Intégrales et fonctions nulles	2429
29.6	L'espace de Lebesgues $L^2([a, b])$	2433
29.7	Sur $[-T, T[$	2440
29.7.1	Le cas dans $[0, 2\pi]$	2440
29.7.2	À propos des coefficients	2443
29.7.3	Le contre-exemple que nous attendions tous	2445
29.8	Série de Laurent	2448
29.8.1	Inégalité isopérimétrique	2453
29.8.2	Formule d'inversion	2454
29.9	Transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^d)$	2458
29.9.1	Le problème	2458
29.9.2	Extension de $L^1 \cap L^2$ vers L^2	2459
30	Distributions	2463
30.1	Dérivée faible	2463
30.1.1	Dérivée partielle au sens faible	2463
30.1.2	Dérivée faible partielle	2465
30.1.3	Formules de Leibniz	2466
30.2	Topologie et convergence sur des espaces de fonctions	2468
30.2.1	Limite inductive	2468
30.2.2	Les espaces classiques	2468
30.2.3	Espaces de fonctions et topologie inductive	2474
30.2.4	Convergence dans les fonctions test	2474
30.3	Distributions	2477
30.3.1	Multiplication d'une distribution par une fonction	2479
30.3.2	Dérivée de distribution	2480
30.3.3	Ordre et support d'une distribution	2481
30.4	L'espace $C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d))$	2484
30.4.1	Dérivation	2486
30.5	Une équation de distribution	2487
30.6	Localisation, principe de recollement	2488
30.7	Permuter distributions, dérivées et intégrales	2492
30.8	Distributions tempérées	2497
30.8.1	Topologie	2499
30.8.2	Distributions associées à des fonctions	2499
30.8.3	Composition avec une fonction	2500
30.8.4	Transformée de Fourier d'une distribution tempérée	2500
30.8.5	Convolution d'une distribution par une fonction	2500
30.8.6	Approximation de la distribution de Dirac	2501
30.8.7	Peigne de Dirac	2504
30.9	L'espace $C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$	2505
30.9.1	Propriétés générales	2505
30.9.2	Dérivation	2508
31	Espaces de Sobolev, équations elliptiques	2511
31.1	Espaces de Sobolev	2511
31.1.1	Sur un intervalle de $\mathbb{R}$	2511
31.1.2	Sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$	2516
31.1.3	Espace de Sobolev fractionnaire	2518
31.2	Trace	2520
31.3	Théorème de plongement	2523

32 Équations différentielles ordinaires	2527
32.1 Équation homogène, solution particulière	2528
32.2 Que faire avec $f(z)dz = g(t)dt$?	2529
32.3 Équations linéaires du premier ordre	2530
32.3.1 Pourquoi la variation des constantes fonctionne toujours ?	2532
32.4 Équations à variables séparées	2533
32.4.1 La méthode rapide	2533
32.4.2 La méthode plus propre	2534
32.4.3 Les théorèmes	2534
32.5 Équations linéaires d'ordre supérieur	2537
32.5.1 Équations et systèmes linéaires à coefficients constants	2537
32.5.2 Si les coefficients ne sont pas constants ?	2538
32.6 Système d'équations linéaires	2538
32.6.1 La magie de l'exponentielle...	2538
32.6.2 ...mais la difficulté	2539
32.6.3 La recette	2539
32.6.4 Système d'équations linéaires avec matrice constante	2540
32.6.5 Système d'équations linéaires avec matrice non constante	2540
32.7 Réduction de l'ordre	2541
32.8 Autour de Cauchy-Lipschitz	2543
32.8.1 Fuite des compacts et explosion en temps fini	2543
32.8.2 Écart entre deux conditions initiales	2545
32.8.3 Flot d'un champ de vecteurs	2546
32.8.4 Stabilité de Lyapunov	2560
32.8.5 Système proies-prédateurs de Lotka-Volterra	2564
32.9 Équation du second ordre	2567
32.9.1 Wronskien	2567
32.9.2 Avec second membre	2568
32.9.3 Équation $y'' + q(t)y = 0$	2568
32.9.4 Équation de Hill	2570
32.10 Différents types d'équations différentielles	2573
32.10.1 Équation homogène	2573
32.10.2 Équation de Bernoulli	2573
32.10.3 Équation de Riccati	2573
32.10.4 Équation différentielle exacte	2574
32.11 Distributions pour les équations différentielles	2575
32.11.1 Équation de Schrödinger	2575
32.12 Équations différentielles du premier ordre	2578
32.13 Premier ordre, variables séparables	2581
32.14 Équations différentielles linéaires du premier ordre	2583
32.14.1 Méthode de variation de la constante	2585
32.15 Équations différentielles linéaires du second ordre	2586
32.15.1 Équations différentielles linéaires du second ordre homogènes à coefficients constants	2586
32.15.2 Linéaires du second ordre à coefficients constants, non homogènes	2588
32.16 Fonction de Green	2589
33 Équations aux dérivées partielles	2593
33.1 Symbole principal, équation des caractéristiques	2593
33.2 Méthode des caractéristiques pour l'ordre 1	2593
33.2.1 Un exemple complet un peu minimal	2594
33.2.2 Un théorème d'existence et d'unicité	2596
33.3 Méthode des caractéristiques pour l'ordre 2	2600
33.3.1 Principe général	2600

33.3.2	Exemple : l'équation d'onde	2601
33.4	Classification des équations du second ordre	2602
33.4.1	Problème au limite	2603
33.5	Principe du maximum	2604
33.6	Quelques exemples	2608
33.6.1	Un changement de variables	2608
34	Numérique	2611
34.1	Introduction	2611
34.2	Représentations numériques	2611
34.2.1	Entier relatif en complément à deux (binaire)	2611
34.2.2	Représentation en virgule flottante	2613
34.2.3	Simple précision, IEEE-754	2613
34.3	Problèmes pour écrire des nombres	2616
34.3.1	Troncature : la base	2616
34.3.2	Troncature : le drift	2617
34.3.3	Quelques bonnes règles	2618
34.3.4	Erreur de "cancellation"	2618
34.3.5	Calcul d'une dérivée	2620
34.3.6	Erreur d'absorption	2620
34.4	Conditionnement et stabilité	2621
34.4.1	Comment choisir et penser le K ?	2624
34.5	Un peu de points fixes	2625
34.5.1	Choix de la fonction à point fixe	2625
34.5.2	Convergence quadratique	2626
34.5.3	Convergence	2628
34.6	Méthode de Newton	2629
34.6.1	« Justification » par la formule de Taylor	2629
34.6.2	« Justification » par points fixes	2630
34.6.3	Convergence de la méthode de Newton	2631
34.6.4	Racine carrée par la méthode de Newton	2632
34.6.5	Formalisation de l'algorithme	2633
34.6.6	Caractéristiques	2634
34.6.7	Exemple de la racine carrée	2634
34.6.8	Si multiplicité	2635
34.6.9	Et la dérivée ?	2635
34.6.10	Méthode de Newton : le cas général	2635
34.7	Estimation de l'ordre de convergence	2637
34.8	Autres méthodes	2638
34.8.1	Méthode de Schröder	2638
34.8.2	Halley	2638
34.9	Méthode des sécantes variables	2638
34.9.1	Aitken	2639
34.10	Équations algébrique	2640
34.10.1	Résoudre un système linéaire	2640
34.10.2	Caractéristiques	2640
34.10.3	Définitions	2641
34.11	Équations non linéaires	2641
34.11.1	Méthode de bisection	2643
34.12	Efficacité	2645
34.13	Exemples sous forme d'exercices	2645
34.14	Approximations de fonctions	2649
34.14.1	Critère d'interpolation	2649
34.14.2	Base de Newton	2650

34.14.3	Méthode des minimums quadratiques	2651
34.14.4	Notre espace de Hilbert	2652
34.14.5	Droite de régression	2653
34.15	Conditionnement d'une matrice	2654
34.15.1	Perturbation du vecteur	2656
34.15.2	Perturbation de la matrice	2658
34.16	Système linéaires (généralités)	2659
34.16.1	Les méthodes directes	2659
34.16.2	Méthodes itératives	2660
34.17	Système linéaires (méthodes directes)	2660
34.17.1	Inversion de matrice triangulaire	2660
34.17.2	Transformation gaussienne	2661
34.17.3	Méthode de Gauss pour résoudre des systèmes d'équations linéaires	2662
34.17.4	Méthode de Gauss sans pivot (décomposition LU)	2663
34.17.5	Matrice de permutation élémentaire	2667
34.18	Méthode de Gauss avec pivot partiel (décomposition PLU)	2668
34.18.1	L'idée	2668
34.18.2	Le théorème	2669
34.18.3	D'un point de vue algorithmique	2672
34.18.4	Exemples	2674
34.19	Résolution de systèmes linéaires (suite)	2677
34.19.1	Déterminant	2677
34.19.2	Plusieurs termes indépendants	2677
34.19.3	Cholesky	2678
34.20	Système linéaire (méthodes itératives)	2681
34.20.1	La méthode générale	2682
34.20.2	Jacobi	2682
34.20.3	Gauss-Seidel	2682
34.20.4	Autres	2682
34.21	Indices connectés, matrice irréductible	2682
34.22	Localisation des valeurs propres	2684
34.22.1	Matrices à diagonale dominante	2687
34.22.2	M-matrice	2689
35	Méthode des différences finies	2693
35.1	Problèmes de dimension un	2693
35.1.1	Un schéma à cinq points	2694
35.1.2	Exemple	2699
35.2	Problèmes de dimension deux	2699
35.2.1	Discretisation en croix	2700
35.2.2	Discretisation en carré	2701
35.2.3	Résolution de la discrétisation en croix	2702
35.3	Consistance, convergence	2704
35.3.1	Définitions, mise en place	2704
35.3.2	Exemple	2705
35.3.3	Consistance, stabilité et convergence	2707
35.3.4	Exemple : schéma à cinq points, laplacien en croix	2708
35.4	Autres laplaciens	2709
35.4.1	Travail avec le laplacien à 9 points	2712
36	Variables aléatoires et théorie des probabilités	2713
36.1	Espace de probabilité	2713
36.2	Variables aléatoires	2714
36.2.1	Loi d'une variable aléatoire	2714

36.2.2	Indépendance	2715
36.2.3	Lois conjointes et indépendance	2717
36.2.4	Densité jointe	2721
36.2.5	Espérance	2724
36.2.6	Moment	2726
36.2.7	Somme et produit de variables aléatoires indépendantes	2726
36.2.8	Variance	2728
36.2.9	Covariance	2730
36.2.10	Probabilité conditionnelle : événements	2730
36.2.11	Espérance conditionnelle	2733
36.2.12	Probabilité conditionnelle : tribu	2741
36.2.13	Variables de Rademacher indépendantes	2743
36.2.14	Un petit paradoxe	2745
36.2.15	Inégalité de Jensen	2751
36.2.16	Fonction de répartition	2752
36.2.17	Fonction caractéristique	2752
36.2.18	Fonction génératrice des moments, transformée de Laplace	2753
36.2.19	Théorème de transfert	2754
36.2.20	Changement de variables	2757
36.3	Convergence	2757
36.3.1	Convergence et fonction caractéristique	2762
36.4	Loi des grands nombres, théorème central limite	2767
36.4.1	Loi des grands nombres	2767
36.4.2	Théorème central limite	2769
36.4.3	Marche aléatoire	2772
36.5	Les lois usuelles	2773
36.5.1	Loi de Bernoulli	2773
36.5.2	Loi binomiale	2773
36.5.3	Loi multinomiale	2774
36.5.4	Loi géométrique	2775
36.5.5	Loi de Poisson	2775
36.5.6	Loi exponentielle	2776
36.5.7	Approximation de la binomiale par une Poisson	2780
36.5.8	Loi de Poisson et loi exponentielle	2780
36.5.9	Loi normale	2782
36.5.10	Vecteurs gaussiens	2783
36.5.11	Variable aléatoire de Rademacher	2788
36.5.12	Loi de Student	2789
36.5.13	Indépendance, covariance et variance de somme	2790
36.6	Estimation des grands écarts	2790
36.7	Simulations de réalisations de variables aléatoires	2794
36.7.1	Générateur uniforme	2794
36.7.2	Simulation par inversion	2795
36.7.3	Algorithme de Box-Muller	2796
36.7.4	Méthode du rejet	2796
36.7.5	Simuler une loi géométrique à l'ordinateur	2798
36.7.6	Simuler une loi exponentielle à l'ordinateur	2798
36.7.7	Simuler une loi de Poisson à l'ordinateur	2798
36.8	Sage	2799
36.8.1	Loi exponentielle	2799
36.8.2	Inverser des lois	2799
36.9	Monte-Carlo	2800
36.9.1	Intervalle de confiance	2801

36.10 Résultats qui se démontrent avec des variables aléatoires	2803
36.10.1 Nombres normaux	2803
36.10.2 Théorème de Bernstein	2805
37 Statistiques	2811
37.1 Notations et hypothèses	2811
37.2 Modèle statistique	2811
37.3 Modèles d'échantillonnages	2814
37.4 Estimation ponctuelle	2817
37.5 Statistiques et estimateurs	2819
37.5.1 Qualité des estimateurs	2819
37.5.2 Méthode des moments	2820
37.5.3 Méthode de substitution	2821
37.5.4 Méthode du maximum de vraisemblance	2822
37.5.5 Exemples sous forme d'exercices	2822
37.5.6 Estimation d'une fonction de répartition	2824
37.5.7 Exemples sous forme d'exercices	2825
37.5.8 Espérance et variance d'un estimateur	2826
37.6 Estimation par intervalle de confiance	2827
37.6.1 Région de confiance	2830
37.6.2 Fonction pivotale	2830
37.6.3 Sondage de proportion	2833
37.7 Estimer une densité lorsqu'on ne sait rien	2834
37.7.1 Distance entre des mesures	2835
37.7.2 Estimateur par fenêtres glissantes	2836
37.8 Test d'hypothèses, prise de décision	2838
37.8.1 Exemple : qualité des pièces d'usine	2838
37.8.2 Exemple : la résistance d'un fil	2838
37.8.3 Vocabulaire et théorie	2839
37.8.4 Risque de première et seconde espèce	2840
37.8.5 Modèle paramétrique de loi gaussienne	2841
37.9 Tests paramétriques	2842
37.10 Tests d'adéquation	2843
38 Chaînes de Markov à temps discret	2849
38.1 Généralités	2849
38.1.1 Matrice stochastique	2851
38.2 Chaînes de Markov sur un ensemble fini	2852
38.2.1 Graphe de transition	2854
38.2.2 Nombre de visites	2854
38.2.3 Récurrent et transient	2856
38.2.4 Chaînes irréductibles	2857
38.2.5 Périodique et irréductible	2862
38.3 Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$	2864
38.3.1 Chaînes de Markov homogènes	2866
38.3.2 Chaîne de Markov définie par récurrence	2868
38.4 Classification des états	2872
38.5 Mesure invariante	2874
38.6 Convergence vers l'équilibre	2876
38.7 Processus de Galton-Watson	2877
39 Martingales	2881
39.1 Convergence de martingales	2881
39.2 Temps d'arrêt et martingale terminée	2884

39.2.1	Nombre de montées	2884
39.2.2	Théorèmes d'arrêt	2888
39.3	Décomposition de martingales	2891
39.4	Problème de la ruine du joueur	2892
39.4.1	Le cas où la pièce est truquée	2893
39.4.2	Le cas où la pièce est non truquée	2897
39.4.3	Un petit complément	2899
40	Processus de Poisson	2901
40.1	Processus de Poisson	2901
40.1.1	Processus a-Poisson	2901
40.1.2	Processus c-Poisson	2901
40.1.3	Processus n-Poisson	2902
40.1.4	Processus o-Poisson	2902
40.1.5	Équivalence de définitions	2917
40.1.6	Estimateurs	2917
40.2	Quelques trucs sur la simulation	2919
40.2.1	Le théorème central limite pour Markov	2919
40.2.2	Feuille 5	2919
40.2.3	Feuille 6	2919
40.2.4	Feuille 7	2920
40.2.5	Simuler des lois conditionnelles	2920
41	Langages	2921
41.1	Alphabets et mots	2921
41.2	Langages	2922
42	Utilisation dans les autres sciences	2925
42.1	Démystification du MRUA	2925
42.1.1	Preuve de la formule	2925
42.1.2	Interprétation graphique	2926
42.2	Relativité en mécanique newtonienne	2926
42.2.1	Relativité du mouvement	2926
42.2.2	Bob et Alice	2926
42.3	Invariance de la vitesse de la lumière	2927
42.3.1	Champ de gravitation et électrique	2927
42.3.2	Support du champ : pas d'éther	2927
42.3.3	Le problème	2928
42.4	Conséquences	2928
42.4.1	Ligne d'univers	2928
42.4.2	Transformations de Lorentz	2929
42.4.3	Conditions d'existence	2932
42.4.4	La notion d'intervalle	2933
42.4.5	Le cône de lumière d'un point	2933
42.4.6	Contraction des longueurs	2934
42.4.7	Dilatation des intervalles de temps	2934
42.4.8	Invariance de l'intervalle	2935
42.4.9	Vitesse limite	2939
42.5	Applications	2939
42.5.1	Le GPS	2940
42.5.2	Les ondes électromagnétiques	2940
42.6	Mécanique relativiste	2940
42.6.1	Des problèmes, toujours des problèmes	2940
42.6.2	Loi d'addition des vitesses	2941

42.6.3	L'action d'une force	2941
42.6.4	Équivalence entre la masse et l'énergie	2943
42.7	Principe de correspondance	2943
43	Exemples avec Sage	2945
43.1	Graphiques	2945
43.1.1	Autres	2945
44	Épilogue : la constante de Weiner	2965
44.0.1	Résultats prouvés dans le Frido	2965
44.0.2	Autres résultats	2966
44.0.3	Conjectures	2966
45	Développements possibles	2967
45.1	Algèbre et géométrie	2967
45.2	Analyse	2971
45.3	Anciennes leçons	2974
46	GNU Free Documentation License	2983
	Bibliographie	2991

Index

- λ -système, 1316
- σ -compact, 555
- k -forme différentielle, 1139
- p -groupe, 427
- p -Sylow, 428
- q -orthogonal, 711
- Abel
 - angulaire, 1930
 - convergence radiale, 1487
- Abel
 - angulaire, 1930
 - convergence radiale, 1487
- abélianisé, 306
- abscisse
 - curviligne, 2019
- absolument continue, 1459
- absorbant, 2872
- accélération d'un chemin, 2001
- accroissement, 1267
- accroissements finie
 - dérivée partielle, 950
- action, 261
 - adjointe, 315
 - de groupe
 - Wedderburn, 1845
 - domaine fondamental, 317
 - fidèle, 314
 - libre, 320
 - transitive, 320
- action continue, 1280
- action de groupe, 666
 - sur des matrices, 1982
- action fidèle, 314
- action transitive, 320
- adjoint, 674
- affine
 - application, 990
 - espace, 985
 - sous-espace, 994
- aire, 1978
- aire dans $\mathbb{R}^2$, 1892
- algèbre, 255
 - de parties, 1310
 - engendrée, 255
- algèbre de Banach, 608
- algèbre engendrée, 1497
- algébrique, 483
- algébriquement
 - indépendant, 526
- algorithme, 2641
 - consistant, 2641
 - facteurs invariants, 410
 - fortement consistant, 2641
 - stable, 2641
- algorithme convergent, 2641
- alignement
 - dans un espace projectif, 2068
- alphabet, 2921
- alterné
 - groupe, 443
 - polynôme, 522
- analytique entre espaces de Banach, 1244
- angle
 - d'une courbe, 2038
 - entre deux droites, 1752
 - orienté de vecteurs, 1747
- angle entre deux vecteurs, 1707
- anneau, 142
 - $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, 437, 1837, 1845, 1849
 - à division, 455
 - de séries formelles, 1562
 - élément régulier, 144
 - euclidien
 - facteurs invariants, 410
 - factoriel, 343
 - noethérien, 348
 - principal, 463, 699
 - utilisation, 464
 - quotient par un idéal, 215
- Anneau
 - $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
 - polynôme cyclotomique, 1841
- anneau commutatif, 142
- anneau intègre, 217
- anneau principal
 - Bézout, 345
- anneau topologique, 587

- anneau valué, 146
- apériodique
 - état d'une chaîne de Markov, 2863
- application, 119
 - de classe C^k , 951
 - définie positive, 705
 - différentiable, 945, 951, 1145, 1182, 1616, 1982
 - extrémums lié, 1631
 - en escalier, 1970
 - linéaire
 - théorème de Banach-Steinhaus, 902
 - mesurable, 1315
 - ouverte, 602
 - semi-définie positive, 705
 - tangente, 1150
- application k -linéaire, 657
- application k -multilinéaire, 657
- application affine, 714
- application bilinéaire, 704
- application bloc-diagonale, 858
- application multilinéaire
 - décomposable, 919
- application ouverte, 904
- application quotient, 544
- application réciproque, 120
- applications homotopes, 2172
- applications linéaires semblables, 728
- approximation
 - de fonctions
 - par des polynômes, 2806
 - de l'unité, 2289
 - par polynômes, 1587
 - polynomiale, 2203
- arc
 - géométriques, 2018
 - paramétré, 2001
- arc cosinus, 1706
- arc sinus, 1704
- arc tangente, 1702
- archimédien, 161
 - $\mathbb{N}$, 165
 - $\mathbb{Q}$, 271
 - $\mathbb{R}$, 287
- associée
 - subdivision, 1970
- associés
 - éléments d'un anneau, 340
- asymptotiquement pivotale, 2830
- attractif
 - point fixe, 1602
- automorphisme, 539
 - d'espace vectoriel, 380
- automorphisme de groupes, 141
- axiome
 - du choix, 119
- Baire
 - tribu, 1327
- Baire
 - tribu, 1327
- barycentre
 - cas affine, 996
 - cas vectoriel, 1728
 - enveloppe convexe, 1000
- base, 370
 - d'un module, 253
 - de Newton, 2650
 - de topologie
 - dénombrable, 573
 - espace métrique, 573
 - duale, 418
 - espace préhilbertien, 2146
 - hilbertienne, 2146
 - utilisation, 2453
 - locale, 2124
- base associée à un repère cartésien, 986
- base canonique de $\mathbb{R}^m$, 374
- base de topologie, 527
- base de topologie et continuité, 538
- base de voisinages, 528
- base orthonormée, 717
- base préduale, 420
- Bergman (espace), 2399
- Bernoulli, 2773
 - somme, 2791
- Berry-Esséen (borne), 2771
- Bessel
 - inégalité, 2146
- Bézout
 - calcul effectif, 328
 - polynômes, 476
- biais
 - d'estimateur, 2820
- bien
 - conditionné, 2622
 - enchainé, 630
- biholomorphe, 2232
- bijection, 120
- bilinéaire, 657
- binormale, 2029
- birapport, 2081
- birapport dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, 2100
- birégulier
 - point sur une courbe, 2016
- Bolzano-Weierstrass
 - espaces métriques, 574

- bon
 - ordre, 123
- bonne seminorme, 2469
- bord, 567
- borélienne
 - fonction, 1325
 - tribu, 1323
- boréliens, 1323
- borné, 573
 - partie de V , 677
 - temps d'arrêt, 2884
- bornée
 - différentielle, 1169
 - partie de $\mathbb{R}^m$, 1048
 - suite, 793
- boule
 - ouverte, 563
- boule dans un corps, 267
- boule fermée, 569
- Bruhat (décomposition), 1300
- Burnside
 - formule, 318
- canonique
 - base, 374
 - décomposition, 130
 - espace affine, 986
- canonique
 - base, 374
 - décomposition, 130
 - espace affine, 986
- Cantor
 - ensemble, 1375
- caractère, 1572
 - abélien, 1565
 - de S_4 , 1579
 - groupe diédral, 1828
 - irréductible, 1572
- caractéristique
 - d'un anneau, 255
 - d'une équation différentielle, 2593
 - polynôme, 701
 - sous-groupe, 197
- cardinal, 180
- cardioïde, 2015
- carré
 - dans un corps fini, 1850
- carrée
 - matrice, 388
- carte, 1882
- Cauchy
 - critère
 - uniforme, 884
 - déterminant, 668
 - formule, 2196
 - suite, 619
 - théorème, 427
- Cauchy-continue, 1041
- Cauchy-Riemann, 2166
- Cauchy-Schwarz, 827, 2137
- Cayley
 - théorème, 427
- cellule d'un pavage, 1970
- centrale (application), 1572
- centralisateur, 196, 212
- centre
 - d'un anneau, 212
 - d'un groupe, 197
 - d'une rotation, 1736
- cercle
 - circonscrit à une courbe, 2046
 - dans la sphère de Riemann, 2092
- cercle-droite, 2092
- cercles
 - perpendiculaires, 2061
- Cesàro
 - moyenne, 896
- chaîne, 630
 - de Markov, 2849
 - convergence, 2876
 - finie, 2852
 - homogène, 2849
 - irréductible, 2852
 - récurrente positive, 2860
- chaîne de Markov apériodique, 2863
- chaîne de Markov régulière, 2852
- champ
 - conservatif, 1942
 - de vecteurs, 1904
- champ de vecteur conservatif, 1907
- champ dérivant d'un potentiel, 1942
- changement de variable, 2018
- Chasles, 985
- chemin, 1920
 - dans $\mathbb{R}^p$, 2001
- chemin C^1 par morceaux, 1902
- chemin de Jordan, 1920
- chemin régulier, 1920
- circulation, 1940
- classe
 - d'association, 340
 - de conjugaison, 196
- classe d'association, 340
- classe de conjugaison
 - dans S_4 , 203
- clôture algébrique, 484
- codimension, 375

- coefficient binomial, 231
- coefficients
 - de Fourier, 2293
- coefficients binomiaux, 231
- coefficients de Fourier, 2305
- coercion, 2160
- coercive, 1656
- colinéarité, 2067
- combinaison
 - convexe, 996
- combinatoire, 1763
- commutant, 769
- commutateur
 - dans un groupe, 305
- compacité, 574, 626, 631, 2207, 2231
 - sous-groupes du groupe linéaire, 1303
 - théorème de Dini, 1202
 - utilisation, 1666
 - théorème de Montel, 2398
- compact, 554, 680
 - arc paramétré, 2001
 - boule unité, 790
 - et fonction continue, 575, 802
 - fermé et borné, 789
 - intervalle $[a, b]$, 788
 - le coup du, 1595
 - localement, 570
 - opérateur, 2233
 - produit dénombrable, 632
 - produit fini, 631
 - quasi, 554
 - séquentiellement, 555
 - suite exhaustive, 628
- compacts et fermés, 557
- complément
 - à deux, 2612
- complémentaire, 118
- complet
 - $\mathbb{R}$
 - corps, 292
 - espace métrique, 620
 - corps, 267
 - espace mesuré, 1329
 - espace topologique, 607
 - métrique, 608
- complété
 - d'un espace métrique, 1676
- complète
 - famille de projecteurs, 254
- complétion
 - projective, 2070
- complétion d'espace métrique, 1675
- complétude, 1672, 1676, 2269
 - espaces L^p , 2270
- complexe conjugué, 304
- composante, 1268
- composante connexe, 553
- composition, loi interne, 131
- composition
 - suite de, 310
- concaténation
 - de langages, 2922
 - de mots, 2921
- concave, 1633
 - log-concave, 1640
- condition initiale, 2579
- conditionnement
 - absolu, 2621
 - d'une matrice inversible, 2655
 - relatif asymptotique, 2641
- Cône de lumière, 2933
- conjugué hermitien, 719
- conjugués
 - éléments d'une extension, 483
- connectés
 - indices d'une matrice, 2682, 2683
- connexe par arc, 805
- connexité, 631
 - définition, 552
 - et intervalles, 799
 - fonction holomorphe, 1679
 - indice d'une courbe, 2190
 - le groupe $GL^+(n, \mathbb{R})$, 1291
 - par arc
 - fonction différentiable, 1182
 - points d'accumulation, 626
 - prolongement analytique, 1679
 - signature d'une forme quadratique, 1661
 - théorème de Runge, 2203
 - théorème des valeurs intermédiaires, 814
 - utilisation
 - Brouwer, 2200
- consistance
 - estimateur, 2819
 - ordre, 2704
- constructible
 - angle, 1875
 - point, 1871
 - réel, 1871
- construction
 - des réels, 280
- contenu, 360
- continue
 - fonction entre espaces métriques, 624
 - fonction entre espaces topologiques, 537
 - forme différentielle, 1139

- continuité
 - fonction définie par une intégrale, 1594
 - séquentielle, 564
- contraction, 922, 1603
- convergence
 - commutative, 872
 - dans un espace vectoriel normé, 790
 - de martingales, 2889
 - en loi, 2758
 - en probabilité, 2757
 - ordre, 2637
 - presque sûrement, 2757
 - quadratique, 2626
 - rapidité, 1528, 2420, 2421, 2636, 2791
 - suite
 - dans un corps, 267
 - suite dans $\mathbb{R}^m$, 605
 - suite numérique, 790, 1587, 2407
 - Abel angulaire, 1930
 - uniforme, 871
 - intégrale, 1592
 - théorème de Dini, 1202
- convergence absolue, 871
- convergence de suite, 530
- convergence forte, 903
- convergence normale, 871
- convexe
 - courbe plane, 2048
 - fonction sur $\mathbb{R}^n$, 1643
- convexité
 - barycentre, 998
 - enveloppe de $O(n)$, 1299
 - fonction, 1633
 - inégalité de Jensen, 1648
 - locale, 590
 - méthode de Newton, 2632
 - utilisation, 1666
- convolution, 2727, 2879
- convolution sur S^1 , 2305
- coordonnées
 - cartésiennes
 - dans un espace affine, 1003
 - curvilignes, 2124
 - cylindrique, 1814
 - dans un espace affine, 986
 - homogène, 2086
 - sphériques, 1815
- coordonnées barycentrique, 1005
- coordonnées polaires, 1808
- corps, 234
 - complet, 267
 - de décomposition, 508
 - de rupture, 497
 - polynôme cyclotomique, 1841
 - des fractions, 263
 - extension, 515, 523
 - fini, 1849, 1853, 1856
 - Wedderburn, 1845
 - formellement réel, 455
 - ordonné, 145
 - premier, 457
- corps algébriquement clos, 484
- corps valué, 146
- cosinus, 1683
 - hyperbolique, 1533
- courbe, 2001
 - efficacité, 2840
 - étude métrique, 2453
 - fermée, 2035
 - simple, 2035
- courbe de Jordan, 1920
- courbe de niveau, 1120, 1122
- courbe simple, 1920
- courbure, 2029
 - signée, 2036
 - totale, 2038
- covariance, 2730
- critère
 - Abel, 1474
 - Abel pour intégrales, 1593
 - Cauchy
 - uniforme, 884
 - de Cauchy, 292, 620
 - Weierstrass, 1593
 - série de fonctions, 1205
- critère du quotient, 892
- critique
 - Galton-Watson, 2879
 - point, 1627
 - point d'un arc, 2016
 - région, 2839
 - valeur, 2840
- cycle, 198
- cyclique
 - endomorphisme, 697
 - matrice, 697
- cycloïde
 - coordonnées normales, 2021
 - longueur, 2015
- décalage, 2613
- décalage, 2613
- décomposition
 - Bruhat, 1300
 - canonique, 130
 - corps, 508
 - Dunford, 755

- application, 1538
- exponentielle de matrice, 1228
- Jordan
 - et exponentielle de matrice, 1537
- polaire, 1297
- primaire, 753
- sous-espaces caractéristiques, 753
- spectrale, 753
- décomposition de Hahn, 1407
- décomposition de Jordan, 1409
- décomposition décimale, 900
- degré
 - application $S^1 \rightarrow S^1$, 2039
 - d'une représentation, 422
 - extension de corps, 480
- degré d'un polynôme, 258
- demi-plan, 1086
- dénombrable, 184
- dénombrable à l'infini, 555
- dénombrement, 1763
 - partitions de $\{1, \dots, n\}$, 1562
- dense, 532
- densité, 1676
 - d'une variable aléatoire, 2714
- dans un espace de fonction
 - critère de Weyl, 2407
- de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, 786
 - utilisation, 1639
- de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}(n, \mathbb{R})$, 1292
- de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, 2396
- de $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, 2276
- de $L^2([0, 1])$ dans $L^p([0, 1])$, 2277
- de $S^+(n, \mathbb{R})$ dans $S^{++}(n, \mathbb{R})$, 1296
- des fonctions étagées dans L^p , 2276
- des polynômes
 - dans $C_c^0[0, 1]$, 2806
- matrices diagonalisables dans $\mathrm{M}(n, \mathbb{C})$, 1291
- mesure, 1397
- points extrémaux dans $\mathcal{L}$, 1298
- prolongement, 1672
- densité conjointe, 2719
- densité d'une mesure, 1398
- densité jointe, 2721
- déplacement, 1779
- dérivabilité
 - fonction définie par une intégrale, 1596
 - lemme de Borel, 1559
- dérivable
 - au sens complexe, 1178
 - fonction, 2527
- dérivation
 - au sens des distribution
 - Sobolev, 2514
- dérivé
 - groupe, 305
- dérivée, 946
 - dans Sobolev $H^1(I)$, 2511
 - distributionnelle, 2480
 - faible, 2465
 - fonction à valeurs dans E' , 652
 - partielle, 1133, 1267
 - seconde, 1100
- dérivée directionnelle, 946
- dérivée faible, 2463
- dérivée partielle, 946
- déterminant, 660
 - Cauchy, 1590
 - d'un endomorphisme, 664
 - d'une famille de vecteurs, 661
 - de Cauchy, 668
 - et inversibilité, 664
 - forme linéaire alternée, 659
 - Gram, 667, 1590
 - interprétation géométrique, 1435
 - matrice, 395
 - résultant, 669, 1935
 - utilisation, 1666
 - Vandermonde, 414
- détermination
 - logarithme, 2184
 - principale, 2184
- détermination du logarithme, 2187
- développable
 - en série entière, 1541
- développement
 - asymptotique, 1265
 - limité
 - en zéro, 1260
 - fonction holomorphe, 2165
 - premier ordre, 949
 - Taylor, 1982
- diagonale
 - dominante, 2687
 - fortement dominante, 2687
 - strictement dominante, 2687
- diagonalisable, 732
 - et polynôme minimum scindé, 733
 - exponentielle, 1538
- diagonalisation
 - cas complexe, 1060
 - cas réel, 737
 - endomorphisme autoadjoint, 835
 - simultanée, 734
- diamètre, 1048
- diédral, 1763
- difféomorphisme, 953

- de classe C^k , 1193
- différence
 - centrée, 2693
 - divisée, 2650
 - progressive, 2693
 - régressive, 2693
- différentiabilité, 1182
- différentielle, 945
 - de $u \mapsto u^{-1}$, 975
 - partielle, 973
 - totale, 1267
- dilatation, 1284
- dilatation (matrice), 406
- dimension, 374
 - n -formes multilinéaires alternées, 660
 - définition, 374
 - sous espace affine, 994
 - utilisation, 1000
- direction, 946, 2024
 - sous-espace affine, 994
- Dirichlet
 - noyau, 2404
 - théorème, 2404
 - théorème (sur les nombres premiers), 1845
- disque de convergence, 1473
- distance, 562
 - associée à une norme, 582
 - compatible, 612
 - entre deux mesures de probabilités, 2835
 - invariante, 612
 - point et ensemble, 607
- distance discrète, 607
- distance produit, 600
- distingué
 - sous-groupe, 197
- distribution, 2477
 - de Dirac, 2498
 - équation de Schrödinger, 2575
 - produit par une fonction, 2480
 - tempérée, 2497
- divergence, 1273
- divise, 144
- diviseur
 - dans un anneau, 144
 - de zéro, 217
 - de zéro à droite, 217
 - polynôme, 359
- diviseur de zéro, 217
- division
 - euclidienne, 223, 359
 - harmonique, 2103
- division euclidienne
 - quotient dans $\mathbb{N}$, 168
- reste dans $\mathbb{N}$, 168
- domaine, 783
 - de définition d'une fonction, 119
 - fondamental d'une action, 317
- dominé
 - modèle statistique, 2818
- dominée
 - convergence (Lebesgue), 1394
 - mesure, 1402
- dominée par le dessus, 635
- dominée par une seminorme, 635
- droite
 - dans la sphère de Riemann, 2091
 - projective, 2067
- droite affine, 1006, 1076
- droite réelle achevée, 809
- droite vectorielle, 1076
- droites parallèles, 1077
- droites perpendiculaires, 1077
- dual
 - d'un espace de Hilbert, 2143
 - de $M(n, \mathbb{K})$, 726
 - de $L^p(\Omega)$, 2362
 - de L^p , 2357
- dual algébrique, 418
- dual topologique, 978, 2135
- Dunford
 - décomposition, 755
- dyadique, 1425
 - développement, 288
- écart-type, 2729
- échantillon, 2812, 2814
- effectif
 - empirique, 2844
- effectif
 - empirique, 2844
- efficacité
 - courbe, 2840
 - d'une méthode itérative, 2645
- élément
 - inversible
 - dans un anneau, 217
- élément
 - de surface, 1915
 - de torsion, 323
- élément de surface, 1888
- élément maximal, 122
- élément minimal, 122
- élément premier, 216
- élément régulier, 132
 - à droite, 132
 - à gauche, 131
- ellipsoïde, 780

- elliptique
 - équation aux dérivées partielles, 2603
- endomorphisme, 380
 - cyclique, 697
 - décomposition
 - polaire, 1297
 - diagonalisable, 779, 1294, 2571
 - Dunford, 755
 - diagonalisation, 737
 - nilpotent
 - Dunford, 755
 - préservant une forme quadratique, 1305
 - sous-espace stable, 755, 2571
- endomorphisme direct, 673
- endomorphisme préserve l'orientation, 673
- engendré
 - λ -système, 1316
 - corps, extension, 490
 - sous-espace affine, 995
 - sous-groupe, 248
- ensemble
 - archimédien, 161
 - de Cantor, 1375
 - différence symétrique, 128
 - infini, 133
- ensemble connexe, 552
- ensemble des mots, 2921
- ensemble fini, 133
- ensemble ordonné, 121
 - totalement ordonné, 121
- ensemble quotient, 129
- ensembles
 - disjoints, 118
- entier, 173
- entier relatif
 - négatif, 176
 - positif, 176
 - strictement négatif, 176
 - strictement positif, 176
- entiers relatifs
 - négatifs, 176
 - positifs, 176
- entrelacement, 1572
- enveloppe
 - convexe, 998
- équation
 - différentielle
 - linéaire, 2530
 - ordinaire d'ordre 1, 2527
 - variables séparées, 2533
 - générale de degré n , 526
- équation
 - aux variations, 2552
 - de Riccati, 2573
 - des classes, 317
 - des orbites, 317
 - différentielle
 - étude qualitative, 2571
 - Hill, 2570
 - homogène, 2573
 - système, 2571
 - diophantienne, 336, 354, 356
 - Fredholm, 1606
 - orbite-stabilisateur, 316
- équation de droite, 1082
- équation différentielle
 - linéaire du premier ordre, 2583
 - linéaire du premier ordre, homogène, 2583
 - linéaire du second ordre, 2586
 - linéaire du second ordre, homogène, 2586
 - premier ordre, 2578
 - second ordre, 2579
 - variables séparables, 2581
- équation exponentielle, 1236
- équation fonctionnelle, 1236
- équation homogène associée, 2583
- équicontinu, 632
- équipotent, 132
- équivalence
 - arcs paramétrés, 2017
 - chemin, 2010
 - classe de fonctions, 2241
 - de représentations, 1572
 - de suites, 792
 - homotopie, 2193
 - suite de composition, 312
- équivalence de forme quadratiques, 749
- équivalence de normes, 852
- erreur, 2651, 2681
 - assignation, 2616
 - de consistance, 2704
 - discrétisation, 2705
 - quadratique, 2654
 - troncature, 2616
- erreur relative, 2616
- escalier, 1356
- espace
 - L^2
 - Sobolev, 2514
 - L^p , 2245
 - de Bergman, 2399
 - de fonctions
 - L^p , 2270
 - Sobolev H^1 , 2514
 - de Hilbert
 - espace de Sobolev H^1 , 2514

- de probabilité, 2713
- de Schwartz, 2393, 2497
- de Sobolev, 2511, 2518
- euclidien, 847
- mesurable, 1307
- mesuré, 1312
 - complété, 1331
- métrique, 562
 - base de topologie, 573
- projectif, 2067
- séparé, 545
- topologique
 - métrisable, 623
- vectériel, 251
 - dimension, 660
- vectériel topologique
 - métrisable, 562
- espace complètement normal, 550
- espace connexe, 550
- espace de Baire, 653
- espace de Banach, 608
- espace de Sobolev, 2516
- espace propre, 690
- espace tangent, 1884
- espace topologique, 527
- espace topologique normal, 549
- espace vectoriel
 - topologique, 582
- espace vectoriel normé, 580
- espérance, 2724
 - conditionnelle, 2734, 2735
 - événement, 2735
 - variable aléatoire, 2740
- estimateur, 2819
 - biais, 2820
 - consistant, 2819
 - de fonction de répartition, 2824
 - maximum de vraisemblance, 2822
- estimateur convergeant, 2819
- estimation
 - des grands écarts, 2791
- étagée
 - fonction, 1356
- état
 - apériodique, 2863
 - récurrent, 2856
 - récurrent positif, 2856
 - transitoire, 2856
- Éther, 2928
- étoile de Kleene, 2923
- étranger
 - dans leur ensemble, 359
- étrangers
 - polynômes, 359
- Euclide
 - algorithme étendu, 326
 - lemme, 229
- euclidien
 - anneau, 221
 - espace, 718
- évaluation
 - polynôme plusieurs variables, 340
- événement, 2713
- Événement, 2933
- exact
 - intervalle de confiance, 2828
- excès
 - intervalle de confiance, 2828
- exhaustive (suite de compacts), 628
- exponentielle, 1514
 - convergence, 894
 - de matrice, 977, 1537, 1538, 1550
 - utilisation, 1625
- existence, 1508
- rapide, 1839
- unicité, 1237
- exposant, 434, 779
 - d'un groupe, 246
- extension
 - corps de base, 757
 - de corps, 480, 523
 - algébrique, 493
 - finie, 1858
 - simple, 490
 - utilisation, 1876
 - isométrie, 1673
 - séparable, 518
- extension algébrique, 484
- extension algébriquement clos, 484
- extrapolation, 2650
- extrémité
 - d'un intervalle, 799
- extrémum, 1982
 - lié, 1631
 - local
 - relatif, 1631
- extrémum local, 1626
- extrémums, 1628
 - volume d'un ellipsoïde, 1666
- facteur
 - intégrant, 2574
- facteur
 - intégrant, 2574
- factoriel
 - anneau, 343
- factorisation

- de polynôme, 364, 496
- faisceau de droites, 2089
- famille
 - sommable, 876
- famille trigonométrique
 - sur S^1 , 2304
- Fatou, 1384
- Fejér
 - noyau, 2404
- fermé, 528, 680
- fermeture séquentielle, 565
- filtration, 2881
- filtration naturelle, 2881
- fine
 - subdivision, 2001
- fixateur, 314
- flot, 2546, 2594
- flux
 - d'un champ de vecteur, 1919
- flux d'un champ de vecteurs, 1917
- fonction, 119, 783
 - Γ d'Euler, 2224
 - à décroissance rapide, 2394
 - bijective, 120
 - borélienne, 1325
 - caractéristique, 1972
 - d'une variable aléatoire, 2752
 - composée de fonctions, 120
 - continue
 - égales, 566
 - convexe, 1633, 1639
 - croissante, 784
 - de Dirichlet, 2410
 - de Möbius, 1867
 - de répartition, 2752
 - décroissante, 784
 - définie par une intégrale, 1557, 1593, 1599, 2231, 2433
 - Γ d'Euler, 2224
 - utilisation, 2779
 - domaine de définition, 119
 - en escalier intégrable, 1971
 - ensemble de définition, 119
 - étagée, 2276
 - génératrice, 2753
 - holomorphe, 1178, 2231
 - théorème de Montel, 2398
 - image, 783
 - injective, 119
 - méromorphe
 - Γ d'Euler, 2224
 - monotone, 784
 - surjective, 119
 - valeurs vectorielles, 1268
- fonction analytique, 1253
- fonction continue en un point, 537
- fonction dérivée, 946
- fonction intégrable, 1387
- fonction périodique, 1111
- fonctionnelle
 - énergie, 2164
- fonctionnelle de Minkowski, 636
- fonctions équivalentes, 548
- fondamental
 - domaine d'une action, 317
- forme
 - bilinéaire, 704
 - non dégénérée, 705
 - différentielle, 1139
 - exacte, 1928
 - fermée, 1928
 - linéaire
 - différentielle, 1631
 - quadratique, 1661, 1663, 1982
 - groupe orthogonal, 1305
- forme bilinéaire symétrique, 704
- forme canonique
 - fonction simple, 1356
 - matrice de transition, 2873
- forme linéaire, 418, 659
- forme multilinéaire alternée, 659
- forme quadratique, 704
- formle multilinéaire antisymétrique, 657
- formule
 - Bayes, 2731
 - Burnside, 318
 - d'expulsion (produit vectoriel), 845
 - de Cauchy, 2196
 - Hadamard, 1484
 - inversion Möbius, 1868
 - probabilité totales, 2731
 - sommatoire de Poisson, 2420
 - Taylor
 - utilisation, 2636
- formule binomiale, 233
- Formule de Leibniz, 2467
- formule de Stirling, 1988
- formule de Taylor
 - reste intégral, 1963
- formule des classes, 316
- Fourier, 2420
 - série
 - utilisation, 2453
 - transformée
 - groupe abélien fini, 1567
- fraction

- rationnelle
 - intégration, 1935
- fraction dyadique, 288, 2059
- fraction rationnelle, 1961
- fractions
 - rationnelles, 264
- fractions (corps), 263
- Fredholm
 - équation, 1606
- Frenet
 - formules, 2031
- fréquence
 - empirique, 2844, 2854
- Fresnel
 - intégrale, 2228
- Frobenius
 - morphisme, 257
- frontière, 567, 684
- Fubini
 - théorème
 - dans $\mathbb{R}^n$, 1458
- Galton-Watson
 - sous-critique, 2879
 - sur-critique, 2879
- Galton-Watson
 - sous-critique, 2879
 - sur-critique, 2879
- Gauss
 - lemme
 - polynômes, 477
 - somme de, 1851
- générateur, 249
- génératrice
 - partie d'un module, 253
- géométrie
 - avec des groupes, 1757, 2110
 - avec nombres complexes, 1757, 2110
- géométrique
 - avec des nombres complexes, 2453
- Gershgorin
 - disque, 2684
- gradient, 948, 1147, 1155, 1168
- Gram (déterminant), 667
- Gram-Schmidt, 847
- graphe, 784, 1101
 - de transition (chaîne de Markov), 2854
 - fonction, 1119
 - fonction de deux variables, 1121
- Grönwall (lemme), 2527, 2528
- groupe, 140
 - $GL(n, \mathbb{R})$, 1663
 - p -groupe, 427
 - action, 2110
 - utilisation, 1305
- agissant sur un ensemble
 - diédral, 1756
- alterné, 443
- circulaire, 2107
- de Galois, 526
- de permutation, 1828
- de permutations, 1763
 - caractères de S_4 , 1579
- de torsion, 323
- dérivé, 305
 - de $GL(n, \mathbb{K})$, 1289
 - de $SL(n, \mathbb{K})$, 1289
 - du groupe alterné, 446
 - du groupe symétrique, 444
- des isométries
 - espace métrique, 606
- des symétries, 1775
- diédral, 1756, 1763
 - générateurs (preuve), 1757
 - générateurs (utilisation), 1828
- en géométrie, 1756
- et géométrie, 660, 1763, 2110
 - isométries du cube, 452
- fini, 429, 437, 1763, 1837, 1845, 1849
 - alterné, 445
 - diédral, 1756
 - Wedderburn, 1845
- linéaire, 1300
 - décomposition polaire, 1297
 - enveloppe convexe de $\Omega(n)$, 1299
 - hyperplan, 727
 - sous-groupes compacts, 1303
- modulaire, 2110
- orthogonal, 676
 - d'une forme quadratique, 1305
- partie génératrice, 445, 1837, 2110
- permutation, 660, 666, 1300, 1837
 - diédral, 1756
- projectif, 2074
- quotient, 310
- simple, 197
- sous-groupe, 141
- spécial orthogonal, 677
- symétrique, 197
 - action sur un triangle, 1569
- groupe abélien, 141
- groupe commutatif, 141
- groupe cyclique, 249
- groupe de pavage, 1779
- groupe dérivé
 - de $GL(n, \mathbb{C})$, 1283
- groupe ordonné, 196

- groupe résoluble, 313
- groupe simple, 197
- groupe topologique, 1279
- Hadamard
 - conditions, 2604
 - formule, 1484
- Hadamard
 - conditions, 2604
 - formule, 1484
- Hardy-Littlewood (théorème), 1587
- Hausdorff, 545
- Heine (théorème), 1049
- hermitienne, 719
- hessienne, 1195
- Hilbert
 - espace, 2137
- holomorphe, 1178, 2232
 - sur un compact, 1178
- homéomorphisme, 539
- homogène
 - chaîne de Markov, 2849
- homographie, 2073, 2110
 - sur $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, 2096
- homothétie, 1090
- homotopie, 1920
- homotopie à extrémité fixées, 1920
- hyperbolique
 - équation aux dérivées partielles, 2603
- hyperplan, 774, 1723
 - de $M(n, \mathbb{K})$, 727
 - sépare
 - au sens strict, 2338
 - séparer
 - au sens large, 2338
- hypothèse
 - alternative, 2839
 - composite, 2839
 - multiple, 2839
 - nulle, 2839
 - simple, 2839
- idéal
 - bilatère, 213
 - dans un anneau, 213
 - principal
 - à droite, 222
 - à gauche, 222
- idéal
 - bilatère, 213
 - dans un anneau, 213
 - principal
 - à droite, 222
 - à gauche, 222
- idéal à droite, 213
- idéal engendré, 213
- idéal maximal, 236
- idéaux premiers dans leur ensemble, 213
- idéaux premiers entre eux, 213
- identifiable, 2818
- identité de polarisation, 709
- image, 783
 - par une fonction, cas général, 119
- incompressible
 - champ de vecteur, 1275
- indécomposable
 - module, 254
- indépendance
 - affine, 1002
 - algébrique, 526
 - événements, 2715
 - utilisation, 2804, 2892
 - projective, 2075
 - sous tribus, 2715
 - variables aléatoires, 2715
- indicatrice d'Euler, 439
- indice, 309
 - d'une courbe dans $\mathbb{C}$, 2190
 - de rotation, 2040
- indice d'inertie, 716
- inductif, 123
- induite
 - topologie, 681
 - tribu, 1309
- inégalité
 - arithmético-géométrique, 1649
 - Bessel, 2146
 - Cauchy-Schwarz, 827, 2137
 - de Khintchine, 2788
 - de la moyenne, 1182
 - des pentes, 1634
 - Hölder, 2250
 - utilisation, 2728, 2807
 - isopérimétrique, 2453
 - Jensen, 1648
 - espérance conditionnelle, 2751
 - pour une somme, 1648
 - version intégrale, 2250
 - Kantorovitch, 1649
 - Markov, 2767
 - Minkowski, 2253
 - triangulaire, 562, 580
- inférence statistique, 2811
- infimum, 294
- injection, 119
- intégrable
 - fonction à valeurs vectorielles, 1391

- fonction non en escalier, 1977
- fonction positive, 1982
- intégrale
 - calcul, 2407
 - convergente, 1449, 1934
 - d'une fonction sur une carte, 1889
 - d'une fonction sur une variété, 2293
 - d'une forme différentielle, 1905
 - fonction en escalier, 1971
 - Fresnel, 2228
 - impropre, 1448, 1449
 - sur un chemin, 1903
- intégrale d'une fonction, 1378
- intégrale d'une forme différentielle, 1905
- intégrale de Dirichlet, 1999
- intégrale existe, 1387
- intégrale sur une carte, 1885
- intégration
 - fraction rationnelle, 1935
- intéressante, 113
- intérieur, 531
 - d'un ensemble, 679
 - point, 679
- interpolation, 2650
- intervalle, 783, 805
 - d'un ensemble ordonné, 122
 - longueur, 1364
- Intervalle, 2933
- intervalle de confiance
 - asymptotique, 2832
- invariance cyclique
 - trace, 390
- invariant
 - de similitude, 765
- invariante
 - mesure
 - pour une chaîne de Markov, 2874
- inverse
 - dans un groupe, 195
- inverse généralisé, 2795
- inversion, 2062
 - dans le groupe symétrique, 206
- inversion dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, 2094
- involution, 735
- irrationalité
 - $\sqrt{2}$, 276
- irréductible
 - chaîne de Markov, 2852
 - dans un anneau, 216
 - module, 254
 - représentation, 1570
- isobarycentre, 996
- isométrie
 - de forme quadratique, 713
 - de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$, 1757
 - espace euclidien
 - isométries du cube, 452
 - groupe, 606
 - isométrie (forme bilinéaire), 713
 - isométrie d'espaces métriques, 606
 - isométrie positive, 1727
 - isomorphisme, 909
 - $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$, 1849
 - d'anneaux, 212
 - de corps, 247
 - espace affine, 994
 - espace vectoriel normé, 956
 - espaces vectoriels, 380
- isomorphisme d'espace topologique, 539
- isotrope
 - cône, 710
 - sous espace, 710
 - totalement, 710
 - vecteur, 710
- jacobien, 1168, 1273
- jacobien, 1168, 1273
- jauge, 2331
- Jordan
 - réduction, 768
- Jordan-Hölder, 310
- Kronecker
 - symbole, 374
- Kronecker
 - symbole, 374
- l, 176
- l, 176
- lacet, 1920
- lacet de Jordan, 1920
- Lagrange
 - multiplicateur, 1631
 - polynôme, 725
 - théorème, 309
- lagrangien, 1631
- langage, 2922
 - itéré, 2923
 - itéré strict, 2923
 - unité, 2922
 - vide, 2922
- Laplace
 - transformée, 2753
- laplacien, 2131
- Legendre
 - symbole, 1850
- Leibniz, 1103

- applications entre espaces vectoriels normés, [973](#)
- lemme
 - Borel, [1559](#)
 - d'Euclide, [229](#)
 - de Borel-Cantelli, [2765](#)
 - de Gauss
 - contenu de polynôme, [1858](#)
 - pour des entiers, [229](#)
 - de Morse, [1982](#)
 - de Schreider, [312](#)
 - de Slutsky, [2763](#)
 - de transport, [1322](#)
 - de Zorn, [123](#)
 - des noyaux, [692](#)
 - Fatou, [1384](#)
 - Gauss
 - dans un anneau principal, [345](#)
 - polynômes, [477](#)
 - Grönwall, [2527](#), [2528](#)
 - Hadamard, [1601](#)
 - Schur complexe, [1059](#)
 - Schur réel, [736](#)
- lemme de regroupement, [2717](#)
- lettres, [2921](#)
- Levi-Civita, [2126](#)
- libre
 - action, [320](#)
 - partie, [369](#)
 - partie d'un module, [253](#)
- librement engendré, [378](#)
- Ligne d'univers, [2928](#)
- limite, [751](#)
 - d'ensembles, [1315](#)
 - d'une fonction, [561](#)
 - de fonctions holomorphes, [2231](#)
 - de suite
 - espace topologique, [530](#)
 - inférieure, [796](#)
 - inversion, [1562](#), [1587](#), [2231](#), [2245](#)
 - permutation
 - utilisation, [2754](#)
 - suite dans $\mathbb{R}^m$, [605](#)
 - suite numérique, [790](#)
 - supérieure, [796](#)
 - unicité, [562](#)
- limite à droite, [823](#), [1031](#)
- limite à gauche, [823](#)
- limite de suite, [530](#)
- limite épointée, [1019](#)
- limite inductive, [2468](#)
- limite inférieure, [796](#)
- limite pointée, [1019](#)
- linéaire
 - application, [379](#)
- linéairement indépendant
 - module, [251](#)
- Lipschitz, [1603](#)
 - localement, [1183](#)
- Lipschitzienne, [1182](#)
- liste d'indices, [41](#)
- localement
 - intégrable, [1448](#)
- log-concave, [1640](#)
- logarithme
 - complexe, [2180](#)
 - dans $\mathbb{C}$, [2178](#)
 - de matrice, [1551](#)
 - sur les réels positifs, [1510](#)
- logarithme d'une application, [2187](#)
- loi
 - χ^2 , [2789](#)
 - binomiale
 - comportement asymptotique, [2791](#)
 - conjointe, [2717](#)
 - de Poisson, [2775](#)
 - des grands nombres
 - forte, [2767](#)
 - pour les chaines de Markov, [2876](#)
 - processus de Poisson, [2916](#)
 - utilisation, [2791](#), [2804](#)
 - marginale, [2717](#)
 - normale
 - vecteur gaussien, [2783](#)
 - parente, [2811](#), [2812](#)
 - parente d'un échantillon, [2814](#)
 - réciprocité quadratique, [1853](#)
 - sans mémoire, [2778](#)
 - Student, [2789](#)
- loi d'une variable aléatoire, [2714](#)
- loi exponentielle, [2776](#)
- loi stationnaire, [2852](#)
- longueur
 - arc géométrique, [2018](#)
 - d'un arc paramétré compact, [2002](#)
 - d'un intervalle, [1364](#)
 - d'une arrête, [1969](#)
 - élément de, [2013](#)
- longueur d'arc, [2004](#)
- Lotka-Volterra, [2564](#)
- M-matrice, [2689](#)
- M-matrice, [2689](#)
- magma, [131](#)
 - commutatif, [131](#)
 - élément neutre, [131](#)
 - à droite, [131](#)

- à gauche, 131
- élément régulier, 132
- unifère, 131
- maigre, 1327
- majorant, 122, 294
 - essentiel, 2247
- manipulation de lignes, 401
- Markov
 - inégalité, 2767, 2817
- martingale, 2881
 - bornée dans $L^2(\Omega)$, 2882
- matrice, 388, 1300, 2110
 - compagnon, 763
 - creuse, 2659
 - cyclique, 697
 - d'une application linéaire, 391
 - de dilatation, 406
 - de permutation, 406
 - de similitude, 1178
 - de Sylvester, 668
 - de transvection, 406
 - dense, 2659
 - équivalence, 409
 - dans le groupe linéaire, 1305
 - hermitienne
 - racine carrée, 1294
 - jacobienne, 1155, 1168
 - normale, 1060
 - orthogonale, 405, 676
 - permutation
 - élémentaire, 2667
 - racine carrée, 1294
 - réductible, 2683
 - semblable, 1294
 - semblables, 1663
 - symétrique, 1663
 - réelle, 1661
 - trigonalisable, 1058
- matrice bloc-diagonale, 857
- matrice d'une forme bilinéaire, 711
- matrice de transition, 2850
- matrice diagonale, 732
- matrice positive, 819
- matrice primitive, 819
- matrice stochastique, 2851
- matrice-colonne, 388
- matrice-ligne, 388
- matrices
 - similitude, 409
- matrices équivalentes, 727
- matrices semblables, 727
- maximale
 - partie orthonormale, 2147
- maximum, 122, 183
 - global, 1626
 - local, 1626
- maximum local, 1626
- médiatrice, 1085
- méromorphe, 2216
- mesurable
 - application, 1315
 - au sens de m^* , 1321
 - ensemble, 1313
 - fonction, 1322
 - Lebesgue, 1968
- mesure
 - σ -finie, 1312
 - angle entre vecteurs, 1748
 - complexe, 1417
 - dans une carte, 1888
 - de Borel, 1346
 - de comptage, 1431, 1457
 - de Lebesgue, 1368
 - de Radon, 1346, 2210
 - extérieure, 1309
 - externe, 1967
 - finie, 1312
 - image, 1340
 - positive, 1312
 - probabilité, 2713
 - produit, 1422
 - régulière, 1346
 - extérieure, 1346
 - intérieure, 1346
 - sur un ensemble de parties, 1309
- mesure σ -finie, 1310
- mesure à densité, 1398
- mesure absolument continue, 1398, 1402
- mesure finie, 1310
- mesure signée, 1312
- mesures mutuellement singulières, 1403
- méthode
 - des chemins, 1131
 - Newton, 2636
 - cas convexe, 2632
- Méthode
 - de Newton, 2630
- métrisable
 - espace vectoriel topologique, 562
- minimum, 183
 - ensemble ordonné, 122
- minimum local, 1626
- minorant, 122, 294
- modèle
 - échantillonnage, 2812, 2814
 - paramétrique, 2812

- modèle statistique, 2811
- modulaire (groupe), 2110
- module
 - à gauche, 250
 - de continuité, 980
 - indécomposable, 254
 - irréductible, 254
 - simple, 254
- module d'un nombre complexe, 816
- module produit, 251
- moment, 2726
 - fonction génératrice, 2753
- monogène, 249
 - extension de corps, 490
- monoïde, 463
- monôme, 358
- monotone par morceaux, 1360
- monotonie, 2569
- morphisme
 - d'algèbres, 255
 - d'anneaux, 143
 - de corps, 247
 - espace vectoriel normé, 956
 - Frobenius, 257
- morphisme de groupes, 141
- morphisme de modules, 250
- morphisme de produits tensoriels, 909
- mot, 2921
 - longueur d'un mot, 2921
 - mot vide, 2921
 - nombre d'occurrences, 2921
- mot non vide, 2921
- moyenne
 - de Cesàro, 896
 - empirique, 2729
 - empirique d'un échantillon, 2814
 - quadratique, 2729
- multiindice, 41, 338
- multiplicateur
 - de Lagrange, 1631
- multiplication, 161
- multiplicité
 - racine d'un polynôme, 363
 - racine de $f(x) = 0$, 2629
 - valeur propre
 - algébrique, 1057
 - géométrique, 1057
- n-connexe, 550
- n-connexe, 550
- nabla, 1164
- négatif, 284
- négligeable
 - partie d'un espace mesuré, 1329
- neutre
 - dans un groupe, 195
- Newton
 - méthode, 2636
- nilpotent, 217
- niveau de confiance, 2828
- nombre
 - complexe
 - norme 1, 1845
 - de Fermat, 1876
 - dénormalisé, 2614
 - normal, 2803
 - normalisé, 2614
 - premier, 437, 463, 1528, 1837, 1845, 1849
 - dans leur ensemble, 228
 - théorème des deux carrés, 464
 - tours d'une courbe plane, 2038
- nombre de montées, 2884
- nombre entier
 - divisible, 168
 - impair, 168
 - pair, 168
- nombre premier
 - décomposition, 230
 - polynôme cyclotomique, 1841
- nombres complexes, 303
- non dénombrable, 184
- normal
 - arc paramétré, 2019
 - endomorphisme, 1060
 - nombre, 2803
 - sous-groupe, 197
- normal extérieur
 - vecteur, 1919
- normale
 - loi réduite, 2782
 - principale, 2029
- normalisateur, 197
- norme, 580
 - d'algèbre, 859
 - d'application linéaire, 856
 - d'une application linéaire, 856
 - euclidienne
 - dans $\mathbb{R}^m$, 836
 - supremum, 850
 - sur $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$, 350
- normé
 - espace vectoriel, 582
- norme maximum, 793
- norme quotient, 650
- norme suprémum, 870
- normes équivalentes, 852
- noyau

- application vers un groupe, 306
 - d'une forme bilinéaire, 711
 - Dirichlet, 2404
 - Fejér, 2404
 - vers un espace vectoriel, 381
- noyau d'une forme bilinéaire, 706
- nulle part dense, 634
- observation, 2713
- observation, 2713
- opérateur
 - défini positif, 738
- opérateur hermitien, 720
- opérateur unitaire, 720
- opérateurs
 - compatibles, 2159
- opération sur un ensemble, 131
- opposés
 - chemins, 2010
- orbite
 - d'un point sous une action, 314
- orbite d'un élément sous une permutation, 197
- ordre, 121
 - bon ordre, 123
 - d'un élément, 196
 - d'un polynôme, 362
 - d'une matrice carrée, 388
 - dans un anneau, 145
 - de convergence d'un schéma, 2705
 - distribution, 2481
 - partiel, 121
 - sur un anneau factoriel, 344
 - total, 121
- ordre d'un groupe, 196
- orientation, 672, 1890, 1913
- origine
 - abscisse curviligne, 2019
 - repère affine, 1003
- orthogonal, 717, 2142
 - coordonnées curviligne, 2124
 - famille de projecteurs, 254
 - matrice, 676
 - opérateur, 676
 - sous-espace, 421
- orthogonal pour une forme bilinéaire, 706
- orthonormé, 836
 - système, 2144
- oscillation
 - d'une fonction, 1044
 - d'une fonction en un point, 1044
- osculateur (cercle), 2034
- ouvert, 527, 680
- parabolique
 - équation aux dérivées partielles, 2603
- parabolique
 - équation aux dérivées partielles, 2603
- parallèle
 - sous-espaces affines, 994
- parallélogramme, 1893
- paramétrage, 2010
 - normale, 2019
- paramétrages
 - admissible, 2018
- Parseval, 2152
- partie
 - génératrice, 249, 369
 - régulière, 1260
 - totale, 2144
- partie absolument convexe, 587
- partie absorbante, 587
- partie connexe, 550
- partie convexe, 579
- partie discrète, 533
- partie entière, 301
- partie équilibrée, 587
- partie fractionnaire, 301
- partie inductive, 788
- partie libre
 - module, 251
- partie linéaire, 991
- partie maigre, 634
- partie négative, 1404
- partie nulle, 1404
- partie positive, 1404
- partie symétrique, 587
- partition
 - dénombrable mesurable, 1351
- partition d'ensembles, 118
- partition de l'unité, 2288
- passage aux classes, 544
- pavable, 1968
- pavage du plan, 1779
- pavé, 1967, 1968
- Pearson
 - théorème, 2844
- peigne de Dirac, 2504
- période, 1111
- permutation, 197
 - matrice, 406
- permutation impaire, 206
- permutation paire, 206
- permuter
 - dérivée et intégrale
 - $\mathbb{R}^n$, 1599
 - dans $\mathbb{R}$, 1596
 - dans $\mathbb{R}$ avec les bornes, 1461

- dérivée et limite, 1209
- différentielle et intégrale
 - $\mathbb{R}^n$, 1600
- intégrale
 - et série, 1457
- limite et intégrale
 - convergence dominée, 1394
 - convergence monotone, 1383
 - espace mesuré, 1594, 1595
- série entière et dérivation, 1491
- série entière et intégration, 1493
- somme et intégrale, 1384, 1465
- permuter limite et intégrale, 1593
- petit théorème de Fermat, 459
- pgcd
 - calcul effectif, 327
 - dans un anneau intègre, 145
 - polynômes, 479
- pivotale, 2830
- plan
 - projectif, 2067
 - tangent, 1167, 1267
- plan affine, 1076
- plan médiateur, 1093
- plan vectoriel, 1076
- Plancherel, 2152
- plongement, 1672
- Poincaré (demi-plan), 2110
- point
 - d'équilibre
 - stable, 2560
 - pondéré, 996
- point adhérent, 531
- point critique
 - définition, 1984
- point d'accumulation, 537
- point d'équilibre, 2560
- point extrémal dans un convexe, 1298
- point fixe, 2879
 - attractif, 1602
 - Brouwer, 1897
 - Picard, 1604
 - Schauder, 1899
- point intérieur, 531
- point isolé, 537
- Poisson
 - formule sommatoire, 2420
 - processus, 2902
- polaire
 - nombre complexes, 1713
- pôle, 1798, 2213
- polydisque, 2232
- polygone, 1754
- polygone convexe, 1755
- polynôme
 - à plusieurs indéterminées, 671, 1856
 - alterné, 522
 - annulateur, 691, 696
 - caractéristique, 701, 1065
 - contenu, 360
 - cyclotomique, 1839
 - irréductibilité, 1841
 - propriétés, 1841
 - d'endomorphisme, 1294
 - décomposition de Dunford, 755
 - de Bernstein, 2806
 - irréductible
 - sur $\mathbb{F}_q$, 1868
 - minimal, 486
 - d'un élément d'une extension, 481
 - ponctuel, 696
 - racines, 523
 - semi-symétrique, 522
 - symétrique, 522, 523, 666, 671, 1856
 - élémentaire, 525
 - trigonométrique, 2293
- polynôme de Lagrange, 725
- polynôme de plusieurs variables, 340
- polynôme de Taylor, 1253
- polynôme dérivé, 513
- polynôme irréductible, 216
- polynôme primitif, 360
- polynôme scindé, 473
- polynôme séparable, 517
- polynôme sur un espace de Banach, 1244
- polynôme symétrique élémentaire, 522
- polynôme trigonométrique, 2304
- polynômes, 258
- portée
 - mesure, 1404
- positif, 284
- positivement liés, 817
- positivité, 144
- potentiel, 1910, 1942
- ppcm
 - dans un anneau intègre, 145
- prébase, 529
- précision
 - simple, 2613, 2614
- précompact, 564
- préhilbertien, 2137
- premier
 - corps, 457
 - deux éléments d'un anneau principal, 227
 - deux polynômes entre eux, 359
 - idéal, 237

- premier type
 - région solide, 1980
- préserve l'orientation, 674, 1727
- presque
 - nulle, 323
 - partout, 1315
 - surjective, 2345
- primitif
 - élément d'un corps, 1849
 - élément d'une extension de corps, 490
 - racine, 1862
 - triplet pythagoricien, 355
- primitive, 1098, 1940
 - de fonction continue, 1235
 - et intégrale, 1450
 - fonction, 1118
- primitive et intégrale, 1445
- principal
 - anneau, 222
 - idéal, 222
- principe
 - prolongement analytique, 1679
 - zéros isolés, 1678
- Principe de correspondance, 2943
- probabilité
 - conditionnelle, 2730
- problème
 - aux limites d'évolution, 2604
 - aux limites stationnaires, 2603
 - bien posé, 2604
 - limite de Dirichlet, 2603
 - limite de Von Neumann, 2603
- problème de Cauchy, 2579
- processus
 - adapté à une filtration, 2881
 - arrêté, 2890
 - croissant prévisible, 2891
 - Galton-Watson, 2877
 - Poisson, 2902
 - sans mémoire, 2778
- processus arrêté, 2890
- processus de comptage, 2901
- processus de Poisson, 2901
- produit, 161
 - d'une mesure par une fonction, 1397
 - de convolution, 2282
 - et Fourier, 2417
 - de langages, 2922
 - de mots, 2921
 - distribution et fonction, 2480
 - espaces mesurés, 1424
 - mixte, 843, 846
 - scalaire
 - en général, 717
 - sur $M(n, \mathbb{R})$, 1072
- semi-direct, 321
- tensoriel
 - de représentations, 1578
 - vectoriel, 842
- produit de Cauchy, 1478, 1480
- produit extérieur, 926
- produit hermitien, 719
- produit intérieur, 938
- produit pseudo-scalaire, 717
- produit remarquable, 2205
- produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, 718
- produit tensoriel, 908, 911
- projecteur
 - dans un module, 254
- projecteur parallèlement, 424
- projectif
 - complétion, 2070
 - droite, 2067, 2068
 - espace, 2067
 - groupe, 2074
 - hyperplan, 2068
 - plan, 2067
 - repère, 2075
 - sous-espace, 2067
- projection
 - orthogonale, 2141
- projection normale, 2326
- projection orthogonale, 1732
- prolongement
 - analytique, 1679
 - utilisation, 2398
 - de fonctions, 1672
 - lemme de Borel, 1559
 - méromorphe de la fonction Γ , 2224
 - par continuité, 1034, 1035
 - dans $H^1(I)$, 2514
 - par densité, 1672
 - théorème de Hahn, 1338
- prolongement de fonctionnelle linéaire, 2343
- propriété d'intersection finie, 561
- propriété d'intersection non vide, 556
- propriété des valeurs intermédiaires, 802
- propriété universelle, 909
- pseudo-dimension, 2377
- puissance
 - d'un langage, 2923
 - d'un mot, 2922
 - d'un point, 2061
 - d'un test, 2840
 - d'une inversion, 2094
- pull back, 941

- quasi-compact, 554
- quasi-compact, 554
- quaternion, 520
- queue de liste d'indices, 41
- quotient, 223, 359
 - dans une suite de composition, 310
 - de groupe, 310
 - de groupes, 436
- quotient d'un chemin, 2366
- quotient d'un espace vectoriel, 907
- racine
 - carré
 - de matrice hermitienne, 1294
 - carré de matrice
 - hermitienne positive, 1294
 - d'un polynôme, 362
 - de l'unité, 779, 1757, 1841, 1845, 2110
 - primitive, 1834
 - utilisation, 1841
 - de polynôme, 497
 - multiple, 2629
 - primitive, 1862
 - simple, 2629
- racine
 - carré
 - de matrice hermitienne, 1294
 - carré de matrice
 - hermitienne positive, 1294
 - d'un polynôme, 362
 - de l'unité, 779, 1757, 1841, 1845, 2110
 - primitive, 1834
 - utilisation, 1841
 - de polynôme, 497
 - multiple, 2629
 - primitive, 1862
 - simple, 2629
- racine carrée, 815
- racine de l'unité, 1831
- racine multiple, 363
- racine simple, 363
- raffinement, 2001
 - subdivision d'un pavé, 1969
- rang, 383, 660, 748
 - classe d'équivalence, 409
 - diagonalisation, 737
 - différentielle, 1631
 - utilisation, 2143
- rang d'une forme quadratique, 716
- rang d'une matrice, 407
- rare, 1327
- rationnels, 269
- rayon
 - de courbure, 2029
 - de torsion, 2030
 - spectral, 859, 1228
- rayon de convergence, 1244, 1473
- réciroque
 - dérivabilité, 1113
- recouvrement, 554
- rectangle
 - produit de tribus, 1360
- rectifiable, 2002
 - arc géométrique, 2018
- récurrent
 - état, 2856
 - nul, 2856
 - point d'un système dynamique, 1348
 - positif, 2856
- réduction
 - d'endomorphisme, 755
 - Jordan, 768
- réduction de Frobenius, 765
- réel, 280
- réflexif, 2351
- réflexion, 1767
 - dans $\mathbb{R}^2$, 1732
 - glissée, 1764
 - par rapport à un hyperplan, 1723
- région
 - critique, 2839
 - de confiance exacte, 2830
 - de rejet, 2839
- règle du produit nul, 217
- régularité
 - d'une mesure, 1346
 - extérieure de la mesure de Lebesgue, 1371
 - intérieure de la mesure de Lebesgue, 1373
- régulier
 - arc, 2016
 - point d'un arc, 2016
- régulière
 - surface, 1910
- rejet
 - région dans une prise de décision, 2839
- relation
 - d'ordre, 121
- relation anormale, 2646
- relation binaire, 119
- relation d'équivalence, 129
- relation ternaire, 119
- relation unaire, 119
- relations
 - coefficient-racines, 525
 - de Chasles, 985, 1954
- relativement compact, 560
- relèvement, 2039

- repère
 - affine, 1003
 - cartésien
 - espace affine, 986
 - de Frenet, 2030
 - projectif, 2075
- représentation, 422
 - de groupe fini
 - caractères de S_4 , 1579
 - fidèle, 422
 - groupe diédral, 1828
 - irréductible, 1570
 - produit tensoriel, 1578
 - régulière gauche, 1575
 - virgule fixe, 2613
- Représentation
 - virgule flottante normalisée, 2613
- répulsif
 - point fixe, 1602
- résidu
 - méthode itérative, 2681
- résolvante, 2540
- reste, 223, 359
 - d'un développement limité, 1260
- restriction d'une distribution, 2488
- résultant, 668
 - utilisation, 671, 1935
- Riemann
 - fonction, 1525
- risque
 - première espèce, 2840
 - quadratique, 2819
 - seconde espèce, 2840
- rotation
 - en dimension 2, 1735
- rotation d'angle θ , 1739
- rotation-homothétie, 2093
- rupture
 - corps, 497
- schéma
 - consistant, 2704
- schéma
 - consistant, 2704
- schéma discret convergent, 2705
- schéma numérique, 2704
- Schrödinger, 2575
- Schur (théorème), 1573
- section
 - de graphe, 1120
 - propriété des, 1419
- segment
 - dans $\mathbb{R}^p$, 799
 - dans un espace affine, 996
- semi-défini positif, 738
- semi-simple
 - endomorphisme, 698
- semi-symétrique
 - polynôme, 522
- seminorme, 634
- seminorme quotient, 650
- seminormes séparantes, 647
- séparable, 2144
 - élément d'une extension, 518
 - espace topologique, 545
 - extension de corps, 518
 - polynôme non constant, 517
- séparation stricte, 2338
- sépare
 - les points, 1231
- séquentiellement fermé, 565
- série
 - dans un espace vectoriel normé, 869
 - de Fourier, 2411, 2420
 - utilisation, 2453
 - de puissance, 1472
 - donnant $(1 - A)^{-1}$, 974
 - entière, 1473, 1562, 2420
 - Abel angulaire, 1930
 - processus de Markov, 2879
 - utilisation, 2754
 - fonctions, 1587, 2420
 - génératrice d'une suite, 1541
 - géométrique, 894
 - nombres, 1587
 - numérique, 1528, 1562
 - Riemann, 1530
 - Taylor, 1542
- série convergente, 869
- série de Laurent, 2448
- série de puissance, 1243
- série de Taylor, 1253
- série divergente, 869
- série entière
 - fonctions holomorphes, 2197
- série harmonique, 893
- sesquilinéaire, 719
- signature
 - forme quadratique, 716
- signature d'une permutation, 204
- similitude, 1178
- simple
 - extension de corps, 490
 - fonction, 1356
 - module, 254
- singularité, 2213
- singularité effaçable, 2213

- singularité isolée, 2213
- sinus, 1683
 - hyperbolique, 1533
- sinus cardinal, 1698, 1991
- solfège, 1833
- solution
 - générale, 2578
 - particulière, 2578
- somme
 - inférieure, 1974
 - partielle, 869
 - supérieure, 1974
- somme directe, 422
- somme directe (de représentations), 1569
- somme directe topologique, 584
- somme partielles
 - Abel angulaire, 1930
- sommet, 2054
- Sophie Germain, 459
- sous arc, 2001
- sous-additivité
 - sur algèbre de parties, 1310
- sous-anneau, 234
- sous-corps premier, 457
- sous-espace
 - affine engendré par une partie, 995
 - caractéristique, 752
- sous-espace topologique, 533
- sous-groupe
 - caractéristique, 197
 - distingué, 437
 - dans le groupe alterné, 445
 - engendré, 248
 - normal, 310, 436
- sous-groupe distingué, 197
- sous-martingale, 2881
- sous-module, 253
- sous-module engendré, 251
- spectre
 - matrice hermitienne, 840
 - matrice symétrique réelle, 737
- spectre d'un endomorphisme, 690
- sphère, 569
 - de Riemann, 2090
- stabilisateur, 314
- stabilité
 - d'un point d'équilibre, 2560
 - Lyapunov, 2560
- stable, 2621
 - schéma numérique, 2707
- stathme
 - sur $\mathbb{Z}[i]$, 462
- stathme euclidien, 221
- stationnaire
 - chaîne de Markov, 2874
- statistique, 2819
- statistiques
 - descriptives, 2811
- strictement
 - convexe
 - sur $\mathbb{R}^n$, 1643
- strictement convexe, 1633
- structure
 - complexe, 2036
- structure d'anneau canonique, 212
- structure réelle, 425
- Student, 2789, 2832
- subdivision, 1969
 - associée à une fonction, 1970
 - d'un intervalle, 2001
- subordonnée
 - norme, 856
- subpotent, 132
- suite, 323
 - arithmético-géométrique, 894
 - de Cauchy, 607
 - dans un corps, 267
 - de fonctions, 2245
 - théorème de Montel, 2398
 - de fonctions intégrables, 1593, 2231
 - de Jordan-Hölder, 310
 - définie par itération, 2636
 - équirépartie, 2407
 - critère de Weyl, 2407
 - exacte, 320
 - régularisante, 2422
- suite de composition, 310
- suite de variables aléatoires de Bernoulli, 2877
- suites adjacentes, 795
- supplémentaire, 375
- support, 1971
 - d'une permutation, 197
 - distribution, 2481
 - famille d'éléments, 323
- supremum, 294
 - d'une suite d'ensembles, 1307
- supremum essentiel, 2247
- sur-martingale, 2881
- surface paramétrée, 1910
- surjection, 119
- surpotent, 132
- Sylow
 - p -Sylow, 428
- Sylvester (matrice), 668
- symbole
 - de Legendre, 1850

- symbole principal, 2593
- symétrique
 - polynôme, 522
- système
 - fondamental, 2537
 - orthonormé, 2144
 - trigonométrique, 2145, 2293
- système trigonométrique, 2435
- tangent
 - vecteur unitaire, 2029
- tangent
 - vecteur unitaire, 2029
- tangente, 1701, 2024
- Tangente hyperbolique, 2937
- tangente hyperbolique, 1535
- taubérien, 1586
- taux d'accroissement, 1633
- Taylor
 - série entière, 1541
- temps d'arrêt, 2884
- temps de première atteinte, 2855
- temps de retour, 2855
- tenseur, 916
- tenseur alterné, 923
- tenseur symétrique, 923
- terminée
 - martingale, 2889
- test, 2839
 - bilatéral, 2840
 - unilatéral, 2840
- tétraèdre régulier, 1094
- théorème
 - accroissements finis, 970
 - dans $\mathbb{R}$, 1114
 - forme générale, 1182
 - Ascoli, 2235
 - Banach-Steinhaus, 902
 - avec seminormes, 2237
 - base incomplète, 374
 - Beppo-Levi, 1383
 - Bézout
 - polynômes, 476
 - utilisation, 669
 - Bolzano-Weierstrass, 574
 - Borel-Cantelli, 2713
 - Borel-Lebesgue, 789
 - Brouwer
 - dimension 2, 2200
 - Carathéodory, 1000
 - Cauchy
 - groupe, 333
 - Cauchy-Arzela, 1900
 - Cauchy-Lipschitz, 1606
 - Cayley-Hamilton, 703, 1293
 - central limite, 2769
 - processus de Poisson, 2917
 - Chevalley-Warning, 1856
 - chinois, 468
 - anneau principal, 346
 - Cochran, 2816
 - Cochrane, 2817
 - convergence
 - dominée de Lebesgue, 1394
 - monotone, 1383
 - de Jordan, 2379
 - de représentation de Riesz, 2143
 - décomposition des noyaux
 - et exponentielle de matrice, 1553
 - des deux carrés, 464
 - version faible, 463
 - Dini, 1202
 - Dirichlet, 2404
 - forme faible, 1845
 - Doob, 2889
 - du rang, 384
 - élément primitif, 1858
 - élément primitif, 519, 1859
 - extension d'isométrie, 1673
 - Fejér, 2406
 - fonction implicite dans $\mathbb{R}^n$, 1619
 - fonction implicite dans Banach, 1618
 - Fubini
 - dans $\mathbb{R}^n$, 1458
 - espace mesuré, 1453
 - version compacte dans $\mathbb{R}^2$, 1944
 - Fubini-Tonelli, 1451
 - fuite des compacts, 2543
 - Gauss
 - polynômes, 477
 - Gauss-Wantzel, 1876
 - Glivenko-Cantelli, 2824
 - Hahn-Banach, 2335
 - Hardy-Littlewood, 1587
 - Heine, 1049
 - incidence, 2068
 - inversion locale, 1616
 - utilisation, 1631, 1982
 - isomorphisme
 - second, 307
 - troisième, 308
 - isomorphisme de Banach, 2233
 - Kronecker, 671
 - Lagrange, 309
 - Lie-Kolchin, 1062
 - Lotka-Volterra, 2564
 - Markov-Takutani, 1901

- Montel, 2398
- Pappus
 - affine, 2072
 - projectif, 2073
- Pearson, 2844
- petit de Fermat, 459
- Picard, 1604
- point fixe
 - Brouwer, 2200
- projection
 - cas vectoriel, 2141
 - partie fermée convexe, 2139
- prolongement de Hahn, 1338
- prolongement de Riemann, 2214
- Radon-Nikodym, 1410
 - complexe, 1418
- Rolle, 1113
- Rothstein-Trager, 1935
- Runge, 2203
- Schauder, 1899
- Schur, 1573
- spectral, 753
 - autoadjoint, 835
 - matrice symétrique, 737
 - matrices normales, 1060
- stabilité de Lyapunov, 2560
- Stone-Weierstrass, 1231, 1234
- Sylvester, 748
- taubérien, 1586
- taubérien faible, 1932
- transfert, 2755
- Tykhonov
 - dénombrable, 632
 - fini, 631
- valeurs intermédiaires, 814
- Von Neumann, 1625
- Wedderburn, 1845
- Weierstrass, 575
- théorème de Baire, 634, 654
- théorème de Brouwer, 1898
- théorème de Cartan-Dieudonné, 1725
- théorème de Tykhonov, 630
- théorème des extrémums liés, 1631
- théorème fondamental du calcul intégral, 1446
- topologie, 527, 681
 - *-faible, 651, 2478
 - p -adique, 983
 - discrète, 529
 - engendrée par une famille, 529
 - forte, 859
 - grossière, 529
 - métrique, 563
 - sur $\mathcal{D}(\Omega)$, 2469
 - sur $\mathcal{D}(K)$, 2469
 - sur $C^\infty(\Omega)$, 2468
 - sur dual topologique, 651
 - usuelle sur $\mathbb{R}^n$, 681
- topologie d'une norme, 830
- topologie de la convergence simple, 544
- topologie des seminormes, 642
- topologie faible, 2380
- topologie induite, 533
- topologie initiale, 540
- topologie produit, 542
- topologie quotient, 544
- tore, 301
- torsion, 2030
 - d'un groupe, 323
- totale, 2144
- trace, 2520
 - dual de $M(n, \mathbb{K})$, 726
 - matrice, 729
 - produit scalaire sur $M(n, \mathbb{R})$, 1072
 - unicité pour la propriété de trace, 726
- trace d'endomorphisme, 730
- transcendant, 483
- transformation
 - Fourier, 2420
 - gaussienne, 2661
- transformée
 - de Cauchy, 2210
 - de Fourier, 2415, 2752
 - continuité, 2418
 - groupe abélien fini, 1567
 - Fourier
 - distribution tempérée, 2500
 - Laplace, 2753, 2754
- transient
 - état, 2856
- transition
 - probabilité, 2849
- transitoire
 - état, 2856
- transposé, 675
- transposée, 723
- transposition, 203
- transvection, 1284
- transvection (matrice), 406
- transversale, 317
- tribu, 1307
 - borélienne, 1323
 - de Baire, 1327
 - de Lebesgue, 1368
 - induite, 1309
 - produit, 1360
- tribu de Lebesgue sur S^1 , 1717

- tribu engendrée, 1308
- tribu engendrée par une application, 1308
- trigonalisation
 - et polynôme caractéristique, 1058
 - simultanée, 1062
- triplet
 - pythagoricien, 355
- triplet naturel, 149
- type
 - fini
 - en algèbre, 520
 - espace vectoriel, 372
- unicité
 - des mesures, 1318
- unicité
 - des mesures, 1318
- uniformément continue, 633
- uniformément convexe, 2326
- uniformément intégrable, 2280
- unipotent, 217
- unitaire
 - normale principale, 2029
- valeur
 - principale (distribution), 2498
 - propre, 690
- valeur
 - principale (distribution), 2498
 - propre, 690
- valeur absolue, 146
- p -adique, 982
- valeur principale, 2178
- valeur propre
 - d'une forme quadratique, 750
 - forme quadratique, 749
- valeur singulière, 756
- valuation
 - p -adique, 982
- valuation d'un polynôme, 258
- Vandermonde (déterminant), 414
- variable
 - de décision, 2840
- variable aléatoire, 2714
 - absolument continue, 2714
 - Bernoulli
 - marche aléatoire, 2864
 - utilisation, 2806
 - binomiale
 - utilisation, 2892
 - centrée, 2728
 - de Bernoulli
 - utilisation, 2892
 - de Rademacher, 2788
- variance, 2728
 - empirique, 2729, 2815
 - empirique corrigée, 2815
 - vecteur gaussien, 2783
- variation bornée, 1460
- variation des constantes, 2531, 2538
- variation totale, 1460
- variété, 1631, 1881
- variété
 - orientée, 1891
- variété orientable, 1891
- vecteur
 - cyclique, 697
 - gaussien, 2783
 - propre, 690
 - unitaire normal, 2029
 - unitaire tangent, 2024
- vecteur propre à gauche, 819
- Vitali (ensemble), 1374
- vitesse d'un chemin, 2001
- vitesse de convergence de suites, 1527
- voisinage, 528, 681
- volume
 - d'une région solide, 1981
 - région bornée dans $\mathbb{R}^3$, 1978
- volume dans $\mathbb{R}^3$, 1892
- vraisemblance, 2822
- Weiner
 - constante, 2965
- Weiner
 - constante, 2965
- Wronskien, 2567

Liste des notations

Algèbre

- $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ degré d'une extension de corps, [page 480](#)
- (S) idéal engendré par S , [page 213](#)
- $\mathcal{L}(E, F)$ Ensemble des applications linéaires de E dans F , [page 379](#)
- $\mathbb{F}_p$ lorsque p est premier, [page 457](#)
- $\mathbb{F}_{p^n}$ corps fini à p^n éléments, [page 1847](#)
- $\mathbb{K}(A)$ corps contenant $\mathbb{K}$ et A , [page 490](#)
- $\mathbb{K}[A]$ anneau contenant $\mathbb{K}$ et A , [page 490](#)
- $\text{Fun}(X, Y)$ les applications de X vers Y , [page 212](#)
- $S(E)$ Les opérateurs autoadjoints de E , [page 720](#)
- ∇f gradient de la fonction f , [page 1155](#)
- proj_V projection de $V \times W$ sur V , [page 602](#)
- $\text{res}(P, Q)$ résultant des polynômes P et Q , [page 668](#)
- $\text{Span}(A)$ l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de A , [page 369](#)
- $\sqrt{A}$ racine d'une matrice hermitienne positive, [page 1294](#)
- $\theta_\alpha(P)$ la multiplicité de α par rapport à P , [page 363](#)
- $A[X]$ tous les polynômes de degré fini à coefficients dans A , [page 260](#)
- $A_n[X]$ les polynômes à coefficients dans A et de degré inférieur à n , [page 358](#)
- $C(P)$ matrice compagnon, [page 764](#)
- $D \mid P$ D divise P , [page 359](#)
- $df_a(u)$ Application de la différentielle de f sur le vecteur u , [page 1141](#)
- $E_\lambda(T)$ Espace propre de T , [page 690](#)
- $f^{(n)}$ La n -ième dérivée de la fonction f , [page 1255](#)
- $\text{mat}_{\mathcal{B}}(q)$ matrice de q dans la base $\mathcal{B}$, [page 1664](#)
- $o(x)$ fonction tendant rapidement vers zéro, [page 1257](#)
- $U(A)$ ensemble des inversibles, [page 217](#)
- U_n Le groupe des racines n^{e} de l'unité, [page 1831](#)

Ensembles de matrices

- $S^+(n, \mathbb{R})$ matrices symétriques définies positives, [page 738](#)
- $S^{++}(n, \mathbb{R})$ matrices symétriques strictement définies positives, [page 738](#)

$\text{Aut}(E)$ automorphisme de l'espace vectoriel E , [page 380](#)

$\mathcal{L}^0(E, F)$ applications linéaires bornées (continues), [page 956](#)

$\text{End}(E)$ les endomorphismes de E , [page 380](#)

$O(n, \mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales, [page 677](#)

$\Omega(E)$ formes quadratiques non dégénérées, [page 1660](#)

$Q(E)$ formes quadratiques réelles sur E , [page 704](#)

$Q^+(E)$ formes quadratiques positives, [page 1660](#)

$Q^{++}(E)$ formes quadratiques strictement définies positives, [page 1660](#)

$S_n^{p,q}(\mathbb{R})$ matrices symétriques réelles de signature (p, q) , [page 1660](#)

$\beta(s)$ Vecteur unitaire de la binormale, [page 2029](#)

$\gamma \sim g$ Équivalence d'arcs paramétrés, [page 2017](#)

$\nu(s)$ Vecteur unitaire de la normale principale, [page 2029](#)

$c(s)$ rayon de courbure, [page 2029](#)

$t(s)$ Torsion, [page 2030](#)

Géométrie

$P(E)$ l'espace projectif de E , [page 2067](#)

$(x_0 : \dots : x_n)$ coordonnées homogènes dans un espace projectif, [page 2086](#)

$\text{Conv}(A)$ enveloppe convexe, [page 998](#)

$\text{PGL}(E)$ groupe projectif, [page 2074](#)

B° orthogonal dans le dual, [page 421](#)

$G[\mathbb{C}]$ combinaisons d'éléments de G à coefficients dans $\mathbb{C}$, [page 1570](#)

$P_1(\mathbb{C})$ sphère de Riemann, [page 2090](#)

Chaînes de Markov

$\pi(x)$ lié au temps de retour, [page 2858](#)

Probabilités et statistique

$\sigma(f)$ La tribu engendrée par une variable aléatoire ou une application, [page 1308](#)

$a \wedge b$ $\min(a, b)$, [page 2888](#)

K_X matrice de covariance d'un vecteur gaussien, [page 2783](#)

$m(\mathcal{A})$ Ensemble des fonctions $\mathcal{A}$ -mesurables, [page 1325](#)

Théorie des groupes

$(G/H)_g$ classes à gauche, [page 315](#)

$[a]_p$ ensemble des $a + kp$, [page 337](#)

$[G, G]$ groupe dérivé, [page 305](#)

$[g, h]$ commutateur dans un groupe, [page 305](#)

$\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ Le groupe des applications affines bijectives de $\mathbb{R}^n$, [page 1009](#)

gr_G groupe engendré, [page 248](#)

$\hat{G}$ groupe des caractères de G , [page 1565](#)

σ_x réflexion par rapport à x , [page 1767](#)

A_n groupe alterné, [page 443](#)

$D(G)$ groupe dérivé, [page 305](#)

D_n groupe diédral, [page 1756](#)

G^{ab} groupe abélianisé de G , [page 306](#)

$N \times_{\phi} H$ produit semi-direct, [page 321](#)

S_n le groupe symétrique, [page 197](#)

$N \triangleleft G$ Le sous-groupe N est normal dans G , [page 197](#)

Topologie et théorie des ensembles

$\text{Adh}(A)$ adhérence de A , [page 531](#)

$\complement A$ Le complémentaire de l'ensemble A , [page 118](#)

$\text{Diam}(A)$ Diamètre de la partie A , [page 1048](#)

∂A La frontière de l'ensemble A , [page 684](#)

$A \Delta B$ différence symétrique, [page 128](#)

A^c complémentaire de A , [page 118](#)

Analyse

$C^{\infty}(I, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d))$ fonctions à valeurs dans les distributions, [page 2484](#)

$(S, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mu})$ complété de l'espace mesuré $(S, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mu})$, [page 1331](#)

$\mathcal{L}(E, F)$ Les applications linéaires de E vers F , [page 956](#)

$\arg(z)$ La valeur principale de l'argument de $z \in \mathbb{C}$, [page 2178](#)

$\mathbb{D}_b$ l'ensemble des écritures décimales en base b , [page 897](#)

$\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, [page 280](#)

$\mathbb{R}^+$ les réels positifs ou nuls, [page 284](#)

$\exp$ exponentielle, [page 1514](#)

$\mathcal{H}'$ dual, [page 2143](#)

$\text{Isom}(X)$ Le groupe des isométries de X , [page 606](#)

$\liminf a_n$ limite inférieure, [page 796](#)

$\limsup a_n$ limite supérieure, [page 796](#)

$\mathcal{L}^p$ espace de Lebesgue, sans les classes, [page 2241](#)

$\mu \ll \nu$ La mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure ν , [page 1402](#)

$\mu \perp \nu$ mesures mutuellement singulières, [page 1403](#)

μ^* La mesure extérieure associée à la mesure μ , [page 1320](#)

$\partial_z, \partial_{\bar{z}}$ dérivées partielles d'une fonction complexe, [page 2165](#)

$\text{proj}_K(x)$ projection orthogonale de x sur y , [page 2141](#)

$\sigma(\mathcal{D})$ tribu engendrée par $\mathcal{D}$, [page 1308](#)

$\mathcal{D}(\Omega)$ Les fonctions C^{∞} à support compact sur Ω , [page 2477](#)

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ espace des distributions tempérées, [page 2497](#)

- $A^2(\Omega)$ espace de Bergman, [page 2399](#)
- $A^\perp$ orthogonal d'une partie., [page 2142](#)
- $C^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$ Fonctions à valeurs dans les distributions., [page 2575](#)
- $C_c(I)$ fonctions continues à support compact dans I , [page 2279](#)
- $f \sim g$ fonctions ayant des limites équivalentes, [page 1131](#)
- $H^1(\Omega)$ espace de Sobolev sur Ω , [page 2516](#)
- $H^1(I)$ espace de Sobolev, [page 2511](#)
- $H^m(M)$ espace de Sobolev, [page 2518](#)
- $L^1_{loc}(I)$ fonctions intégrables sur les compacts de I , [page 2511](#)
- L^p espace de Lebesgue avec les classes, [page 2243](#)
- $M_i\varphi$ La fonction $x \mapsto x_i\varphi(x)$, [page 2394](#)
- S_nf somme partielle de série de Fourier, [page 2441](#)

Première partie

Le Frido

Chapitre 0

Introduction

0.1 Auteurs, contributeurs, sources et remerciements

SECooINTROremerciements

Les remerciements, dans chaque catégorie, sont mis dans l'ordre chronologique approximatif.

0.1.1 Ceux qui ont travaillé sur le Frido

SUBooINTROremerciementsFrido

- (1) Carlotta Donadello pour l'ensemble du cours de CTU de géométrie analytique 2010-2011. Une grosse partie de « analyse réelle » vient de là.
- (2) Les étudiants de géométrie analytique en CTU 2010-2011 ont détecté d'innombrables coquilles. Les étudiants du cours présentiel de géométrie analytique 2011-2012 ont signalé un certain nombre d'incorrections dans les exercices et les corrigés. Les agrégatifs de Besançon 2011-2012 pour leurs plans et leurs développements.
- (3) Lilian Besson pour m'avoir signalé un paquet de fautes, et quelques points pas clairs en statistiques.
- (4) Plouf qui m'a signalé une coquille dans le fil [la-selection-scientifique-de-la-semaine-numero-106](#).
- (5) Benjamin de Block pour des coquilles et une mise au point sur les conventions à propos de $\mathbb{R}^+$ et $(\mathbb{R}^+)^*$.
- (6) Olivier Garet pour avoir répondu à plein de questions de probabilités.
- (7) François Gannaz pour de la relecture et une version plus claire de la preuve (et de l'énoncé) de la proposition [19.10](#).
- (8) Danarmk pour des réponses à des questions dans les commentaires (allongement pour éviter un Overfull hbox) <http://linuxfr.org/nodes/110155/comments/1675589>. Et aussi pour [une discussion](#) à propos de la topologie sur $\mathcal{D}(\Omega)$.
- (9) Cédric Boutilier pour des réponses à des questions de probabilité statistique. <https://github.com/LaurentClaessens/mazhe/issues/16>
- (10) Remsirems pour des réponses à des questions d'analyse¹
- (11) Bertrand Desmons pour plusieurs patches rendant plus clairs de nombreux passages sur les suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.
- (12) Anthony Ollivier pour m'avoir fait remarquer qu'il n'est pas vrai que $A[X]$ est euclidien lorsque A est intègre (contre-exemple : $A = \mathbb{Z}$). Ça fait une faute de moins dans le Frido.
- (13) ybailly pour avoir détecté un bon nombre de coquilles dans la partie sur les ensembles de nombres.
- (14) Éric Guirbal pour le remplacement de `frenchb` par `french`.

1. <http://linuxfr.org/nodes/110155/comments/1675813>

- (15) cdrcprds pour une réponse à une question d'algèbre, démonstration à l'appui à propos de **pgcd**. Également pour sa relecture sans pitié de la partie sur la cardinalité (en particulier $A \approx A \setminus B$) et pour avoir pointé l'utilité du théorème de comparabilité cardinale.
- (16) Antoine Bensalah pour avoir répondu à une question sur Lax-Milgram tout en même temps que pointé une erreur dans la démonstration et fourni l'exemple **25.62** sur l'optimalité de l'inégalité.
- (17) Guillaume Deschamps pour ses remarques à propos du fait que le chapitre « constructions des ensembles » est très ardu.
- (18) Guillaume Barriere pour sa relecture attentive jusqu'aux corps.
- (19) Samy Clementz pour avoir découvert une faute dans la définition de mesure positive sur un espace mesurable.
- (20) Sylvain Rousseau pour avoir clarifié une construction dans le théorème de Bower version C^∞ .
- (21) Maxmax pour des typos dans l'index thématique.
- (22) Laurent Choulette pour une typo dans les propriétés du neutre d'un groupe.
- (23) Pierre Lairez pour la démonstration du théorème d'inversion de limite et de dérivée **12.398** sans passer par les intégrales (et les lemmes correspondants à propos du module de continuité).
- (24) Gregory Berhuy pour des réponses d'algèbres dans les catégories facile, moyen et difficile.
- (25) Benoît Tran pour avoir signalé un paquet de typos dans la démonstration de l'ellipsoïde de John-Loewner et ses dépendances.
- (26) Provatuscus pour avoir signalé un paquet de choses pas claires, et surtout pour avoir trouvé une faute dans la démonstration du fait qu'une fonction continue sur $\mathbb{Q}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Et pour cause : cet énoncé est faux. <https://github.com/LaurentClaessens/mazhe/issues/124>
- (27) William pour l'environnement **example** qui gère correctement le triangle.
- (28) Colin Pitrat pour de nombreuses remarques, typos et relecture de théorèmes.
- (29) Bruno Turgeon pour une très belle moisson de fautes de frappe (euphémisme pour dire « mon ignorance crasse de l'orthographe »).
- (30) Sacha Dhénin pour une belle quantité de fautes de frappes et pour avoir soulevé quelques points pas clairs (par exemple la définition du sous-groupe engendré dans le cas de la partie vide).
- (31) Patrice Goyer pour m'avoir signalé quelques fautes et pas mal de points pas clairs dans les polynômes et dans la théorie généraliste des ensembles. Et pour m'avoir fait remarquer (deux fois) que mon script de déploiement ne marchait pas.
- (32) Alain Vigne pour une quantité (presque) indénombrable de fautes d'orthographe et de mauvaises tournures de phrase dans les espaces vectoriels, la construction de nombres, la théorie des groupes et les anneaux. Il m'a également pointé quelques fautes et points vraiment pas clairs dans des démonstrations dont la correction a permis de bien améliorer la qualité du texte.
- (33) Quentin Guyot pour une quantité de typos proche du nombre de Graham dont beaucoup me semblent impossible à détecter sans une lecture attentive ; (au moins) huit entrées dans l'erratum lui sont dues (au sens où c'est lui qui les a trouvées, pas qu'il les a causées).
- (34) Jean Abou Samra pour la démonstration de la connexité par arcs C^1 .
- (35) jperon pour le classement de l'index en comptant les $\acute{e}$ comme des $\acute{e}$. Voir [5].

0.1.2 Aide directe, mais pas volontairement sur le Frido

SUBooINTROremerciementsDirecte

- (1) Plein de monde pour diverses contributions à des énoncés d'exercices. Pierre Bieliavsky pour les énoncés d'analyse numérique (MAT1151 à Louvain la Neuve 2009-2010). Jonathan Di

Cosmo pour certaines corrections de MAT1151. François Lemeux, exercices sur les normes de matrices et correction de coquilles. Martin Meyer et Mustapha Mokhtar-Kharroubi pour certains exercices du cours *Outils mathématiques* (surtout ceux des DS et examens).

- (2) Nicolas Richard et Ivik Swan pour les parties des exercices et rappels de calcul différentiel et intégral (Université libre de Bruxelles, 2003-2004) qui leurs reviennent.
- (3) Carlotta Donadello pour la partie géométrie analytique : topologie dans $\mathbb{R}^n$, courbes, intégrales, limites. (Université de Franche-Comté 2010-2012)
- (4) Le forum usenet de math, en particulier pour la construction des corps fini dans le fil « Vérifier qu'un polynôme est primitif » initié le 20 décembre 2011.
- (5) Mihai Bostan nous a donné ses notes manuscrites de son cours présentiel de géométrie analytique 2009-2010. (Presque) Toute la structure du cours de géométrie analytique lui est due (qui est maintenant fondue un peu partout dans les chapitres d'analyse).

0.1.3 Des gens qui ont fait un travail qui m'a bien servi

SUBooINTROremerciementsAutres

- (1) Arnaud Girand pour avoir mis ses développements bien faits en ligne. Une bonne vingtaine de résultats un peu partout dans ces notes viennent de lui.
- (2) Le site <http://www.les-mathematiques.net> m'a donné les preuves de nombreux résultats.
- (3) Pierre Monmarché pour son document en ligne tout plein de développements, et des réponses à des questions.
- (4) Tous les contributeurs du Wikipédia francophone (et aussi un peu l'anglophone) doivent être remerciés. J'en ai pompé des quantités astronomiques ; des articles utilisés sont cités à divers endroits du texte, mais ce n'est absolument pas exhaustif.
- (5) Les intervenants du fil « Antisymétrisation, alterné, déterminant et caractéristique » sur [les-mathematiques.net](http://www.les-mathematiques.net) m'ont bien aidé pour la section sur les déterminants 8.1 (bien qu'ils ne le savent pas).
- (6) Xavier Mauquoy pour l'énoncé et la preuve du théorème 3.32.
- (7) David Revoy pour les dessins de Pepper&Carrot [de la couverture](#).

J'ai souvent donné entre parenthèses à côté des mots « théorème », « lemme » ou « proposition » une ou plusieurs références vers les sources de la preuve que je donne. Ce sont parfois des liens vers la bibliographie ; parfois aussi des liens hypertextes vers des sites, des blogs, etc. Tous ces gens ont fait du bon boulot. Sans toute cette « communauté », l'internet serait mort ².

0.2 Originalité

SECooINTROoriginalite

Ces notes ne sont pas originales par leur contenu : ce sont toutes des choses qu'on trouve facilement sur internet ; je crois que la bibliographie est éloquente à ce sujet. Ce cours se distingue des autres sur les points suivants.

La longueur J'ai décidé de ne pas me soucier de la taille du fichier. Il fera cinq mille pages s'il le faut, mais il restera en un bloc. Étant donné qu'il n'existe qu'une seule mathématique, il ne m'a pas semblé intéressant de produire une division artificielle entre l'analyse, la géométrie ou l'algèbre. Tous les résultats d'une branche peuvent (et sont) être utilisés dans toutes les autres branches.

Dans cette optique, je me suis évertué à ne créer que des références « vers le haut ». À moins d'oubli de ma part ³, il n'y a aucun endroit du texte qui dépend d'un lemme démontré plus bas. Le fait qu'un théorème B soit plus bas qu'un théorème A signifie qu'on peut démontrer A sans savoir B .

2. Cette dernière phrase doit être comprise comme un appel à ne pas utiliser Moodle et autres iCampus pour diffuser vos cours de math, ou en tout cas pas comme moyen exclusif.

3. Par exemple pour les théorèmes pour lesquels je n'ai pas lu ni a fortiori écrit de preuves.

La licence Ce document est publié sous une licence libre. Elle vous donne explicitement le droit de copier, modifier et redistribuer.

Les mises à jour Ce document est régulièrement mis à jour. Des fautes d'orthographe sont corrigées (presque) chaque jour. Si vous me signalez une faute de mathématique, elle sera corrigée.

Transparence Je ne fais pas semblant que ces notes soient parfaites. Les points sur lesquels je ne suis pas sûr, les preuves que j'ai inventées moi-même sont clairement indiqués pour inciter le lecteur à redoubler de prudence. Une liste de questions à résoudre est incluse en la section 0.7. Voir 0.3 pour plus de détails.

0.3 Les choses qui doivent vous faire tiquer

SECooWVHBooCaYoXP

Un cours de math doit toujours être lu attentivement, surtout si vous avez l'intention de resservir à un jury le fruit de vos lectures. Dans ce livre, trois éléments doivent vous faire redoubler de prudence.

La référence [1] D'abord les références à [1] indiquent qu'une bonne partie de ce qui suit est de l'invention personnelle de l'auteur. Cela ne veut évidemment pas dire que c'est moi qui ai découvert le résultat. Ça veut dire que je n'ai pas trouvé le résultat ou certaines parties de la preuve.

Les notes en bas de page Certaines notes en bas de page sont écrites dans une fonte spéciale⁴. Elles indiquent des points sur lesquels je doute ou des étapes de calculs que je ne parviens pas à reproduire en suivant mes sources. Lorsque vous voyez une telle note, redoublez de prudence, allez voir la source, et écrivez-moi si vous pouvez résoudre le problème.

Les environnements dédiés Et enfin certains problèmes sont indiqués plus longuement dans un environnement dédié en petits caractères comme ceci :

;; Avertissement/question au lecteur !! 0.1

Les choses écrites comme ceci sont des questions ou des éléments sur lesquels j'ai un doute. Lisez-les attentivement. Ces notes mentionnent des points que personnellement je n'oserais pas affirmer plein d'aplomb à un jury d'agrégation.

0.4 Quelques choix qui peuvent provoquer des quiproquos

SECooINTROquiproquos

Comme tout cours de mathématique, ce cours fait des choix qui sont parfois discutables. Voici quelques points sur lesquels les choix faits ici ne sont peut-être pas ceux fait par tout le monde. Ce sont donc des points sur lesquels vous devez faire attention pour éviter les quiproquos lors par exemple d'un oral dans un concours.

- (1) Nous utilisons la définition « épointée » de limite d'une fonction en un point. Elle diffère de celle donnée par le ministère de l'enseignement en France. Si votre but est de passer un concours d'enseignement en France, vous devriez lire 12.2; dans tous les autres cas, la définition prise ici est celle qu'il vous faut.
- (2) Un compact est une partie d'un espace topologique pour lequel tout recouvrement par des ouverts admet un sous-recouvrement fini. Le fait d'être séparable n'est pas inclus dans la définition de compact. De nombreux textes français incluent la séparabilité dans la compacité.
- (3) Le logarithme sur $\mathbb{C}$ est une application $\ln: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ définie partout sauf en zéro. Elle n'est donc pas continue sur la fameuse demi-droite. À ne pas confondre avec une *détermination* du logarithme qui est par définition continue et donc non définie sur la demi-droite.

Cela est un choix très discutable. La raison de donner à la notation « $\ln$ » cette signification est simplement de suivre l'usage de Sage. Pour Sage, $\ln(-1)$ existe et vaut $i\pi$.

Voir les remarques 26.42.

4. Les notes comme celle-ci signifient qu'il y a certaines choses dont je ne suis pas sûr.

- (4) Le mot « corps » n'implique pas la commutativité bien que tous les corps du Frido soient commutatifs, et nous n'utilisons pas la terminologie « anneau à division ». Voir la section -1.3 et la discussion 6.1.

0.5 Autres choix pas spécialement standards

Nous listons ici quelques choix qui n'induisent pas de différences ou d'incompatibilité avec les autres cours, mais qui doivent être compris et justifiés.

- (1) Nous n'utilisons pas les notations $o(x)$ ou autres $O(N^2)$. D'abord parce que je n'ai jamais très bien compris comment elles fonctionnent, et ensuite (surtout) parce que ces notations induisent en erreur. Ce sont des notations qui cachent, sous des notations à peu près intuitive, l'utilisation de théorèmes pas simples.

Écrire

$$f(x) = P(x) + o(x^2), \quad (0.1)$$

c'est un peu comme quand on écrit (horreur !)

$$F(x) = \int f(x)dx + C. \quad (0.2)$$

Où est le x à droite ? Quel est le statut de C ?

Même chose pour la notation $f(x) = P(x) + o(x^2)$. Le x de $o(x^2)$ est-il le x qu'on a à gauche ? Si $g(x) = Q(x) + o(x^2)$, est-ce le même o que celui de f ?

- (2) Nous allons être plus calme avec la notation $A[X]$ pour les polynômes sur l'anneau A , et encore moins $A[X_1, \dots, X_n]$ pour les polynômes de n variables. Au lieu de cela nous utilisons $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}_n(A)$.

Est-ce que vous diriez que $A[X] = A[Y]$? Quelle est exactement la nature de X dans $P = X^2 + 1$ ou dans $P(X) = X^2 + 1$? Si $P \in A[X]$ vaut $P(X) = X^2$ et si $Q \in A[Y]$ vaut $Q(Y) = Y^2$, est-ce que vous oseriez écrire $P = Q$?

0.5.1 Mathématique intéressante

Définition 0.2.

Une notion mathématique est **intéressante** si elle permet de répondre à une question que l'on peut se poser sans connaître la notion.

Exemple 0.3.

Étant donné un segment dans le plan, quels sont les triangles rectangles dont ce segment est l'hypoténuse ?

Nous n'avons pas besoin de cercles pour poser cette question. Mais nous avons besoin de connaissances sur les cercles pour y répondre. Donc l'étude des cercles est intéressante. $\triangle$

Exemple 0.4.

Comment fonctionne la gravitation ?

Cette question peut être posée sans connaître de calcul tensoriel, d'équations différentielles ou d'intégrales. Et pourtant, tous ces concepts sont utiles pour y répondre. $\triangle$

0.6 Sage est là pour vous aider

Il existe de nombreux logiciels de mathématique. Notre préféré est **Sage** pour une raison très précise : Sage est (en simplifiant) un module pour python. Donc quand on travaille en Sage, on dispose de tout Python. La syntaxe et la structure de Sage ne sont pas *ad hoc* pour faire des maths, et ce qu'on apprend en Sage peut être recyclé pour faire n'importe quoi : navigateur web, script de manipulation de texte, traitement d'image, réseau neuronaux, ...

Sage est un logiciel disponible pour l'épreuve de modélisation de l'agrégation de mathématique ; il y a donc de bonnes chances que vous en ayez l'usage.

0.6.1 Lancez-vous dans Sage

SUBooINTROsageLancezVous

- (1) Aller sur <http://www.sagemath.org>,
- (2) créer un compte,
- (3) créer des feuilles de calcul et s'amuser!!

Il y a beaucoup de [documentation](#) sur le [site officiel](#)⁵, et nous vous conseillons particulièrement le livre [6].

Si vous comptez utiliser régulièrement ce logiciel, je vous recommande *chaudement* de [l'installer](#) sur votre ordinateur.

0.6.2 Exemples de ce que Sage peut faire pour vous

SUBooINTROsageExemples

Ce livre est émaillé de petits bouts de code en Sage montrant ses différentes fonctionnalités là où nous en avons besoin⁶. Voici une liste (non exhaustive) de ce que Sage peut faire pour vous.

- (1) Calculer des limites de fonctions, exemples [43.1](#) et [43.2](#).
- (2) Tracer des graphes de fonctions, exemple [43.2](#).
- (3) Tracer des courbes en trois dimensions, voir exemple [12.232](#). Notez que pour cela vous devez installer aussi le logiciel Jmol. Pour Ubuntu, c'est dans le paquet `icedtea6-plugin`.
- (4) Calculer des dérivées partielles de fonctions à plusieurs variables, voir exemple [43.3](#).
- (5) Résoudre des systèmes d'équations linéaires. Voir les exemples [43.4](#) et [43.5](#). Lire aussi [la documentation](#).
- (6) Tout savoir d'une forme quadratique, voir exemple [43.6](#).
- (7) Calculer la matrice hessienne de fonctions de deux variables, déterminer les points critiques, déterminer le genre de la matrice hessienne aux points critiques et écrire les extrémums de la fonctions (sous réserve d'être capable de résoudre certaines équations), voir les exemples [43.7](#) et [43.8](#).
- (8) Indiquer une infinité de solutions à une équation en utilisant des paramètres. L'exemple [43.9](#) montre ça avec une équation algébrique. Un exemple concernant des fonctions trigonométriques :

```
sage: solve(sin(x)/cos(x)==1,x,to_poly_solve=True)
[x == 1/4*pi + pi*z1]
sage: solve(sin(x)**2==cos(x)**2,x,to_poly_solve=True)
[sin(x) == cos(x), x == -1/4*pi + 2*pi*z86, x == 3/4*pi + 2*pi*z84]
```

Notez l'option `to_poly_solve=True` dans `solve`.

- (9) Calculer des dérivées symboliquement, voir exemple [43.10](#).
- (10) Calculer des approximations numériques comme dans l'exemple [43.11](#).
- (11) Calculer dans un corps de polynômes modulo comme $\mathbb{F}_p[X]/P$ où P est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{F}_p$. Voir l'exemple [19.64](#).

Sage peut en général faire tout ce que vous êtes capable de faire à l'entrée en master et probablement bien plus, à la notable exception des limites à deux variables.

REMooINTROsageAttention

Remarque 0.5.

Sage peut toutefois vous induire en erreur si vous n'y prenez pas garde parce qu'il sait des choses en mathématique que vous ne savez pas. Par conséquent il peut parfois vous donner des réponses (mathématiquement exactes) auxquelles vous ne vous attendez pas. Voir par exemple [15.160](#) pour le logarithme de nombres négatifs. Et aussi ceci :

5. <http://www.sagemath.org>

6. Soit un vrai besoin comme tracer un graphique en 3D, soit de la paresse comme calculer une grosse dérivée.

```

1
2 SageMath version 7.3, Release Date: 2016-08-04
3 Type "notebook()" for the browser-based notebook interface.
4 Type "help()" for help.
5
6 sage: limit(1/x,x=0)
7 Infinity
8 sage: limit(1/x**2,x=0)
9 +Infinity

```

tex/sage/sageSnip017.sage

Sage fait une différence entre `Infinity` et `+Infinity` et donne

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty \quad (0.3)$$

ainsi que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty. \quad (0.4)$$

Voir aussi la compactification en un point d’Alexandroff [7.185](#).

0.7 Comment contribuer et aider ?

[SecooCKWWooBFgnea](#)

0.7.1 Des preuves qui manquent

[SUBooINTROhowtoContribProofs](#)

Vous trouverez un peu partout des énoncés sans preuves. Certaines sont sûrement très faciles, et d’autres probablement assez compliquées. N’hésitez pas à rédiger une preuve et me l’envoyer.

Vous pouvez m’envoyer vos preuves sous forme de « c’est bien fait dans tel cours », avec une URL.

Ne me dites juste pas « c’est bien fait dans tel *livre* ». Je ne travaille pas à l’université, et je n’ai pas accès à une bibliothèque universitaire ; je n’ai donc pas réellement accès à ces fameux « livres » dont tout le monde parle.

0.7.2 Du texte qui manque

[SUBooINTROhowtoContribText](#)

Vous remarquerez que de nombreuses pages du Frido sont des enchainements de théorèmes et démonstrations sans articulations. Autrement dit, il manque ce qu’à l’agrégation on dirait à l’oral quand on présente le plan. Si vous avez des idées de choses à ajouter ici où là, faites le moi savoir.

0.7.3 Des exemples qui manquent

[SUBooINTROhowtoContribExamples](#)

Si vous connaissez de bons exemples, faites-le moi savoir.

0.7.4 Trucs de programmation et de $\text{\LaTeX}$

[SUBooINTROhowtoContribProg](#)

- (1) Comment faire en sorte que les mots commençant par « é » soient avec les « e » dans l’index, et non avant les « a » ? Il me faudrait un mécanisme plus automatique que faire `machin@truc`. Une fonction en python qui prend en entrée le fichier bbl sous forme de string et qui ressort sous forme de string le fichier bbl modifié me convient.
- (2) Il y a des problèmes dans la table des matières. « Table des matières », « Index », et « Liste des notations » ne pointent pas vers la bonne page.
- (3) Écrire un script (en python ou autre) qui prend en argument deux numéros ou noms de chapitres et qui retourne l’ensemble des lignes du premier qui contient des `ref` ou `eqref` dont le label correspondant est dans le second.

Attention : il faut tenir compte de `input` de façon récursive.

Bonus : calculer le hash sha1 de chaque ligne du résultat et ne pas l'afficher si il se trouve dans la liste du fichier `commons.py`.

0.8 Les politiques éditoriales

SECooINTROpolitics

Certaines parties de ce texte ne respectent pas les politiques éditoriales. Ce sont des erreurs de jeunesse, et j'en suis le premier triste.

0.8.1 Licence libre

SUBooINTROpoliticsFreeLic

Je crois que c'est clair.

0.8.2 pdf_latex

SUBooINTROpoliticsPdf_latex

Tout est compilable avec pdf_lAT_EX. Pas de pstricks, de psfrag ou de ps<quoiquecesoit>.

0.8.3 utf8

SUBooINTROpoliticsUTF8

Je crois que c'est clair.

0.8.4 Notations

SUBooINTROpoliticsNotations

On essaie d'être cohérent dans les notations et les conventions. Pour la transformée de Fourier par exemple, je crois que la définition du produit scalaire dans L^2 , des coefficients de Fourier, de la transformation et de la transformation inverse sont cohérents. Cela demande, lorsqu'on suit un livre qui ne suit pas les conventions utilisées ici, de convertir parfois massivement.

0.8.5 De la bibliographie

SUBooINTROpoliticsBiblio

On évite d'écrire en haut de chapitre « les références pour ce chapitre sont ... ». Il est mieux d'écrire au niveau des théorèmes, entre parenthèses, les références.

Lorsqu'on écrit l'énoncé d'un théorème sans retranscrire la démonstration, il faut mettre une référence vers un document *en ligne* qui en contient la preuve. Il est vraiment fastidieux de chercher une preuve sur internet et de tomber sur des dizaines de documents qui donnent l'énoncé mais pas la preuve.

0.8.6 Faire des références à tout

SUBooINTROpoliticsInternalRefs

Lorsqu'un utilise le théorème des accroissements finis, il ne faut pas écrire « d'après le théorème des accroissements finis, blablabla ». Il faut écrire un `\ref` explicite vers le résultat. Cela alourdit un peu le texte, mais lorsqu'on joue avec un texte de plus de 2000 pages, il est parfois laborieux de trouver le résultat qu'on cherche (surtout si il existe plusieurs versions d'un résultat et que l'on veut faire référence à une version particulière).

0.8.7 Des listes de liens internes

SUBooINTROpoliticsInternalLinks

Le début du Frido contient une espèce d'index thématique. Il serait bon de l'étoffer.

0.8.8 Pas de références vers le futur

SUBooINTROpoliticsNoFutureRef

Dans le Frido, *aucune* preuve ne peut faire une référence vers un résultat prouvé plus bas. On n'utilise pas le théorème 10 dans la démonstration du théorème 7. Cela est une contrainte forte sur le découpage en chapitres et sur l'ordre de présentation des matières.

Il est bien entendu accepté et même encouragé de mettre des notes du type « Nous verrons plus loin un théorème qui ... ». Tant que ce théorème n'est pas *utilisé*, ça va.

Chapitre 1

Construction des ensembles de nombres

1.1 Les bases

SECooIntroBases

1.1.1 Axiomatique et grammaire

SUBooTNumoriEEnsemble

1.1.

Le Frido n'est pas supposé être lu dans l'ordre de la première à la dernière page ; les matières y sont présentées dans l'ordre logique mathématique, et non dans l'ordre logique pédagogique, et encore moins par ordre de difficulté croissante.

En mathématique, si on lit une démonstration et que l'on veut vraiment tout justifier, et justifier toutes les étapes de tous les résultats utilisés, on tombe forcément un jour sur les axiomes.

Or l'axiomatique est un sujet particulièrement difficile. Nous n'allons donc pas « tout justifier » jusque là. Nous n'allons même pas préciser quel système d'axiome est utilisé. En particulier nous n'allons pas donner l'axiomatique des ensembles : nous allons supposer connus les ensembles et leurs principales propriétés.

NorooFridoGrammaire

1.2.

Nous n'allons pas non plus formaliser la grammaire des expressions mathématiques¹. Nous supposons que vous êtes capables de lire des expressions comme

$$x \in \mathbb{N} \Rightarrow \{a \geq x\} \text{ est infini.} \quad (1.1)$$

1.1.2 Les théorèmes encapsulants

SWdBooThmEncapsulants

1.3.

Je propose d'introduire le concept de « théorème encapsulant ». Un théorème est encapsulant lorsque les techniques et concepts utiles à sa démonstration ne sont pas utiles pour énoncer et utiliser le théorème.

Sauter la démonstration d'un théorème encapsulant permet donc de sauter des parties entières de la mathématique.

Un exemple typique d'un théorème qui n'est pas encapsulant est le théorème de Rolle 12.213. Les ingrédients de la démonstration (topologie, dérivée) sont présents dans l'énoncé². D'habitude, quand on utilise le théorème de Rolle on est dans un contexte où on est en train de parler de dérivée, de topologie, et de théorème des valeurs intermédiaires.

Notez que le théorème de Stokes (théorème 24.8, plus généralement théorème 20.71) n'est pas non plus encapsulant parce que pour énoncer le théorème, il faut quand même définir les intégrales, les différentielles, les bords, etc. La démonstration de Stokes ne fait pas intervenir de concepts réellement nouveaux par rapport à ce qu'il faut savoir pour énoncer Stokes.

1. J'utilise ici des mots que je ne comprends pas, juste pour me donner l'air malin.

2. C'est à dire que pour énoncer le théorème de Rolle, il faut déjà connaître pratiquement toutes les notions nécessaires pour le démontrer.

Le Frido va accepter sans démonstrations deux théorèmes encapsulants qui évitent de devoir parler de pans entiers de la théorie des ensembles.

- (1) Le lemme de Zorn 1.37. Il cachera toute la complexité de l'axiome du choix et la moitié de ce qu'apporte cet axiome par rapport à ZF.
- (2) L'existence d'un ensemble des naturels (théorème 1.116). Même si nous proposerons un moyen d'en construire un, cela cachera toute la complexité d'axiomatisation, des différentes définitions d'ensembles finis, d'existence de maximum, etc. Voir [7, 8].

Notez que les énoncés de ces théorèmes ne demandent pas grand chose : relation d'ordre sur un ensemble pour le lemme de Zorn ; ensemble et application injective pour les naturels.

Je me demande d'ailleurs si il existe beaucoup d'autres théorèmes encapsulants.

1.2 Ensembles, relations, fonctions

NORMSSECrdsMsfhsFables

1.4.

Tout cela pour dire que le Frido ne traitera que de la partie facile de la mathématique.

1.2.1 Opérations ensemblistes

SUBOOOperatfionsSEfndmblstos3

1.5.

Nous supposons avoir une théorie des ensembles qui tient la route. En particulier nous supposons que les notions suivantes sont connues :

- (1) ensemble vide,
- (2) ensemble, appartenance, intersection, union,
- (3) produit cartésien de plusieurs ensembles³.

Ce sont toutes des choses dont la construction à partir des axiomes n'est en aucun cas évidente. En particulier, des « définitions » comme « l'intersection de deux ensembles est l'ensemble contenant exactement les éléments communs aux deux ensembles » ne sont pas correctes parce qu'elles passent à côté de l'existence et de l'unicité d'un tel ensemble.

DEFooJLBVooMyCQMO

Définition 1.6.

Soit E , un ensemble et A , une partie de E (c'est-à-dire un sous-ensemble de E). Le **complémentaire** de l'ensemble A , dans E , noté $\complement A$ est l'ensemble des éléments de E qui ne font pas partie de A :

$$\complement A = E \setminus A = \{x \in E \text{ tel que } x \notin A\}. \quad (1.2)$$

Nous allons aussi régulièrement noter le complémentaire de A par A^c .

DefEnsemblesDisjoints

Définition 1.7.

Deux ensembles A et B sont **disjoints** si leur intersection est vide⁴ ; en d'autres termes, si il n'existe aucun élément commun à A et B .

DefPartitionEnsembles

Définition 1.8.

Soit E un ensemble, et E_α des parties de E indexées sur un ensemble A . Les E_α forment une **partition** si :

- pour tous $\alpha, \beta \in A$, on a soit $E_\alpha = E_\beta$, soit $E_\alpha \cap E_\beta = \emptyset$;
- la réunion des E_α est E .

On dit aussi que E est partitionné par les E_α .

3. Nous en proposons une définition dans un cadre général – définition 1.22 –, dont les fondements devraient être analysés de très près.

4. Remarquez que les mots « intersection » et « vide » sont de ceux que nous avons décidé de ne pas définir.

NorooDepartTheoEns

1.9.

Remarquez par exemple que la première phrase de l'article de Wikipédia sur la construction de $\mathbb{N}$ est « Partant de la théorie des ensembles, on identifie 0 à l'ensemble vide, puis on construit ... ». Il est bien précisé que l'on part d'une théorie des ensembles.

La suite de ce chapitre sera essentiellement sans exemple parce qu'avant d'avoir construit les ensembles de nombres, je ne sais pas très bien quels exemples on peut donner de quoi que ce soit.

1.2.2 Des relations aux bijections

LSEHooHfVfToBjEntForE

Définition 1.10 ([9]).

Une **relation binaire** d'un ensemble E vers un ensemble F est une partie de $E \times F$.

Si G est une relation binaire entre E et F , et si $(x; y) \in G$, nous notons $x\mathcal{R}_G y$ et nous disons que x est en relation avec y .

On définit aussi une **relation unaire** d'un ensemble E comme une partie de E , et une **relation ternaire** de trois ensembles E_1 , E_2 et E_3 comme une partie de $E_1 \times E_2 \times E_3$.

DefooApplicFct

Définition 1.11.

Soit G une relation binaire entre deux ensembles E et F . Si, pour tout $x \in E$, et tous $y, y' \in F$, les relations $x\mathcal{R}_G y$ et $x\mathcal{R}_G y'$ entraînent $y = y'$, alors on peut associer à chaque $x \in E$ apparaissant comme première composante dans G , l'élément unique $y \in F$ qui est en relation avec x dans G . Cette association définit une **fonction** de E dans F .

Le plus souvent, les fonctions entre deux ensembles sont désignées par f , ou selon le contexte, par une autre lettre, souvent minuscule. On notera presque toujours les ensembles concernés par la fonction, et on adopte alors la notation $f : E \rightarrow F$.

Pour marquer l'association, à $x \in E$, du $y \in F$ correspondant à travers f , on note cet élément $f(x)$: ainsi, $f(x) \in F$, et il est appelé **image de x par f** .

L'ensemble des $x \in E$ pour lesquels il existe $y \in F$ tel que $x\mathcal{R}_G y$ est noté D_f , ou bien $\text{Domaine } f$; on l'appelle **domaine de définition de f** , ou encore **ensemble de définition de f** . Lorsque $\text{Domaine}(f) = E$, on dit que f est une **application**.

RemLienFctRelation

Remarque 1.12 (Lien entre fonction et relation).

Si $f : E \rightarrow F$ est une fonction de relation sous-jacente G , alors :

- $\text{Domaine } f = \{x \in E \text{ tel que } \exists y \in F : (x, y) \in G\}$;
- $\Im f = \{y \in F \text{ tel que } \exists x \in E : (x, y) \in G\}$;
- $\text{Graph } f = G$.

REMooFonctionDomaineEntier

Remarque 1.13.

Dans le Frido, on prend comme convention que, quand on écrit $f : E \rightarrow F$, alors $\text{Domaine } f = E$. C'est un choix qui n'est peut-être pas standard, mais qui évite des complications sur ce qu'est réellement le domaine de définition. En particulier, dans le Frido, on ne verra que très rarement f « tout seul ».

En revanche, on ne sait rien sur $\Im f$ a priori. Il ne faut pas déduire de la notation que l'ensemble image $\Im f$ serait F tout entier.

NORooLMBYooYjUoju

1.14.

L'**axiome du choix** que nous acceptons peut s'énoncer comme ceci[10] : Étant donné un ensemble X d'ensembles non vides, il existe une fonction définie sur X , appelée fonction de choix, qui à chacun d'entre eux associe un de ses éléments.

DefooInjSurjBij

Définition 1.15.

Soient deux ensembles E et F . Une fonction $f : E \rightarrow F$ est

- (1) **surjective** si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$;
- (2) **injective** si pour tout $y \in F$, il existe au plus un $x \in E$ tel que $y = f(x)$;

(3) **bijjective** si elle est à la fois injective et surjective.

NORMMooMethodePreuveInj

1.16.

La méthode la plus courante pour démontrer qu'une application $f: E \rightarrow F$ est injective est de considérer $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$, et de prouver à partir de là que $x = y$. Ou alors de supposer $x \neq y$ et d'obtenir une contradiction.

La technique de la contradiction est évidemment la plus courante lorsque l'égalité $f(x) = g(x)$ implique une équation faisant intervenir $1/(x - y)$.

La surjection et l'injection sont des propriétés bien différentes qu'il convient de prouver séparément. De plus une même « formule » peut définir une application injective, surjective, bijective ou non selon les ensembles sur lesquels nous la considérons.

DEFcomposeeFonctions

Définition 1.17.

Soit $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow Z$ deux fonctions définies respectivement sur les ensembles X et Y . On définit alors la **composée** de f avec g comme la fonction $g \circ f$ de l'ensemble X vers l'ensemble Z telle que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

On remarquera que le domaine de définition de $g \circ f$ est l'ensemble $\{x \in \text{Domaine } f \text{ tel que } f(x) \in \text{Domaine } g\}$, sous-ensemble de $\text{Domaine } f$.

LEMooWBYSooFqyqQP

Lemme 1.18.

Soient deux ensembles A et B ainsi qu'une application $f: A \rightarrow B$. Nous supposons qu'il existe une application $g: B \rightarrow A$ telle que $f \circ g = \text{Id}_B$ et $g \circ f = \text{Id}_A$.

Alors f est une bijection.

Démonstration. En deux parties.

- (1) **Injection** Supposons que $f(a) = f(b)$. Alors en appliquant g des deux côtés, et en utilisant le fait que $g \circ f = \text{Id}_A$, nous trouvons $a = b$.
- (2) **Surjection** Soit $x \in B$. Posons $a = g(x)$. Alors, en utilisant le fait que $f \circ g = \text{Id}_B$ nous avons

$$f(a) = (f \circ g)(x) = x. \quad (1.3)$$

Donc x est dans l'image de f et f est surjective.

□

DEFooTRGYooRxORpY

Définition 1.19.

Soit $f: A \rightarrow B$ une bijection. L'**application réciproque** de f est la fonction

$$\begin{aligned} f^{-1}: B &\rightarrow A \\ y &\mapsto \text{le } x \in A \text{ tel que } f(x) = y. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Plus généralement si $f: X \rightarrow Y$ est une fonction quelconque et si $S \subset Y$, nous notons

$$f^{-1}(S) = \{x \in \text{Domaine } f \text{ tel que } f(x) \in S\}, \quad (1.5)$$

et dans le cas où S est réduit à un unique élément y , nous notons $f^{-1}(y)$ au lieu de $f^{-1}(\{y\})$. Si de plus $f^{-1}(S)$ est un singleton x , nous noterons $f^{-1}(S) = x$ et non $f^{-1}(S) = \{x\}$.

REMooDifferenceElementSingleton

Remarque 1.20.

Les plus acharnées parmi les lectrices se rendront compte de la différence ontologique fondamentale entre x et $\{x\}$, et donc des abus de notations explicitées dans la définition précédente.

PROPooBXVSooZXmwKC

Proposition 1.21 ([1]).

Soit $f: A \rightarrow B$ une fonction. Si X et Y sont des parties de A , alors :

- (1) on a l'inclusion $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$;
- (2) si de plus, f est injective⁵, alors $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$;

ITEMooFctInclusionInter

ITEMooFctInjEgaliteInter

5. Définition 1.15.

ITEMooFctInjDisjonction

- (3) si enfin, f est injective et X et Y sont disjoints, alors $f(X) \cap f(Y) = \emptyset$ (autrement dit : $f(X)$ et $f(Y)$ sont disjoints aussi).

Démonstration. Prouvons d'abord $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$, ensuite $f(X) \cap f(Y) \subseteq f(X \cap Y)$ dans le cas où f est une injection, et enfin le cas d'ensembles disjoints.

- (1) **Première inclusion** Si $\xi \in f(X \cap Y)$, alors il existe $s \in X \cap Y$ tel que $\xi = f(s)$. Étant donné que $s \in X$, nous avons $\xi = f(s) \in f(X)$. Et comme $s \in Y$ nous avons aussi $\xi = f(s) \in f(Y)$. Au final $\xi = f(s) \in f(X) \cap f(Y)$.
- (2) **Seconde inclusion** Si $\xi \in f(X) \cap f(Y)$, il existe $x \in X$ et $y \in Y$ tels que $\xi = f(x)$ et $\xi = f(y)$. Par injectivité de f , nous avons $x = y$ et donc $\xi \in f(X \cap Y)$.
- (3) **Ensembles disjoints** Si f est injective, et si $X \cap Y = \emptyset$, alors il n'y a aucun élément dans $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.

□

DEFooTYIMooZUsYJw

Définition 1.22 (Produit cartésien infini[11]).

Soit un ensemble I ainsi qu'une collection d'ensembles $\{A_i\}_{i \in I}$. Nous notons $\prod_{i \in I} A_i$ l'ensemble des applications $f: I \rightarrow \bigcup A_i$ telles que $f(i) \in A_i$.

1.2.3 Ensemble ordonné

SUDfooEHSvGbbtRQrGdRfAk

Définition 1.23.

Une **relation d'ordre** sur un ensemble E est une relation binaire⁶ (notée $\leq$) sur E telle que pour tous $x, y, z \in E$,

- (1) *Réflexivité* : $x \leq x$
- (2) *Antisymétrie* : $x \leq y$ et $y \leq x$ implique $x = y$
- (3) *Transitivité* : $x \leq y$ et $y \leq z$ implique $x \leq z$.

ITEMooQTXOooTZXEmu

Pour suivre les notations de la définition 1.10, la partie G de $E \times E$ est une relation d'ordre lorsque

- (1) $(x, x) \in G$ pour tout $x \in E$,
- (2) Si $(x, y) \in G$ et $(y, x) \in G$, alors $x = y$,
- (3) Si $(x, y) \in G$ et $(y, z) \in G$, alors $(x, z) \in G$.

Dans la suite nous n'allons plus écrire de relations binaires en détaillant l'ensemble sous-jacent.

Lorsque nous avons un ensemble E et une relation d'ordre $\leq$ sur E , nous disons que le couple $(E, \leq)$ est un **ensemble ordonné**.

DEFooVGYQooUhUZGr

Définition 1.24.

Un ensemble ordonné est **totalelement ordonné** si deux éléments quelconques si deux éléments sont toujours comparables : si $x, y \in E$ alors nous avons soit $x \leq y$ soit $y \leq x$. Si les éléments ne sont pas tous comparables, nous disons que l'ordre est **partiel**.

ExeoOOrdreInclusion

Exemple 1.25.

Si E est un ensemble, l'inclusion est un ordre sur l'ensemble des parties de E , mais pas un ordre total parce que si X, Y sont des parties de E , alors nous n'avons pas automatiquement soit $X \subset Y$ soit $Y \subset X$. △

NORMooIntroIntervalleOrdonne

1.26.

On convient assez naturellement de la notation suivante : écrire $x \leq y \leq z$ revient à écrire $(x \leq y)$ et $(y \leq z)$. Cela s'étend à un nombre (fini) quelconque d'éléments, et le lecteur saura interpréter correctement, nous l'espérons, des inégalités du genre $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ dans les prochains développements.

6. Définition 1.10.

La notion d'ordre permet d'introduire la notion d'intervalle, qui s'écrit assez simplement une fois la convention prise.

DefEYAooMYTz

Définition 1.27.

Soit un ensemble totalement ordonné $(E, \leq)$. Un **intervalle** de E est une partie I telle que tout élément compris entre deux éléments de I soit dans I . En langage mathématique, la partie I de E est un intervalle si

$$\forall a, b \in I, \forall x \in E, (a \leq x \leq b \Rightarrow x \in I).$$

DEFooDNWRooTiMAzK

Définition 1.28.

Soit un ensemble ordonné $(E, \leq)$ et une partie A de E . Un élément $p \in E$ est un **minorant** de A si pour tout $a \in A$, les éléments p et a sont comparables et $p \leq a$. Si de plus, $p \in A$, on dira que p est un **minimum** de A .

Les notions de **maximum** et de **majorant** sont définies de façon analogue (en remplaçant $p \leq a$ par $a \leq p$).

PROPooUniciteMinMax

Proposition 1.29.

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, et A un sous-ensemble de E admettant un minimum. Alors ce minimum est unique.

Démonstration. Soit m le premier élément minimum de A . Quel que soit $x \in A$, on sait que x et m sont comparables, et que $m \leq x$.

Supposons que $p \in A$ soit un (autre) élément minimum de A . Alors, par ce fait, on a $p \leq m$; mais par définition de m , on a aussi $m \leq p$. Ainsi, par antisymétrie⁷, on a $m = p$. $\square$

NORMooPlusPetitElement

1.30.

On peut ainsi parler, lorsqu'une partie possède un minimum, de « plus petit élément » de la partie. Attention : il n'en existe pas toujours. D'innombrables exemples pourront être vus lorsque nous aurons construit $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. Typiquement les intervalles du type $]a, b[$.

DEFooBZNRooYRPGme

Définition 1.31 ([12]).

Soit un ensemble ordonné $(E, \leq)$. Un élément $M \in E$ est un **élément maximal** de E si pour tout $x \in E$, dès que $M \leq x$, on a $x = M$.

De même, nous disons que $m \in E$ est un **élément minimal** de E si pour tout $x \in E$, nous avons $x \leq m \Rightarrow x = m$.

NORMooVHIBooJAosou

1.32.

Notons qu'il n'est pas demandé à un élément maximal⁸ d'être comparable à tous les autres éléments. Si $(E, \leq)$ n'est pas totalement ordonné, un élément maximal peut ne majorer qu'une partie de E .

Un élément maximal est plus grand que tous les éléments avec lesquels il est comparable.

Dans un ensemble totalement ordonné, les notions d'élément maximal de E et de maximum⁹ de E coïncident ; dans le cas d'un ordre partiel, ces notions sont distinctes.

Il se peut que nous parlions d'un « maximum » ou « élément maximum » au lieu d'un « élément maximal », en particulier en utilisant le lemme de Zorn. Si vous voyez de telles choses, n'hésitez pas à me le dire.

Par exemple, quand on applique le lemme de Zorn pour démontrer l'existence d'une base dans un espace vectoriel de dimension infinie, on obtient une famille libre qui est maximale, c'est-à-dire qui est un élément maximal dans l'ensemble, ordonné par inclusion, des familles libres de l'espace vectoriel. C'est un élément maximal, et non un maximum, car l'ensemble des familles libres d'un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ n'admet pas de maximum (pour l'inclusion).

Voir 4.26 et 4.28.

7. Point (2) de la définition 1.23.

8. Définition 1.31

9. Définition 1.28.

ExeoMaximalPasMajorant

Exemple 1.33 ([1]).

Soit un ensemble E ainsi que $a \neq b$ dans E . Nous considérons les parties

$$A = \{P \subset E \text{ tel que } a \in P, b \notin P\} \quad (1.6a)$$

$$B = \{P \subset E \text{ tel que } b \in P, a \notin P\}. \quad (1.6b)$$

Et enfin nous considérons l'ensemble $F = A \cup B$, c'est-à-dire l'ensemble des parties de E qui contiennent soit a soit b mais pas les deux. Nous ordonnons partiellement F par l'inclusion.

Dans $(F, \subset)$, l'élément $E \setminus \{b\}$ est un élément maximal, mais pas un majorant. $\triangle$

DEFooLJEAooBLGsiS

Définition 1.34.

Un ensemble ordonné est **bien ordonné** si toute partie non vide possède un plus petit élément.

Autrement dit, l'ensemble ordonné E est bien ordonné si pour toute partie non vide A , il existe $x \in A$ tel que $x \leq y$ pour tout $y \in A$.

NorooOrdreBienOrdonne

1.35.

Quelques remarques.

- (1) L'inégalité stricte (définie par : $x < y$ si et seulement si $x \leq y$ et $x \neq y$) n'est pas une relation d'ordre parce qu'elle n'est pas réflexive.
- (2) Nous verrons dans la remarque 1.545 que l'intervalle $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas bien ordonné.
- (3) Un ensemble bien ordonné est forcément totalement ordonné parce que toutes les parties de la forme $\{x, y\}$ possèdent un minimum. Par conséquent x et y doivent être comparables : $x \leq y$ ou $y \leq x$.

1.2.4 Lemme de Zorn

SUBodJafGHEZpyz

Définition 1.36 (Ensemble inductif[13]).

Un ensemble est **inductif** si toute partie totalement ordonnée admet un majorant.

LemUEGjJBc

Lemme 1.37 (Lemme de Zorn[14]).

Tout ensemble ordonné inductif non vide admet au moins un élément maximal.

PROPooFOETooWYLOeq

Proposition 1.38 ([15]).

Soient un ensemble inductif $(E, \leq)$ et $b \in E$. Il existe un élément maximal¹⁰ $m \in E$ tel que $b \leq m$.

Démonstration. En plusieurs parties.

- (1) **Un ensemble** Nous considérons

$$E_b = \{x \in E \text{ tel que } b \leq x\}. \quad (1.7)$$

- (2) **E_b est inductif** Soit une partie non vide totalement ordonnée $A \subset E_b$; démontrons que A admet un majorant dans E_b . Puisque $E_b \subset E$, par transitivité de l'inclusion, $A \subset E$ et puisque E est inductif, la partie A admet un majorant $m' \in E$: justifions maintenant que $m' \in E_b$.

Comme A est non vide, nous pouvons considérer $x \in A$. Nous avons $b \leq x$ parce que $x \in A \subset E_b$. Mais comme m' est un majorant de A , $x \leq m'$. Bref, nous avons les inégalités

$$b \leq x \leq m'. \quad (1.8)$$

Par transitivité de l'ordre, $b \leq m'$ et donc $m' \in E_b$.

Nous avons ainsi prouvé que m' est un majorant de A contenu dans E_b . Donc E_b est inductif.

- (3) **Zorn** Puisque $(E_b, \leq)$ est inductif, le lemme de Zorn 1.37 nous indique que E_b a un élément maximal. Nous le notons m .

10. Définition 1.31.

- (4) m est maximal dans E Supposons avoir un élément $a \in E$ tel que $m \leq a$. Comme $m \in E_b$, nous avons les inégalités

$$b \leq m \leq a, \quad (1.9)$$

et donc $a \in E_b$ par transitivité. Mais m est maximal dans E_b , donc $a \leq m$, d'où $a = m$ par antisymétrie. □

PROP000RHNFO0HFUOEx

Proposition 1.39 ([1]).

Soit A et B deux ensembles non vides, et une application surjective $f: A \rightarrow B$. Il existe une application $\alpha: B \rightarrow A$ telle que

$$\alpha(b) \in f^{-1}(b) \quad (1.10)$$

pour tout $b \in B$.

Démonstration. Nous considérons l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{(X, \alpha) \text{ tel que } X \subset B, \alpha: X \rightarrow A \text{ tel que } \alpha(x) \in f^{-1}(x) \forall x \in X\} \quad (1.11)$$

que nous ordonnons par inclusion pour X et par extension pour α .

D'abord, $\mathcal{A}$ est non vide : considérons un élément $a \in A$ et posons $b = f(a)$; en posant $X = \{b\}$ et $\alpha: \{b\} \rightarrow A$ donné par $\alpha(b) = a$, le couple (X, α) est bien un élément de $\mathcal{A}$.

Ensuite, $\mathcal{A}$ est inductif. En effet, soit une partie $\mathcal{F} = \{(X_i, \alpha_i)\}_{i \in I}$ totalement ordonnée de $\mathcal{A}$. Nous posons $X = \bigcup_i X_i$ et $\alpha: X \rightarrow A$ par $\alpha(b) = \alpha_i(b)$ dès que $b \in X_i$. L'élément (X, α) est dans $\mathcal{A}$ et majore $\mathcal{F}$.

Nous pouvons donc utiliser le lemme de Zorn¹¹, et affirmer que l'ensemble $\mathcal{A}$ contient un maximum (Y, β) . Montrons alors par l'absurde que $Y = B$.

Supposons que $Y \neq B$. Alors il existe $b \in B \setminus Y$. Comme $f: A \rightarrow B$ est surjective, il existe $a \in A$ tel que $f(a) = b$ ¹². Nous posons alors $Y' = Y \cup \{b\}$ et

$$\beta'(x) = \begin{cases} \beta(x) & \text{si } x \in Y \\ a & \text{si } x = b. \end{cases} \quad (1.12)$$

Le couple (Y', β') majore (Y, β) et nous avons une contradiction avec la maximalité de Y . □

1.2.5 Quelques relations ensemblistes

LEUV000RHNFO0HFUOEx

Lemme 1.40 ([1]).

Si $B \subset A$, alors $X \setminus A \subset X \setminus B$.

Démonstration. Si $x \in X \setminus A$, alors x n'est pas dans A . Si x était dans B , nous aurions $x \in B \subset A$. Donc x n'est pas dans B et donc $x \in X \setminus B$. □

LEM000HRKA00RskzQL

Lemme 1.41 (Quelques relations ensemblistes).

Soient $A, B, C \subset X$. Nous avons

$$(1) X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B).$$

ITEM000IXUA00XDPtWj

$$(2) X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B).$$

ITEM000QCGU00KnWfBo

$$(3) A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C.$$

ITEM000XWK000UASxih

$$(4) A \cap (X \setminus B) = A \setminus B.$$

ITEM000RXJO00UYPaCp

$$(5) \text{ Si } I \text{ est un ensemble et que } A_i \subset X \text{ pour tout } i \in I \text{ alors}$$

ITEM000YYWA00LnADjR

$$X \setminus \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i). \quad (1.13)$$

11. Lemme 1.37.

12. Toute la subtilité de l'axiome du choix. Si on a un élément b , on a le droit de considérer un élément $a \in f^{-1}(b)$, mais on n'a pas le droit de considérer un tel élément de A pour tout élément de B .

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1)** Deux inclusions.

(1a) **Dans un sens** Si $x \in X \setminus (A \cap B)$. Il y a deux possibilités : soit $x \in A$, soit $x \notin A$. Si $x \in A$, alors $x \notin B$, sinon nous aurions $x \in A \cap B$. Donc $x \in X \setminus B$. Le cas $x \notin A$ est similaire.

(1b) **Dans l'autre sens** Soit $x \in X \setminus A$. Vu que $A \cap B \subset A$, le lemme 1.40 dit que $x \in X \setminus (A \cap B)$.

(2) **Pour (2)** Deux inclusions.

(2a) **Premier sens** Soit $x \in X \setminus (A \cup B)$. Si x était dans A , il serait dans $A \cup B$. Or il n'est pas dans $A \cup B$ donc x n'est pas dans A . On montre de même que $x \in X \setminus B$.

(2b) **Dans l'autre sens** Soit $x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$. Supposons que $x \in A \cup B$, et disons $x \in A$ pour fixer les idées. Nous savons que $x \in X \setminus A$; contradiction. Donc $x \notin A$. Nous obtenons la même contradiction si $x \in B$.

(3) **Pour (3)** Deux inclusions.

(3a) **Premier sens** Supposons que $x \in A \cap (B \setminus C)$. D'une part $x \in A$. Or $x \in B \setminus C$, donc $x \in B$. Nous avons déjà $x \in A \cap B$. Mais $x \in B \setminus C$ implique $x \notin C$. Donc $x \in (A \cap B) \setminus C$.

(3b) **Deuxième sens** Nous avons :

(3b.i) $x \in A \cap B$ donc $x \in A$.

(3b.ii) $x \in A \cap B$ donc $x \in B$.

(3b.iii) $x \in (A \cap B) \setminus C$ donc $x \notin C$.

Les points (3b.ii) et (3b.iii) font $x \in B \setminus C$. En ajoutant (3b.i) nous avons $x \in A \cap (B \setminus C)$.

(4) **Pour (4)** C'est un cas particulier de (3) avec $B = X$.

(5) **Pour (5)** En deux inclusions.

(5a) **Dans un sens** Soit $x \in X \setminus (\bigcap_{i \in I} A_i)$. Vu que x n'est pas dans $\bigcap_{i \in I} A_i$, il existe $j \in I$ tel que $x \notin A_j$, et donc tel que $x \in X \setminus A_j$.

(5b) **Dans l'autre sens** Si $x \in \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i)$, alors il existe $j \in I$ tel que $x \in X \setminus A_j$. Donc x n'est pas dans A_j et à fortiori pas dans $\bigcap_{i \in I} A_i$.

□

LEMooBGRooCVLGsh

Lemme 1.42 ([1]).

Si $A \subset B$ et si $f: B \rightarrow B$ est injective, alors

$$f(A) = f(B) \setminus f(B \setminus A). \quad \text{EQooHLEHooADubJO} \quad (1.14)$$

Démonstration. Les deux inclusions.

(1) $\subseteq$ Soit $a \in A$. Alors $a \in A \subset B$, de telle sorte que $f(a) \in f(B)$. Mais a n'est pas dans $B \setminus A$, disjoint de A , et comme f est injective, grâce à la propriété 1.21(3), $f(A) \cap f(B \setminus A) = \emptyset$. Comme $f(a) \in f(A)$, nous avons $f(a) \notin f(B \setminus A)$.

(2) **Dans l'autre sens** Suppose $y \in f(B) \setminus f(B \setminus A)$. Vu que $y \in f(B)$, il existe $b \in B$ tel que $y = f(b)$. Mais comme $y \notin f(B \setminus A)$, nous avons $b \notin B \setminus A$. Donc, $b \in B \cap A$, d'où $b \in A$ et par suite $f(b) \in f(A)$.

□

LEMooHPUNooPmViwi

Lemme 1.43 ([16]).

Pour tous ensembles A, B, C nous avons

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); \quad (1.15)$$

$$\text{et } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \quad (1.16)$$

Démonstration. Nous démontrons la première égalité d'ensembles par double inclusion.

- (1) **Inclusion dans un sens** Nous supposons que $x \in A \cap (B \cup C)$. Il y a deux possibilités : soit x est dans $A \cap B$ soit non. Si $x \in A \cap B$ c'est bon. Sinon, nous allons prouver que $x \in A \cap C$.
Vu que $x \in A$ et $x \notin A \cap B$, nous avons $x \notin B$. Mais $x \in B \cup C$. Donc $x \in C$. Nous avons prouvé que $x \in A \cap C$.
- (2) **Inclusion inverse** Soit $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Nous allons prouver que $x \in A \cap (B \cup C)$.
- (2a) **Si $x \in A \cap B$** Nous supposons que $x \in A \cap B$. Directement $x \in A$. Et comme $x \in B$, nous avons aussi $x \in B \cup C$. Donc $x \in A \cap (B \cup C)$.
- (2b) **Si $x \in A \cap C$** Même raisonnement.

L'autre égalité d'ensembles se démontre de manière similaire (quoique plus simple).

- (1) **Inclusion dans un sens** Si $x \in A \cup (B \cap C)$, alors, il est dans A , ou bien il est à la fois dans B et dans C .
- Si $x \in A$, alors il est aussi dans $A \cup B$, et dans $A \cup C$; donc il se trouve dans $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.
 - Si $x \in B$, alors il est dans $A \cup B$. Si, en même temps, $x \in C$, alors il est dans $A \cup C$. Donc il se trouve dans l'intersection $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- (2) **Inclusion inverse** Soit $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Il est donc à la fois dans $A \cup B$ et dans $A \cup C$.
- Si $x \in A$, alors il est bien dans $A \cup (B \cap C)$.
 - Sinon, il doit se trouver à la fois dans B et dans C , car dans le cas contraire il ne pourrait pas se trouver dans les unions ci-dessus. Ainsi $x \in B \cap C$, et donc $x \in A \cup (B \cap C)$.

□

LemPropsComplement

Lemme 1.44.

Quelques propriétés à propos des complémentaires¹³. Si E est un ensemble et si A et B sont des sous-ensembles de E , nous avons

- (1) $A \cap (E \setminus A) = \emptyset$. ITEMooComplementDisjoint
- (2) A et $E \setminus A$ forment une partition¹⁴ de E . ITEMooComplementPartition
- (3) $\complement A = A$, en d'autres termes, $E \setminus (E \setminus A) = A$. ITEMooWIYBooKMLVnZ
- (4) $A \setminus B = A \cap \complement B$. ItemLemPropComplementiii
- (5) $(A \setminus B)^c = A^c \cup B$. ITEMooNHDUooWtURqQ
- (6) $A^c \setminus B^c = B \setminus A$. ITEMooTBWKooTChOmC

Démonstration. Point par point.

- (1) **Pour (1)** Par définition même du complémentaire, on ne peut avoir en même temps $x \in A$ et $x \notin A$.
- (2) **Pour (2)** On a clairement $A \subset E$ et $E \setminus A \subset E$. Le point précédent nous justifie que l'intersection est vide. On a aussi $A \cup (E \setminus A) \subset E$: prouvons l'inclusion inverse.
Si $x \in E$, alors ou bien $x \in A$, ou bien $x \notin A$, et donc par définition du complémentaire, $x \in E \setminus A$.
- (3) **Pour (3)** On peut faire une preuve avec une double inclusion.
- (3a) **Si $x \in E \setminus (E \setminus A)$** Alors $x \notin E \setminus A$. Par l'absurde, si $x \notin A$, alors $x \in E \setminus A$, ce qui est contradictoire. Ainsi, la possibilité $x \notin A$ est exclue et donc $x \in A$.
- (3b) **Si $x \in A$** Alors $x \notin (E \setminus A)$. c'est-à-dire $x \in E \setminus B = E \setminus (E \setminus A)$.

Une autre preuve consiste à utiliser le point (2) d'abord avec A , ensuite avec $E \setminus A$. Dans les deux cas, on partitionne E en deux ; l'un des ensembles est $E \setminus A$, l'autre est respectivement A et $E \setminus (E \setminus A)$, qui sont dès lors nécessairement égaux.

13. Définition 1.6.

14. Définition 1.8.

(4) **Pour (4)** En deux parties.

(4a) **Si** $x \in A \setminus B$ Alors deux choses :

(4a.i) $x \in A$.

(4a.ii) $x \notin B$, c'est-à-dire $x \in E \setminus B$.

Donc $x \in A \cap (E \setminus B)$.

(4b) **Si** $x \in A \cap (E \setminus B)$ Alors deux choses :

(4b.i) $x \in A$.

(4b.ii) $x \in E \setminus B$, ce qui implique¹⁵ que $x \notin B$.

Donc $x \in A \cap (E \setminus B)$.

(5) **Pour (5)** Il faut le faire en deux inclusions.

(5a) $(A \setminus B)^c \subset A^c \cup B$ Supposons que $x \in (A \setminus B)^c$. Si $x \in A^c$, c'est bon. Supposons que x n'est pas dans A^c , et montrons que $x \in B$. Le fait que x ne soit pas dans A^c signifie que $x \in A$. Si x n'était pas dans B , alors x serait dans $A \setminus B$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc $x \in B$.

(5b) $A^c \cup B \subset (A \setminus B)^c$ Supposons d'abord que $x \in A^c$. Comme $A \setminus B \subset A$, si $x \in A^c$, alors $x \in (A \setminus B)^c$.

Si $x \in B$, alors x n'est pas dans $A \setminus B$ et donc x est dans $(A \setminus B)^c$.

(6) **Pour (6)** Pour cette égalité, nous séparons 4 cas suivant que x est dans A ou B ou non. Bref, nous écrivons la table de vérité :

A	1	1	0	0
B	1	0	1	0
$A^c \setminus B^c$	0	0	1	0
$B \setminus A$	0	0	1	0

(1.17)

Les deux dernières lignes étant égales, nous avons l'égalité d'ensembles annoncée.

□

LEMooMDTPooAhmYqv

Lemme 1.45 ([1]).

Soient des parties $(A_j)_{j \in I}$ de X . Nous avons

$$\bigcup_{j \in I} A_j = X \setminus \left(\bigcap_{j \in I} (X \setminus A_j) \right). \quad (1.18)$$

Démonstration. En deux inclusions.

(1) **Sens direct** Si $x \in A_i$, alors $x \notin (X \setminus A_i)$. Or $\bigcap_{j \in I} (X \setminus A_j) \subset (X \setminus A_i)$, donc

$$x \in X \setminus \left(\bigcap_{j \in I} (X \setminus A_j) \right). \quad (1.19)$$

(2) **Dans l'autre sens** Dire que $x \in X \setminus \left(\bigcap_{j \in I} (X \setminus A_j) \right)$, c'est dire que x n'est pas dans l'intersection des $X \setminus A_i$. Il existe donc un $i \in I$ tel que $x \notin (X \setminus A_i)$, c'est-à-dire tel que $x \in A_i$. Donc $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$.

□

LEMooPWUHooMBKquL

Lemme 1.46 ([1]).

Soient des ensembles $\{A_i\}_{i \in I}$ et $\{B_j\}_{j \in J}$. Alors

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap \left(\bigcup_{k \in J} B_j \right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \cap B_j). \quad (1.20)$$

¹⁵. Je vous laisse disserter sur le fait que ce soit une implication ou juste une reformulation, vu que sous-entendu $x \in E$.

Démonstration. L'inclusion dans un sens. Si $x \in (\bigcup_i A_i) \cap (\bigcup_j B_j)$, alors il existe $i \in I$ et $j \in J$ tels que $x \in A_i$ et $x \in B_j$, c'est-à-dire $x \in A_i \cap B_j$.

Pour l'autre sens, si $x \in A_{i_0} \cap B_{j_0}$, alors $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ et $x \in \bigcup_{j \in J} B_j$. $\square$

DefBMLooVjISG

Définition 1.47 (différence symétrique).

Si A et B sont des ensembles, l'ensemble $A \Delta B$ est la **différence symétrique** d'ensembles :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B). \quad (1.21)$$

C'est l'ensemble des éléments étant soit dans A soit dans B mais pas dans les deux, ni dans aucun des deux.

REMooTableVeriteDiffSym

Remarque 1.48.

La table de vérité de $A \Delta B$ est intéressante :

A	1	1	0	0
B	1	0	1	0
$A \Delta B$	0	1	1	0

EQooOJB0ooKkKhYp
(1.22)

La deuxième colonne signifie que si $x \in A$ et $x \in B^c$, alors $x \in A \Delta B$.

LemCUVooHkPWB

Lemme 1.49 ([17]).

Si A et B sont des parties d'un ensemble, nous avons

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A), \quad (1.23)$$

EQooMWTNooKXfFyU
(1.23)

et aussi

ItemVUCooHAztC

$$(1) A^c \Delta B^c = A \Delta B.$$

$$(2) (A \Delta B) \Delta B = A.$$

ItemVUCooHAztCii

$$(3) (A \Delta B)^c = (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B).$$

ITEMooSPZXooPTgisP

$$(4) \text{ Associativité : } A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C.$$

ITEMooSMXWooYeWsRC

Démonstration. Pour (1.23), il suffit de réfléchir un peu : $A \Delta B$ contient précisément les éléments de A qui ne sont pas dans B , ainsi que les éléments de B qui ne sont pas dans A . On peut d'ailleurs voir que la table de vérité de $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ est la même que (1.22).

Et pour le reste, c'est parti.

(1) **Pour (1)** Nous rappelons l'égalité $X^c \setminus Y^c = Y \setminus X$ du lemme 1.44(6). De là nous écrivons

$$A^c \Delta B^c = (A^c \cup B^c) \setminus (A^c \cap B^c) = (A^c \cap B^c)^c \setminus (A^c \cup B^c)^c = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \Delta B. \quad (1.24)$$

(2) **Pour (2)** Ici, il faut remarquer que $(A \Delta B) \cup B = A \cup B$ et que $(A \Delta B) \cap B = B \setminus A$, donc

$$(A \Delta B) \Delta B = ((A \Delta B) \cup B) \setminus ((A \Delta B) \cap B) \quad (1.25)$$

$$= (A \cup B) \setminus (B \setminus A). \quad (1.26)$$

Donc tous les éléments de $(A \Delta B) \Delta B$ sont dans $A \cup B$ mais pas dans $B \setminus A$.

— Un élément de $A \cup B$ est dans A ou bien dans B ; s'il n'est pas dans $B \setminus A$, il se trouve nécessairement dans A .

— Réciproquement, tous les éléments de A sont dans $A \cup B$ et ne sont pas dans $B \setminus A$.

Ainsi, on a bien $(A \Delta B) \Delta B = A$.

(3) **Pour (3)** Il s'agit d'utiliser le lemme 1.44(5) :

$$(A \Delta B)^c = \left((A \cup B) \setminus (A \cap B) \right)^c \quad (1.27a)$$

$$= (A \cup B)^c \cup (A \cap B) \quad (1.27b)$$

$$= (A^c \cap B^c) \cup (A \cap B). \quad (1.27c)$$

- (4) **Pour l'associativité (4)** Nous écrivons les tables de vérités selon que x est dans A , B , C ou non. D'abord

A	1	1	1	1	0	0	0	0
B	1	1	0	0	1	1	0	0
C	1	0	1	0	1	0	1	0
$B\Delta C$	0	1	1	0	0	1	1	0
$A\Delta(B\Delta C)$	1	0	0	1	0	1	1	0

(1.28)

La quatrième ligne s'écrit sur le modèle de (1.22) en regardant les deuxièmes et troisièmes lignes. La dernière ligne se fait avec la première et la quatrième.

L'autre table de vérité se fait de la même manière :

A	1	1	1	1	0	0	0	0
B	1	1	0	0	1	1	0	0
C	1	0	1	0	1	0	1	0
$A\Delta B$	0	0	1	1	1	1	0	0
$(A\Delta B)\Delta C$	1	0	0	1	0	1	1	0

(1.29)

Puisque les lignes pour $A\Delta(B\Delta C)$ et pour $(A\Delta B)\Delta C$ sont identiques, nous avons égalité.

□

1.2.6 Relations d'équivalence

appDefiEquiv

Définition 1.50.

Si E est un ensemble, une **relation d'équivalence** sur E est une relation binaire¹⁶ $\sim$ qui est à la fois

réflexive $x \sim x$ pour tout $x \in E$,

symétrique $x \sim y$ si et seulement si $y \sim x$;

transitive si $x \sim y$ et $y \sim z$, alors $x \sim z$.

DEFooRHPSoohKBZXI

Définition 1.51.

Si E est un ensemble et si $\sim$ est une relation d'équivalence sur E , alors nous notons $E/\sim$ l'**ensemble quotient**, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence dans E . Un élément de $E/\sim$ est de la forme

$$[a] = \{x \in E \text{ tel que } x \sim a\}. \quad (1.30)$$

Les éléments de $E/\sim$ sont donc des sous-ensembles de E .

LEMooEgaliteClassesGen

Lemme 1.52.

Soit un ensemble E et une relation d'équivalence $\sim$. Pour $a, b \in E$, nous avons $[a] = [b]$ si et seulement si $a \sim b$.

Démonstration. En deux parties.

- (1) $\Rightarrow$ Nous supposons que $[a] = [b]$. Par réflexivité, $a \sim a$ et nous avons $a \in [a] = [b]$. Mais $a \in [b]$ signifie $a \sim b$, ce qu'il fallait.
- (2) $\Leftarrow$ Nous supposons que $a \sim b$, et nous démontrons que $[a] \subset [b]$. Si $x \in [a]$, alors $x \sim a$. Mais $a \sim b$. Donc $x \sim a \sim b$, ce qui implique $x \sim b$ par transitivité. Or dire $x \sim b$ implique $x \in [b]$. Pour l'inclusion $[b] \subset [a]$, il suffit de réécrire : on vous laisse faire.

□

EXooYDRVooHsANIC

Exemple 1.53.

Sur l'ensemble de tous les polygones du plan, la relation « a le même nombre de côtés » est une relation d'équivalence. Plus précisément, si P et Q sont deux polygones, nous disons que $P \sim Q$ si et seulement si P et Q ont le même nombre de côtés. C'est une relation d'équivalence :

16. Définition 1.10.

- un polygone P a toujours le même nombre de côtés que lui-même : $P \sim P$;
- si P a le même nombre de côtés que Q ($P \sim Q$), alors Q a le même nombre de côtés que P ($Q \sim P$);
- si P a le même nombre de côtés que Q ($P \sim Q$) et que Q a le même nombre de côtés que R ($Q \sim R$), alors P a le même nombre de côtés que R ($P \sim R$).

△

EXooProjCanoniqueEquivAppl

Exemple 1.54.

Soit f une application entre deux ensembles E et F . Nous définissons une relation d'équivalence sur E par

$$x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y). \quad (1.31)$$

Nous notons par $\pi: E \rightarrow E/\sim$ la projection canonique. L'application

$$\begin{aligned} g: E/\sim &\rightarrow F \\ [x] &\mapsto f(x) \end{aligned} \quad (1.32)$$

est bien définie et injective. Elle n'est pas surjective tant que f ne l'est pas. La **décomposition canonique** de f est

$$f = g \circ \pi. \quad (1.33)$$

△

La proposition suivante est ce qui est utilisé à chaque fois qu'on dit « telle formule définit bien une fonction » ou « cette fonction est bien définie parce que ... »

PROPooCONJooTpJwBe

Proposition 1.55 ([1]).

Soient deux ensembles E et A . Nous considérons une relation d'équivalence $\sim$ sur E et une application $g: E \rightarrow A$ telle que si $a \sim b$ alors $g(a) = g(b)$.

Alors il existe une unique application $\tilde{g}: E/\sim \rightarrow A$ vérifiant

$$\tilde{g}([x]) = g(x) \quad (1.34)$$

EQooCTHKooTXPfxb

pour tout $x \in E$.

Démonstration. En deux parties.

(1) Existence

Nous considérons $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble des parties de A ainsi que S l'ensemble des singletons de A . Nous définissons l'application

$$\begin{aligned} g_P: E/\sim &\rightarrow \mathcal{P}(A) \\ \alpha &\mapsto \{g(x) \text{ tel que } x \in \alpha\}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Soit $\alpha \in E/\sim$. Prouvons que si $a \in \alpha$, alors $g_P(\alpha) = \{g(a)\}$. Par construction nous avons $g(a) \in \{g(x) \text{ tel que } x \in \alpha\}$ et donc l'inclusion $\{g(a)\} \subset g_P(\alpha)$. Pour l'inclusion dans l'autre sens, nous considérons $x \in \alpha$ et nous montrons que $g(x) \in \{g(a)\}$. En effet $x, a \in \alpha$, donc $g(x) = g(a)$.

Tout cela pour dire que g_P prend ses valeurs dans S et que $g_P([a]) = \{a\}$ pour tout $a \in E$. Nous introduisons maintenant l'opération d'extraction

$$\begin{aligned} e: S &\rightarrow A \\ \{x\} &\mapsto x, \end{aligned} \quad (1.36)$$

et nous considérons $\tilde{g} = e \circ g_P$. Vérifions que c'est bon.

Soit $x \in E$. Nous avons $x \in [x]$ et donc $g_P([x]) = \{x\}$. Donc

$$\tilde{g}([x]) = (e \circ g_P)([x]) = e(\{x\}) = x. \quad (1.37)$$

- (2) **Unicité** Soit une autre application $\tilde{g}_2: E/\sim \rightarrow A$ vérifiant la condition (1.34). Soit $\alpha \in E/\sim$. Soit $a \in \alpha$. Nous avons $\tilde{g}(\alpha) = \tilde{g}([a]) = a$. Et aussi $\tilde{g}_2(\alpha) = \tilde{g}_2([a]) = a$. Donc $\tilde{g}(\alpha) = \tilde{g}_2(\alpha)$.

□

1.2.7 Relations ternaires, opérations

NORMMooRelationsTernaires

1.56.

Comme pour les fonctions construites sur base des relations binaires, on peut en construire pour les relations ternaires¹⁷.

NORMMooFonctionDeuxVariables

1.57.

Soit G une relation ternaire sur les ensembles E_1, E_2, E_3 . Supposons que, étant donnés $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, il existe un unique $x_3 \in E_3$ tel que $(x_1, x_2, x_3) \in G$. On définit alors la fonction

$$\begin{aligned} f: E_1 \times E_2 &\rightarrow E_3 \\ (x_1, x_2) &\mapsto \text{le } x_3 \text{ dans la relation } G. \end{aligned} \quad (1.38)$$

DEFooOperation

Définition 1.58.

On appelle **opération** sur l'ensemble E une fonction définie sur $E \times E$ et à valeurs dans E . Cette opération peut être notée sous forme préfixe ($f(x, y)$) ou sous forme infixée, c'est-à-dire entre les deux éléments que l'on opère ($x * y$).

Parfois, on dit aussi que $*$ est une **loi de composition interne** sur E , ou encore que E , muni de l'opération $*$, est un **magma**.

DEFooMagmaNeutre

Définition 1.59 (neutres dans un magma).

Soit E un ensemble muni d'une opération $*$: $E \times E \rightarrow E$. On dit d'un élément $e \in E$ qu'il est :

- (1) **neutre à gauche** si, pour tout $x \in E$, on ait $e * x = x$;
- (2) **neutre à droite** si, pour tout $x \in E$, on ait $x * e = x$;
- (3) **neutre** s'il est neutre à gauche et à droite.

PROPooDEFMagmaUnifere

Proposition-Définition 1.60.

Soit $(E, *)$ un magma admettant un neutre à gauche $e \in E$ et un neutre à droite $n \in E$. Alors :

- (1) on a $e = n$;
- (2) il n'y a pas d'autre neutre (à gauche ou à droite) que e .

Ainsi, l'élément e est appelé **neutre** du magma $(E, *)$ et on dit que E est un **magma unifère**.

Démonstration. On sait que $e * n$ vaut n , car e est neutre à gauche, mais vaut aussi e car n est neutre à droite. Bref, on a

$$n = e * n = e.$$

Si e' était un autre neutre à gauche, alors $e' = e' * n = n = e$: la première égalité venant du fait que n est neutre à droite, la deuxième que e' est neutre à gauche, la troisième de l'égalité ci-dessus. De la même façon, si n' était un autre neutre à droite, alors $n' = e * n' = e = n$. □

DEFooMagmaCommutatif

Définition 1.61 (magma commutatif).

Soit E un ensemble muni d'une opération $*$: $E \times E \rightarrow E$. On dit que E est un **magma commutatif** si pour tout $x, y \in E$, on a $x * y = y * x$.

DEFooIJIeooZaAdSs

Définition 1.62 (élément régulier[18]).

Soit un ensemble E muni d'une opération $*$: $E \times E \rightarrow E$. Un élément $s \in E$ est **régulier à gauche** si pour tout $x, y \in E$ nous avons

$$s * x = s * y \Rightarrow x = y. \quad (1.39)$$

17. Voir des relations avec plus d'ensembles, mais nous n'en avons pas (encore) besoin.

L'élément s est **régulier à droite** si pour tout $x, y \in E$ nous avons

$$x * s = y * s \Rightarrow x = y. \quad (1.40)$$

Il est **régulier** si il est régulier à gauche et à droite.

REMooMagmaSEltsReguliers

Remarque 1.63.

Dans un magma E , si e est un neutre à gauche (respectivement à droite), alors il est forcément régulier à gauche (resp. à droite).

On verra plus tard la notion de groupe¹⁸, qui étend celle de magma : nous verrons que tous les éléments d'un groupe sont réguliers, et pour cause : ils admettent tous un inverse qui permet de simplifier.

On aura plus tard la notion d'anneau¹⁹. Dans ce cadre, la régularité des éléments vis-à-vis de l'opération de multiplication sera moins évidente ; en particulier, elle sera loin d'être automatique.

1.3 Cardinalité

SECooCardinalite

1.3.1 Équipotence, surpotence, subpotence

NORMooEquiSurSubpotence

1.64.

Les notions d'équipotence, surpotence et de subpotence permettent de comparer les « tailles » des ensembles sans avoir besoin de la théorie des ordinaux. Tout ceci ne sera pas très souvent utile par la suite. Un exemple d'utilisation de ces notions est le théorème de Steinitz 6.134 qui démontre l'existence de clôture algébrique pour tout corps.

DEFooXGXZooIgcBCg

Définition 1.65 ([19, 20]).

Soient deux ensembles A et B .

- (1) Les ensembles A et B sont **équipotents** si il existe une bijection entre A et B . Nous notons $A \approx B$.
- (2) L'ensemble A est **surpotent** à B si il existe une surjection de A vers B . Nous notons $A \geq B$.
- (3) L'ensemble A est **subpotent** à B si il existe une injection de A vers B . Nous notons $A \leq B$.

Nous disons également « strictement » surpotent quand il y a surpotence mais pas équipotence, et de même pour la subpotence. Les symboles $>$ et $<$ sont alors utilisés.

PROPOoWSXTooMQPcNG

Proposition 1.66 ([1, 15]).

L'ensemble A est subpotent à B si et seulement si B est surpotent à A .

Démonstration. En deux parties.

- (1) $\Rightarrow$ Nous supposons que A est subpotent à B . Il existe une injection $\varphi: A \rightarrow B$. Nous définissons $f: B \rightarrow A$ par

$$f(x) = \begin{cases} \varphi^{-1}(x) & \text{si } x \in \varphi(A) \\ a & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.41)$$

où a est un élément quelconque de A . Cette application est bien définie parce que φ est injective, de telle sorte que φ^{-1} est bien définie. Puisque φ est définie sur tout A , l'application f est une surjection.

- (2) $\Leftarrow$ Nous supposons que B est surpotent à A . Il existe donc une surjection $\varphi: B \rightarrow A$. Pour chaque $x \in A$ nous considérons un élément $b_x \in \varphi^{-1}(x)$, qui existe parce que φ est surjective. Nous considérons ensuite l'application

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B \\ x &\mapsto b_x. \end{aligned} \quad (1.42)$$

18. Définition 1.83.

19. Définition 1.90.

Nous prouvons que f est une injection. Supposons que $x, y \in A$ soient tels que $f(x) = f(y)$. Nous avons $b_x = b_y$. Donc

$$x = \varphi(b_x) = \varphi(b_y) = y. \quad (1.43)$$

Nous avons prouvé que $x = y$, et donc que f est injective.

□

1.3.2 Un peu d'infinité

SIOBaoPasDn6llnsSei

1.67.

Vu que l'ensemble des ensembles n'existe pas²⁰, nous n'allons pas énoncer le fait que ces notions donnent une relation d'ordre sur les ensembles ; il faudrait parler de classes et nous ne nous en sortirions pas. Nous allons toutefois énoncer quelques résultats qui vont dans ce sens. Pour en savoir plus, vous pouvez lire les différentes pages de Wikipédia sur les nombres cardinaux.

DefEOZLooUMCzZR

Définition 1.68 (ensemble Dedekind infini).

Un ensemble est **infini** si il peut être mis en bijection avec un de ses sous-ensembles propres (c'est-à-dire différent de lui-même).

Un ensemble est **fini** si il n'est pas infini.

NORooQuelleDefEnsInfini

1.69.

Nous adoptons les notions d'ensembles finis et infinis au sens de Dedekind. De nombreuses sources (dont wikipédia [21, 22]) définissent un ensemble fini comme étant un ensemble en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$ de la forme $\{0, \dots, N\}$. Alors un ensemble est infini si il n'est pas fini.

Cependant, d'une part les deux définitions d'ensembles infinis ne sont pas équivalentes, mais d'autre part, elles sont équivalentes si on accepte l'axiome du choix²¹. Or le Frido accepte l'axiome du choix sans vergogne et sous toutes ses formes. Nous démontrerons donc, en utilisant le lemme de Zorn, qu'un ensemble A est fini (définition 1.68) si et seulement si il existe une bijection $\{0, \dots, N\} \rightarrow A$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$. Ce sera le théorème 1.204.

LEMooTUIRooEXjfdY

Lemme 1.70.

Toute partie d'un ensemble fini est finie.

Démonstration. Nous allons prouver la contraposée : si un ensemble contient une partie infinie, alors il est infini. Soit $A \subset B$ où A est infini. Nous allons prouver que B est infini. En vertu de la définition 1.68, il existe une partie $A' \subsetneq A$ et une bijection $\sigma: A' \rightarrow A$.

Nous considérons la partie $B' = A' \cup (B \setminus A)$, qui est une partie stricte de B . Puisque $A' \cap (B \setminus A) = \emptyset$, nous pouvons définir

$$\begin{aligned} \varphi: B' &\rightarrow B \\ x &\mapsto \begin{cases} \sigma(x) & \text{si } x \in A' \\ x & \text{si } x \in B \setminus A. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.44)$$

Montrons que φ est une bijection.

(1) **Surjectif** Nous avons $\varphi(A') = A$ et $\varphi(B \setminus A) = B \setminus A$. Donc

$$\varphi(B') = \varphi(A') \cup \varphi(B \setminus A) = A \cup (B \setminus A) = B. \quad (1.45)$$

(2) **Injectif** Si $\varphi(x) = \varphi(y)$, nous avons 4 possibilités suivant que x et y sont dans A' ou $B \setminus A$.

Si $x, y \in A'$, alors $\varphi(x) = \varphi(y)$ implique $\sigma(x) = \sigma(y)$ et donc $x = y$ parce que σ est injective.

Si $x \in A'$ et $y \in B \setminus A$ alors $\varphi(x) = \sigma(x) \in A$ et $\varphi(y) = y \in B \setminus A$. Ce cas n'est pas possible. Le cas $x \in B \setminus A$ et $y \in A'$ n'est pas possible non plus.

Si $x, y \in B \setminus A$, alors $\varphi(x) = \varphi(y)$ implique immédiatement $x = y$.

20. Voir le corolaire 1.81.

21. Et même seulement l'axiome du choix dénombrable ; si vous voulez en savoir plus, lisez la page wikipédia [23].

Nous avons une bijection entre B' et B alors que B' est un sous-ensemble strict de B . Donc B est infini. $\square$

PROPOoVOKDooOStPzU

Proposition 1.71 ([1, 15]).

Si A est fini et si $\omega \notin A$, alors $A \cup \{\omega\}$ est fini.

Démonstration. Supposons que $A \cup \{\omega\}$ est infini. Il existe un sous-ensemble strict de $A \cup \{\omega\}$ en bijection avec $A \cup \{\omega\}$. Soient donc $B \subsetneq A \cup \{\omega\}$ et $\sigma: B \rightarrow A \cup \{\omega\}$ une bijection.

Il y a deux possibilités : soit ω est dans B , soit non.

- (1) $\omega \notin B$ Alors $B \subset A$, et il existe $x \in B$ tel que $\sigma(x) = \omega$. Considérons $B' = B \setminus \{x\}$; cela est une partie propre de A . Ensuite nous définissons

$$\begin{aligned} \varphi: B \setminus \{x\} &\rightarrow A \\ a &\mapsto \sigma(a). \end{aligned} \quad (1.46)$$

C'est injectif parce que σ est injective, et c'est surjectif parce que

$$\varphi(B \setminus \{x\}) = \sigma(B) \setminus \{\omega\} = \sigma(B) \setminus \{\omega\} = (A \cup \{\omega\}) \setminus \{\omega\} = A. \quad (1.47)$$

Pour la dernière égalité nous avons utilisé le fait que ω n'est pas dans A .

- (2) Si $\omega \in B$ Plusieurs choses à dire.

- (2a) $\sigma(\omega) \neq \omega$

Si $\omega \in B$, nous commençons par prouver que $\sigma(\omega) \neq \omega$. En effet si $\sigma(\omega) = \omega$, alors nous pouvons poser

$$\begin{aligned} \sigma': B \setminus \{\omega\} &\rightarrow A \\ x &\mapsto \sigma(x). \end{aligned} \quad (1.48)$$

Ce σ' est une bijection entre A et la partie propre $B \setminus \{\omega\}$. Cela est impossible parce que nous avons supposé que A est fini.

- (2b) **Definition de φ** Puisque B est une partie propre de $A \cup \{\omega\}$, il existe $x \in A \setminus B$. Nous considérons $B' = (B \setminus \{\omega\}) \cup \{x\}$ et nous définissons

$$\begin{aligned} \varphi: B' &\rightarrow A \\ b &\mapsto \begin{cases} \sigma(b) & \text{si } b \neq x \\ \sigma(\omega) & \text{si } b = x. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.49)$$

Nous montrons à présent que φ est une bijection.

- (2c) **Injectif** Soient $u, v \in B'$ tels que $\varphi(u) = \varphi(v)$. Il y a 4 possibilités suivant que u ou v est égal à x .

- Si $u = v = x$ on est bon.
- Si $u = x$ et $v \neq x$. D'une part $\varphi(u) = \varphi(v) = \sigma(v)$ parce que $v \neq x$. Mais d'autre part $\varphi(u) = \varphi(x) = \sigma(\omega)$. Donc $\sigma(v) = \sigma(\omega)$ et $v = \omega$ par injectivité de σ . Or cela est impossible parce que $v \in B'$ alors que $\omega \notin B'$. Ici nous utilisons le fait que ω ne peut pas être égal à x parce que $x \in A$ alors que ω est hors de A . Bref, ce cas est impossible.
- Si $u \neq x$ et $v = x$, alors c'est le même cas que le précédent avec quelque adaptations.
- Si $u \neq x$ et $v \neq x$, alors $\varphi(u) = \sigma(u)$ et $\varphi(v) = \sigma(v)$, de telle sorte que $\sigma(u) = \sigma(v)$ et donc $u = v$ par injectivité de σ .

- (2d) **Surjective** Soit $y \in A$. Vu que $\sigma: B \rightarrow A \cup \{\omega\}$ est surjective, il existe $b \in B$ tel que $\sigma(b) = y$. Notez que $b \neq x$ parce que $x \in A \setminus B$.

Si $b \neq \omega$ alors $b \in B \setminus \{\omega\} \subset B'$. Nous pouvons calculer $\varphi(b)$. Étant donné que $b \neq x$, nous avons $\varphi(b) = \sigma(b) = y$.

Si au contraire $b = \omega$, alors $\varphi(x) = \sigma(\omega) = y$. Dans les deux cas, y est dans l'image de φ .

Dans tous les cas nous avons construit une bijection entre une partie propre $B' \subsetneq A$ et A , ce qui est absurde parce que A est un ensemble fini. $\square$

PROF00WKSIO0HcfYPN

Proposition 1.72 ([1]).

Si A est infini et si $\sigma: A \rightarrow B$ est injective, alors B est infini.

Démonstration. Nous allons prouver que $\sigma(A)$ est une partie infinie de B . Puisque A est infini, nous pouvons considérer une partie $A' \subsetneq A$ et une bijection $\varphi_A: A' \rightarrow A$. Nous définissons

$$\begin{aligned} \varphi_B: \sigma(A') &\rightarrow \sigma(A) \\ y &\mapsto \sigma(\varphi_A(\sigma^{-1}(y))). \end{aligned} \quad (1.50)$$

Cette définition a un sens parce que si $y \in \sigma(A')$, alors il existe un unique $x \in A'$ tel que $\sigma(x) = y$ parce que σ est injective. De là, $\varphi_A(x) \in A$ et nous pouvons lui appliquer σ .

Nous montrons que φ_B est une bijection.

- (1) **Injective** Supposons que $\varphi_B(a) = \varphi_B(b)$, c'est-à-dire que

$$(\sigma \circ \varphi_A \circ \sigma^{-1})(a) = (\sigma \circ \varphi_A \circ \sigma^{-1})(b). \quad (1.51)$$

Étant donné que σ et φ_A sont injectives, nous avons $\sigma^{-1}(a) = \sigma^{-1}(b)$. En appliquant σ des deux côtés, nous trouvons $a = b$.

- (2) **surjective** Soit $y \in \sigma(A)$. En prenant $x \in (\sigma \circ \varphi_A^{-1} \circ \sigma^{-1})(y)$ nous avons $\varphi_B(x) = y$.

Donc B contient une partie infinie ($\sigma(A)$). Le lemme 1.70 conclut que B est infini. $\square$

LEM00PGPV00ZzIFvf

Lemme 1.73.

À propos d'applications entre ensembles finis.

ITEM00NCCU00BGrtdn

- (1) Si $\sigma: A \rightarrow B$ est une application quelconque et si A est fini, alors $\sigma(A)$ est une partie finie de B .

ITEM00KQMFO0SzmXrd

- (2) Si $\sigma: A \rightarrow B$ est surjective et si A est fini, alors B est fini.

Démonstration. Nous allons utiliser le lemme de Zorn. Nous considérons l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{X \subset A \text{ tel que } \sigma: X \rightarrow \sigma(A) \text{ est injective}\} \quad (1.52)$$

que nous ordonnons (partiellement) par l'inclusion.

- (1) **$\mathcal{A}$ est inductif** Soit une partie totalement ordonnée $\mathcal{F}$ de $\mathcal{A}$. Nous considérons $Y = \bigcup_{X \in \mathcal{F}} X$, et nous prouvons que Y est un majorant de $\mathcal{F}$.

Pour cela nous commençons par prouver que $Y \in \mathcal{A}$. Soient $a, b \in Y$ tels que $\sigma(a) = \sigma(b)$. Il existe $X_1, X_2 \in \mathcal{F}$ tels que $a \in X_1$ et $b \in X_2$. Supposons pour fixer les idées que $X_1 \leq X_2$ ($\mathcal{F}$ étant totalement ordonné nous avons toujours $X_1 \leq X_2$ ou $X_2 \leq X_1$). Puisque l'ordre est l'inclusion, cela signifie que $X_1 \subset X_2$. Nous avons donc $a, b \in X_2$, alors que σ est injective sur X_2 . Donc $\sigma(a) = \sigma(b)$ implique $a = b$, et σ est injective sur Y . Nous avons donc prouvé que $Y \in \mathcal{A}$.

Puisque pour tout $X \in \mathcal{F}$ nous avons $X \subset Y$, nous avons $X \leq Y$ (dans $\mathcal{A}$) pour tout $X \in \mathcal{F}$. Bref, Y est un majorant de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{A}$.

Toute partie totalement ordonnée de $\mathcal{A}$ est majorée. Cela signifie que $\mathcal{A}$ est inductif²².

- (2) **Zorn** L'ensemble $\mathcal{A}$ étant inductif et non vide (les singletons dans A sont dans $\mathcal{A}$), il possède un élément maximal²³ par le lemme de Zorn 1.37. Nous nommons A' un élément maximal dans $\mathcal{A}$.

22. Plus précisément c'est l'ensemble ordonné $(\mathcal{A}, \subset)$ qui est inductif.

23. Définition 1.31 ; voir aussi 1.32.

- (3) **Bijective** L'application $\sigma: A' \rightarrow \sigma(A)$ est injective parce que $A' \in \mathcal{A}$. Nous devons prouver qu'elle est surjective.

Supposons que $y \in \sigma(A) \setminus \sigma(A')$. Alors il existe $a \in A \setminus A'$ tel que $\sigma(a) = y$. Dans ce cas, la partie $A' \cup \{a\}$ est un majorant de A' dans $\mathcal{A}$, ce qui est impossible.

Donc $\sigma: A' \rightarrow \sigma(A)$ est bijective.

- (4) **Conclusion** L'ensemble A' est fini en tant que partie de l'ensemble fini A (lemme 1.70). L'application σ étant injective, la proposition 1.72 conclut que $\sigma(A')$ est fini. Et comme $\sigma(A')$ n'est autre que $\sigma(A)$ nous avons fini.

La partie (1) est prouvée. La partie (2) est maintenant facile. La partie (1) dit que $\sigma(A)$ est une partie finie de B , mais si σ est surjective, alors $\sigma(A) = B$. $\square$

1.3.3 Théorème de Cantor-Schröder-Bernstein

SUBooCafnMooSdfNddHrdDpszaib

Lemme 1.74 ([24]).

Soient un ensemble A et une partie B de A . Si il existe une injection $f: A \rightarrow B$ alors il existe une bijection $\alpha: A \rightarrow B$.

Nous donnons deux preuves de ce lemme.

Première preuve de 1.74. Nous posons $Y = A \setminus B$ et nous décomposons la preuve en étapes.

- (1) **Les $f^k(Y)$ sont disjoints** Vu que f prend ses valeurs dans B , nous avons $f^k(Y) \subset B$ pour tout k . Et vu que $Y = A \setminus B$, nous avons

$$f^k(Y) \cap Y = \emptyset \quad \text{EQooDNHJooFJBrdg} \quad (1.53)$$

pour tout k . L'application f étant injective, elle vérifie $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$. Nous appliquons f^m des deux côtés de (1.53) :

$$f^{k+m}(Y) \cap f^m(Y) = \emptyset \quad (1.54)$$

pour tout $k, m \in \mathbb{N}$.

- (2) **Une décomposition** Nous posons

$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^k(Y) = Y \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(Y). \quad (1.55)$$

Vu que $f(X) \subset B$ nous avons l'égalité

$$B = f(X) \cup (B \setminus f(X)). \quad (1.56)$$

- (3) **$A \setminus X = B \setminus f(X)$** Supposons $x \in A \setminus X$. Vu que $Y = A \setminus B$ est dans X , l'élément x n'est pas dans $A \setminus B$ et donc est dans B parce qu'il est dans A . Mais x n'est pas dans X et en particulier pas dans $f(X)$ parce que $f(X) \subset X$. Donc x est dans $B \setminus f(X)$.

Dans l'autre sens, nous supposons que $x \in B \setminus f(X)$. Vu que $B \subset A$ nous avons $x \in A$. Comme x est hors de $f(X)$, il est hors des $f^k(Y)$ pour $k \geq 1$. Mais $x \in B$, donc x est hors de $A \setminus B = f^0(Y)$. Donc x est hors de $f^k(Y)$ pour tout $k \geq 0$. Donc x est hors de X .

- (4) **La bijection** Nous considérons l'application

$$\alpha: A \rightarrow B \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X \\ x & \text{si } x \in A \setminus X. \end{cases} \quad (1.57)$$

Nous démontrons dans les points suivants que α est bijective.

- (5) **Injective** Nous supposons $\alpha(x) = \alpha(y)$. Il y a 4 possibilités suivant que x et y soient dans X ou $A \setminus X$.

Si $x, y \in X$ alors $f(x) = f(y)$ et donc $x = y$ parce que f est injective.

Si $x \in X$ et $y \in A \setminus X$, alors $f(x) = y$. Mais $f(x) \in f(X)$ et $y \in A \setminus X = B \setminus f(X)$. Donc l'élément $f(x) = y$ est dans $f(X) \cap (B \setminus f(X)) = \emptyset$. Il n'est donc pas possible d'avoir $\alpha(x) = \alpha(y)$ avec $x \in X$ et $y \in A \setminus X$.

Si $x \in A \setminus X$ et $y \in X$, c'est la même chose.

Si $x, y \in A \setminus X$, alors $x = \alpha(x) = \alpha(y) = y$.

- (6) **Surjective** Soit $y \in B$. Il y a deux possibilités : $y \in X$ et $y \in A \setminus X$. La première se divise en deux : $y \in Y$ et $y \in \bigcup_{k=1}^{\infty} f^k(Y)$. On y va.

(6a) $y \in Y$ Ce cas n'est pas possible parce que $y \in B$ alors que $Y = A \setminus B$.

(6b) $y \in f^k(Y)$ avec $k \geq 1$ Nous avons

$$y \in f(f^{k-1}(Y)) \subset f(X) \subset \alpha(A). \quad (1.58)$$

(6c) $y \in A \setminus X$ Alors $y = \alpha(y)$.

□

Deuxième preuve de 1.74[15]. Nous posons $Y = A \setminus B$ et

$$\mathcal{M} = \{M \subset A \text{ tel que } Y \cup f(M) \subset M\}. \quad (1.59)$$

Nous allons dire de nombreuses choses à propos de ce $\mathcal{M}$.

- (1) **$\mathcal{M}$ est non vide** Nous avons $A \in \mathcal{M}$ parce que Y et $f(A)$ sont dans A .
- (2) **Si $M \in \mathcal{M}$ alors $Y \subset M$** C'est dans la définition de $\mathcal{M}$.
- (3) **Encore un ensemble** Vu que $\mathcal{M}$ est non vide, nous pouvons poser

$$X = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M \quad (1.60)$$

sans nous poser trop de questions. Cela étant fait, nous pouvons passer aux choses sérieuses.

- (4) **$f(X) \subset M$ pour tout $M \in \mathcal{M}$** Soit $M \in \mathcal{M}$. Nous avons

$$f(X) \subset f(M) \quad \text{SUBEQooRJKWooQFolZp} \quad (1.61a)$$

$$\subset Y \cup f(M) \quad (1.61b)$$

$$\subset M \quad \text{SUBEQooSAVZooPXYXqC} \quad (1.61c)$$

Justifications.

— Pour (1.61a). Parce que $X \subset \mathcal{M}$.

— Pour (1.61c). Parce que $M \in \mathcal{M}$.

- (5) **$X \in \mathcal{M}$** Vu que $Y \subset M$ pour tout M dans $\mathcal{M}$, nous avons $Y \subset \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M = X$. Nous devons prouver $f(X) \subset X$. Nous venons de prouver que $f(X) \subset M$ pour tout $M \in \mathcal{M}$, donc

$$f(X) \subset \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M = X. \quad (1.62)$$

L'ensemble X est le plus petit élément de $\mathcal{M}$ pour l'inclusion.

- (6) **$Y \cup f(X) \subset X$** Ça fait partie de $X \in \mathcal{M}$. Mais c'est bien de le dire explicitement parce que nous allons l'utiliser quelques fois dans la suite.

- (7) $Y \cup f(X) \in \mathcal{M}$ Vu que $X \in \mathcal{M}$, nous savons déjà que $Y \cup f(X) \subset X$. En appliquant f des deux côtés,

$$f(Y \cup f(X)) \subset f(X). \quad (1.63)$$

En ajoutant Y des deux côtés,

$$Y \cup f(Y \cup f(X)) \subset Y \cup f(X), \quad (1.64)$$

et donc $Y \cup f(X) \in \mathcal{M}$.

- (8) $Y \cup f(X) = X$ Nous savons déjà que $Y \cup f(X) \in \mathcal{M}$. Vu que X est le plus petit élément de $\mathcal{M}$, nous avons

$$X \subset Y \cup f(X). \quad (1.65)$$

L'inclusion inverse étant déjà faite, nous avons l'égalité.

- (9) $B \setminus f(X) = A \setminus X$ Nous avons :

$$\begin{aligned} A \setminus X &= A \setminus (Y \cup f(X)) && (1.66a) \\ &= (A \setminus Y) \cap (A \setminus f(X)) && \text{SUBEQooBVZCooAEUJtT} \quad (1.66b) \\ &= B \cap (A \setminus f(X)) && \text{SUBEQooUATVooPErmHT} \quad (1.66c) \\ &= (B \cap A) \setminus f(X) && \text{SUBEQooKWVWooOMLzrv} \quad (1.66d) \\ &= B \setminus f(X). && \text{SUBEQooQTTSooIFSEKoo} \quad (1.66e) \end{aligned}$$

Justifications :

- Pour (1.66b). Complémentaire de réunion, lemme 1.41(2).
- Pour (1.66c). Parce que $A \setminus Y = B$ du fait que $Y = A \setminus B$.
- Pour (1.66d). Lemme 1.41(3).
- Pour (1.66e). Parce que $B \subset A$.

- (10) **Notre bijection** Nous voulons définir

$$\begin{aligned} \alpha: A &\rightarrow B \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X \\ x & \text{si } x \in A \setminus X. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.67)$$

Pour y parvenir, nous devons prouver que α prend effectivement ses valeurs dans B . Ensuite nous prouverons que α est une bijection.

- (11) α prend ses valeurs dans B Si $x \in X$ nous avons $\alpha(x) = f(x) \in B$. Si au contraire $x \in A \setminus X$ nous avons

$$\alpha(x) = x \in A \setminus X = B \setminus f(X) \subset B. \quad (1.68)$$

- (12) α est injective Soient $x, y \in A$ tels que $\alpha(x) = \alpha(y)$. Il y a quatre possibilités suivant que x et y sont dans X ou dans $A \setminus X$.

- (12a) $x \in X, y \in X$ Alors $f(x) = \alpha(x) = \alpha(y) = f(y)$. Vu que f est injective, nous trouvons que $x = y$.

- (12b) $x \in X, y \in A \setminus X$ Nous avons $\alpha(x) = f(x) \in f(X)$ et $\alpha(y) = y \in A \setminus X = B \setminus f(X)$. Il n'est donc pas possible d'avoir $\alpha(x) = \alpha(y)$ dans ce cas.

- (12c) $x \in A \setminus X, y \in X$ Idem.

- (12d) $x \in A \setminus X, y \in A \setminus X$ Dans ce cas nous avons $\alpha(x) = x$ et $\alpha(y) = y$. Donc $x = y$.

- (13) α est surjective Soit $b \in B$. Il y a deux possibilités : $b \in f(X)$ ou $b \notin f(X)$.

- (13a) Si $b \in f(X)$ Soit $x \in X$ tel que $f(x) = b$. Alors $\alpha(x) = f(x) = b$.

- (13b) Si $b \notin f(X)$ Alors $b \in B \setminus f(X) = A \setminus X$, et donc $\alpha(b) = b$.

□

THOooRYZJooQcjlcl

Théorème 1.75 (Cantor-Schröder-Bernstein).

Soient deux ensembles A et B pour lesquels il existe des injections $f: A \rightarrow B$ et $g: B \rightarrow A$. Alors il existe une bijection entre A et B .

Démonstration. La composée $g \circ f: A \rightarrow A$ est injective et prend ses valeurs dans $g(f(A)) \subset g(B) \subset A$. Bref, l'application $g \circ f: A \rightarrow g(B)$ est injective. Le lemme 1.74 donne alors une bijection $\varphi: A \rightarrow g(B)$.

Nous montrons que $g^{-1} \circ \varphi: A \rightarrow B$ est une bijection.

- (1) **Injective** Nous supposons $x, y \in A$ tels que

$$g^{-1}(\varphi(x)) = g^{-1}(\varphi(y)). \quad (1.69)$$

Nous appliquons g des deux côtés : $\varphi(x) = \varphi(y)$. Puisque φ est une bijection, cela entraîne $x = y$.

- (2) **Surjective** Soit $b \in B$. En posant $a = \varphi^{-1}(g(b))$ nous avons bien $(g^{-1} \circ \varphi)(a) = b$.

□

1.3.4 Comparabilité cardinale

SUOB6TimpGaimjitrCardIntale

1.76.

Le théorème de comparabilité cardinale énonce que si A et B sont des ensembles, alors nous avons toujours $A \geq B$ ou $A \leq B$ (ou les deux ; dans ce cas $A \approx B$ par Cantor-Schröder-Bernstein).

THOooCBSKooCmzfUf

Théorème 1.77 (Théorème de comparabilité cardinale[1, 25, 26]).

Entre deux ensembles, il existe forcément une injection de l'un dans l'autre.

Démonstration. Nous allons montrer que le graphe d'une injection de A dans B ou de B dans A est donné par un élément maximal (au sens de l'inclusion) de l'ensemble (inductif) des graphes d'injections d'une partie de A dans une partie de B .

Nous allons utiliser le lemme de Zorn 1.37 à l'ensemble²⁴

$$\mathcal{A} = \left\{ (X, Y, \varphi) \text{ tel que } \begin{cases} X \subset A \\ Y \subset B \\ \varphi: X \rightarrow Y \text{ est injective.} \end{cases} \right\} \quad (1.70)$$

que nous ordonnons par l'inclusion, c'est-à-dire par $(X_1, Y_1, \varphi_1) < (X_2, Y_2, \varphi_2)$ lorsque $X_1 \subset X_2$, $Y_1 \subset Y_2$ et $\varphi_2|_{X_1} = \varphi_1$.

Nous passons rapidement sur le fait que cet ensemble est inductif, et nous considérons tout de suite un élément maximal (X, Y, φ) . Il y a deux possibilités : soit $\varphi(X) = B$, soit $\varphi(X) \neq B$.

- (1) **Si $\varphi(X) = B$** Dans ce cas, $\varphi: X \rightarrow B$ est une surjection. L'ensemble A est donc surpotent à B . La proposition 1.66 conclut que B est subpotent à A .
- (2) **Si $\varphi(X) \neq B$** Nous subdivisons en deux nouveaux cas : soit $X = A$, soit $X \neq A$.
- (2a) **Si $X = A$** Alors nous avons une injection $\varphi: A \rightarrow B$, et c'est bon.
- (2b) **Si $X \neq A$** Nous sommes dans le cas $X \neq A$ et $\varphi(X) \neq B$. Soient $a \in A \setminus X$ et $b \in B \setminus \varphi(X)$. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \psi: X \cup \{a\} &\rightarrow Y \cup \{b\} \\ x &\mapsto \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in X \\ b & \text{si } x = a. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.71)$$

C'est une application injective. Donc le triplet $(X \cup \{a\}, Y \cup \{b\}, \psi)$ majore (X, Y, φ) .

Nous avons une contradiction et ce cas n'est pas possible.

24. Attention : dans le Frido, la notation $f: A \rightarrow B$, signifie que f est définie sur tout l'ensemble A , mais pas qu'elle est surjective sur B .

□

NORMooOrdreSurEnsembles

1.78.

Le théorème de comparabilité cardinale couplé au théorème de Cantor-Schröder-Bernstein nous indique que pour tout ensembles A et B , nous avons soit $A \leq B$, soit $B \leq A$. Et si $A \leq B \leq A$, alors $A \approx B$.

Nous ne sommes pas loin de dire que la relation $\leq$ donne un ordre total sur l'ensemble des ensembles. C'est très beau sauf que l'ensemble des ensembles n'existe pas²⁵. Il faudrait parler de *classe* des ensembles, mais ça nous mènerait trop loin. Toujours est-il que ces deux théorèmes montrent qu'on n'est pas loin d'avoir un ordre sur les ensembles, et que cela est une des bases possibles pour développer les nombres cardinaux.

1.3.5 Théorème de Cantor, ensemble des ensembles

THOoUBNfThWCaftind

Théorème 1.79 (Cantor[27]).

Un ensemble est toujours strictement subpotent à son ensemble des parties.

Démonstration. Soit un ensemble E et son ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$. Nous commençons par prouver qu'il n'existe pas de surjection $E \rightarrow \mathcal{P}(E)$. Soit en effet une application $f: E \rightarrow \mathcal{P}(E)$. Nous posons

$$D = \{x \in E \text{ tel que } x \notin f(x)\}. \quad (1.72)$$

Nous prouvons que D ne peut pas être dans l'image de f . Supposons que $y \in E$ soit tel que $f(y) = D$.

(1) **Si** $y \in D$ Alors par définition de D , nous avons $y \notin f(y) = D$. Contradiction.

(2) **Si** $y \notin D$ Alors $y \in f(y) = D$, contradiction.

Donc aucune surjection $f: E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ n'existe. En particulier pas de bijections.

Par ailleurs, l'application $g: \mathcal{P}(E) \rightarrow E$ qui fait $g(\{a\}) = a$ (et n'importe quoi d'autre sur les autres éléments de $\mathcal{P}(E)$) est une surjection $\mathcal{P}(E) \rightarrow E$.

Donc $\mathcal{P}(E)$ est toujours strictement surpotent à E .

□

NORooSensEnsSurpotent

1.80.

Le théorème de Cantor implique en particulier qu'il existe (au moins) une infinité dénombrable d'ensembles infinis de cardinalité différentes (plus évidemment une infinité dénombrable d'ensembles finis de cardinalité différentes).

Pour tout ensemble A , il est donc possible de dire « soit E , un ensemble strictement surpotent à A ».

CORooZMAOooPfJosM

Corolaire 1.81.

Il n'existe pas d'ensemble contenant tous les ensembles.

Démonstration. Si E était un tel ensemble, nous aurions $\mathcal{P}(E) \subset E$ parce que les éléments de $\mathcal{P}(E)$ sont des ensembles. Or cela donnerait une surjection $E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ alors que cela est impossible par le théorème de Cantor 1.79. □

1.4 Quelques structures algébriques

NORMoBfGaoStructuresAlgebriques

1.82.

Nous collectons ici les définitions des principales structures algébriques.

DEFooBMUZooLAfbeM

Définition 1.83 (Groupe).

Un **groupe** est un ensemble G muni d'une opération interne $\cdot : G \times G \rightarrow G$ telle que

$$(1) \text{ pour tous } g, h, k \in G, g \cdot (h \cdot k) = (g \cdot h) \cdot k,$$

25. Corolaire 1.81.

(2) il existe un élément $e \in G$ tel que $e \cdot g = g \cdot e = g$ pour tout $g \in G$,

(3) pour tout $g \in G$, il existe un élément $h \in G$ tel que $g \cdot h = h \cdot g = e$.

Un groupe est **commutatif** ou **abélien** si $g \cdot h = h \cdot g$ pour tout $g, h \in G$.

REMOONotationOperationGroupe

Remarque 1.84.

Remarquez que nous avons écrit $g \cdot h$ et non $\cdot (g, h)$ comme une notation purement fonctionnelle nous l'aurait suggéré. Dans les exemples concrets, selon les cas, la loi de groupe appliquée à g et h sera notée tantôt $g + h$, tantôt $g \cdot h$ ou, le plus souvent pour un groupe générique, simplement gh .

DEFooSousGroupe

Définition 1.85 (Sous-groupe).

Soit G un groupe et H un sous-ensemble de G . On dit que H est un **sous-groupe** de G si H , muni de l'opération héritée de G , est un groupe. Plus précisément, H est un sous-groupe de G si :

(1) l'opération interne $\cdot : G \times G \rightarrow G$ restreinte à $H \times H$ a ses images dans H ;

(2) l'élément e est un élément de H ;

(3) lorsque $g \in H$, l'élément h tel que $g \cdot h = h \cdot g = e$ est en réalité dans H .

DEFooBEHTooMeCOTX

Définition 1.86 (morphisme, automorphisme).

Soient deux groupes G et H . Un **morphisme** entre G et H est une application $\alpha : G \rightarrow H$ telle que pour tous $g, h \in G$ nous ayons $\alpha(g \cdot_G h) = \alpha(g) \cdot_H \alpha(h)$.

Comme d'habitude, un isomorphisme est un morphisme bijectif.

Un **automorphisme** de G est un isomorphisme de G vers G lui-même. L'ensemble des automorphismes de G est noté $\text{Aut}(G)$.

PROPooJHHPoolpciPA

Proposition 1.87.

Si $\alpha : G \rightarrow H$ est un morphisme de groupes, alors $\alpha(G)$ est un sous-groupe de H .

Démonstration. Point par point vis-à-vis de la définition 1.85. On notera $\cdot$ l'opération de H et $\cdot_G$ celle de G .

Opération interne Si h et h' sont deux éléments de $\alpha(G)$, il existe deux éléments g et g' de G tels que $h = \alpha(g)$ et $h' = \alpha(g')$. Alors

$$h \cdot h' = \alpha(g) \cdot \alpha(g') = \alpha(g \cdot_G g'),$$

puisque α est un morphisme de groupes. Ainsi $h \cdot h' \in \alpha(G)$ car il est l'image de $g \cdot_G g'$.

Neutre On a $e_H = \alpha(e_G)$ quel que soit le morphisme α .

Inverse L'inverse d'un élément $h = \alpha(g)$ est l'élément $\alpha(g^{-1})$.

□

LEMooKJMWooQeIwgF

Lemme 1.88.

Si G est un groupe, alors $\text{Aut}(G)$ est un groupe pour la composition.

Démonstration. Soient α et β des automorphismes de G . Alors nous prouvons que $\alpha \circ \beta$ est un automorphisme de G :

$$(\alpha \circ \beta)(gh) = \alpha(\beta(g)\beta(h)) = \alpha(\beta(g))\alpha(\beta(h)) = (\alpha \circ \beta)(g)(\alpha \circ \beta)(h). \quad (1.73)$$

□

LEMooDPISooRoAFmt

Lemme 1.89.

Si G et H sont des groupes isomorphes, alors les groupes $\text{Aut}(G)$ et $\text{Aut}(H)$ sont isomorphes.

Démonstration. Soit un isomorphisme $f : G \rightarrow H$. D'abord pour tout $\alpha \in \text{Aut}(G)$, l'application $f \circ \alpha \circ f^{-1}$ est un automorphisme de H . Cela est rapidement vérifié parce que f , α et f^{-1} sont des bijections et des morphismes.

Nous pouvons donc considérer l'application

$$\begin{aligned} \psi : \text{Aut}(G) &\rightarrow \text{Aut}(H) \\ \alpha &\mapsto f \circ \alpha \circ f^{-1}. \end{aligned} \quad (1.74)$$

- (1) ψ est un morphisme Soient $\alpha, \beta \in \text{Aut}(G)$. Vu que f est une bijection, nous pouvons introduire $f^{-1} \circ f$ partout où ça nous plaît :

$$\psi(\alpha\beta) = f \circ \alpha \circ \beta \circ f^{-1} = f \circ \alpha \circ f^{-1} \circ f \circ \beta \circ f^{-1} = \psi(\alpha) \circ \psi(\beta). \quad (1.75)$$

- (2) ψ est injective Si $\alpha, \beta \in \text{Aut}(G)$ sont tels que $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$, alors

$$f \circ \alpha \circ f^{-1} = f \circ \beta \circ f^{-1}. \quad (1.76)$$

Comme f est une bijection, cela implique que $\alpha = \beta$.

- (3) ψ est surjective Si $\alpha: H \rightarrow H$ est un automorphisme, alors $\sigma = \psi(f^{-1} \circ \sigma \circ f)$ où il est facile de vérifier que $f^{-1} \circ \sigma \circ f \in \text{Aut}(G)$. □

DefHXJUooKoovob

Définition 1.90 (Anneau[28]).

Un **anneau**²⁶ est un triplet $(A, +, \cdot)$ avec les conditions

- (1) $(A, +)$ est un groupe²⁷ commutatif. Nous notons 0 le neutre.
- (2) La multiplication est associative et admet un neutre, que nous notons 1 . ITEMooGMNOooSTGiXw
- (3) La multiplication est distributive (à gauche et à droite) par rapport à l'addition. Cela signifie que, pour tous a, b et c de A , nous avons les deux égalités

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{et} \quad (a + b)c = ac + bc. \quad (1.77)$$

L'anneau $(A, +, \cdot)$ est **commutatif** si pour tout $a, b \in A$ nous avons $a \cdot b = b \cdot a$. LEMooVUSMooWisQpD

Lemme 1.91.

Pour tout élément a d'un anneau nous avons $a \cdot 0 = 0$ et $0 \cdot a = 0$

Démonstration. L'élément 0 est le neutre de l'addition. Il peut être écrit $1 + (-1)$, et en utilisant la distributivité (à gauche),

$$a \cdot 0 = a \cdot (1 + (-1)) = a + (-a) = 0. \quad (1.78)$$

L'autre égalité se prouve de même avec la distributivité à droite. □

PROPooNCCGooXjVyVt

Proposition 1.92.

Dans un anneau²⁸ non nul, le neutre pour l'addition est distinct du neutre pour la multiplication.

Démonstration. Supposons par contraposée que dans un anneau A , nous ayons $1 = 0$. Alors, pour tout $a \in A$, on a $a = 1a = 0a = 0$: les égalités étant justifiées respectivement par la définition de 1 , l'hypothèse $1 = 0$, et le lemme 1.91. Ainsi, $a = 0$ pour tout $a \in A$ et l'anneau est nul. □

LEMooLTERooVKgqjn

Lemme 1.93 ([1]).

Un peu d'arithmétique. Soit un anneau A et deux éléments $a, b \in A$. Nous avons les égalités suivantes :

ITEMooWNPVooFeMQAp

- (1) Si $a \neq 0$ alors $-a \neq 0$.

ITEMooUGHCoOPgoeR

- (2) $1 \times 1 = 1$.

ITEMooJMSooVgyVwg

- (3) $(-1) \times a = -a$.

ITEMooXJGMooKNLIHU

- (4) $-(-a) = a$.

ITEMooYMRKooHVYYKU

- (5) $(-1) \times (-1) = 1$.

ITEMooAnneauArith5

- (6) $(-a)b = -ab$

26. Nous faisons le choix qu'un anneau admet toujours un neutre pour la multiplication. Certains ouvrages parlent dans ce cas d'anneau unitaire.

27. Groupe, définition 1.83.

28. Définition 1.90.

$$(7) \quad (-a)(-b) = ab$$

ITEMooHUIJFooKkyIVt

Démonstration. En plusieurs parties.

- (1) **Pour (1)** Si $-a = 0$ alors en ajoutant a deux côtés, nous avons $0 = a$ qui est contraire à l'hypothèse.
- (2) **Pour (2)** La définition de 1 est que $1 \times a = a$ pour tout a . En particulier pour $a = 1$ nous avons le résultat.
- (3) **Pour (3)** Nous avons

$$(-1) \times a + a = a \times ((-1) + 1) = a \times 0 = 0. \quad (1.79)$$

Nous avons utilisé le fait que la multiplication était distributive et que le zéro était absorbant (lemme 1.91).

- (4) **Pour (4)** Nous avons $-a + a = 0$ par définition de la notation $-a$. Donc a est bien l'inverse de $-a$ pour l'addition.
- (5) **Pour (5)** En utilisant les points (3) et (4) nous avons

$$(-1) \times (-1) = -(-1) = 1. \quad (1.80)$$

- (6) **Pour (6) et (7)** Par propriété de distributivité²⁹, on a $ab + (-a)b = (a + (-a))b = 0b = 0$; donc l'opposé de ab s'écrit $-ab$ ou bien $(-a)b$.
Par la même propriété (avec l'autre égalité), on a $(-a)b + (-a)(-b) = (-a)(b + (-b)) = (-a)0 = 0$, donc $(-a)b$ a pour opposé $(-a)(-b) = ab$.

□

NORooDistributiviteSoustraction

1.94.

La distributivité de la partie (3) de la définition 1.90 ne traite que de l'addition; pas de la soustraction. Voici un lemme qui dit que la distributivité fonctionne aussi avec les soustractions.

LEMooVPYUooRzexeke

Lemme 1.95 ([15]).

Soient un anneau A ainsi que $a, b, c \in A$. Alors

$$a(b - c) = ab - ac. \quad (1.81)$$

Démonstration. Nous avons le calcul suivant :

$$\begin{aligned} a(b - c) + ac &= a((b - c) + c) \\ &= ab. \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{SUBEQooKCOWooFeOHUM} \\ (1.82a) \\ \text{SUBEQooMLLOooNRmIYM} \\ (1.82b) \end{array}$$

Justifications :

- Pour 1.82a. Distributivité.
- Pour 1.82b. Parce que $(b - c) + c = b$.

Nous avons donc $a(b - c) + ac = ab$ et donc l'égalité demandée en ajoutant $-ac$ des deux côtés. □

DEFooSPHPooCwjzuz

Définition 1.96 (Morphisme d'anneaux[29]).

Si $(A, +, \cdot)$ et $(B, +, \cdot)$ sont des anneaux³⁰, un **morphisme d'anneaux** est une application $f: A \rightarrow B$ telle que

- (1) $f(a + b) = f(a) + f(b)$
- (2) $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$
- (3) $f(1) = 1$.

Étant bien entendu que les significations de 1 , $+$ et $\cdot$ sont différentes à gauche et à droite.

29. Définition 1.90, point (3).

30. Définition 1.90.

1.4.1 Positivité

SUBRPOZRMFocGhzMox

Définition 1.97 ([1]).

Soit un anneau³¹ A . Une **positivité** sur A est une partie $A^+ \subset A$ telle que

- (1) Pour tout $a \neq 0$ dans A , nous avons³² $a \in A^+$ xor $-a \in A^+$.
- (2) Pour tout $a, b \in A^+$, nous avons $a + b \in A^+$.

Oui, il faudrait dire une stricte positivité.

PROPooKLOPooBgQqhM

Proposition 1.98 ([1]).

Soit A^+ une positivité³³ sur A . Pour $a, b \in A$, on définit la relation $a \leq b$ si et seulement si $b - a \in A^+ \cup \{0\}$. Cette relation est une relation d'ordre³⁴ sur A .

Démonstration. Nous vérifions les conditions de la définition 1.23.

- (1) **Réflexivité** Vu que $a - a = 0$ et que $0 \in A^+ \cup \{0\}$, nous avons $a \leq a$.
- (2) **Antisymétrie** Si $a \leq b$ et $b \leq a$, nous avons

$$\begin{cases} b - a \in A^+ \cup \{0\} \\ a - b \in A^+ \cup \{0\} \end{cases} \quad (1.83a)$$

$$\quad (1.83b)$$

Par définition de la positivité, on ne peut avoir $a - b$ et $b - a$ tous les deux dans A^+ . Donc soit $a - b = 0$, soit $b - a = 0$ (ou les deux en même temps, ce qui est le cas). Quoi qu'il en soit, on en déduit $a = b$.

- (3) **Transitivité** Supposons que $a \leq b$ et $b \leq c$. Nous avons alors

$$\begin{cases} b - a \in A^+ \cup \{0\} \\ c - b \in A^+ \cup \{0\} \end{cases} \quad (1.84a)$$

$$\quad (1.84b)$$

Si l'un des deux est nul, c'est facile. Nous supposons qu'ils sont tous les deux dans A^+ . Alors leur somme est dans A^+ : $(b - a) + (c - b) \in A^+$. Cela donne tout de suite $c - a \in A^+$ et donc $a \leq c$ comme demandé.

□

1.4.2 Diviseurs, pgcd et ppcm

SUBooDiviseDirBGIcDNRcM

Définition 1.99 (Diviseurs dans un anneau).

Soit un anneau³⁵ A . Soient $a, b \in A$. On dit que a divise b , ou que a est un **diviseur** (à gauche) de b si il existe $c \in A$ tel que $ac = b$. On dit que c'est un diviseur de b à droite si $ca = b$ pour un certain $c \in A$.

Dans un anneau commutatif, nous disons que a **divise** b si il existe $x \in A$ tel que $ax = b$. Dans ce cas nous écrivons $a \mid b$.

NORMooAnneauIntegreIntro

1.100.

Un cas particulier est le cas des diviseurs de zéro. L'absence de tels diviseurs dans un anneau est une propriété intéressante : on dit dans ce cas que l'anneau est *intègre*. Nous définirons cela proprement en la définition 1.326, grâce à des propriétés équivalentes.

DEFooAnneauEltRegulier

Définition 1.101.

Un élément $a \in A$ est **régulier à droite** si, dès lors qu'un élément $b \in a$ est tel que $ba = 0$, alors $b = 0$. Il est **régulier à gauche** si $ab = 0$ implique $b = 0$.

31. Définition 1.90.

32. xor est le ou exclusif. L'un ou bien l'autre est vrai, mais on ne peut avoir les deux en même temps.

33. Définition 1.97.

34. Définition 1.23.

35. Anneau, définition 1.96.

PROPooRegulierMagmaAnneau

Proposition 1.102.

Soit A un anneau. La notion de régularité dans un anneau est équivalente à la notion de régularité³⁶ dans le magma A muni de l'opération de multiplication.

Démonstration. En deux étapes. On ne va faire que la régularité à gauche, il suffit d'adapter pour la régularité à droite.

- (1) **Régulier dans le magma implique régulier dans l'anneau** Soit $a \in A$. On sait, par régularité de A dans le magma, que pour tous x et y de A , dès lors que $ax = ay$, alors $x = y$. Soit $b \in A$. Supposons que $ab = 0$. Le lemme 1.91 permet d'écrire $ab = a0$. En prenant $x = b$ et $y = 0$, on en déduit $b = 0$, soit la régularité de a dans l'anneau.
- (2) **Régulier dans l'anneau implique régulier dans le magma** Soit $a \in A$. On sait que l'égalité $ab = 0$ implique $b = 0$. Soit $x, y \in A$. Supposons que $ax = ay$; alors $ax - ay = 0$ et par distributivité soustractive³⁷, $a(x - y) = 0$. Mais la régularité d'anneau dit alors que $x - y = 0$, et donc que $x = y$. Donc a est régulier dans le magma A .

□

DefrYwbct

Définition 1.103.

Soient A un anneau commutatif et $S \subset A$. Nous disons que $\delta \in A$ est un **PGCD** de S si

- (1) δ divise³⁸ tous les éléments de S .
- (2) si d divise également tous les éléments de S , alors d divise δ .

ITEMooVCKGooWDXZOj

Nous disons que $\mu \in A$ est un **PPCM** de S si

- (1) $S \mid \mu$,
- (2) si $S \mid m$, alors $\mu \mid m$.

Si P et Q sont des polynômes, ce que nous notons $\text{pgcd}(P, Q)$ est l'unique polynôme unitaire dans $\text{pgcd}(\{P, Q\})$. Voir 6.53.

REMooExistenceUnicitePGCD

Remarque 1.104.

On parle d'existence de pgcd dans 3.50.

Au sens de la définition 1.103, le pgcd n'est pas unique. Dans $\mathbb{Z}$ par exemple les nombres 4 et -4 sont tous deux pgcd de $\{4, 16\}$.

Dans $\mathbb{Z}$ cependant, nous modifions implicitement la définition et nous n'acceptons que les positifs, de telle sorte que l'unique pgcd soit effectivement le plus grand pour l'ordre usuel sur $\mathbb{Z}$.

Pour l'unicité dans $\mathbb{Z}$, voir 3.13.

1.4.3 Règle des signes dans un anneau totalement ordonné

SUEEESigWAGWtoEOWtdXt6d

Définition 1.105 (Anneau totalement ordonné[1]).

Un anneau A est **totalement ordonné** si, sur A , il existe une relation d'ordre total³⁹ compatible avec la structure d'anneau, c'est-à-dire tel que

- (1) $x \leq y$ implique $x + z \leq y + z$ pour tout $x, y, z \in A$
- (2) $x \geq 0$ et $y \geq 0$ implique $xy \geq 0$.

ITEMooZISJooWNxnBj

CONDooBYDooElXgPO

PROPooELXCooCYzEVD

Proposition 1.106 ([1]).

Soit un anneau totalement ordonné A .

ITEMooRRUGooRUpYwt

- (1) Si $a \leq 0$ alors $-a \geq 0$.
- (2) Si $a \geq 0$ alors $-a \leq 0$

ITEMooNKYCooCmqHsO

36. Définition 1.62

37. Lemme 1.95.

38. Définition 1.99.

39. Définition 1.24.

(3) Si $a, b \geq 0$ alors $a + b \geq 0$

ITEMooXOTGooYxKubR

Démonstration. Point par point.

- (1) **Pour (1)** En vertu de 1.105(1) nous pouvons ajouter $-a$ est deux côtés de $a \leq 0 : a - a \leq 0 - a$ et donc $0 \leq -a$.
- (2) **Pour (2)** On écrit $a \geq 0$ et nous faisons $-a$ des deux côtés pour obtenir $a - a \geq 0 - a$, c'est-à-dire $0 \geq -a$.
- (3) **Pour (3)** Nous avons $a \geq 0$. Nous ajoutons b des deux côtés pour avoir $a + b \geq b \geq 0$.

□

LEMooXJTAooZauchx

Lemme 1.107 (Règle des signes[30]).

Soit un anneau totalement ordonné A ainsi que $x, y \in A$. Nous avons :

ITEMooHESRooKrDult

(1) Si $x, y \geq 0$ alors $xy \geq 0$.

ITEMooNLAQooHtERZJ

(2) Si $a \geq 0$ et $b \leq 0$ alors $ab \leq 0$.

ITEMooDZUJooVWuLbD

(3) Si $a, b \leq 0$ alors $ab \geq 0$

ITEMooRGYAooCUIfss

(4) $0 < 1$.

ITEMooMRNHooLgIPKn

(5) Si $x \geq 0$ et x est inversible dans A , alors $x^{-1} \geq 0$.

Démonstration. Plusieurs points.

- (1) **Pour (1)** C'est directement la définition 1.105(2).
- (2) **Pour (2)** En posant $x = a$ et $y = -b \geq 0$ (par la proposition 1.106(1)), nous avons $xy \geq 0$ par la définition 1.105(2). Nous avons alors $a(-b) = -ab \geq 0$ par (1), et donc $ab \leq 0$.
- (3) **Pour (3)** Nous posons $a' = -a$ et $b' = -b$. Par 1.106(1) nous avons $a', b' \geq 0$. Donc $a'b' \geq 0$ par le point (2). Mais $a'b' = (-a)(-b) = ab$ par le lemme 1.93(7).
- (4) **Pour (4)** Supposons par l'absurde que $1 \leq 0$. L'utilisation de (3) avec $a = b = 1$ donne $ab = 1 \cdot 1 = 1 \geq 0$, ce qui nous contredit. Ainsi, $1 > 0$.
- (5) **Pour (5)** Si $x^{-1} < 0$, alors $1 = xx^{-1} < 0$. Mais comme nous venons de voir que $1 \geq 0$ nous déduisons que $x^{-1} \geq 0$.

□

1.4.4 Valeur absolue, corps valué

SUEBooBAVAXGmApkYBRs

Définition 1.108 (Valeur absolue, corps valué[31, 32]).

Un **anneau valué** A est un anneau totalement ordonné muni d'une application $|\cdot| : A \rightarrow \mathbb{K}$ telle que

- (1) $|x| \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{K}$,
- (2) $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$,
- (3) $|x + y| \leq |x| + |y|$
- (4) $|xy| \leq |x||y|$.

Une telle application est une **valeur absolue**.

NORooLienCorpsValueEspaceMetrique

1.109.

Un corps valué sera un espace topologique métrique dans la définition 7.236. Dans le cas d'un corps totalement ordonné, nous avons une valeur absolue donnée par 1.111 et les principales propriétés dans le lemme 1.112.

NORooValAbsGenerale

1.110.

La plupart du temps, la valeur absolue $|\cdot|$ sera à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Cependant nous avons besoin d'une définition générale parce que nous allons devoir définir ce qu'est une suite de Cauchy (définition 1.481(1)) dans un corps avant la définition des réels ; les réels étant définis comme étant des suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.

Proposition-Définition 1.111 (Valeur absolue^[1]).

Si A est un anneau totalement ordonné⁴⁰, alors l'application

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (1.85)$$

est une valeur absolue⁴¹. Elle vérifie de plus

$$|xy| = |x||y|. \quad (1.86)$$

Par défaut, lorsque nous parlons de la valeur absolue sur A , c'est celle-ci.

Démonstration. Il faut vérifier les conditions de la définition 1.108.

- (1) $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$ C'est la définition et le fait que $-x \neq 0$ lorsque $x \neq 0$ par le lemme 1.93(1).
- (2) $|x + y| \leq |x| + |y|$ Il y a 4 possibilités suivant la positivité de x et y .
- (2a) Si $x, y \geq 0$ Alors $x + y \geq 0$ par la proposition 1.106(3). Donc $|x| = x$, $|y| = y$ et $|x + y| = x + y$.
- (2b) Si $x \geq 0$ et $y < 0$ Nous posons $y' = -y$, et nous avons deux possibilités : $y' \geq x$ et $y' < x$.
- (2b.i) Si $y' < x$ Alors en posant $a = x - y'$ nous avons $a > 0$. Nous avons ensuite :

$$|x + y| = |y' + a + y| = |y' + a - y'| = |a| = a. \quad (1.87)$$

Mais

$$|x| + |y| = x + y' = y' + a + y' = a + 2y' \geq a = |x + y|. \quad (1.88)$$

- (2b.ii) Si $y' \geq x$ Alors en posant $a = y' - x$ nous avons $a \geq 0$ et

$$|x + y| = |x - y'| = |x - (x + a)| = |-a| = a. \quad (1.89)$$

Mais aussi

$$|x| + |y| = x + y' = x + x + y = 2x + a \geq a. \quad (1.90)$$

Les autres cas sont du même style.

- (3) $|xy| = |x||y|$

Il y a 4 possibilités.

- (3a) Si $x, y \geq 0$ Nous avons directement $|x| = x$, $|y| = y$. Par ailleurs A est un anneau totalement ordonné ; la définition 1.105(2) donne $xy \geq 0$ et donc $|xy| = xy$.
- (3b) Si $x \geq 0$ et $y \leq 0$ La définition de la valeur absolue donne $|x| = x$ et $|y| = -y$. Par ailleurs la proposition 1.107(2) dit que $xy \leq 0$ de telle sorte que $|xy| = -xy$.
- (3c) Si $x \leq 0$ et $y \geq 0$ Même chose.
- (3d) Si $x, y \leq 0$ Même chose, en utilisant 1.107(3).

□

LemmoANTJooYxQZDw

Lemme 1.112 (Propriétés de la valeur absolue).

Soit A un anneau totalement ordonné muni de la valeur absolue usuelle (définition 1.111). Si $x, y \in A$, alors :

- (1) $|x| \geq 0$
- (2) $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$

ITEMooSDNHooDnjScE

ITEMooLQLTtooTJTPVM

40. Définition 1.105.

41. Définition 1.108.

$$(3) \quad |-x| = |x|.$$

$$(4) \quad |x + y| \leq |x| + |y|.$$

$$(5) \quad |x - y| \leq |x - z| + |z - y|.$$

$$(6) \quad |xy| = |x||y|$$

ITEMooVJAEooOEatzY

ItemooOMKNooRlanvk

ITEMooISWFooMeOtjZ

ITEMooEFMLooYVCuHD

Démonstration. Point par point

(1) **(1)** Si $x \geq 0$ alors c'est vrai. Sinon, $x \leq 0$ et $|x| = -x \geq 0$ par le point **(1)** de la proposition **1.106**.

(2) **(2)** Si $x = 0$ alors $x = -x$ et $|x| = 0$. Si $x \neq 0$ alors $-x \neq 0$ (par le lemme **1.93** point **(1)**). Que l'on ait x positif ou x négatif, nous aurons toujours $|x| \pm x \neq 0$.

(3) **(3)** Il faut décomposer en deux cas selon que $x \geq 0$ ou $x \leq 0$.

Lorsque $x \leq 0$, on a $|x| = -x$ par définition, et par ailleurs, $-x \geq 0$ grâce au point **(2)** du lemme **1.93**, donc $|-x| = -x = |x|$.

Supposons $x \geq 0$. Alors d'une part $|x| = x$. D'autre part $-x \leq 0$ par le point **(1)** de la proposition **1.106**, de telle sorte que

$$|-x| = -(-x) = x, \quad (1.91)$$

cette dernière égalité étant justifiée par le point **(4)** du lemme **1.93**.

Nous avons donc bien $|x| = |-x|$ quel que soit le cas considéré.

(4) **(4)** Nous supposons que $x \leq y$ et nous distinguons divers cas suivant la positivité de x et y .

(4a) Si $x, y \geq 0$. Dans ce cas, $x + y \geq y \geq 0$, donc $|x + y| = x + y = |x| + |y|$.

(4b) Si $x, y \leq 0$. Dans ce cas, $x + y \leq 0$ et nous avons $|x + y| = -x - y = |x| + |y|$.

(4c) Si $x \leq 0$ et $y \geq 0$. Nous subdivisons encore en deux cas suivant que $x + y$ est positif ou négatif. Si $x + y \geq 0$, alors nous écrivons successivement

$$x \leq 0 \quad (1.92a)$$

$$x + y \leq y \leq y + |x| = |x| + |y| \quad (1.92b)$$

et donc $|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$.

Nous supposons à présent que $x \leq 0$, $y \geq 0$ et $x + y \leq 0$. Dans ce cas il suffit d'écrire $|x + y| = |(-x) + (-y)|$ pour retomber dans le cas précédent à inversion près de x et y .

(5) **Pour (5)** Soient $x, y, z \in \mathbb{K}$. En utilisant **(4)** nous avons

$$|x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y|. \quad (1.93)$$

(6) **Pour (6)** Il suffit de prendre les 4 cas suivant les signes de x et y , et d'utiliser les règles de signes du lemme **1.107** dans la définition **(1.85)**.

□

1.5 Les entiers naturels

NKECmoBESmimoNAtuIreJ

1.113 ([33]).

Comme le dit la page de Wikipedia consacrée aux nombres entiers, il faut savoir ce dont on parle. Les collégiens français apprennent que les entiers sont les nombres positifs; les québécois et les belges y ajoutent les négatifs...

Dans le Frido, on dira « entier naturel » voire « naturel » pour les positifs, et « entier relatif » voire « entier » quand on accepte les négatifs. C'est un choix pas standard dont il faut avoir conscience.

1.5.1 Triplet naturel

Définition 1.114 ([34]).

Un **triplet naturel** est un triplet $(\mathcal{N}, o, s)$ où $\mathcal{N}$ est un ensemble, o est un élément de $\mathcal{N}$ et s est une application $s: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- (1) s est injective,
- (2) $s(\mathcal{N}) = \mathcal{N} \setminus \{o\}$
- (3) Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{N}$ est tel que $o \in \mathcal{A}$ et $s(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$, alors $\mathcal{A} = \mathcal{N}$.

1.115.

Le théorème suivant est typiquement de ceux qui vont demander de gratter la théorie axiomatique des ensembles avec une certaine précision. Comme nous l'avons dit en introduction 1.1, nous n'avons pas l'intention de préciser nos axiomes, mais notre principe de construction est connu et dû à John Von Neumann.

Nous verrons plus tard, en 1.141, que toute partie infinie d'un triplet naturel fournit un nouveau triplet naturel ; il en existe donc plusieurs.

Théorème 1.116.

Il existe un triplet naturel.

1.117 (Idée de la construction [35, 36]).

Nous effectuons une construction de plusieurs ensembles, puis vérifier que l'ensemble final, muni du nécessaire, forme un triplet naturel.

- (1) **Le premier élément** On pose $o = \emptyset$. Dans une axiomatisation raisonnable, l'ensemble vide existe toujours.
- (2) **Le principe de construction** On construit $A_1 = o \cup \{o\}$ et on pose $s(o) = A_1$. Puis on définit $A_2 = A_1 \cup \{A_1\}$, et on pose $s(A_1) = A_2$.
De manière générale⁴², une fois un ensemble A_i construit sur ce principe, on ajoute l'ensemble $A_i \cup \{A_i\}$ à notre construction, et on pose $s(A_i) = A_i \cup \{A_i\}$.
Finalement, l'ensemble $\mathcal{N}$ est la réunion⁴³ de tous les ensembles A_i ainsi construits, et l'application s est définie par $s(A) = A \cup \{A\}$.
- (3) **Une remarque intéressante** En observant bien, on remarque que $o \in A_1$ mais aussi $o \subset A_1$. De même, $A_1 \subset A_2$ et donc $o \in A_2$ tout comme $A_1 \in A_2$. On a aussi $o \subset A_2$.
En fait, dans tous les ensembles que l'on construit, on aura toujours un principe d'inclusion, et aussi d'appartenance. Bien que l'intuition nous fait penser que ça fonctionne, la preuve n'est pas évidente.
- (4) **On a un triplet naturel** Montrons que $(\mathcal{N}, o, s)$ est bien un triplet naturel.
 - (4a) s est-elle injective ? Si A et B sont deux éléments de $\mathcal{N}$ avec $A \neq B$, alors par la remarque ci-dessus, et quitte à inverser A et B , on a $A \subset B$. On en déduit que B est construit après A , et donc $A \cup \{A\} \subset B$. Mais, toujours par construction, $\{B\}$ ne peut être dans A , ni être égal au singleton $\{A\}$: ainsi $A \cup \{A\} \subset B \cup \{B\}$ mais $A \cup \{A\} \neq B \cup \{B\}$, soit $s(A) \neq s(B)$.
 - (4b) A-t-on $s(\mathcal{N}) = \mathcal{N} \setminus \{o\}$? Par construction, un élément $B \in \mathcal{N} \setminus \{o\}$ est de la forme $A \cup \{A\}$ pour un certain ensemble A , lui-même dans $\mathcal{N}$.
 - (4c) Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{N}$ tel que $o \in \mathcal{A}$ et $s(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$. Cette dernière hypothèse nous dit que, dès que $A \in \mathcal{A}$, alors $A \cup \{A\} \in \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ contient $o = \emptyset$, il contient aussi A_1 , donc aussi A_2 , et par suite $\mathcal{N}$ tout entier. Finalement, $\mathcal{A} \subset \mathcal{N}$ et $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$, donc l'égalité.

42. Ici on voit que nous ne sommes pas en train d'écrire une vraie démonstration parce que « de manière générale » n'est pas quelque chose de précisément défini. En particulier nous ne disposons pas encore de théorèmes formalisant les constructions par récurrence ; on serait tenté d'utiliser le théorème 1.120.

43. Ici aussi c'est compliqué parce que rien ne garantit qu'il existe un ensemble contenant tous les A_i . Une construction un peu similaire construit les ordinaux, et dans ce cas, il n'existe pas d'ensembles contenant tous les ordinaux.

NORooDefinitionNChoixTriplet

1.118 (Définition de $\mathbb{N}$).

Pour la suite, nous considérons un triplet naturel $(\mathcal{N}, o, s)$ et nous notons $\mathbb{N} = \mathcal{N}$. Donc la nature de tous les objets que nous allons considérer à partir de maintenant dépend du choix de triplet naturel que nous faisons à présent. Le théorème 1.154 nous assurera que peu de choses devraient réellement dépendre de ce choix.

Nous notons 0 l'élément o et 1 l'élément $s(0)$. C'est tout ce dont nous avons besoin dans l'immédiat.

1.5.2 Applications définies par récurrence

SUBRoApplKARtGRukumWlq

Proposition 1.119 (Récurrence[34]).

Soit un triplet naturel $(\mathcal{N}, o, s)$ et une application $P: \mathcal{N} \rightarrow \{0, 1\}$ vérifiant⁴⁴

- (1) $P(o) = 1$,
- (2) pour tout $a \in \mathcal{N}$, si $P(a) = 1$, alors $P(s(a)) = 1$.

Alors $P(x) = 1$ pour tout $x \in \mathcal{N}$.

Démonstration. Nous posons

$$A = \{x \in \mathcal{N} \text{ tel que } P(x) = 1\}. \quad (1.94)$$

Cet ensemble vérifie la propriété 1.114(3). Donc $A = \mathcal{N}$. □

THOooEJPYooZfVnez

Théorème 1.120 ([15, 37]).

Soient E un ensemble, g une application de E dans E et b un élément de E . Alors il existe une unique application $f: \mathbb{N} \rightarrow E$ telle que :

- (1) $f(0) = b$
- (2) $f(s(n)) = g(f(n))$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Démonstration. Nous commençons par l'unicité. Soient f_1 et f_2 deux telles applications. Nous posons

$$A = \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } f_1(n) = f_2(n)\}. \quad (1.95)$$

Nous avons $0 \in A$ parce que $f_1(0) = f_2(0) = b$.

Supposons que $f_1(k) = f_2(k)$. Alors nous avons

$$f_1(s(k)) = g(f_1(k)) = g(f_2(k)) = f_2(s(k)). \quad (1.96)$$

Nous en déduisons que $s(k) \in A$. Autrement dit $s(A) \subset A$. La définition 1.114(3) nous indique alors que $A = \mathbb{N}$, c'est-à-dire que $f_1 = f_2$.

Nous montrons à présent l'existence en plusieurs étapes.

- (1) **L'ensemble est assez grand** Nous considérons l'ensemble $\mathcal{A}$ des parties $A \subset \mathbb{N} \times E$ telles que

- (1a) $(0, b) \in A$
- (1b) $(n, x) \in A \Rightarrow (s(n), g(x)) \in A$.

L'ensemble $\mathcal{A}$ est non vide parce que $\mathbb{N} \times E \in \mathcal{A}$.

- (2) **Le plus petit** Nous posons

$$G = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A, \quad (1.97)$$

44. Les plus pointilleux diront que 1 n'est pas encore défini. Bon j'avoue. Ce qui est important est que P prenne ses valeurs dans un ensemble contenant deux éléments distincts. Si maintenant vous râlez parce que « deux » est encore moins défini, prenez un ensemble quelconque A et dites que P prend ses valeurs dans $\{A, \mathcal{P}(A)\}$. Mais êtes-vous bien certain que $\mathcal{P}(A) \neq A$?

et nous prouvons que $G \in \mathcal{A}$. D'abord $(0, b) \in G$ parce que cet élément est dans chacun des $A \in G$. Ensuite si $(n, x) \in G$, alors pour tout $A \in \mathcal{A}$ nous avons $(n, x) \in A$ et donc $(s(n), g(x)) \in A$. Par conséquent $(s(n), g(x)) \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = G$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ nous posons

$$G_n = \{x \in E \text{ tel que } (n, x) \in G\}. \quad (1.98)$$

Nous avons en particulier que $b \in G_0$ parce que $(0, b) \in G$.

- (3) **G contient un (n, x) pour tout n** Nous prouvons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x \in E$ tel que $(n, x) \in G$. Nous faisons ça avec la proposition 1.119 en posant

$$\begin{aligned} P: \mathbb{N} &\rightarrow \{0, 1\} \\ n &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } G_n \neq \emptyset \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.99)$$

Puisque $(0, b) \in G$ nous avons $P(0) = 1$. Supposons que $P(k) = 1$ et montrons que $P(s(k)) = 1$. Comme $P(k) = 1$, il existe $x \in E$ tel que $(k, x) \in G$. De ce fait, $(s(k), g(x)) \in G$, ce qui donne $G_{s(k)} \neq \emptyset$ et $P(s(k)) = 1$.

- (4) **G_n est un singleton** Nous avons vu que G_n n'est jamais vide. Nous allons montrer que G_n est un singleton pour tout n . Pour cela nous posons

$$\begin{aligned} P: \mathbb{N} &\rightarrow \{0, 1\} \\ n &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } G_n \text{ est un singleton} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.100)$$

Nous prouvons par récurrence que $P(n) = 1$ pour tout n .

- (4a) **P(0) = 1** Nous commençons par prouver que $P(0) = 1$. Nous savons que $(0, b) \in G_0$. Supposons $a \neq b$ tel que $(0, a) \in G_0$. Alors en posant $G' = G \setminus \{(0, a)\}$ nous avons $G' \in \mathcal{A}$. En effet $(0, b) \in G'$ parce que $(0, b) \in G$ et $(0, b) \neq (0, a)$. De plus si $(n, x) \in G'$, alors $(s(n), g(x)) \in G$. Mais comme $s(n) \neq 0$ nous avons $(s(n), g(x)) \neq (0, a)$ et donc $(s(n), g(x)) \in G'$.

L'ensemble G' serait un élément de $\mathcal{A}$ strictement inclus dans G . Impossible. Donc G_0 est un singleton.

- (4b) **Récurrence** Supposons que $P(k) = 1$, c'est-à-dire que G_k est un singleton. Soit e l'unique élément de $G_k : (k, e) \in G$. Nous avons alors aussi que $(s(k), g(e)) \in G$. Nous devons prouver que si $y \in G_{s(k)}$, alors $y = g(e)$.

Supposons donc $y \neq g(e)$ soit dans $G_{s(k)}$. Nous posons

$$G' = G \setminus \{(s(k), y)\}. \quad (1.101)$$

Nous prouvons que $G' \in \mathcal{A}$. D'abord $(0, b) \in G'$ parce que $s(k) \neq 0$. Soit ensuite $(m, z) \in G'$. Si $m = k$, alors $z = e$ (parce que par hypothèse G_k est un singleton) et nous savons que $(s(m), g(e)) \in G'$. Si par contre $m \neq k$, comme s est injective, nous avons aussi $s(m) \neq s(k)$. Donc $(s(m), g(z)) \neq (s(k), y)$ et $(s(m), g(z)) \in G'$. Donc $G' \in \mathcal{A}$ et est strictement plus petit que G . Contradiction.

Nous concluons que $G_{s(k)}$ est un singleton, c'est-à-dire que $P(s(k)) = 1$.

- (4c) **Conclusion** Nous avons prouvé que G_n est un singleton pour tout n .

- (5) **Et enfin**

Nous définissons $f(n)$ comme étant l'unique élément de G_n . Puisque $(0, b) \in G$ nous avons $G_0 = \{b\}$ et donc $g(0) = b$.

Par définition de f , nous avons $(n, f(n)) \in G$. Parce que $G \in \mathcal{A}$ nous avons alors

$$(s(n), g(f(n))) \in G. \quad (1.102)$$

Autrement dit, $G_{s(n)} = \{g(f(n))\}$. Cela montre que

$$f(s(n)) = g(f(n)), \quad (1.103)$$

et donc que f vérifie les propriétés demandées. □

NORMooLNXMooWibIPf

1.121 ([1]).

Le théorème 1.120 nous permet de définir une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence en posant par exemple

$$\begin{cases} x_1 = b \\ x_{n+1} = f(x_n). \end{cases} \quad (1.104a)$$

$$(1.104b)$$

Parfois nous pouvons avoir envie de définir une suite par récurrence de telle sorte que chaque nouveau terme dépende de tous les précédents :

$$\begin{cases} x_1 = b \\ x_{n+1} = g(x_1, \dots, x_{n-1}). \end{cases} \quad (1.105a)$$

$$(1.105b)$$

Pour ce faire, il faut un peu adapter.

Posons $E' = E \cup (E \times E) \cup (E \times E \times E) \cup \dots$. Nous supposons avoir une application $g: E' \rightarrow E'$ qui ne prend ses valeurs que dans $E: g(E') \subset E$. De plus nous considérons l'application

$$\begin{aligned} a: \mathbb{N} &\rightarrow E' \\ n &\mapsto (f(0), \dots, f(n)). \end{aligned} \quad (1.106)$$

Le théorème 1.120 appliqué à $g \circ a$ nous donne l'existence et l'unicité d'une application $f: \mathbb{N} \rightarrow E'$ telle que

$$\begin{cases} f(0) = b \\ f(n+1) = g(f(0), \dots, f(n)). \end{cases} \quad (1.107a)$$

$$(1.107b)$$

CORooVNHKooRkKtXf

Corolaire 1.122 ([15]).

Soient deux ensembles X, Y , une application $\alpha: X \rightarrow Y$ et une application $\beta: Y \rightarrow Y$. Alors il existe une unique application $H: X \times \mathbb{N} \rightarrow Y$ telle que

- (1) $H(x, 0) = \alpha(x)$ pour tout élément $x \in X$;
- (2) $H(x, n+1) = \beta(H(x, n))$ pour tout élément $x \in X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Pour faire le lien avec les notations du théorème 1.120, nous notons $E = \text{Fun}(X, Y)$, $b = \alpha \in E$ et

$$\begin{aligned} g: E &\rightarrow E \\ s &\mapsto \beta \circ s. \end{aligned} \quad (1.108)$$

Le théorème 1.120 donne alors l'existence d'une application $f: \mathbb{N} \rightarrow E$ telle que

- (1) $f(0) = b$
- (2) $f(n+1) = g(f(n))$.

Nous définissons alors

$$\begin{aligned} H: X \times \mathbb{N} &\rightarrow Y \\ (x, n) &\mapsto f(n)x, \end{aligned} \quad (1.109)$$

et nous vérifions qu'elle satisfait aux exigences.

- (1) D'abord nous avons

$$H(x, 0) = f(0)x = b(x) = \alpha(x). \quad (1.110)$$

(2) Ensuite, pour $x \in X$ et $n \in \mathbb{N}$ nous avons :

$$H(x, n+1) = f(x+1)x \quad (1.111a)$$

$$= g(f(n))x \quad (1.111b)$$

$$= g(f(n))x \quad (1.111c)$$

$$= (\beta \circ f(n))x \quad (1.111d)$$

$$= \beta(f(n))x \quad (1.111e)$$

$$= \beta(H(x, n)). \quad (1.111f)$$

Et voilà. □

1.5.3 Addition sur les naturels

Proposition-Définition 1.123 ([34, 1]).

Il existe une unique fonction $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ vérifiant

$$(1) \ f(a, 0) = a \text{ pour tout } a \in \mathbb{N}$$

$$(2) \ f(a, s(b)) = s(f(a, b)) \text{ pour tout } a, b \in \mathbb{N}.$$

Pour $a, b \in \mathbb{N}$ nous notons $f(a, b) = a + b$.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{N}$. Le théorème 1.120 dit qu'il existe une unique application $f_a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} f_a(0) = a \\ f_a(s(x)) = s(f_a(x)) \end{cases}$$

$$f_a(0) = a \quad (1.112a)$$

$$f_a(s(x)) = s(f_a(x)) \quad (1.112b)$$

Montrons qu'une telle application vérifie $f_0(a) = a$ pour tout $a \in \mathbb{N}$. Pour cela nous utilisons la récurrence de la proposition 1.119 en posant

$$P: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$$

$$n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } f_0(n) = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.113)$$

Nous avons $f_0(0) = 0$ en posant $a = 0$ dans (1.112a). Supposons ensuite que $P(a) = 1$. Nous avons

$$f_0(s(a)) = s(f_0(a)) \quad (1.114a)$$

$$= s(a) \quad \text{pcq } P(a) = 1. \quad (1.114b)$$

Donc $P(s(a)) = 1$. Nous en déduisons que $P(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{N}$ et donc que

$$f_0(x) = x \quad (1.115)$$

pour tout x .

Avec ça, nous prouvons ce qu'il faut.

(1) **Existence** Nous posons $f(a, b) = f_a(b)$, et nous prouvons les deux conditions.

(1a) **Condition (1)** Nous avons $f(a, 0) = f_a(0) = a$ par (1.115).

(1b) **Condition (2)** Nous avons :

$$f(a, s(b)) = f_a(s(b)) = s(f_a(b)) = s(f(a, b)). \quad (1.116)$$

(2) **Unicité** Soient f et g deux applications vérifiant les conditions. Nous posons

$$\begin{aligned} f_a: \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ x &\mapsto f(a, x) \end{aligned} \quad (1.117)$$

et $g_a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ de la même manière. Nous prouvons que f_a et g_a vérifient tous deux les conditions (1.112). Cela donnera $f_a = g_a$ et donc $f = g$.

D'abord

$$f_a(s(b)) = f(a, s(b)) = s(f(a, b)) = s(f_a(b)). \quad (1.118)$$

Ensuite nous prouvons par récurrence que $f_a(0) = a$ pour tout $a \in \mathbb{N}$. D'abord $f(0, 0) = 0$, ensuite

$$f(0, s(a)) = s(f(0, a)) = s(a). \quad (1.119)$$

De même g_a vérifie les conditions.

□

LEMooMJMTtooOtUuJT

Lemme 1.124 ([34]).

Pour tout $a \in \mathbb{N}$ nous avons $s(a) = a + 1$.

Démonstration. Nous avons :

$$\begin{aligned} s(a) &= s(a + 0) && \text{SUBEQooMNBLoOTOruhE} && (1.120a) \\ &= a + s(0) && \text{SUBEQooAGUSooGiiYGi} && (1.120b) \\ &= a + 1. && \text{SUBEQooUZQDooWtNBHQ} && (1.120c) \end{aligned}$$

Justifications.

- (1) Pour (1.120a) c'est dans la définition 1.123(1) de la somme.
- (2) Pour (1.120b), c'est dans la définition 1.123(2) de la somme.
- (3) Pour (1.120c). Le symbole « 1 » désigne l'élément $s(0)$ dans $\mathbb{N}$.

□

PROPooTLTSooGNMTmV

Proposition 1.125 ([34]).

En ce qui concerne la somme dans $\mathbb{N}$.

- (1) La somme est associative et commutative.
- (2) L'élément 0 est neutre.
- (3) Tous les éléments de $\mathbb{N}$ sont réguliers⁴⁵ par rapport à l'addition.

ITEMooIFFPooXfttG

ITEMooSGRVooPAVfYK

ITEMooNUTHooJWWzGv

Démonstration. En plusieurs parties.

- (1) **Associative** Nous devons prouver que $(a + b) + c = a + (b + c)$ pour tout $a, b, c \in \mathbb{N}$. Pour ce faire, nous fixons $a, b \in \mathbb{N}$ et nous prouvons l'égalité demandée par récurrence sur c . Pour $c = 0$, nous avons $(a + b) + c = a + b$ et $a + (b + c) = a + b$. Donc nous sommes d'accord⁴⁶. Nous vérifions avec $s(c)$:

$$\begin{aligned} (a + b) + s(c) &= s((a + b) + c) && (1.121a) \\ &= s(a + (b + c)) && \text{SUBEQooDDUBooAjuwZq} && (1.121b) \\ &= a + s(b + c) && (1.121c) \\ &= a + (b + s(c)). && (1.121d) \end{aligned}$$

Justifications.

- Pour (1.121b). C'est l'hypothèse de récurrence. À ce stade, je vous conseille d'être capable de rédiger complètement la récurrence et l'appel au théorème 1.120.

45. Élément régulier pour une opération, définition 1.62.

46. Notez que nous n'avons pas utilisé le fait que 0 était neutre des deux côtés – chose que nous n'avons pas encore démontré. Nous avons seulement utilisé $a + 0 = a$, qui est dans la définition de la somme.

- (2) **Neutre** La définition de l'addition contient déjà $a + 0 = a$. Nous prouvons par récurrence que $0 + a = a$ pour tout $a \in \mathbb{N}$.

Pour $a = 0$, l'égalité demandé est correcte : $0 + 0 = 0$ parce que pour tout x dans $\mathbb{N}$, $0 + x = x$.
Pour $s(a)$ nous avons

$$0 + s(a) = s(0 + a) = s(a). \quad (1.122)$$

La dernière égalité est l'hypothèse de récurrence.

Nous posons

$$A = \{a \in \mathbb{N} \text{ tel que } 0 + a = a\}. \quad (1.123)$$

Nous avons prouvé que $0 \in A$ et que $s(A) \subset A$. Le théorème 1.120 nous assure alors que $A = \mathbb{N}$.

- (3) **Commutativité** Nous fixons $a \in \mathbb{N}$ et nous prouvons par récurrence sur b que $a + b = b + a$ pour tout $b \in \mathbb{N}$. Cela va être décomposé en plusieurs étapes.
- (4) $a + 0 = 0 + a$ Pour $b = 0$ c'est correct, car $b + 0 = 0 + b = b$ parce que 0 est neutre.
- (5) $a + 1 = 1 + a$ Nous démontrons par récurrence sur a que $a + 1 = 1 + a$. Avec $a = 0$ c'est déjà fait. Pour les autres,

$$s(a) + 1 = (a + 1) + 1 \quad \text{lemme 1.124} \quad (1.124a)$$

$$= (1 + a) + 1 \quad \text{hypothèse récurrence} \quad (1.124b)$$

$$= 1 + (a + 1) \quad \text{associativité} \quad (1.124c)$$

$$= 1 + s(a). \quad (1.124d)$$

- (6) $a + b = b + a$ Nous y voici. Nous fixons a et nous prouvons par récurrence que $a + b = b + a$. Pour $b = 0$ c'est déjà fait. Pour les autres,

$$a + s(b) = a + (b + 1) \quad (1.125a)$$

$$= (a + b) + 1 \quad (1.125b)$$

$$= (b + a) + 1 \quad \text{hypothèse récurrence} \quad (1.125c)$$

$$= b + (a + 1) \quad (1.125d)$$

$$= b + (1 + a) \quad \text{commutativité avec 1} \quad (1.125e)$$

$$= (b + 1) + a \quad \text{associativité} \quad (1.125f)$$

$$= s(b) + a. \quad (1.125g)$$

Récurrence terminée.

- (7) **Régularité** Nous devons prouver que, pour tout $a, x, y \in \mathbb{N}$, si $a + x = a + y$ alors $x = y$. Nous allons procéder par récurrence en posant

$$A = \{a \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall x, y \in \mathbb{N}, a + x = a + y \Rightarrow x = y\}. \quad (1.126)$$

Puisque $0 + x = x$ et $0 + y = y$, nous avons $0 \in A$. Supposons à présent que $a \in A$ et montrons que $s(a) \in A$. Soient $x, y \in \mathbb{N}$ tels que $a + x = a + y$. Nous avons :

$$s(a) + x = s(a) + y \quad (1.127a)$$

$$\Rightarrow s(a + x) = s(a + y) \quad (1.127b)$$

$$\Rightarrow a + x = a + y \quad (1.127c)$$

$$\Rightarrow x = y \quad (1.127d)$$

Justifications.

- Pour (1.127b). En utilisant la définition de l'addition et la commutativité, nous avons $s(a) + x = s(a + x)$.
- Pour (1.127c). Parce que s est injective; c'est dans la définition 1.114 d'un triplet naturel.

— Pour (1.127d). Parce que $a \in A$.

Nous avons prouvé que $s(A) \subset A$, et donc que $A = \mathbb{N}$.

□

LEMooCOMSooEWrumL

Lemme 1.126.

Nous avons $0 \neq 1$.

Démonstration. Par définition $1 = s(0)$. Comme s est à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, nous ne pouvons pas avoir $s(0) = 0$.

□

LEMooQBHFooCuCusQ

Lemme 1.127 ([1]).

Si $a + b = 0$, alors $a = b = 0$.

Démonstration. Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a + b = 0$, et supposons que $b \neq 0$. Par la définition 1.114(2), nous avons $b = s(c)$ pour un certain $c \in \mathbb{N}$.

Dans ce cas nous avons $a + b = a + s(c) = s(a + c) \neq 0$ parce que l'image de s ne contient pas 0. Hélas, par hypothèse nous avons $a + b = 0$. Nous avons obtenu une contradiction, et nous déduisons que $b = 0$.

Maintenant que nous savons que $b = 0$, il reste $0 = a + b = a + 0 = a$.

□

1.5.4 Ordre sur les naturels

DISRBooXZBooFdmj6s

Définition 1.128 ([34]).

Pour $a, b \in \mathbb{N}$, nous notons $a \leq b$ si il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que $a + x = b$.

Nous notons également $a < b$ si $a \leq b$ et $a \neq b$.

LEMooWMYPooLTMyWb

Lemme 1.129.

Nous avons $a \leq s(a)$ pour tout $a \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Cela est une conséquence du lemme 1.124 : $s(a) = a + 1$.

□

PROPooVXBBBooZcghrA

Proposition 1.130.

La relation $\leq$ est une relation d'ordre compatible avec l'addition.

Démonstration. Plusieurs choses à vérifier.

- (1) **Réflexive** Nous avons $a \leq a$ parce que $a + 0 = a$.
- (2) **Antisymétrique** Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a \leq b$ et $b \leq a$. Il existe $x, y \in \mathbb{N}$ tels que

$$b = a + x \quad (1.128a)$$

$$a = b + y. \quad (1.128b)$$

En substituant la seconde équation dans la première, $b = (b + y) + x$ que nous récrivons, en utilisant l'associativité⁴⁷,

$$0 + b = b + (x + y). \quad (1.129)$$

En utilisant la régularité, $0 = x + y$ et donc $x = y = 0$ par le lemme 1.127. Cela donne alors $a = b$.

- (3) **Transitive** Si $a \leq b$ et $b \leq c$, nous avons $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $b = a + n$ et $c = b + p$. Donc

$$c = (a + n) + p = a + (n + p), \quad (1.130)$$

ce qui signifie que $a \leq c$. Notez l'utilisation de l'associativité de la somme, démontrée en la proposition 1.125(1).

47. Proposition 1.125(1).

- (4) **Compatibilité** Soient $a, b, n \in \mathbb{N}$ tels que $a \leq b$. Nous devons montrer que $a + n \leq b + n$. Puisque $a \leq b$, il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que $b = a + x$. Par conséquent,

$$b + n = a + x + n = (a + n) + x, \quad (1.131)$$

qui signifie bien que $a + n \leq b + n$.

□

LEMooPVRQooXPMKTt

Lemme 1.131.

À propos d'ordre et de stricte inégalité.

ITEMooGWWFooYGPCZw

- (1) Si $x \leq a$ et $b \neq 0$, alors $x < a + b$.

ITEMooRWGWooAfkrrr

- (2) Si $x \leq a$, alors $x < s(a)$.

ITEMooWCOIooMWrCag

- (3) Si $x < a$, alors $s(x) \leq a$.

Démonstration. En plusieurs parties.

- (1) **Pour (1)** Si $x \leq a$, il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $x + d = a$. Nous avons alors aussi

$$x + d + b = a + b, \quad (1.132)$$

ce qui signifie que $x \leq a + b$. Mais si x était égal à $a + b$, nous aurions $d + b = 0$, ce qui impliquerait⁴⁸ $d = b = 0$, alors que l'hypothèse stipule que $b \neq 0$. Donc $x \neq a + b$.

- (2) **Pour (2)** Il s'agit seulement d'utiliser le point (1) avec $b = 1$ et le fait que $s(a) = a + 1$ par le lemme 1.124.

- (3) **Pour (3)** Par hypothèse, il existe $b \neq 0$ tel que $x + b = a$. Puisque $b \neq 0$, il existe $c \in \mathbb{N}$ tel que $b = s(c)$ et donc, tel que

$$x + s(c) = a. \quad (1.133)$$

En utilisant le fait que $s(c) = c + 1$ ainsi que l'associativité et la commutativité de l'addition (proposition 1.125(1)) nous avons

$$a = x + s(c) = s(x) + c, \quad (1.134)$$

ce qui prouve que $s(x) \leq a$.

□

LEMooCSIXooHeuWEd

Lemme 1.132.

L'élément 0 est l'unique plus petit élément de $\mathbb{N}$.

Démonstration. Puisque 0 est neutre pour l'addition⁴⁹, nous avons $a + 0 = a$ pour tout $a \in \mathbb{N}$ et donc $0 \leq a$ pour tout a . Cela veut dire que 0 est plus petit que tout élément de $\mathbb{N}$.

En ce qui concerne l'unicité, soit $z \in \mathbb{N}$ tel que $z \leq a$ pour tout $a \in \mathbb{N}$. Si $z \neq 0$, il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que $z = s(x)$. Nous avons donc $z \geq x$ en même temps que $x \leq z$. Cela implique $z = x$ (parce qu'une relation d'ordre est symétrique) et donc $z = z + 1$. En utilisant la régularité de z pour l'addition nous en déduisons que $0 = 1$, ce qui est impossible par le lemme 1.126. □

LEMooJRZKooOMhOkH

Lemme 1.133.

Si $a \leq b$ et $b \leq a$, alors $a = b$.

Démonstration. L'inégalité $a \leq b$ dit qu'il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que $a + x = b$. En mettant cela dans l'inégalité $b \leq a$ nous trouvons $a + x \leq a$ qui donne, via la proposition 1.130 : $x \leq 0$. Nous en déduisons que $x = 0$ parce que zéro est l'unique minimum de $\mathbb{N}$ par le lemme 1.132. □

PROPooGCCRooFBYrlo

Proposition 1.134.

Le couple $(\mathbb{N}, \leq)$ est totalement ordonné⁵⁰.

48. Par le lemme 1.127.

49. Proposition 1.125(2).

50. Définition 1.24.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{N}$. Nous devons prouver que pour tout $x \in \mathbb{N}$ nous avons $x \leq a$ ou $a \leq x$ (non exclusifs). Nous posons

$$A = \{x \in \mathbb{N} \text{ tel que } x \leq a\} \quad (1.135a)$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \text{ tel que } a \leq x\}, \quad (1.135b)$$

et nous prouvons que $A \cup B = \mathbb{N}$ en montrant que $0 \in A \cup B$ et que $s(A \cup B) \subset A \cup B$.

Nous avons $0 \in A \subset A \cup B$ par le lemme 1.132.

Pour étudier $s(A \cup B)$, nous considérons $x \in A \cup B$ et nous subdivisons en deux cas selon que $x \in A$ ou $x \in B$.

(1) **Si $x \in B$** Si $x \in B$, alors $a \leq x \leq s(x)$ parce que $x \leq s(x)$ par le lemme 1.129. Donc $s(x) \in B \subset A \cup B$.

(2) **Si $x \in A$** Si $x \in A$, il y a deux possibilités : $x = a$ et $x \neq a$. Si $x = a$, alors $a \leq s(x)$ et donc $s(x) \in A \subset A \cup B$.

Si $x \neq a$, alors le lemme 1.131(3) nous indique que $s(x) \leq a$ et donc $s(x) \in A \subset A \cup B$.

Nous avons donc prouvé que $s(A \cup B) \subset A \cup B$, et donc que $A \cup B = \mathbb{N}$. $\square$

PROPooMZOWooHmsXzI

Proposition 1.135 ([34, 1]).

L'ensemble ordonné $(\mathbb{N}, \leq)$ vérifie les propriétés suivantes.

ITEMooJLAHooDKukfH

(1) L'élément 0 est l'unique minimum de $\mathbb{N}$.

ITEMooYAJIooEFmOpB

(2) Toute partie non vide a un unique plus petit élément.

ITEMooSRGOooNYJJHY

(3) L'ensemble $\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément.

ITEMooKIHZooDRTCdx

(4) Toute partie non vide majorée a un unique plus grand élément.

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** C'est le lemme 1.132.

(2) **Pour (2)** Soit une partie A non vide dans $\mathbb{N}$. Si $0 \in A$, nous avons fini.

(2a) **L'ensemble B** Nous supposons donc que A ne contient pas zéro et nous définissons

$$B = \{n \in \mathbb{N} \setminus A \text{ tel que } n \leq a, \forall a \in A\}. \quad (1.136)$$

(2b) **Un élément particulier dans B** L'ensemble B vérifie :

— $0 \in B$

— $B \neq \mathbb{N}$ parce que A est non vide.

La contraposée de la condition (3) de la définition 1.114 d'un triplet naturel implique que $s(B) \not\subset B$. Autrement dit, il existe $b \in B$ tel que $s(b) \notin B$.

(2c) **Deux fonctions sur A** Puisque $b \in B$, nous avons une application $c: A \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $b + c(a) = a$. Nous avons $c(a) \neq 0$ parce que $c(a) = 0$ signifierait $b = a$, ce qui est impossible parce que $a \in A$ et $b \in B$.

Comme pour tout $a \in A$, l'élément $c(a)$ est non nul, il existe une fonction $d: A \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $c(a) = d(a) + 1$.

(2d) **$s(b) \in A$** Supposons que $s(b) \notin A$. Alors il existe $a \in A$ tel que $s(b) \leq a$ est faux. Puisque l'ordre est total (proposition 1.134), nous avons

$$a \leq s(b). \quad (1.137)$$

EQooYQSFooPSPJMt

Comme $b \in B$ nous avons aussi

$$b \leq a. \quad (1.138)$$

EQooIPAWooDBSJFa

Et enfin nous avons

$$b \neq a \quad (1.139)$$

EQooWFHooGDSBFD

parce que $a \in A$ et $b \in B$.

Les conditions (1.138) et (1.139) se résument en $b < a$. Le lemme 1.131(3) nous indique alors que $s(b) \leq a$. Cela mis à côté de (1.137) conclut que $a = s(b)$, et donc que $s(b)$ est dans A . Contradiction. Nous en concluons que $s(b) \in A$.

- (2e) $s(b)$ est un minimum de A En utilisant la commutativité et l'associativité de la somme nous avons, pour tout $a \in A$:

$$a = b + c(a) = b + (d(a) + 1) = (b + 1) + d(a) = s(b) + d(a). \quad (1.140)$$

Donc $s(b) \leq a$ pour tout $a \in A$. Mais comme $s(b) \in A$, l'élément $s(b)$ est bien un minimum de A .

- (2f) **Unicité** Si a et a' sont des minimums de A , alors $a \leq a'$ et $a' \leq a$. Nous en déduisons que $a = a'$.
- (3) **Pour (3)** Si $M \in \mathbb{N}$ majore tous les éléments de $\mathbb{N}$, alors en particulier $M \geq s(M)$. Mais le lemme 1.129 nous indique que $M \leq s(M)$. Nous avons donc $s(M) = M$, c'est-à-dire $M = M + 1$. En utilisant la régularité de M ⁵¹, nous trouvons $0 = 1$, ce qui est impossible par le lemme 1.126.
- (4) **Pour (4)** Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$.
- (4a) **L'ensemble B** Nous posons

$$B = \{n \in \mathbb{N} \setminus A \text{ tel que } a \leq n, \forall a \in A\}. \quad (1.141)$$

- (4b) **B est non vide** Soit un majorant M de A : pour tout $a \in A$ nous avons $a \leq M$. Nous avons $s(M) \notin A$, parce que si $s(M)$ était dans A , ce serait un élément de A strictement plus grand que tout $a \in A$. Donc B est non vide parce qu'il contient $s(M)$.
- (5) **Minimum** Puisque B est non vide, il possède un plus petit élément que nous notons b . Nous savons que $b \neq 0$ parce que sinon A serait vide. Il existe donc $c \in \mathbb{N}$ tel que $b = s(c)$.
- (6) $a \leq c$ **pour tout** $a \in A$ Comme $s(c) \in B$ nous avons $a < s(c)$ pour tout $a \in A$. Donc, par le lemme 1.131(3) nous avons $s(a) \leq s(c)$, c'est-à-dire $a + 1 \leq c + 1$. Par régularité nous avons $a \leq c$.
Nous avons prouvé que $a \leq c$ pour tout $a \in A$.
- (7) $c \in A$ Si c n'est pas dans A , alors il est dans B et il contredit la minimalité de b . Donc c est dans A .
- (8) **Conclusion** L'élément c est dans A tout en étant plus petit que tout élément de A .
- (9) **Unicité** Si x est un élément minium de A , alors nous avons $x \leq c$ parce que x est minimum et $c \leq x$ parce que c est minimum, et donc $x = c$.

□

PROBooUCQFooTugfDI

⚠ Avertissement/question au lecteur !! 1.136

Je ne suis pas certain qu'il y ait moyen de prouver le lemme 1.208 sans d'abord définir les naturels. Une raison est que la véracité de ce lemme est à peu près équivalente au théorème 1.120 qui donne l'existence de $\mathbb{N}$.

J'ai essayé un certain nombre de choses avec le lemme de Zorn sans succès.

Si vous avez une idée, n'hésitez pas à me la partager, ou à l'écrire ici :

<https://math.stackexchange.com/questions/5019157/every-non-empty-dedekind-finite-totally-ordered-set-has-a-maximum-using-zorns>

Dans la réponse de Asaf Karagila, il y a seulement le fait que $f: D \rightarrow D$ que je ne comprends pas. C'est d'ailleurs ma dernière question dans les commentaires.

LEMooYMRJooYIAhBb

Lemme 1.137 ([1]).

Quelques affirmations sur l'ordre dans $\mathbb{N}$.

ITEMooTLOIooTWNtod

- (1) Il n'existe pas de $n \in \mathbb{N}$ tel que $n < 0$.

ITEMooPJKQooGfLCUM

- (2) Si $a, b \in \mathbb{N}$ vérifient $a > b$, alors il n'existe pas de x dans $\mathbb{N}$ tel que $a + x = b$.

51. Dit plus simplement : en simplifiant par M .

Démonstration. En deux parties.

- (1) **Pour (1)** Nous savons par la proposition 1.135(1) que 0 est l'unique minimum de $\mathbb{N}$. Nous avons donc forcément $0 \leq n$. Si n vérifie de plus $n \leq 0$ alors nous avons $n = 0$ par symétrie de la relation d'ordre $\leq$. Il n'est donc pas possible d'avoir $n \neq 0$.
- (2) **Pour (2)** Si $b \leq a$ il existe $c \in \mathbb{N}$ tel que $b + c = a$. Et comme $a \neq b$, c n'est pas nul et il existe $y \in \mathbb{N}$ tel que $c = s(y)$. Bref, nous avons

$$b + s(y) = a. \quad (1.142)$$

Si de plus il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que $a + x = b$ nous aurions

$$a + x + s(y) = a. \quad (1.143)$$

Comme a est régulier pour l'addition⁵², nous avons

$$x + s(y) = 0, \quad (1.144)$$

ce qui signifie, par le lemme 1.127 que $x = s(y) = 0$. Puisque s prend ses valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, cela est impossible.

□

DEFooKBUFooLvMHrf

Définition 1.138.

Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a \leq b$. Nous notons par $\{a, \dots, b\}$ l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{N} \text{ tel que } a \leq x \leq b\}. \quad (1.145)$$

PROPooFYMJooWihvhk

Proposition 1.139.

Toute application $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante est injective.

Démonstration. Soit une application strictement croissante $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $f(a) = f(b)$. Puisque l'ordre est total⁵³, nous supposons que $a \leq b$. Si $a = b$ nous avons terminé. Nous supposons donc que $a \neq b$, c'est-à-dire que $a < b$. Par stricte croissance nous avons alors $f(a) < f(b)$ qui signifie $f(a) \leq f(b)$ et $f(a) \neq f(b)$. Contradiction. Il n'existe donc pas de $a \neq b$ tels que $f(a) = f(b)$. L'application f est donc injective.

□

LEMooFKLPooPrmeUU

Lemme 1.140 ([1]).

Si S n'est pas majoré dans $\mathbb{N}$, alors il existe une bijection $\mathbb{N} \rightarrow S$.

Démonstration. Nous considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} g: S &\rightarrow S \\ n &\mapsto \min\{x \in S \text{ tel que } x > n\}. \end{aligned} \quad (1.146)$$

Cette application est bien définie parce que tout partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément⁵⁴. Maintenant nous définissons $f: \mathbb{N} \rightarrow S$ par

$$\begin{cases} f(0) = \min(S) \\ f(n+1) = g(f(n)). \end{cases} \quad (1.147a)$$

$$(1.147b)$$

C'est le théorème 1.120 qui nous permet de le faire. Nous montrons que f est bijective.

- (1) **Injective** Nous avons

$$f(n+1) \in \{x \in S \text{ tel que } x > f(n)\}. \quad (1.148)$$

Donc f est strictement croissante. Elle est donc injective.

52. Proposition 1.125(3).

53. Proposition 1.134.

54. Proposition 1.135(2).

(2) **Surjective** Soit $a \in S$. Nous allons voir que a est dans l'image de f . Pour cela nous posons

$$A = \{x \in \mathbb{N} \text{ tel que } f(x) < a\}. \quad (1.149)$$

Cet ensemble est majoré par a . En effet si $x \in A$ nous avons $x \leq f(x) < a$. La partie A de $\mathbb{N}$ possède un maximum. Nous notons $M = \max(A)$. Ce M a deux propriétés intéressantes.

(2a) **D'abord** Puisque $M \in A$, nous avons $f(M) < a$. Une autre façon de dire cela est de dire que

$$a \in \{x \in S \text{ tel que } x > f(M)\}. \quad (1.150)$$

Or $f(M+1) = \min\{x \in S \text{ tel que } x > f(M)\}$. Donc $f(M+1) \leq a$.

(2b) **Ensuite** Puisque M est le maximum de A , $M+1$ majore A , c'est-à-dire que $f(M+1) \geq a$.

(2c) **Les deux ensemble** Nous avons prouvé que $f(M+1) \leq a$ et $f(M+1) \geq a$. Nous en déduisons, par le lemme 1.133, que $f(M+1) = a$.

□

NORMooQXASooMXqhjI

1.141.

Durant la preuve du lemme 1.140, nous n'avons pas été loin de prouver que

$$(\min(S), S, g) \quad (1.151)$$

est un triplet naturel.

Toute partie non bornée de $\mathbb{N}$ donne lieu à un triplet naturel.

1.5.5 Multiplication dans les naturels

SUBodMEH6ipAZaYooVjNmehs

Définition 1.142 ([1]).

Soit un ensemble muni d'une loi de composition interne $(A, +)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in A$. Nous définissons $n \times A$ par

$$\begin{cases} 0 \times a = 0 \\ (n+1) \times a = n \times a + a. \end{cases} \quad (1.152a)$$

$$(1.152b)$$

DEFooLCWLooYrToFv

Définition 1.143.

Un ensemble totalement ordonné muni d'une loi de composition interne $(A, +, \leq)$ est **archimédien** si pour tout $x, y \in A$ avec $x > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \times x \geq y$ (voir la définition 1.142).

PROPooBBQPooRgPOjf

Proposition-Définition 1.144.

Il existe une unique fonction $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que

ITEMooNTUooDAUVsV

(1) $f(a, 0) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{N}$

ITEMooPPZZooQqabwn

(2) $f(a, s(b)) = f(a, b) + a$ pour tout $a, b \in \mathbb{N}$.

Cette fonction est la **multiplication** et nous notons $f(a, b) = a \times b$, voire ab quand il n'y a pas d'ambiguïté. Le nombre $a \times b$ est nommé le **produit** de a par b .

Démonstration. En deux parties.

(1) **Fonctions définies par récurrence** Soit $a \in \mathbb{N}$. Par le théorème 1.120, il existe une unique application $f_a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que l

EQSooWVCTooNTVjKU

$$\begin{cases} f_a(0) = 0 \\ f_a(s(b)) = f_a(b) + a \end{cases} \quad (1.153a)$$

$$(1.153b)$$

(2) **Existence** Nous considérons, pour chaque $a \in \mathbb{N}$ la fonction f_a définie par les conditions (1.153). En posant $f(a, b) = f_a(b)$, nous avons une application qui vérifie toutes les conditions.

- (3) **Unicité** Soient des applications f et g vérifiant les propriétés demandées. Soit $a \in \mathbb{N}$. Nous pouvons définir $f_a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et $g_a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ par $f_a(n) = f(a, n)$ et $g_a(n) = g(a, n)$.

Les applications f_a et g_a vérifient toutes deux les conditions (1.153), et sont donc égales : $f_a = g_a$ pour tout a . Donc $f = g$.

□

NORMooPrioriteOperations

1.145.

Nous supposons que la lectrice connaît déjà la priorité des opérations. Elle saura donc interpréter des expressions comme $a \times b + c$ comme voulant dire $(a \times b) + c$ sans que nous ayons à ajouter des parenthèses.

PROPooGHDOooFYRmon

Proposition 1.146 ([34, 1]).

La multiplication dans $\mathbb{N}$ possède les propriétés suivantes.

ITEMooHFWRooDCEpjj

(1) $n \times 1 = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ITEMooRSYMooSURsl

(2) $1 \times n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ITEMooWJPOooRUyJwQ

(3) La multiplication est commutative.

ITEMooNBYKooXnGRrf

(4) $0 \times n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

ITEMooLJQBooVpUxUv

(5) L'élément 1 est neutre pour la multiplication.

ITEMooDYLiooETIBEL

(6) La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

ITEMooQBFSooWGDQYX

(7) La multiplication est associative.

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** Nous avons $n \times 1 = n \times s(0) = (n \times 0) + n = 0 + n = n$. Donc $n \times 1 = n$.

(2) **Pour (2)** Nous le faisons par récurrence. Par définition c'est vrai pour $n = 0$. En ce qui concerne la récurrence, nous supposons que $1 \times n = n$, et nous prouvons que $1 \times s(n) = s(n)$:

$$1 \times s(n) = (1 \times n) + 1 = n + 1 = s(n). \quad (1.154)$$

(3) **Pour (3)** Soit $a \in \mathbb{N}$. Nous prouvons par récurrence sur $b \in \mathbb{N}$ que $a \times b = b \times a$. Pour $b = 0$ c'est bon. Pour la récurrence, nous supposons que $a \times b = b \times a$ et nous prouvons que $a \times s(b) = s(b) \times a$:

$$a \times s(b) = a \times b + a \quad (1.155a)$$

$$= b \times a + a \quad \text{récurrence} \quad (1.155b)$$

$$= (b \times a) + (1 \times a) \quad \text{par (2)} \quad (1.155c)$$

$$= (b + 1) \times a \quad \text{distributivité} \quad (1.155d)$$

$$= s(b) \times a. \quad (1.155e)$$

(4) **Pour (4)** C'est vrai pour $n = 0$ par la définition 1.144(1). En ce qui concerne $s(n)$, nous avons

$$0 \times s(n) = (0 \times n) + 0 = 0. \quad (1.156)$$

(5) **Pour (5)** C'est la combinaison de (1) et (2).

(6) **Pour (6)** Soient $a, b \in \mathbb{N}$. Nous prouvons par récurrence sur $c \in \mathbb{N}$ que⁵⁵

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c. \quad (1.157)$$

55. Nous n'écrivons pas toutes les parenthèses parce que les règles de priorité des opérations sont supposées connues. J'invite cependant la lectrice à remarquer qu'une formalisation de ces règles n'est probablement pas facile. Pour que tout soit rigoureux, il faudrait un algorithme qui parcourt une suite de caractères et l'interprète en ajoutant correctement les parenthèses.

Pour $c = 0$, nous avons $(a + b) \times 0 = 0$ ainsi que $a \times 0 = b \times 0 = 0$ en vertu des points précédents sur la multiplication par zéro. Pour la récurrence nous utilisons associativité et commutativité de la somme :

$$(a + b) \times s(c) = (a + b) \times c + (a + b) \quad (1.158a)$$

$$= a \times c + b \times c + a + b \quad (1.158b)$$

$$= (a \times c + a) + (b \times c + b) \quad (1.158c)$$

$$= (a \times s(c)) + (b \times s(c)). \quad (1.158d)$$

On devrait aussi prouver que $c(a + b) = ca + cb$: c'est peu ou prou la même chose.

- (7) **Pour (7)** Soient $a, b \in \mathbb{N}$. Nous démontrons par récurrence sur $c \in \mathbb{N}$ que $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$. Pour $c = 0$ l'égalité est triviale. Nous supposons que l'égalité est correcte pour c , et nous la prouvons pour $s(c)$:

$$(a \times b) \times s(c) = ((a \times b) \times c) + a \times b \quad (1.159a)$$

$$= (a \times (b \times c)) + a \times b \quad \text{récurrence} \quad (1.159b)$$

$$= ((b \times c) \times a) + b \times a \quad \text{commutativité} \quad (1.159c)$$

$$= (b \times c + b) \times a \quad \text{distributivité} \quad (1.159d)$$

$$= (b \times s(c)) \times a \quad \text{définition 1.144(2)} \quad (1.159e)$$

$$= a \times (b \times s(c)) \quad \text{commutativité.} \quad (1.159f)$$

□

LEMooCompatMultiplicationOrdre

Lemme 1.147 ([1]).

La multiplication est compatible avec l'ordre :

$$a \leq b \Rightarrow a \times n \leq b \times n \quad (1.160)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Par la définition 1.128 de l'ordre, si $a \leq b$, il existe $c \in \mathbb{N}$ tel que $b = a + c$. En utilisant la distributivité⁵⁶, nous avons

$$b \times n = (a + c) \times n = a \times n + c \times n. \quad (1.161)$$

Nous en déduisons que $a \times n \leq b \times n$ parce que $c \times n \in \mathbb{N}$.

□

LEMooEHYEooLDudfn

Lemme 1.148.

Si $a \times b = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$ (ou les deux).

Démonstration. Supposons que $a \neq 0$. Alors il existe $c \in \mathbb{N}$ tel que $a = s(c)$. Nous avons

$$0 = a \times b = s(c) \times b = c \times b + b. \quad (1.162)$$

Le lemme 1.127 nous dit alors que $c \times b = b = 0$.

□

LEMooGUXGooBcKJdS

Lemme 1.149 ([1]).

Soit a, b, n trois entiers naturels. Si $a < b$ et si $n \neq 0$, alors

$$a \times n < b \times n. \quad (1.163)$$

Démonstration. L'hypothèse $a \leq b$ implique qu'il existe $c \in \mathbb{N}$ tel que $a + c = b$. De plus $c \neq 0$ parce que $a \neq b$. En utilisant la distributivité⁵⁷, nous avons

$$b \times n = (a + c) \times n = (a \times n) + (c \times n). \quad (1.164)$$

Cela prouve que $a \times n \leq b \times n$. Et comme c et n ne sont pas nuls, nous avons même⁵⁸ $c \times n \neq 0$ et donc $a \times n < b \times n$. □

56. Proposition 1.146(6).

57. Proposition 1.146(6).

58. Lemme 1.148.

REMooultiplicationNaturelsOrdreStrictZ

Remarque 1.150.

Une version du lemme 1.149 dans $\mathbb{Z}$ sera le lemme 1.190.

LEMooSFUKooBNAPle

Lemme 1.151 ([1]).

Soient $a \neq 0$ et $b > 1$ dans $\mathbb{N}$. Alors

$$ab > a. \quad (1.165)$$

Démonstration. Il s'agit d'une application du lemme 1.149 en partant de l'inégalité $1 < b$ et en la « multipliant » par a . $\square$

PROPooNaturelsReguliersMultiplication

Proposition 1.152 ([1]).

Tous les naturels non nuls sont réguliers par rapport à la multiplication. Autrement dit, si $a \neq 0$, alors nous avons

$$a \times x = a \times y \Rightarrow x = y. \quad (1.166)$$

Démonstration. Soit $a \neq 0$ dans $\mathbb{N}$. Nous supposons que $a \times x = a \times y$. Puisque l'ordre sur $\mathbb{N}$ est total (proposition 1.134), nous pouvons supposer que $y \geq x$; sinon il suffit de permuter les rôles de x et y dans tout ce qui suit.

Il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $y = x + d$. En utilisant l'hypothèse $a \times y = a \times x$ et la distributivité⁵⁹,

$$a \times x = a \times y = a \times (x + d) = (a \times x) + (a \times d). \quad (1.167)$$

Puisque $(a \times x)$ est régulier pour la somme⁶⁰ nous en déduisons que

$$0 = a \times d. \quad (1.168)$$

Le lemme 1.148 dit alors que $a = 0$ ou que $d = 0$. Étant donné que $a \neq 0$ par hypothèse, nous déduisons que $d = 0$, c'est-à-dire que $x = y$. $\square$

1.5.6 Presque unicité des triplets naturels

NOR&IIBooUniciteTripletsNaturels

1.153.

Il existe de nombreux triplets naturels; l'existence d'un triplet naturel est un théorème de la théorie des ensembles que nous avons accepté. Nous avons déjà à peu près montré que toute partie non bornée de $\mathbb{N}$ donne lieu à un nouveau triplet naturel. Voir 1.141.

Nous voyons maintenant que tous les triplets naturels sont équivalents au moins pour l'ordre.

THOooFUXMooJuigHK

Théorème 1.154 ([1]).

Soient des triplets naturels $(\mathcal{N}_1, o_1, s_1)$ et $(\mathcal{N}_2, o_2, s_2)$. Alors

(1) il existe une unique application $f: \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ telle que

$$(1a) \quad f(o_1) = o_2$$

$$(1b) \quad f \circ s_1 = s_2 \circ f.$$

(2) Une telle application est une bijection croissante.

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **Existence** Nous voyons $(\mathcal{N}_1, o_1, s_1)$ comme un triplet naturel, et $\mathcal{N}_2$ comme un simple ensemble. Nous pouvons appliquer le théorème 1.120 à $(\mathcal{N}_1, o_1, s_1)$. L'élément o_1 va jouer le rôle de 0 alors que o_2 va jouer le rôle de b . L'application g est s_2 . Bref, il existe une unique application $f: \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_2$ telle que

$$(1a) \quad f(o_1) = o_2$$

$$(1b) \quad f(s_1(n)) = s_2(f(n))$$

pour tout $n \in \mathcal{N}_1$.

59. Proposition 1.146(6).

60. Proposition 1.125(3).

- (2) **Unicité** Le théorème 1.120 donne déjà l'unicité. Nous la faisons quand même, juste pour vous faire plaisir. Soit g , une autre application vérifiant les mêmes conditions. Pour faire la récurrence de façon très explicite, nous posons

$$P: \mathcal{N}_1 \rightarrow \{0, 1\}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } g(x) = f(x) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.169)$$

Notre but est de prouver que $P(x) = 1$ pour tout $x \in \mathcal{N}_1$, en utilisant la récurrence telle que décrite dans la proposition 1.119.

Nous avons $f(o_1) = o_2 = g(o_1)$. Donc $P(o_1) = 1$. Nous supposons que, pour un certain $a \in \mathcal{N}_1$, nous ayons $P(a) = 1$, et nous prouvons que $P(s_1(a)) = 1$.

Nous avons $g(a) = f(a)$, et nous prenons s_2 des deux côtés, nous avons successivement

$$(s_2 \circ g)(a) = (s_2 \circ f)(a) \quad (1.170a)$$

$$(g \circ s_1)(a) = (f \circ s_1)(a) \quad (1.170b)$$

$$g(s_1(a)) = f(s_1(a)). \quad (1.170c)$$

La dernière égalité signifie que $P(s_1(a)) = 1$. La proposition 1.119 implique que $P(x) = 1$ pour tout $x \in \mathcal{N}_1$.

- (3) **Bijection, définir l'inverse** Nous allons trouver un inverse et le lemme 1.18 nous dit que c'est suffisant. La partie « existence », en inversant les rôles de $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ nous donne une application $g: \mathcal{N}_2 \rightarrow \mathcal{N}_1$ telle que

$$(3a) \quad g(o_2) = o_1$$

$$(3b) \quad g \circ s_2 = s_1 \circ g.$$

Nous allons prouver que g est un inverse de f .

- (4) $f \circ g = \text{Id}$ Nous posons $A = \{x \in \mathcal{N}_2 \text{ tel que } (f \circ g)(x) = x\}$. Nous avons

$$f(g(o_2)) = f(o_1) = o_2, \quad (1.171)$$

et donc $o_2 \in A$.

Supposons que $x \in A$. Alors

$$(f \circ g)(s_2(x)) = (f \circ \underbrace{g \circ s_2}_{s_1 \circ g})(x) \quad (1.172a)$$

$$= (\underbrace{f \circ s_1}_{=s_2 \circ f} \circ g)(x) \quad (1.172b)$$

$$= (s_2 \circ f \circ g)(x) \quad (1.172c)$$

$$= s_2((f \circ g)(x)) \quad (1.172d)$$

$$= s_2(x) \quad (1.172e)$$

Donc $s_2(x) \in A$. Nous en déduisons que $A = \mathcal{N}_2$ par le point (3) de la définition 1.114 d'un triplet naturel.

- (5) $g \circ f = \text{Id}$ J'imagine que c'est la même chose que dans l'autre sens (ci-dessus)⁶¹.

□

PROPooCCVNooYUYcqG

Proposition 1.155.

L'ensemble structuré $(\mathbb{N}, +, \times, \leq)$ est archimédien⁶². En d'autres termes, pour tout $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$b < n \times a. \quad (1.173)$$

61. Je n'ai pas fait les calculs ; écrivez-moi si ça pose un problème.

62. Définition 1.143.

Démonstration. Soient $a, b \in \mathbb{N}$ avec $a \neq 0$.

Si $a > b$, nous avons le résultat avec $n = 1$.

Si $a = b$, en prenant $n = s(1)$ nous avons le résultat. En effet $s(1) \times a = a + a$. Puisque $a \neq 0$, nous avons $a + a \geq a$ et $a + a \neq a$, donc $s(1) \times a > a$.

La vraie vie est avec $a < b$. Nous posons

$$X = \{x \in \mathbb{N} \text{ tel que } 1 \leq x \times a \leq b\} \quad (1.174)$$

et

$$B = \{x \times a \text{ tel que } x \in X\}. \quad (1.175)$$

L'ensemble X est non vide parce que $1 \in X$. L'ensemble B est alors également non vide, et majoré par b . La proposition 1.135(4) nous indique alors que B possède un plus grand élément que nous allons noter $x_0 \times a$ ($x_0 \in X$).

Nous posons $n = s(x_0)$, et nous avons

$$x_0 \times a < x_0 \times a + a = s(x_0) \times a = n \times a. \quad (1.176)$$

Nous en déduisons que $n \times a$ n'est pas dans B parce que $x_0 \times a$ est le plus grand élément de B . Donc x_0 n'est pas dans X ; nous n'avons donc pas les inégalités

$$1 \leq n \times a \leq b. \quad (1.177)$$

Laquelle des deux inégalités est fausse? Puisque $n = s(x_0) \geq 1$ et que $a \geq 1$, nous avons $1 \leq n \times a$. Donc c'est la seconde inégalité qui est fausse. Nous avons donc $n \times a > b$. $\square$

DEFooNEVNooJlmJOC

Proposition-Définition 1.156.

Soit A un ensemble muni d'une loi de composition interne⁶³ notée $+$. Si nous avons une application $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow A$, alors il existe une unique application $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ telle que f

SUBEQSooKJOFooOOxDKH

$$\begin{cases} f(0) = \alpha(0) \\ f(k) = f(k-1) + \alpha(k). \end{cases} \quad (1.178a)$$

$$(1.178b)$$

La valeur de $f(k)$ est notée $\sum_{i=0}^k \alpha(i)$.

Démonstration. Application du théorème 1.120. $\square$

NORooNotationSommeNaturels

1.157.

Les équations de définition (1.178) signifient que nous définissons la notation $\sum_{i=0}^N \alpha(i)$ par récurrence par les conditions suivantes :

ITEMooIPDTooEhOxea

$$(1) \sum_{i=0}^0 \alpha(i) = \alpha(0),$$

ITEMooSommeNaturelsSucc

$$(2) \sum_{i=0}^k \alpha(i) = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha(i) + \alpha(k).$$

PROPOooXXGHooLafGsI

Proposition 1.158 (La multiplication est une somme itérée[34]).

Pour tout $a, b \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\sum_{i=1}^n a = a \times n. \quad (1.179)$$

Démonstration. Nous le faisons par récurrence en partant de $n = 1$. Avec $n = 1$ nous avons $\sum_{i=1}^1 a = a$, et $a \times 1 = a$. Donc c'est bon.

Pour la récurrence nous avons :

$$a \times s(n) = a \times n + a = \sum_{i=1}^n a + a = \sum_{i=1}^{n+1} a = \sum_{i=1}^{s(n)} a. \quad (1.180)$$

$\square$

63. Peut-être un anneau, mais comme nous avons l'intention, dans les propositions 1.158 et suivantes, de faire des sommes vers $(\mathbb{N}, +)$, plutôt un monoïde.

LEMooIETGooMyrilW

Lemme 1.159.

Soit $a > 1$ dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \geq 1$ nous avons $na \leq a^n$.

Démonstration. Par récurrence. Avec $n = 1$ nous avons bien $a \leq a$; pas de problème. Supposons que $na \leq a^n$, et montrons le pas de récurrence. Nous avons :

$$(n+1)a = na + a \quad (1.181a)$$

$$\leq na + na \quad \text{parce que } a \leq na \quad (1.181b)$$

$$= 2na \quad (1.181c)$$

$$\leq 2a^n \quad \text{récurrence} \quad (1.181d)$$

$$\leq aa^n \quad \text{parce que } a \geq 2 \quad (1.181e)$$

$$= a^{n+1}. \quad (1.181f)$$

□

PROPooSuiteGeometriqueCroissante

Proposition 1.160 ([34]).

Soit $a > 1$. Alors

- (1) l'application $n \mapsto a^n$ est strictement croissante ;
- (2) l'ensemble $\{a^n \text{ tel que } n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas majoré.

Démonstration. Nous avons

$$a^{n+1} = a^n \times a \quad (1.182a)$$

$$> a^n \times 1 \quad \text{lemme 1.151} \quad (1.182b)$$

$$= a^n. \quad (1.182c)$$

Cela prouve le premier point.

Pour le second point, soit $m \in \mathbb{N}$. Nous devons trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $a^N \geq m$. Puisque $\mathbb{N}$ est archimédien⁶⁴, nous pouvons considérer N tel que $Na > m$. Le lemme 1.127 nous assure alors que

$$m < Na \leq a^N. \quad (1.183)$$

□

THOooKDJVooRIJHP

Théorème 1.161 (division euclidienne [34]).

Pour tout $a \in \mathbb{N}$, pour tout $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$.

Démonstration. Existence puis unicité.

(1) **Existence**

Nous posons

$$A = \{bx \text{ tel que } x \in \mathbb{N}, bx \leq a\}. \quad (1.184)$$

L'ensemble A contient 0 (avec $x = 0$) et est majoré par a . Donc il possède un plus grand élément que nous notons bq . Puisque $bq \in A$, nous avons $bq \leq a$ et donc il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que

$$bq + r = a. \quad (1.185)$$

EQooIUICoolLenNBP

Il reste à montrer que $r < b$. Supposons que $r \geq b$. Il existerait alors un x tel que $b + x = r$. En mettant ça dans (1.185),

$$bq + b + x = a, \quad (1.186)$$

c'est-à-dire $b(q+1) + x = a$, qui signifierait $b(q+1) \leq a$, ce qui est faux parce que bq est le plus grand élément de A .

64. Proposition 1.155.

(2) **Unicité** Supposons que nous ayons

$$a = bq + r = bq' + r' \quad (1.187)$$

avec $0 \leq r < b$ et $0 \leq r' < b$. Il y a trois possibilités : $q' < q$, $q' = q$ et $q' > q$.

(2a) **Si $q' < q$** Alors il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que $q' + x = q$, et nous avons

$$b(q' + x) + r = bq' + bx + r, \quad (1.188)$$

ce qui, après distribution et simplification, donne $r' = bx + r$. Puisque nous avons $x \geq 1$, il vient

$$r' = bx + r \geq b + r \geq b. \quad (1.189)$$

Cela n'est pas possible parce que $r' < b$. Le cas $q' < q$ n'est pas possible.

(2b) **Si $q' = q$** Nous avons alors immédiatement $bq + r = bq + r'$ et donc $r = r'$. Unicité.

(2c) **Si $q' > q$** En posant $q + x = q'$ nous trouvons la même impossibilité que dans le cas $q' < q$.

□

DEFooDivisibleNombrePairImpair

Définition 1.162.

Quelques définitions associées au théorème 1.161. Soit a et b deux entiers naturels.

(1) Dans le couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$, fourni par ce théorème, q est appelé **quotient** et r est appelé **reste**.

(2) Si $r = 0$ (et donc s'il existe un $q \in \mathbb{N}$ tel que $a = bq$, nous disons que a est **divisible** par b .

(3) Si n est divisible par 2, alors nous disons qu'il est **pair**.

ITEMooDLHHooTmWSnN

(4) Si n n'est pas divisible par 2, alors nous disons qu'il est **impair**.

1.5.7 Écriture d'un naturel dans une base

SICRooEcritureChiffres

1.163.

Nous avons déjà donné la notation $1 = s(0)$. Nous continuons avec $2 = s(1)$, $3 = s(2)$, $4 = s(3)$, $5 = s(4)$, $6 = s(5)$, $7 = s(6)$, $8 = s(7)$ et $9 = s(8)$.

Nous allons maintenant voir comment écrire des nombres plus grands.

NORooTuplesChiffres

1.164.

Si $b > 1$ et $N \in \mathbb{N}$ sont donnés, nous notons

$$C_{b,N} = \{u \in \{0, \dots, b-1\}^{N+1} \text{ tel que } u_N \neq 0\}. \quad (1.190)$$

où les u_i sont numérotés à partir de 0 ; donc dire $u_N \neq 0$ revient à dire que le *dernier* est non nul, et non l'avant dernier. Nous définissons⁶⁵

$$\begin{aligned} \varphi_{b,N} : C_{b,N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ u &\mapsto \sum_{i=0}^N u_i b^i. \end{aligned} \quad (1.191)$$

EQooWWTUooHANSEv

Cette application $\varphi_{b,N}$ sera encore bien étudiée pour la partie décimale d'un réel. Voir la définition 10.428.

LEMooJUGKooGsrhi

Lemme 1.165 ([34]).

Soient $b > 1$, $N \geq 0$ ainsi que $u \in C_{b,N}$. Alors

$$b^N \leq \varphi_{b,N}(u) < b^{N+1}. \quad (1.192)$$

EQooYHTLooNwqHq

65. Le symbole de sommation est défini par 1.156.

Démonstration. En séparant la somme nous avons

$$\varphi_{b,N}(u) = u_N b^N + \sum_{i=0}^{N-1} u_i b^i. \quad (1.193)$$

Puisque $u_N \geq 1$ nous avons $b^N \leq u_N b^N$, et donc

$$b^N \leq u_N b^N \leq \varphi_{b,N}(u). \quad (1.194)$$

Voilà qui prouve la première inégalité de (1.192).

Pour prouver que $\varphi_{b,N}(u) < b^{N+1}$, nous faisons une récurrence sur N .

- (1) **Pour $N = 0$** Nous devons prouver que $\varphi_{b,0}(u) < b$. Par définition $\varphi_{b,0}(u) = u_0 b^0$. Puisque $u \in \{0, \dots, b-1\}^{N+1}$, nous avons $u_0 \leq b-1 < b$.
- (2) **Récurrence** Nous supposons que pour tout $u \in C_{b,N}$ nous avons $\varphi_{b,N}(u) < b^{N+1}$. Et nous devons montrer que pour tout $v \in C_{b,N+1}$ nous avons $\varphi_{b,N+1}(v) < b^{N+2}$.

Nous posons $u = (v_0, \dots, v_N)$; nous avons alors

$$\varphi_{b,N+1}(v) = v_{N+1} b^{N+1} + \sum_{i=0}^N v_i b^i \quad (1.195a)$$

$$= v_{N+1} b^{N+1} + \varphi_{b,N}(u) \quad (1.195b)$$

$$< v_{N+1} b^{N+1} + b^{N+1} \quad \text{récurrence} \quad (1.195c)$$

$$= (v_{N+1} + 1) b^{N+1} \quad (1.195d)$$

$$\leq b b^{N+1} \quad \text{parce que } v_{N+1} \leq b-1 \quad (1.195e)$$

$$= b^{N+2}. \quad (1.195f)$$

□

LEMooKDKJooSkhcJS

Lemme 1.166 ([1]).

Soient $x \in \mathbb{N}$ ainsi que $b \geq 2$. Nous posons

$$N = \max\{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } b^k \leq x\}. \quad (1.196)$$

Alors

- (1) Si $n > N$ alors $\varphi_{b,n}(u) > x$ pour tout $u \in C_{b,n}$.
- (2) Si $n < N$ alors $\varphi_{b,n}(u) < x$ pour tout $u \in C_{b,n}$.

Démonstration. En deux parties.

- (1) **Si $n > N$** Nous avons, par définition de $C_{b,n}$ que $u_n \neq 0$, de telle sorte que

$$\varphi_{b,n}(u) \geq u_n b^n \geq b^n > x. \quad (1.197)$$

La dernière inégalité est due au fait que $n \notin \{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } b^k \leq x\}$.

- (2) **Si $n < N$** Nous avons

$$x \geq b^N > \varphi_{b,n}(u). \quad (1.198)$$

Le seconde inégalité est une conséquence du lemme 1.165.

□

THMooUniciteEcritureChiffres

Théorème 1.167 ([34]).

Soit $b \geq 2$. Si $x \in \mathbb{N}$, alors il existe un unique $N \in \mathbb{N}$ et un unique $u \in C_{b,N}$ tels que

$$x = \varphi_{b,N}(u). \quad (1.199)$$

Démonstration. Nous commençons par $x < b$. Dans ce cas, $N = 0$ parce que si $u_k \neq 0$ avec $k \neq 0$, nous avons

$$\sum_{i=0}^N u_i b^i \geq u_k b^k \geq b > x. \quad (1.200)$$

Donc $x = x_0 b^0 = u_0$. Bref, dans le cas $x < b$ nous avons obligatoirement $N = 0$ et $u_0 = x$.

Nous étudions à présent le cas $x \geq b$ que nous subdivisons en plusieurs étapes.

- (1) $N \geq 1$ Si $N = 0$, alors $\varphi_{b,0}(u) = u_0 < b \leq x$. Donc $N \geq 1$.

Notons incidemment que nous pouvons parler de $N - 1$ à partir de maintenant.

- (2) Unicité, préambule Le lemme 1.166 nous indique que si $x = \varphi_{b,N}(u)$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$ et un certain $u \in C_{b,N}$, alors

$$N = \max\{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } b^k \leq x\}. \quad (1.201)$$

Nous posons

$$X_k = \sum_{i=k}^N u_i b^{i-k}, \quad (1.202)$$

et nous allons montrer que le couple (X_{k+1}, u_k) est le résultat de la division euclidienne⁶⁶ de X_k par b .

D'abord, $u_k < b$, donc ça a bien la tête d'un reste. Ensuite, pour le quotient,

$$bX_{k+1} + u_k = b \sum_{i=k+1}^N u_i b^{i-(k+1)} + u_k \quad (1.203a)$$

$$= \sum_{i=k+1}^N u_i b^{i-k} + u_k \quad (1.203b)$$

$$= \sum_{i=k}^N u_i b^{i-k} \quad (1.203c)$$

$$= X_k. \quad (1.203d)$$

- (3) Unicité En quoi cela fait-il avancer la choucroute? Supposons que $\varphi_{b,N}(u) = \varphi_{b,M}(v)$. Alors nous avons déjà prouvé que

$$M = N = \max\{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } b^k \leq x\}. \quad (1.204)$$

Ensuite nous devons montrer que $u = v$. Nous posons $X_k = \sum_{i=k}^N u_i b^{i-k}$ et $Y_k = \sum_{i=k}^N v_i b^{i-k}$. Notez que

$$X_0 = Y_0 = x. \quad (1.205)$$

Si $X_k = Y_k$, alors par unicité de la division euclidienne nous avons $X_{k+1} = Y_{k+1}$ et $u_k = v_k$. Par récurrence nous avons $X_k = Y_k$ et $u_k = v_k$ pour tout k .

- (4) Existence Soit $x \in \mathbb{N}$. Nous posons $y_0 = x$ et

$$y_k = by_{k+1} + u_k \quad (1.206)$$

avec $u_k < b$. Vus l'unicité dans la division euclidienne et le théorème⁶⁷ 1.120 permettant la définition par récurrence, ces conditions définissent deux suites (u_k) et (y_k) dans $\mathbb{N}$.

Montrons qu'il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $y_n = 0$ pour tout $n \geq N + 1$. Nous avons :

$$2y_{k+1} \leq by_{k+1} \quad \text{parce que } b \geq 2 \quad (1.207a)$$

$$\leq y_k \quad \text{pcq } by_{k+1} + u_k = y_k. \quad (1.207b)$$

66. Théorème 1.161.

67. Nous ne citerons pas toujours ce théorème à chaque fois que nous définissons quelque chose par récurrence.

Bref : $2y_{k+1} \leq y_k$. Par récurrence⁶⁸ nous trouvons que

$$2^k y_k \leq x \quad (1.208)$$

parce que $y_0 = x$. Par le lemme 1.159, si k est assez grand,

$$2ky_k \leq 2^k y_k \leq x. \quad (1.209)$$

Puisque $\mathbb{N}$ est archimédien⁶⁹, nous pouvons considérer $s \in \mathbb{N}$ tel que $2s > x$. À ce moment nous avons

$$y_n = 0 \quad (1.210)$$

pour tout $n \geq s$. Nous posons

$$N = \max\{k \text{ tel que } y_k \neq 0\}. \quad (1.211)$$

Prouvons par récurrence sur l que

$$y_{N-l} = \sum_{i=N-l}^N u_i b^{(i+l)-N}. \quad (1.212)$$

Notez que $i + l \geq N - l + l = N$, donc $(i + l) - N$ a un sens.

(4a) Pour $l = 0$ Avec $l = 0$ nous avons $\sum_{i=N-l}^N u_i b^{(i+l)-N} = u_N$. Il faut donc voir que $y_N = u_N$. Nous avons

$$y_N = by_{N+1} + u_N. \quad (1.213)$$

En se rappelant que $y_{N+1} = 0$, nous avons le résultat.

(4b) Pour $l + 1$ Pour la récurrence nous avons le calcul suivant :

$$y_{N-l-1} = by_{N-l} + u_{N-l-1} \quad (1.214a)$$

$$= b \sum_{i=N-l}^N u_i b^{(i+l)-N} + u_{N-l-1} \quad (1.214b)$$

$$= \sum_{i=N-l}^N u_i b^{(i+l)-N+1} + u_{N-l-1} \quad (1.214c)$$

$$= \sum_{i=N-l-1}^N u_i b^{(i+l+1)-N}. \quad (1.214d)$$

La récurrence est prouvée. L'égalité (1.212) est validée pour tout l .

En posant $l = N$ dans (1.212) nous trouvons

$$y_0 = \sum_{i=0}^N u_i b^i. \quad (1.215)$$

Mais la définition de la suite (y_k) contient $y_0 = x$. Donc nous avons prouvé que

$$x = \sum_{i=0}^N u_i b^i = \varphi_{b,N}(u). \quad (1.216)$$

□

68. Faut-il citer la proposition 1.119 et donner explicitement la fonction P ?

69. Proposition 1.155.

EXooEcritureDix

Exemple 1.168.

Comment écrire le nombre b en base b ? Nous devons trouver un N et une suite (u_i) tels que

$$b = \sum_{i=0}^N u_i b^i. \quad (1.217)$$

Il est facile de voir que le choix $N = 1$ et $u = (0, 1)$ fonctionne bien : $b = 1 \times b^1 + 0$. Nous avons donc

$$b = \varphi_{b,1}(1, 0). \quad (1.218)$$

Nous écrivons cela plus sobrement $b = 10$. △

NORooBaseStandardDix

1.169.

À part des cas très exceptionnels, nous utilisons toujours la base $b = s(9) = s^9(0)$. Nous nous permettons donc d'écrire « 64 » le nombre $\varphi_{s(9),2}(6, 4)$. Vous saviez que tout groupe simple d'ordre $\varphi_{s(9),2}(6, 0)$ est isomorphe au groupe alterné $A_{\varphi_{s(9),0}(5)}$? C'est la proposition 5.55.

PROPooComparaisonNaturelsParChiffres

Proposition 1.170 ([34]).

Soit $b > 2$ un entier naturel fixé, et $M > N$ deux entiers naturels. Si $u \in C_{b,N}$ et $v \in C_{b,M}$, alors $\varphi_{b,N}(u) < \varphi_{b,M}(v)$.

De manière plus intuitive : à base fixée, le nombre qui a le plus de chiffres est le plus grand.

Démonstration. Le lemme 1.165 nous dit que

$$b^N \leq \varphi_{b,N}(u) < b^{N+1} \quad (1.219)$$

et

$$b^M \leq \varphi_{b,M}(v) < b^{M+1}. \quad (1.220)$$

Puisque $M > N$ nous avons $b^{N+1} \leq b^M$ et donc

$$\varphi_{b,N}(u) < b^{N+1} \leq b^M \leq \varphi_{b,M}(v). \quad (1.221)$$

□

PROPooComparaisonNaturelsParChiffresIdentiques

Proposition 1.171.

Soient $u, v \in C_{b,N}$ tels que $u_i = v_i$ pour $i = r + 1, \dots, N$. Si $u_r > v_r$ alors $\varphi_{b,N}(u) > \varphi_{b,N}(v)$.

De manière intuitive : avec le même nombre de chiffres, le plus grand est celui dont le premier chiffre différent est le plus grand.

Autrement dit, les nombres en écriture de position se classent par ordre lexicographique.

Démonstration. En découpant les sommes nous avons

$$\varphi_{b,N}(u) = \sum_{i=r+1}^N u_i b^i + u_r b^r + \sum_{i=0}^{r-1} u_i b^i \quad (1.222)$$

et

$$\varphi_{b,N}(v) = \sum_{i=r+1}^N u_i b^i + v_r b^r + \sum_{i=0}^{r-1} v_i b^i. \quad (1.223)$$

Puisque $b^r > \sum_{i=0}^{r-1} u_i b^i$ (lemme 1.165), nous avons aussi

$$b^r + \sum_{i=0}^{r-1} u_i b^i > \sum_{i=0}^{r-1} v_i b^i. \quad (1.224)$$

EQooTZPBooTeaubX

Et le calcul final :

$$\varphi_{b,N}(v) < \sum_{i=r+1}^N v_i b^i + v_r b^r + b^r + \sum_{i=0}^{r-1} u_i b^i \quad \text{pcq (1.224)} \quad (1.225a)$$

$$= \sum_{i=r+1}^N u_i b^i + (v_r + 1)b^r + \sum_{i=0}^{r-1} u_i b^i \quad (1.225b)$$

$$\leq \sum_{i=r+1}^N u_i b^i + u_r b^r + \sum_{i=0}^{r-1} u_i b^i \quad \text{pcq } u_r \geq v_r + 1 \quad (1.225c)$$

$$= \sum_{i=0}^N u_i b^i \quad (1.225d)$$

$$= \varphi_{b,N}(u). \quad (1.225e)$$

Et voilà. $\square$

1.6 Les entiers relatifs

PROPOSITION Définition

Proposition-Définition 1.172 ([34]).

Soient $a, b, a', b' \in \mathbb{N}$. Nous disons que $(a, b) \sim (a', b')$ si et seulement si

$$a + b' = b + a' \quad (1.226)$$

(1) $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}^2$.

ITEM

(2) Si $(a, b) \sim (a', b')$ et $(x, y) \sim (x', y')$ alors

$$(a + x, b + y) \sim (a' + x', b' + y'). \quad (1.227)$$

L'ensemble des **entiers** est

$$\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / \sim, \quad (1.228)$$

et nous notons $\overline{a, b} \in \mathbb{Z}$ la classe de $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **Symétrie** C'est la commutativité de la somme dans $\mathbb{N}$, proposition 1.125(1).

(2) **Réflexive** Immédiat.

(3) **Transitive** Nous supposons que $(a, b) \sim (u, v)$ et que $(u, v) \sim (x, y)$. Alors nous avons

$$a + v = u + b \quad (1.229a)$$

$$u + y = v + x. \quad (1.229b)$$

En additionnant membre à membre,

$$a + v + u + y = u + b + v + x. \quad (1.230)$$

La commutativité nous permet de mettre u et v à droite dans chacun des deux membres. Ensuite la proposition 1.125(3) nous permet de simplifier par $u + v$. Il reste $a + y = b + x$, qui signifie $(a, b) \sim (x, y)$.

(4) **Pour (2)** L'hypothèse donne les égalités

$$a + b' = b + a' \quad (1.231a)$$

$$x + y' = y + x' \quad (1.231b)$$

En sommant, et en utilisant l'associativité,

$$(a + x) + (b' + y') = (b + y) + (a' + x'). \quad (1.232)$$

Cela signifie bien que $(a + x, b + y) \sim (a' + x', b' + y')$.

□

LEMooEntiersEquivalentsZero

Lemme 1.173.

Soient $a, b \in \mathbb{N}$. Nous avons $(a, b) \sim (0, 0)$ si et seulement si $a = b$.

Démonstration. Dire que $(a, b) \sim (0, 0)$ est équivalent à dire que $a + 0 = b + 0$, ou encore que $a = b$. □

PROPooDEFAdditionEntiersRelatifs

Proposition-Définition 1.174 ([34]).

Soient $a, b, x, y \in \mathbb{N}$. L'application

$$\begin{aligned} f: \overline{(a, b)} \times \overline{(x, y)} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ ((a', b'), (x', y')) &\mapsto (a' + x', b' + y') \end{aligned} \quad (1.233)$$

est constante.

Nous nommons sa valeur $\overline{(a, b)} + \overline{(x, y)}$.

Démonstration. Cela est une conséquence de la proposition 1.172(2). □

PROPooGroupeEntiersRelatifs

Proposition 1.175.

L'ensemble $\mathbb{Z}$, muni de l'addition telle que définie par la proposition 1.174, est un groupe commutatif admettant pour neutre l'élément $e = \overline{(0, 0)}$.

Démonstration. En plusieurs points.

- (1) **Neutre** Pour tous entiers naturels a, b , on a

$$\overline{(a, b)} + \overline{(0, 0)} = \overline{(a + 0, b + 0)} = \overline{(a, b)}. \quad (1.234)$$

De même $e + \overline{(a, b)} = \overline{(a, b)}$ par commutativité de la somme dans $\mathbb{N}$.

- (2) **Inverse** Il faut vérifier que $\overline{(b, a)}$ est l'inverse de $\overline{(a, b)}$.
 (3) **Associativité** Calcul direct en utilisant l'associativité dans $\mathbb{N}$.

□

PROPooVMGYooUWsbSr

Proposition 1.176.

L'application

$$\begin{aligned} \iota: \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ n &\mapsto \overline{(n, 0)} \end{aligned} \quad (1.235)$$

est un morphisme⁷⁰ injectif.

Démonstration. Le fait que ce soit un morphisme est le calcul

$$\iota(a + b) = \overline{(a + b, 0)} = \overline{(a, 0)} + \overline{(b, 0)} = \iota(a) + \iota(b). \quad (1.236)$$

Pour l'injectivité, supposons que $\iota(a) = \iota(b)$. Alors $\overline{(a, 0)} = \overline{(b, 0)}$, c'est-à-dire $a + 0 = b + 0$. Donc $a = b$. □

1.6.1 Opposé

SUBooENNrsRABNsOZzDies

Lemme 1.177.

Tout élément de $\mathbb{Z}$ a un représentant de la forme $(a, 0)$ ou $(0, b)$.

⁷⁰. Certes $\mathbb{N}$ n'est pas un groupe, donc le mot « morphisme » est un peu abusé, mais vous voyez ce que je veux dire.

Démonstration. Soient $a, b \in \mathbb{N}$. Si $b \leq a$, alors nous avons

$$(a, b) \sim (a - b, 0) \quad (1.237)$$

où la différence est calculée dans $\mathbb{N}$ et a un sens parce que nous avons supposé $b \leq a$. Si par contre $a \leq b$ alors

$$(a, b) \sim (0, b - a). \quad (1.238)$$

Puisque l'ordre sur $\mathbb{N}$ est total⁷¹, tous les cas sont couverts. $\square$

LEMooDEFRelatifOppose

Lemme-Définition 1.178.

Soit $z \in \mathbb{Z}$. L'application⁷²

$$\begin{aligned} f: z &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (a, b) &\mapsto \overline{(b, a)} \end{aligned} \quad (1.239)$$

est constante.

Nous nommons $-z$ sa valeur.

Démonstration. Soient (a, b) et (x, y) dans z . Nous avons successivement :

- $(a, b) \sim (x, y)$.
- $a + y = b + x$.
- $(b, a) \sim (y, x)$
- $\overline{(b, a)} = \overline{(y, x)}$
- $f(a, b) = f(x, y)$.

D'où la constance de f . $\square$

PROPooJMETooHQCgwnv

Proposition 1.179 ([1]).

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Nous avons

$$(1) \quad (-a)b = -(ab)$$

ITEMooWNYGooMopPcq

LEMooEntiersRelatifsSigne

Lemme 1.180.

Nous avons

$$(1) \quad \mathbb{Z} = \iota(\mathbb{N}) \cup -\iota(\mathbb{N})$$

ITEMooSQFGooQPgIMu

$$(2) \quad \iota(\mathbb{N}) \cap -\iota(\mathbb{N}) = \{0\}.$$

ITEMooHQUQooJeqULl

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned} \iota(\mathbb{N}) &= \{\overline{(n, 0)} \text{ tel que } n \in \mathbb{N}\} && \text{SUBEQooVJGYooCUxtvk} \\ -\iota(\mathbb{N}) &= \{\overline{(0, n)} \text{ tel que } n \in \mathbb{N}\}. && \text{SUBEQooAPGRooQCkYRr} \end{aligned} \quad \begin{matrix} (1.240a) \\ (1.240b) \end{matrix}$$

Montrons à présent les deux points.

- (1) **Pour (1)** Nous savons par le lemme 1.177 que tous les éléments de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $\overline{(1.240a)}$ ou $\overline{(1.240b)}$.
- (2) **Pour (2)** Si $z \in \iota(\mathbb{N}) \cap -\iota(\mathbb{N})$, il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $\overline{(n, 0)} = \overline{(0, m)}$, ce qui signifie en particulier que $(n, 0) \sim (0, m)$ ou encore que $n + m = 0$. Le lemme 1.127 dit alors que $n = m = 0$.

Nous avons donc $z = \overline{(0, 0)} = 0$. $\square$

71. Proposition 1.134.

72. Pour rappel, z est une classe d'équivalence dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, c'est-à-dire une partie de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Ça a un sens de prendre z comme ensemble sur lequel on définit une fonction.

PROPooCHGRooRksGGO

Proposition 1.181.*L'application*

$$\begin{aligned} \iota: \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ n &\mapsto \overline{(n, 0)} \end{aligned} \quad (1.241)$$

*est un morphisme injectif qui respecte l'ordre.**Démonstration.* Le fait que ce soit un morphisme injectif est la proposition 1.176.Il faut encore prouver que ça respecte l'ordre⁷³

□

PROPooORABooXRbVoz

Proposition 1.182 ([1]).*Soit G , un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ non réduit à $\{0\}$. Alors*

ITEMooUzBJooUeVmmz

(1) La partie $\{x > 0 \text{ tel que } x \in G\}$ est non vide.

ITEMooIXXFooOWkbPb

(2) En posant

$$p = \min\{x > 0 \in G\}, \quad (1.242)$$

*nous avons $G = p\mathbb{Z}$.**Démonstration.* Vu que G est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, si $x, y \in G$ nous avons $x + y \in G$, $-x \in G$, etc.*(1) **Pour (1)** Soit $x \neq 0$ dans G . Si $x > 0$ c'est bon. Sinon $-x \in G$ et $-x > 0$.**(2) **Pour (2)** Nous posons*

$$p = \min\{x \in G \text{ tel que } x > 0\}. \quad (1.243)$$

Vu que $p \in G$ nous avons $p\mathbb{Z} \subset G$. Nous devons montrer l'inclusion inverse.Soit $y \in G$. Par la division euclidienne 1.161, il existe $q \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq r < p$ tels que $y = qp + r$.Vu que y et qp sont dans G nous avons $r = y - qp \in G$. Par minimalité de p , nous devons avoir $r = 0$, et donc $y = qp \in p\mathbb{Z}$.

□

1.6.2 Ordre sur $\mathbb{Z}$

NORMSUWotatEitndmRstiatfSOrdre

1.183.Si $z \in \mathbb{Z}$, nous disons que $z \in \mathbb{N}$ lorsque $z \in \iota(\mathbb{N})$. C'est un abus de notation qu'il est difficile de ne pas faire. Le même abus sera fait pour passer de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Q}$ puis $\mathbb{R}$ puis $\mathbb{C}$.

DEFooYMRHooCyEKtr

Définition 1.184 (Positivité et ordre dans $\mathbb{Z}$ [1]).*La positivité⁷⁴ que nous considérons sur $\mathbb{Z}$ est $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Nous considérons alors la relation d'ordre⁷⁵ $\leq$ donnée par $a \leq b$ si et seulement si $b - a \in \mathbb{N}$.**Nous disons que**(1) L'élément $z \in \mathbb{Z}$ est **positif** si $z \geq 0$.**(2) L'élément $z \in \mathbb{Z}$ est **strictement positif** si $z \geq 0$ et $z \neq 0$. Nous notons $z > 0$.**(3) L'élément $z \in \mathbb{Z}$ est **négatif** si $z \leq 0$.**(4) L'élément $z \in \mathbb{Z}$ est **strictement négatif** si $z \leq 0$ et $z \neq 0$. Nous notons $z < 0$.*

DEFooRelatifsPositifs

Définition 1.185 (Éléments positifs de $\mathbb{Z}$).*On dit qu'un élément $z \in \mathbb{Z}$ est **positif** si $z \in \mathbb{N}$. On note dans ce cas $z \geq 0$.**On dira qu'il est **négatif** quand $-z \in \mathbb{N}$. On note ainsi $z \leq 0$.**On dit qu'un entier relatif z est **strictement positif** s'il est positif et non nul; on note $z > 0$.**Il est **strictement négatif** lorsqu'il est négatif et non nul, et cela est noté $z < 0$.*⁷³. Faites-le en envoyez-moi la preuve.⁷⁴. Définition 1.97.⁷⁵. De la proposition 1.98.

PROPooMYDooOABOdB

Proposition-Définition 1.186 (Relation d'ordre [34]).

La paire⁷⁶ $(\mathbb{Z}, \leq)$ est un ensemble totalement ordonné.

1.187.

Une version de la proposition 1.186 dans $\mathbb{R}$ sera le lemme 1.537.

TODOooDefinirMultiplicationRelatifs

⚠ **Avertissement/question au lecteur !! 1.188**

Définir ici la multiplication dans $\mathbb{Z}$ comme extension de celle de $\mathbb{N}$. Montrer que ça en fait un anneau totalement ordonné.

PROPooADGIooTioqdu

Proposition 1.189 ([1]).

L'anneau $\mathbb{Z}$ est totalement ordonné⁷⁷

LEMooSVDDooWsyxNP

Lemme 1.190.

Soient $a > 0$ et $b \geq 1$ (resp. $b > 1$ dans $\mathbb{Z}$). Nous avons

$$ab \geq a \quad (\text{resp. } ab > a). \quad (1.244)$$

Démonstration. On la fait seulement pour l'inégalité stricte : il suffit de recopier pour l'inégalité large. Par récurrence sur a qui se trouve être dans $\mathbb{N}$. Lorsque $a = 1$, on lit simplement $1b > 1$ qui est correct.

Si la propriété est vraie pour un certain a , alors

$$(a + 1)b = ab + b \quad (\text{distributivité}) \quad (1.245)$$

$$> a + b (\text{hyp. de réc.}) \quad (1.246)$$

$$> a + 1 (\text{hyp. sur } b). \quad (1.247)$$

Et le principe de récurrence permet de conclure. □

NORMooLienRelatifsAnnTotOrdonne

1.191.

Cette proposition est en partie similaire à 1.106 qui parle d'anneau totalement ordonné.

PROPooYFUBooJUZgWH

Proposition 1.192 ([1]).

Quelques propriétés de l'ordre dans $\mathbb{Z}$. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$.

ITEMooULKWooLmKBse

(1) Si $a, b \geq 0$, alors $ab \geq 0$.

ITEMooSAJPooEDSgXJ

(2) Si $a, b > 0$, alors $ab > 0$.

ITEMooINGNooOgSGiF

(3) Si $a, b \leq 0$ alors $ab \geq 0$.

ITEMooOGFXooDvLKAE

(4) Si $a \geq 0$ et $b \leq 0$ alors $ab \leq 0$.

ITEMooRelatifsOrdreOppose

(5) Si $a > 0$, alors $-a < 0$.

ITEMooRelatifsOrdreCarrePositif

(6) Nous avons $a^2 \geq 0$ et $a^2 = 0$ si et seulement si $a = 0$.

ITEMooBUHIooLJOSLQ

(7) Si $ab \geq 0$ et si $a \geq 0$ alors $b \geq 0$.

ITEMooGDFPooBbpBgn

(8) Si $ab > 0$ alors soit $a, b > 0$, soit $a, b < 0$.

LEMooMYEIooNFwNVI

Lemme 1.193.

Toute partie bornée de $\mathbb{Z}$ possède un plus grand élément.

PROPooRelatifsValAbs

Proposition 1.194.

Si $z \in \mathbb{Z}$, alors :

(1) $|z|$ est bien définie et $|z| \in \mathbb{N}$;

(2) nous avons $|ab| = |a||b|$.

76. Voir la définition 1.184 pour $\leq$.

77. Définition 1.105.

Démonstration. C'est le fait que $\mathbb{Z}$ est un anneau totalement ordonné⁷⁸ : donc la proposition-définition 1.111 s'applique, y compris l'équation (1.86). $\square$

DEFooRelatifsDiviseurParite

Définition 1.195.

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. On étend les notions de divisibilité et de parité de la définition 1.162 en disant que :

- (1) a est divisible par b si $|a|$ est divisible par $|b|$;
- (2) a est pair si $|a|$ est pair ;
- (3) b est impair si $|b|$ est impair.

PROPooYJBMooZrzkNX

Proposition 1.196.

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ non nuls, tels que a soit divisible par b . Alors $|a| \geq |b|$.

Démonstration. a est divisible par b dans $\mathbb{Z}$ revient à dire que $|a|$ est divisible par $|b|$ dans $\mathbb{N}$, donc par la définition 1.162, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $|a| = q|b|$. Comme a et b sont non nuls, $|a|$ et $|b|$ sont aussi non nuls, et donc $q \neq 0$: en effet, sinon, nous aurions $q|b| = 0 = |a|$ à cause de la proposition 1.146 point (4). Ainsi, $q \geq 1$, et grâce au lemme 1.190, on a $|a| = q|b| \geq |b|$. $\square$

LEMooCMOEooSoeclk

Lemme 1.197 ([1]).

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- (1) Si n est impair⁷⁹, alors $n - 1$ et $n + 1$ sont pairs.
- (2) Si n est pair, alors $n - 1$ et $n + 1$ sont impairs.

Démonstration. Selon que $n \geq 0$ ou que $n \leq 0$, on effectue la division euclidienne de n ou de $-n$ par 2.

Cas $n \geq 0$: il existe $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1\}$ tel que $n = 2q + r$.

- Quand n est pair, on a $r = 0$. Alors $n + 1 = 2q + 1$ et $n - 1 = 2(q - 1) + 2 - 1 = 2(q - 1) + 1$ sont impairs.
- Quand n est impair, on a $r = 1$. Alors $n + 1 = 2q + 2 = 2(q + 1)$ et $n - 1 = 2q + 1 - 1 = 2q$ sont pairs.

Cas $n \leq 0$: il existe $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1\}$ tel que $-n = 2q + r$.

- Quand n est pair, on a $r = 0$. Alors $-n + 1 = 2q + 1$ est impair, et $n - 1 = -(-n + 1)$ l'est aussi. De même, $-n - 1 = 2(q - 1) + 2 - 1 = 2(q - 1) + 1$, et donc $n + 1 = -(-n - 1)$, sont impairs.
- Quand n est impair, on a $r = 1$. Alors $-n + 1 = 2q + 2 = 2(q + 1)$ est pair, et $n - 1 = -(-n + 1)$ l'est aussi. De même, $-n - 1 = 2q + 1 - 1 = 2q$, et donc $n + 1 = -(-n - 1)$, sont pairs.

 $\square$

LEMooJNXIooBmdOVi

Lemme 1.198.

L'ensemble $\mathbb{Z}$ est infini dénombrable.

Démonstration. Nous considérons l'application

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$n \mapsto \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -(n+1)/2 & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases} \quad (1.248)$$

et nous montrons qu'elle est bijective.

- (1) **f est injective** Soient $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $f(x) = f(y)$. Il y a trois possibilités : $f(x) < 0$, $f(x) = 0$ et $f(x) > 0$.

78. Proposition 1.189.

79. Définition 1.195.

- (1a) Si $f(x) = 0$ Nous supposons que $f(x) = 0$. Si x est pair, c'est que $x/2 = 0$ et donc que $x = 0$. Si x est impair, c'est que $x + 1 = 0$ et donc que $x = -1$ qui n'est pas possible parce que $x \in \mathbb{N}$. Bref, la seule possibilité pour $f(x) = 0$ est $x = 0$.
- (1b) Si $f(x) < 0$ Alors x est pair et $x = 2f(x)$. Même raisonnement pour $y : y = 2f(y) = 2f(x) = x$.
- (1c) Si $f(x) < 0$ Alors x est impair et

$$f(x) = -\frac{x+1}{2} = f(y) = -\frac{y+1}{2}, \quad (1.249)$$

et donc $x = y$.

- (2) f est surjective Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si $n > 0$, alors $n = f(2n)$. Si $n < 0$ alors $n = f(-2n - 1)$. Notez que $-2n - 1 > 0$, donc c'est valide.

□

LEMooILYLooTDRtYj

Lemme 1.199 ([1]).

Soit un anneau⁸⁰ A . Si une application $f : \mathbb{Z} \rightarrow A$ vérifie

- (1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{Z}$,
 (2) $f(1) = 1$,

alors

- (1) $f(0) = 0$
 (2) $f(-x) = -f(x)$
 (3) f est un morphisme d'anneaux, c'est-à-dire que

$$f(xy) = f(x)f(y). \quad (1.250)$$

ITEMooUQKWooByNDTK

ITEMooYOEPooKOQqPH

ITEMooKTSDooExAJHd

Démonstration. En deux parties.

- (1) Pour (1) Prenons un x quelconque. Nous avons $f(x) = f(x + 0) = f(x) + f(0)$. Donc $f(0) = 0$.
- (2) Pour (2) L'inverse pour la somme de $f(-x)$ est $-f(x)$. En effet

$$f(-x) + f(x) = f(-x + x) = f(0) = 0. \quad (1.251)$$

- (3) Pour (3), si $y > 0$ Nous prouvons que $f(xy) = f(x)f(y)$ par récurrence sur y . D'abord pour $y = 1$ nous avons bien $f(xy) = f(x)f(y)$ parce que $f(1) = 1$. Ensuite nous avons :

$$f(x(y + 1)) = f(xy + x) \quad (1.252a)$$

$$= f(xy) + f(x) \quad \text{morph pour } + \quad (1.252b)$$

$$= f(x)f(y) + f(x) \quad \text{hyp. rec.} \quad (1.252c)$$

$$= f(x)(f(y) + 1) \quad (1.252d)$$

$$= f(x)(f(y) + f(1)) \quad (1.252e)$$

$$= f(x)f(y + 1) \quad (1.252f)$$

- (4) Si $y < 0$ Nous posons $y' = -y$. Vu que $y' > 0$ nous avons

$$f(xy) = f(-xy') = -f(xy') = -f(x)f(y') = f(x)(-1)f(y') = f(x)f(-y') = f(x)f(y). \quad (1.253)$$

□

80. Définition 1.90.

Démonstration. En plusieurs parties.

- (1) **(1), $\Leftarrow$** Soit un ensemble A en bijection avec $\{0, \dots, N\}$. Nous avons vu que $\{0, \dots, N\}$ est fini dans le lemme 1.202. Le lemme 1.73(2) conclut que A est fini.
- (2) **(1), $\Rightarrow$** Le vrai sport est de faire l'implication inverse. Nous supposons que A est un ensemble fini, et nous allons prouver qu'il est en bijection avec $\{0, \dots, N\}$ pour un N bien choisi. Nous allons utiliser le lemme de Zorn. Soit

$$\mathcal{A} = \{(N, \varphi) \text{ tel que } \varphi: \{0, \dots, N\} \rightarrow A \text{ est injective}\}. \quad (1.256)$$

Nous mettons sur $\mathcal{A}$ la relation d'ordre donnée par $(N_1, \varphi_1) \leq (N_2, \varphi_2)$ lorsque

(2a) $N_1 \leq N_2$

(2b) φ_2 étend φ_1 , c'est-à-dire que $\varphi_2 = \varphi_1$ sur $\{0, \dots, N\}$.

- (2a) **$\mathcal{A}$ est inductif** Soit une partie $\mathcal{F}$ totalement ordonnée de $\mathcal{A}$. Nous considérons la partie suivante de $\mathbb{N}$:

$$S = \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \exists \varphi \text{ tel que } (n, \varphi) \in \mathcal{F}\}. \quad (1.257)$$

Si S est majoré, alors il a un maximum (proposition 1.135(4)). Si M est le maximum de S , le (M, φ) de $\mathcal{F}$ qui correspond à ce maximum est un majorant de $\mathcal{F}$.

Supposons –pour l'absurde– que $\mathcal{F}$ n'est pas majoré dans $\mathcal{A}$; en particulier S n'est pas majoré dans $\mathbb{N}$. Pour chaque $n \in S$, il existe une application φ_n telle que $(n, \varphi_n) \in \mathcal{F}$. Cela nous permet de définir

$$\begin{aligned} \phi: S &\rightarrow A \\ n &\mapsto \varphi_n(n). \end{aligned} \quad (1.258)$$

Montrons que ϕ est injective. Si $\phi(m) = \phi(n)$, alors $\varphi_m(m) = \varphi_n(n)$. Supposons pour fixer les idées que $n \leq m$. Vu que (n, φ_n) et (m, φ_m) sont dans $\mathcal{F}$ qui est ordonné, φ_m prolonge φ_n ; en particulier $\varphi_n(n) = \varphi_m(n)$. Mais comme φ_m est injective, $m = n$.

Nous avons donc une injection $\phi: S \rightarrow A$. Mais S est non borné et donc infini⁸⁵. La proposition 1.72 conclut que A est infini, ce qui est contraire aux hypothèses.

Donc $\mathcal{F}$ a un majorant et $\mathcal{A}$ est inductif.

- (2b) **Lemme de Zorn** Le lemme de Zorn dit que $\mathcal{A}$ a un élément maximal.
- (2c) **Conclusion** Soit (N, φ) un élément maximal de $\mathcal{A}$. Nous allons prouver que $\varphi: \{0, \dots, N\} \rightarrow A$ est une bijection. Que φ soit injective est une conséquence du fait que (N, φ) est dans $\mathcal{A}$.

Pour prouver que φ est surjective, nous supposons qu'elle ne l'est pas. Soit $a \in A$ qui n'est pas dans l'image de φ . En posant

$$\begin{aligned} \phi: \{0, \dots, N+1\} &\rightarrow A \\ x &\mapsto \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \neq N+1 \\ a & \text{si } x = N+1, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.259)$$

le couple $(N+1, \phi)$ majore strictement (N, φ) . Ce qui est une contradiction.

- (3) **(2) existence** L'existence est ce que nous venons de montrer ci-dessus.
- (4) **(2) unicité** Supposons que I soit en bijection avec $\{0, \dots, M\}$ et avec $\{0, \dots, N\}$. Il existe donc une bijection entre $\{0, \dots, M\}$ et $\{0, \dots, N\}$. Par le lemme 1.203, cela implique que $M = N$.

□

85. Le lemme 1.140 dit qu'il existe une bijection entre S et $\mathbb{N}$. De là nous concluons que S est infini parce qu'un ensemble en bijection avec un ensemble infini est infini par la proposition 1.72.

Nous ne définissons pas ce qu'est le cardinal d'un ensemble infini ; c'est très compliqué et ça ne nous servira pas.

LEMooRWUDooTgoRXH

Lemme 1.205.

Si A est une partie infinie de $\mathbb{N}$, alors pour tout n , la partie $A \setminus \{0, \dots, n\}$ est non vide.

Démonstration. Si $A \setminus \{0, \dots, n\}$ était vide, cela signifierait que A est une partie de $\{0, \dots, n\}$. Or nous savons que $\{0, \dots, n\}$ est fini (lemme 1.202), et que toute partie d'un ensemble fini est finie (lemme 1.70). Donc nous aurions que A est fini, ce qui est contraire à l'hypothèse. $\square$

PROPooOTHMooPzPzdW

Proposition 1.206 ([1]).

À propos d'ensembles finis.

ITEMooFIEUooRmDcfo

(1) Si I est un ensemble fini et si $\{A_i\}_{i \in I}$ sont des ensembles finis, alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est fini.

ITEMooLVSVooHEwNWA

(2) Si A et B sont finis, alors $A \times B$ est fini.

LEMooVFPNooVmdUXY

Lemme 1.207 ([1]).

Union d'ensembles finis.

ITEMooBUCZooYLCule

(1) Si A et B sont des ensembles finis disjoints, alors $A \cup B$ est fini et

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B). \quad (1.260)$$

ITEMooCCWOooYwgGBp

(2) Si A et B sont des ensembles finis, alors $A \cup B$ est fini.

ITEMooYJSZooXQXkOX

(3) Si A est fini et si $B \subset A$ alors

$$\text{Card}(A \setminus B) = \text{Card}(A) - \text{Card}(B). \quad (1.261)$$

ITEMooSWJCoEpBVkG

(4) Si A et B sont des ensembles quelconques, alors

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B). \quad (1.262)$$

ITEMooJDUUooVMvAOon

(5) Si les $\{A_i\}_{i=1, \dots, n}$ sont des ensembles deux à deux disjoints, alors

$$\text{Card} \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^n \text{Card}(A_i). \quad (1.263)$$

ITEMooNMFSoobvsNyyq

(6) Si I ou J est infini, alors $I \cup J$ est infini.

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** Puisque A et B sont finis, la proposition 1.204 nous dit qu'il existe des naturels N et M ainsi que des bijections $\varphi_A: \{0, \dots, N\} \rightarrow A$ et $\varphi_B: \{0, \dots, M\} \rightarrow B$. Maintenant l'application

$$\begin{aligned} \varphi: \{0, \dots, M + N + 1\} &\rightarrow A \cup B \\ n &\mapsto \begin{cases} \varphi_A(n) & \text{si } n \leq N \\ \varphi_B(n - N - 1) & \text{si } n > N \end{cases} \end{aligned} \quad (1.264)$$

est une bijection. Le fait que A et B soient disjoints est important pour l'injectivité. La proposition 1.204 nous dit qu'alors $A \cup B$ est fini. De plus, par définition le cardinal de $A \cup B$ est $N + M$.

(2) **Pour (2)** Nous ne supposons plus que A et B sont disjoints. Nous posons $I = A$ et $J = B \setminus A$. Avec ça, I et J sont disjoints et finis (comme parties des ensembles finis, lemme 1.70), et vérifient $I \cup J = A \cup B$. Le point (1) indique que $I \cup J$ est fini.

(3) **Pour (3)**

L'ensemble A peut être écrit sous la forme d'une union disjointe : $A = B \cup (A \setminus B)$. Les ensembles B et $A \setminus B$ étant disjoints, nous avons

$$\text{Card}(A) = \text{Card}(B) + \text{Card}(A \setminus B). \quad (1.265)$$

- (4) **Pour (4)** Nous utilisons quelques égalités d'ensembles pour ramener $A \cup B$ à des cas déjà traités :

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A) = A \cup (B \setminus (A \cap B)). \quad \text{EQooSZDYooPBodYy} \quad (1.266)$$

Nous avons en particulier utilisé $B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$. La chose intéressante dans (1.266) est que l'union est disjointe et que $A \cap B \subset B$. Nous pouvons donc écrire

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B \setminus (A \cap B)) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B). \quad (1.267)$$

- (5) **Pour (5)** Récurrence en utilisant le point (4).
 (6) **Pour (6)** Toute partie d'un ensemble fini est finie (lemme 1.70). Donc si $I \cup J$ était fini, I et J devraient l'être.

□

1.7.2 Minumum, maximum

LEMooPCR FooXRG rUr

Lemme 1.208 ([39]).

Si E est un ensemble ordonné et si A est une partie finie non vide totalement ordonnée de E , alors A possède un unique minimum et un unique maximum⁸⁶.

Démonstration. En plusieurs parties.

- (1) **Existence maximum** Soit un ensemble E totalement ordonné. Nous faisons par récurrence⁸⁷ sur le cardinal de la partie finie (proposition 1.204 pour la définition du cardinal).
 Si $\text{Card}(A) = 1$, alors nous avons $A = \{a\}$ pour un certain $a \in E$ et ce a est un maximum de A .
 Sinon nous passons à la récurrence. Nous supposons que pour toute partie B totalement ordonnée de cardinal n , il existe un $m_B \in B$ tel que $m_B \geq x$ pour tout $x \in B$. Soit une partie A totalement ordonnée de cardinal $n + 1$. Nous prouvons que A possède un maximum.
 Soit $a \in A$. La partie $B = A \setminus \{a\}$ est de cardinal $n - 1$ (lemme 1.207(3)). Par hypothèse de récurrence, l'ensemble B admet un maximum que nous notons b . Il y a deux possibilités : $a > b$ ou $a < b$.
 (1a) **Si $a > b$** Alors nous avons $a \geq x$ pour tout $x \in A = B \cup \{a\}$. En effet si $x \in B$ nous avons $x < b < a$. Et si $x = a$ nous avons $a = x$.
 (1b) **Si $b > a$** Alors $b \geq x$ pour tout $x \in A = B \cup \{a\}$. En effet si $x \in B$ nous avons $b \geq x$ par définition de b et si $x = a$ nous avons $b > x$ par hypothèse.
 (2) **Unicité maximum** En ce qui concerne l'unicité, si a et b sont des maximums d'une partie A , alors $a \geq b$ parce que $b \in A$ et $b \geq a$ parce que $a \in A$. La définition 1.23(2) de la relation d'ordre conclu que $a = b$.

Pour l'existence et l'unicité du minimum, nous adaptons juste ce que nous venons de faire⁸⁸. □

LEMooOEJ OooOgaxzi

Lemme-Définition 1.209 ([1]).

Si A est une partie non vide de $\mathbb{N}$, il existe un unique élément $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{cases} m \in A \\ m \leq x \forall x \in A. \end{cases} \quad \begin{array}{l} (1.268a) \\ (1.268b) \end{array}$$

Cet élément est noté $\min(A)$ et nommé **minimum de A** .

Si A est majoré, il existe un unique élément $M \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{cases} M \in A \\ M \geq x \forall x \in A. \end{cases} \quad \begin{array}{l} (1.269a) \\ (1.269b) \end{array}$$

Cet élément est noté $\max(A)$ et nommé **maximum de A** .

86. Définition 1.31.

87. Proposition 1.119.

88. Je n'ai pas vérifié. Faites-le et écrivez-moi si ça pose un problème.

Démonstration. En plusieurs parties.

- (1) **Existence minimum** Soit $a \in A$. Nous considérons $E = A \cap \{0, \dots, a\}$. C'est un ensemble non vide (il contient a) et fini en tant que partie de $\{0, \dots, a\}$ (utilisation des lemmes 1.70 et de 1.202). Donc 1.208 dit que E possède un minimum. Soit m ce minimum.
Si $x \in A$ alors soit $x \in E$ (et alors $l \leq x$), soit x n'est pas dans E et alors $x \geq a \geq m$.
- (2) **Existence maximum** Soit un majorant M de A . Si $M \in A$ alors on est bon. Sinon nous posons

$$E = \bigcap_{a \in A} \{a, \dots, M\}. \quad (1.270)$$

C'est un ensemble non vide parce qu'il contient M . Et il est fini parce qu'il est contenu dans $\{0, \dots, M\}$ qui est fini.

Nous considérons le minimum μ de E . Pour tout $a \in A$ nous avons $\mu \in \{a, \dots, M\}$ et donc $\mu \geq a$.

Nous devons encore prouver que $\mu \in A$. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors pour tout $a \in A$ nous avons $\mu \in \{a, \dots, M\}$. Mais $\mu \neq a$, donc $\mu \in \{a + 1, \dots, M\}$. Autrement dit, $\mu \in \{a + 1, \dots, M\}$. Donc

$$\mu - 1 \in \bigcap_{a \in A} \{a, \dots, M\} = E. \quad (1.271)$$

Contradiction à propos de la minimalité de μ .

- (3) **Unicité minimum** Soient des minima m_1 et m_2 . Nous avons $m_1 \leq m_2$ parce que $m_2 \in A$ et m_1 est un minimum de A . De même $m_2 \leq m_1$. Donc $m_1 = m_2$.
- (4) **Unicité maximum** De même que l'unicité du minimum.

□

LEMooKUWUooPLWelf

Lemme 1.210.

Toute partie finie non vide de $\mathbb{N}$ est majorée et minorée.

Démonstration. Cas particulier du lemme 1.208.

□

LEMooGQUWooYJQfJB

Lemme 1.211.

Une partie de $\mathbb{N}$ admet un maximum si et seulement si elle est finie.

DefEnsembleDenombrable

Définition 1.212.

Un ensemble est **dénombrable** si il peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$. Il est **non dénombrable** si il est infini et ne peut pas être mis en bijection avec $\mathbb{N}$.

Une chose vraiment amusante avec cette définition que l'on met en rapport avec la définition 1.68, c'est qu'un ensemble fini n'est ni dénombrable ni non dénombrable⁸⁹.

1.7.3 Dénombrabilité et ensemble des naturels

PROPooOBKMooWEGCvM

Proposition 1.213 ([1, 15]).

Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Démonstration. Soit A , une partie infinie de $\mathbb{N}$.

- (1) **Définition de σ** Nous voulons construire une application $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow A$ telle que

$$\begin{cases} \sigma(0) = \min(A) & \text{SUBEQooEIEMooZcTOWT} \\ \sigma(k+1) = \min(A \setminus \sigma(\{0, \dots, k\})) & \text{SUBEQooWWOAAooAEfrPx} \end{cases} \quad (1.272a) \quad (1.272b)$$

Les lâches, par prudence, diront juste que c'est défini par récurrence et n'insisteront pas. Nous, nous insistons.

⁸⁹. Beaucoup de sources disent qu'un ensemble est dénombrable lorsqu'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$. Cela laisse la porte ouverte aux ensembles finis. Par exemple Wikipédia[40].

Nous allons définir $\sigma(n)$ à l'aide du théorème 1.120. Pour cela nous posons $E = \mathcal{P}(A)$, $b = \emptyset$ et

$$g: E \rightarrow E$$

$$Z \mapsto \begin{cases} A & \text{si } Z = A \\ Z \cup \{\min(A \setminus Z)\} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.273)$$

Notons que la proposition 1.135(2) nous indique que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un minimum ; la définition de g a donc un sens. Le théorème 1.120 donne alors une application $f: \mathbb{N} \rightarrow E$ telle que

$$(1a) \quad f(0) = b = \emptyset$$

$$(1b) \quad f(n+1) = g(f(n)) \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Prouvons par récurrence que $f(n)$ est un ensemble fini pour tout n . D'abord $f(0) = \emptyset$. Ensuite, si $n \geq 0$ est tel que $f(n)$ est fini, alors en particulier $f(n) \neq A$ et nous avons

$$f(n+1) = g(f(n)) = f(n) \cup \{\min(A \setminus f(n))\}. \quad (1.274)$$

Dans ce cas, $f(n+1)$ est également fini comme union de deux ensembles finis.

Nous posons

$$\sigma(n) = \min(A \setminus f(n)). \quad (1.275)$$

Avec $n = 0$, nous avons $\sigma(0) = \min(A \setminus \emptyset) = \min(A)$. La condition (1.272a) est donc déjà satisfaite.

Nous devons encore prouver (1.272b). Pour tout n , la relation entre $f(n)$ et $\sigma(n)$ est donnée par

$$\begin{cases} f(0) = \emptyset & (1.276a) \\ f(n+1) = f(n) \cup \sigma(n). & (1.276b) \end{cases}$$

Par récurrence nous avons alors

$$f(n) = \bigcup_{k=0}^{n-1} \{\sigma(k)\} = \sigma(\{0, \dots, n-1\}) \quad (1.277)$$

pour tout $n \geq 1$. Nous avons alors la condition 1.272b en substituant (1.277) dans la définition (1.275) écrite avec $n+1$:

$$\sigma(n+1) = \min(A \setminus f(n+1)) = \min(A \setminus \sigma(\{0, \dots, n\})). \quad (1.278)$$

- (2) **σ est strictement croissante** Vu que $A \setminus \sigma\{0, \dots, k\} \subset A \setminus \sigma\{0, \dots, k-1\}$, le minimum est plus grand ou égal : $\sigma(k+1) \geq \sigma(k)$. Mais $\sigma(k+1)$ est sélectionné dans l'ensemble $A \setminus \sigma\{0, \dots, k\}$, qui ne contient justement pas $\sigma(k)$. Donc $\sigma(k+1) \neq \sigma(k)$.
- (3) **σ est définie sur $\mathbb{N}$** Il faut montrer que pour tout k , l'ensemble $A \setminus \sigma\{0, \dots, k\}$ est non vide. Si il l'était, cela signifierait que $A \subset \sigma\{0, \dots, k\}$. Par le lemme 1.73(1), la partie $\sigma\{0, \dots, k\}$ est finie dans $\mathbb{N}$. Le lemme 1.70 dit alors qu'en tant que partie de $\sigma\{0, \dots, k\}$, l'ensemble A est fini. Mais comme les hypothèses disent que A est infini, nous avons une contradiction et nous concluons que σ est bien définie sur tout $\mathbb{N}$.
- (4) **σ est injective** Une application $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante est injective par la proposition 1.139.
- (5) **σ est surjective** Soit $a \in A$. Vu que σ est strictement croissante et que $\sigma(0) \geq 0$, nous avons $\sigma(a) \geq a$. Si $\sigma(a) = a$ nous avons terminé. Supposons $\sigma(a) > a$. Alors

$$\min(A \setminus \sigma\{0, \dots, a\}) > a. \quad (1.279)$$

Si $\sigma(\{0, \dots, a\})$ ne contenait pas a , alors $A \setminus \sigma(\{0, \dots, a\})$ le contiendrait et nous n'aurions pas l'inégalité (1.279). Donc $a \in \sigma(\{0, \dots, a\})$ et a est bien dans l'image de σ .



NORMooPartieDenombrableParCantorBernstein

1.214.

La proposition 1.213 pourrait être prouvée plus facilement en acceptant le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein 1.75. Il existe une injection $A \rightarrow \mathbb{N}$ parce que A est une partie de $\mathbb{N}$. Mais puisque A est infini, il possède une partie dénombrable. Cela donne une surjection $A \rightarrow \mathbb{N}$ et donc une injection $\mathbb{N} \rightarrow A$. Le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein conclut.

Cela dit, une telle preuve demanderait des outils plus complexes.

NORMooBijectionNNMadore

1.215.

La proposition suivante donne une bijection explicite entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Elle n'a rien de transcendant, mais je ne résiste pas à la donner ici parce qu'elle est utilisée dans l'article *Un peu de programmation transfinie* de David Madore⁹⁰. Son utilité est de pouvoir créer un langage de programmation pouvant traiter des paires d'entiers rien qu'en traitant des entiers.

PROPoolPKUooAlsYJg

Proposition 1.216 (Une bijection $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$).

La fonction

$$f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} y^2 + x & \text{si } x < y \\ x^2 + x + y & \text{si } y \leq x. \end{cases} \quad (1.280)$$

est une bijection.

Démonstration. Il s'agit de prouver qu'elle est injective et surjective. Dans la suite, tous les nombres sont des entiers positifs.

(1) f est injective

Pour $k \in \mathbb{N}$ donné, nous allons prouver que

- (1a) l'équation $f(x, y) = k$ possède au maximum une solution avec $x < y$,
- (1b) l'équation $f(x, y) = k$ possède au maximum une solution avec $y \leq x$,
- (1c) si $k = y^2 + x$ avec $x < y$ alors il est impossible que $k = x'^2 + x' + y'$ avec $y' \leq x'$.

On y va.

- (1a) Nous supposons $y^2 + x = t^2 + z$ avec $x < y$ et $z < t$. Pour fixer les idées, nous supposons $t > y$ et nous posons $t = y + s$ ($s \geq 1$). En substituant, et en isolant z ,

$$z = x - 2sy - s^2 \quad (1.281a)$$

$$< x - 2sy \quad (1.281b)$$

$$< x - 2sx \quad (1.281c)$$

$$= x(1 - 2s) \quad (1.281d)$$

$$< 0. \quad (1.281e)$$

Impossible parce que $z \geq 0$.

- (1b) De même nous supposons $x^2 + x + y = z^2 + z + t$ avec $y \leq x$ et $t \leq z$. Nous posons $z = x + s$, et nous déballons le même genre de calculs en isolant t .
- (1c) Enfin nous supposons $y^2 + x = z^2 + z + t$ avec $x < y$ et $t \leq z$. Les plus courageux diviseront en trois cas : $y < z$, $y = z$ et $y > z$ et feront les calculs. Par exemple, pour le cas $y > z$ nous posons $y = z + s$ et nous substituons :

$$(y + s)^2 + x = z^2 + z + t \quad (1.282)$$

qui donne

$$x = z + t - 2zs - s^2 < 2z - 2zs - s^2 = 2z(1 - s) - s^2 \leq -s < 0 \quad (1.283)$$

parce que $s \geq 1$, donc $1 - s \leq 0$.

90. Et comme j'aime beaucoup cet article, il me fallait une excuse pour le placer ici.

<http://www.madore.org/~david/weblog/d.2017-08-18.2460.html>.

(2) **f est surjective**

Nous devons prouver que tous les éléments de $\mathbb{N}$ sont dans l'image de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par f . En premier lieu, $0 = f(0, 0)$. C'est un bon début. Soit $a \in \mathbb{N}$ non nul ; nous montrons que tous les nombres de a^2 à $(a+1)^2$ sont des images de f . D'abord $a^2 = f(0, a)$, ensuite les nombres

$$f(1, a), f(2, a), \dots, f(a-1, a) \quad (1.284)$$

prennent les valeurs $a^2 + 1, \dots, a^2 + a - 1$. Enfin nous avons $f(a, 0) = a^2 + a$ et les nombres $f(a, 1), \dots, f(a, a)$ prennent les valeurs de $a^2 + a + 1$ à $a^2 + 2a = (a+1)^2 - 1$.

□

REMooBijectionNNOOrdinaux

Remarque 1.217.

Sachez que cette fonction s'étend aux ordinaux (mais là ce n'est plus pour rigoler).

CORooNRPIooZPSmq

Corolaire 1.218.

Il existe des parties $\{\mathbb{N}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ telles que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{N}_i = \mathbb{N}$ et que chaque $\mathbb{N}_i$ soit en bijection avec $\mathbb{N}$

Démonstration. Nous considérons la bijection $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ donnée par (l'inverse de celle donnée) par la proposition 1.216, et nous posons

$$\mathbb{N}_i = f^{-1}(i, \mathbb{N}). \quad (1.285)$$

L'application

$$f: \mathbb{N}_i \rightarrow \{(i, k)\}_{k \in \mathbb{N}} \quad (1.286)$$

est une bijection. Or l'ensemble $\{(i, k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ est évidemment en bijection avec $\mathbb{N}$. Par composition nous avons le résultat.

□

LEMooDLWFooNAJbbq

Lemme 1.219 ([1]).

Si il existe une surjection $\mathbb{N} \rightarrow A$, alors A est fini ou dénombrable.

Démonstration. Pour chaque $a \in A$, l'ensemble $f^{-1}(a)$ est une partie de $\mathbb{N}$.

- (1) **Une application** La proposition 1.135(2) nous permet de poser

$$\begin{aligned} \sigma: A &\rightarrow \mathbb{N} \\ a &\mapsto \min(f^{-1}(a)). \end{aligned} \quad (1.287)$$

- (2) **σ est injective** Supposons que $\sigma(a) = \sigma(b)$. Nous appelons x ce nombre :

$$x = \min(f^{-1}(a)) = \min(f^{-1}(b)). \quad (1.288)$$

Nous avons $x \in f^{-1}(a) \cap f^{-1}(b)$, ce qui implique que $f(x) = a$ et que $f(x) = b$; donc $a = b$. Donc σ est une injection.

- (3) **A est infini** Si A est fini, le lemme est prouvé. Donc à partir de maintenant nous supposons que A est infini. Le but est de prouver qu'il est dénombrable, c'est-à-dire de construire une bijection $A \rightarrow \mathbb{N}$.

- (4) **$\sigma(A)$ est dénombrable** Puisque $\sigma: A \rightarrow \mathbb{N}$ est injective et que A est infini, la proposition 1.72 dit que $\sigma(A)$ est infini dans $\mathbb{N}$. La proposition 1.213 nous dit alors que $\sigma(A)$ est dénombrable.

Soit une bijection $\varphi: \sigma(A) \rightarrow \mathbb{N}$.

- (5) **La candidate bijection** Nous posons

$$f = \varphi \circ \sigma: A \rightarrow \mathbb{N} \quad (1.289)$$

et nous allons prouver que c'est une bijection.

- (6) **Injective** Puisque φ et σ sont injectives, l'égalité $(\varphi\sigma)(a) = (\varphi\sigma)(b)$ implique immédiatement $a = b$.
- (7) **Surjective** Soit $k \in \mathbb{N}$. Puisque φ et σ sont des injections, nous pouvons poser $a = (\sigma^{-1}\varphi^{-1})(k)$. Il est alors immédiat que $f(a) = k$.

□

PROPooENTPooSPmhY

Proposition 1.220 ([1, 40]).

Une union dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.

Démonstration. Soient A_i des ensembles finis ou dénombrables. Nous posons $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, et nous considérons les parties $\mathbb{N}_i$ du corolaire 1.218. Puisque A_i est dénombrable ou fini et que $\mathbb{N}_i$ est dénombrable, il existe une surjection $\varphi_i: \mathbb{N}_i \rightarrow A_i$.

Nous définissons $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ par $n \in \mathbb{N}_{s(n)}$, et nous posons enfin

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{N} &\rightarrow A \\ n &\mapsto \varphi_{s(n)}(n). \end{aligned} \tag{1.290}$$

Nous prouvons que φ est surjective.

Soit $a \in A_i$. Il existe $n \in \mathbb{N}_i$ tel que $a = \varphi_i(n)$. Mais comme $n \in \mathbb{N}_i$, nous avons $s(n) = i$. Donc

$$a = \varphi_i(n) = \varphi_{s(n)}(n) = \varphi(n). \tag{1.291}$$

Donc $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow A$ est surjective.

Le lemme 1.219 conclut que A est fini ou dénombrable.

□

LEMooDTAEooIBdHyo

Lemme 1.221.

Si A est dénombrable et si il existe une surjection $f: A \rightarrow B$, alors B est fini ou dénombrable.

Démonstration. Étant donné que A est dénombrable, il existe une bijection $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow A$. L'application $f \circ \varphi: \mathbb{N} \rightarrow B$ est donc une surjection de $\mathbb{N}$ vers B . Donc B est fini ou dénombrable par le lemme 1.219.

□

<++>

LEMooSRZWooASgEfy

Lemme 1.222.

Si A est un ensemble fini ou dénombrable, alors il existe une surjection $\mathbb{N} \rightarrow A$.

LEMooKFBAooHxgOsg

Lemme 1.223 ([1]).

Si A est dénombrable, alors l'ensemble des parties finies de A est dénombrable.

LEMooRXSRooBUWOyb

Lemme 1.224 ([1]).

Si N est un ensemble dénombrable, alors il existe une bijection $g: \{1, 2\} \times N \rightarrow N$.

Démonstration. D'abord nous définissons une bijection $\varphi: \{0, 1\} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ par

$$\begin{aligned} \varphi: \{0, 1\} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ (n, k) &\mapsto 2k + n. \end{aligned} \tag{1.292}$$

Ensuite si $f: \mathbb{N} \rightarrow N$ est une bijection, il suffit de poser $g(n, k) = f(\varphi(n, k))$.

□

PROPooDMZHooXouDrQ

Proposition 1.225 (Produit d'ensembles dénombrables[40]).

Deux résultats.

ITEMooWNBGooZjoIjZ

(1) *Si A et B sont dénombrables, alors $A \times B$ est dénombrable.*

(2) *Si N est un ensemble dénombrable, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble N^n est dénombrable.*

Démonstration. La proposition 1.216 donne une bijection $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Par hypothèse sur A et B nous avons des bijections $\varphi: A \rightarrow \mathbb{N}$ et $\sigma: B \rightarrow \mathbb{N}$. Nous posons

$$\begin{aligned} f: A \times B &\rightarrow \mathbb{N} \\ (a, b) &\mapsto f(\varphi(a), \sigma(b)) \end{aligned} \quad (1.293)$$

et nous prouvons que c'est une bijection.

- (1) **Injectif** Supposons que $g(a, b) = g(x, y)$. Vu que f est une bijection, nous avons $\varphi(a) = \varphi(x)$ et $\sigma(b) = \sigma(y)$. Étant donné que φ et σ sont des bijections, ça donne $a = x$ et $b = y$. Donc $(a, b) = (x, y)$.
- (2) **Surjectif** Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous posons $(a, b) = f^{-1}(n)$ puis $x = \varphi^{-1}(a)$ et $y = \sigma^{-1}(b)$. Avec ça nous avons

$$n = f(a, b) = f(\varphi(x), \sigma(y)) = g(a, b). \quad (1.294)$$

Donc n est bien dans l'image de g .

En ce qui concerne le fait que A^n soit dénombrable, nous le faisons par récurrence. Pour $n = 1$, nous savons que $A^n = A$ est dénombrable. Si nous supposons que A^{n-1} est dénombrable, alors nous avons $A^n = A^{n-1} \times A$ qui est dénombrable en tant que produit cartésien de deux ensembles dénombrables. $\square$

NORMooDenombrablesPlusPetitsInfinis

1.226.

Les ensembles dénombrables sont les plus petits ensembles infinis possibles, comme en témoigne la proposition suivante.

PROPooUIPAooCUEFme

Proposition 1.227.

Tout ensemble infini contient une partie en bijection avec $\mathbb{N}$.

Démonstration. Soient un ensemble infini E_0 et une partie propre E_1 en bijection avec E_0 . Nous notons $\varphi: E_0 \rightarrow E_1$ une bijection.

Soit $x_0 \in E_0 \setminus E_1$ (axiome du choix et tout ça). Nous définissons

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{N} &\rightarrow \{\varphi^k(x_0)\} \\ n &\mapsto \varphi^n(x_0) \end{aligned} \quad (1.295)$$

et nous allons prouver que c'est une bijection. Que ce soit surjectif est immédiat. Pour l'injectivité, soit $\varphi^k(x_0) = \varphi^l(x_0)$ avec $k \neq l$. Supposons pour fixer les notations que $k > l$. Alors, vu que φ est inversible nous pouvons écrire

$$x_0 = \varphi^{k-l}(x_0) = \varphi(\varphi^{k-l-1}(x_0)) \quad (1.296)$$

où il est entendu que $\varphi^0(x_0) = x_0$. Cela signifie que x_0 est dans l'image de φ , c'est-à-dire dans E_1 , ce que nous avons exclu par choix de x_0 dans $E_0 \setminus E_1$. Donc en réalité $\varphi^k(x_0) \neq \varphi^l(x_0)$ dès que $k \neq l$. $\square$

PropQEPOozLqOQ

Proposition 1.228.

Toute partie d'un ensemble fini est finie, et toute partie d'un ensemble dénombrable est finie ou dénombrable.

Démonstration. Soient un ensemble E ainsi qu'une partie infinie $A \subset E$. Nous notons $\varphi: A \rightarrow A'$ une bijection entre A et une partie propre A' de A . Dans ce cas, l'application

$$\begin{aligned} \phi: E &\rightarrow (E \setminus A) \cup A' \\ x &\mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in E \setminus A \\ \varphi(x) & \text{si } x \in A \end{cases} \end{aligned} \quad (1.297)$$

est une bijection entre E et une partie propre de E . Donc E est infini.

Par contraposée nous déduisons que toute partie d'un ensemble fini est finie.

En ce qui concerne les parties d'ensembles dénombrables, soit une partie A d'un ensemble dénombrable E . Nous avons une bijection $t\varphi: E \rightarrow \mathbb{N}$. La restriction $\varphi: A \rightarrow \varphi(A)$ est une bijection entre A et une partie de $\mathbb{N}$.

- Si $\varphi(E)$ est infinie, elle est dénombrable (proposition 1.213). Dans ce cas A est en bijection avec un ensemble dénombrable. Il est donc dénombrable.
- Si $\varphi(E)$ est fini, alors le lemme 1.73(2) nous dit que A est fini.

□

LEMooGTOTooFbpvzU

Lemme 1.229.

Soit un ensemble E non dénombrable ainsi qu'une application $f: E \rightarrow F$ où F est un ensemble quelconque. Si $f(E)$ est dénombrable (ou fini), alors il existe $y \in f(E)$ tel que $f^{-1}(y)$ est indénombrable.

Démonstration. Nous avons

$$E = \bigcup_{y \in F} f^{-1}(y). \quad (1.298)$$

Si tous les $f^{-1}(y)$ sont dénombrables, alors E est une union dénombrable (F est dénombrable) d'ensembles dénombrables. Il serait donc dénombrable (proposition 1.220), ce qui est contraire à l'hypothèse. □

1.7.4 Ajouter ou soustraire des cardinalités

NCSRMooOperationsCardinaux

1.230.

Nous allons prouver une série de résultats que nous pourrions résumer en « ajouter ou retrancher des parties de cardinalité plus petite ne change pas la cardinalité ».

LEMooUFCAooSyZtZj

Lemme 1.231 ([1]).

Si A est infini et B est fini, alors $A \cup B \approx A$.

Démonstration. Nous supposons que A et B sont disjoints⁹¹. La proposition 1.204 nous permet de considérer une bijection $\psi: \{1, \dots, n\} \rightarrow B$.

Puisque A est infini, la proposition 1.227 nous permet de considérer $N \subset A$ et une bijection $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow N$.

Maintenant, il s'agit seulement d'insérer B dans A en le mettant « au début » de N et en décalant les autres éléments. La bijection est

$$f: A \cup B \rightarrow A$$

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in A \setminus N \\ \varphi(\varphi^{-1}(x) + n) & \text{si } x \in N \\ \varphi(\psi^{-1}(x)) & \text{si } x \in B. \end{cases} \quad (1.299)$$

□

LEMooXMTVDooIWLWis

Lemme 1.232.

Si A est infini et si A est surpotent à B , alors $A \approx A \cup B$.

Démonstration. Il existe évidemment une injection $A \rightarrow A \cup B$. Donc le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein 1.75 nous indique que trouver une injection $A \cup B \rightarrow A$ suffira pour la peine.

Nous allons utiliser le lemme de Zorn 1.37 avec l'ensemble

$$\mathcal{A} = \left\{ (X, \varphi_X) \text{ tel que } \begin{cases} X \subset B \\ \varphi_X: A \cup X \rightarrow A \text{ est injective.} \end{cases} \right\} \quad (1.300)$$

muni de l'ordre de l'inclusion : $(X, \varphi_X) < (Y, \varphi_Y)$ si $X \subset Y$ et $\varphi_Y(x) = \varphi_X(x)$ pour tout $x \in A \cup X$.

91. Adaptez la démonstration au cas où l'intersection n'est pas vide.

- (1) **A est inductif** Soit une famille $\mathcal{F} = \{(X_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ complètement ordonnée indexée par l'ensemble I . En posant $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ et $\varphi(x) = \varphi_i(x)$ dès que $x \in A \cup X_i$, l'élément (X, φ) majore $\mathcal{F}$.
- (2) **Un maximum** Le lemme de Zorn nous assure que $\mathcal{A}$ possède (au moins) un élément maximal. Soit un tel élément maximum (X, φ) .
- (3) **$X \approx B$** Ah oui, vous auriez aimé avoir $X = B$. Mais non ; il n'y a pas de garantie. Nous allons montrer que $X \approx B$, et ça suffira.
Vu que $X \subset B$, si X n'est pas équipotent à B , il est strictement inclus dans B . Nous pouvons donc considérer

$$b \in B \setminus X \quad (1.301a)$$

$$a \in A \setminus \varphi(X). \quad (1.301b)$$

Nous considérons alors l'élément $(Y, \psi) \in \mathcal{A}$ défini par

$$Y = X \cup \{b\} \quad (1.302a)$$

$$\psi(x) = \begin{cases} a & \text{si } x = b \\ \varphi(x) & \text{sinon .} \end{cases} \quad (1.302b)$$

Cet élément majore (X, φ) .

Donc $X \approx B$.

- (4) **Résumé de la situation** Nous avons $A \approx A \cup X$ ainsi qu'une injection $\varphi: A \cup X \rightarrow A$ et une bijection $\psi: B \rightarrow X$.
- (5) **Conclusion si A est disjoint de B** Si A et B sont disjoints, nous avons une bijection

$$l: A \cup B \rightarrow A$$

$$x \mapsto \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in A \\ \varphi(\psi(x)) & \text{si } x \in B. \end{cases} \quad (1.303)$$

- (6) **Conclusion si A n'est pas disjoint de B** Il suffit de poser $C = B \setminus A$ et nous avons

$$A \cup B = [A \cup (A \cap B)] \cup C. \quad (1.304)$$

Cette union est disjointe, $A \cup (A \cap B)$ est surpotent à A et C est subpotent à B . La conclusion est donc encore valable.

□

NORMooBijectionApplicThMesure

1.233.

La proposition suivante sera utilisée en théorie de la mesure, dans l'exemple 14.73.

PropVCSooMzmIX

Proposition 1.234 ([41, 15]).

Si S est un ensemble infini alors il existe une bijection $\varphi: \{0, 1\} \times S \rightarrow S$.

Démonstration. Nous posons $A = \{0\} \times S$ et $B = \{1\} \times S$. L'ensemble A est infini et surpotent à B (pas strictement, mais quand même).

Donc A est idempotent à $A \cup B$ par le lemme 1.232. Mais A est idempotent à S , donc

$$S \approx A \approx A \cup B = \{0, 1\} \times S. \quad (1.305)$$

□

CORooJCSlooOeOICJ

Corolaire 1.235.

Si A est un ensemble infini, alors A possède deux sous-ensembles disjoints A_1 et A_2 qui sont tous deux en bijection avec A .

Démonstration. La proposition 1.234 donne une bijection $\varphi: \{0, 1\} \times A \rightarrow A$. Il suffit de poser $A_1 = \varphi(0, A)$ et $A_2 = \varphi(1, A)$. $\square$

NORMooInfiniteCopies

1.236.

Maintenant que nous pouvons mettre dans A deux copies disjointes de A , il n'est pas très étonnant que nous puissions en mettre une infinité dénombrable. Nous verrons ça dans 1.237.

PROPooFKBEooKXqujV

Proposition 1.237.

Si A est infini, alors $A \times \mathbb{N} \approx A$.

Démonstration. La démonstration se base sur le fait qu'à l'intérieur de A , nous pouvons construire autant de copies de A deux à deux disjointes que nous le voulons. La k^e « copie » sera naturellement l'image de $k \times A$.

Voyons tout cela en détail.

- (1) **Ce que nous allons faire** Nous allons construire, pour tout $i \geq 1$ des parties $A_i, B_i \subset A$ telles que

- $A_i \cap B_i = \emptyset$,
- $A_i, B_i \subset B_{i-1}$,
- $A_i \approx B_i \approx A$,
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$

- (2) **La construction** Nous commençons à zéro en utilisant le corolaire 1.235 pour construire des parties disjointes A_0 et B_0 de A telles que $A_0 \approx B_0 \approx A$.

Ensuite, puisque $B_0 \approx A$, il existe A_1 et B_1 dans B_0 tels que $A_1 \cap B_1 = \emptyset$ et $A_1 \approx B_1 \approx B_0 \approx A$. Cela est notre construction pour $i = 1$.

Pour la récurrence, puisque $A_i \approx B_i \approx A$, nous considérons A_{i+1} et B_{i+1} dans B_i tels que $A_{i+1} \cap B_{i+1} = \emptyset$ et $A_{i+1} \approx B_{i+1} \approx B_i \approx A$. C'est encore le corolaire 1.235 qui fait le travail.

- (3) **Les propriétés** Nous avons $A_i \cap A_{i+1} = \emptyset$ parce que $A_i \cap A_{i+1} \subset A_i \cap B_i = \emptyset$. Nous devons encore montrer que $A_i \cap A_j = \emptyset$ dès que $i \neq j$. Supposons que $j > i$. Nous avons les inclusions

$$A_j \subset B_{j-1} \subset B_{j-2} \subset \dots \subset B_i. \quad (1.306)$$

Donc $A_j \cap A_i \subset B_i \cap A_i = \emptyset$.

- (4) **Une injection** Nous pouvons à présent écrire une injection qui termine presque la preuve. Pour cela nous considérons pour tout i , une bijection $\psi_i: A \rightarrow A_i$. Ensuite nous posons

$$\begin{aligned} \varphi: A \times \mathbb{N} &\rightarrow A \\ (a, k) &\mapsto \psi_k(a). \end{aligned} \quad (1.307)$$

Si $\varphi(a, k) = \varphi(b, l)$, alors $\psi_k(a) = \psi_l(b)$. L'élément $\psi_k(a)$ est donc dans $A_k \cap A_l$; ce n'est possible que si $k = l$. Donc $\psi_l(a) = \psi_l(b)$. Cette dernière égalité n'est possible que si $a = b$ parce que ψ_l est une bijection.

Donc φ est une injection, et nous avons prouvé que $A \times \mathbb{N} \leq A$.

- (5) **La bijection** Nous venons de prouver que $A \times \mathbb{N} \leq A$. La surpotence $A \times \mathbb{N} \geq A$ étant évidente, le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein 1.75 conclut que $A \times \mathbb{N} \approx A$. $\square$

LEMooDHWSoofqhano

Lemme 1.238 ([1]).

Soit un ensemble A muni de deux sous-ensembles B et B' équipotents et disjoints. Alors $A \setminus B$ est équipotent à $A \setminus B'$.

Démonstration. Soit une bijection $\psi: B' \rightarrow B$. L'application

$$\begin{aligned} \varphi: A \setminus B &\rightarrow A \setminus B' \\ x &\mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \notin B' \\ \psi(x) & \text{si } x \in B'. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.308)$$

est la bijection cherchée. $\square$

LEMooIVCBooHWQiZB

Lemme 1.239 ([42]).

Si A est un ensemble infini et si $B < A$, alors $A \approx A \setminus B$.

Démonstration. Nous pouvons écrire

$$A = (A \setminus B) \cup B. \quad (1.309)$$

Le théorème de comparabilité cardinale 1.77 nous indique que soit $A \setminus B \leq B$, soit $A \setminus B \geq B$. Nous allons étudier les deux cas.

- (1) **Si $A \setminus B \geq B$** Dans ce cas, $(A \setminus B) \cup B \approx A \setminus B$ par le lemme 1.232. Alors, notre résultat est prouvé parce que $A = (A \setminus B) \cup B \approx A \setminus B$.
- (2) **Si $A \setminus B \leq B$** Dans ce cas, le lemme 1.232 nous indique que $A = (A \setminus B) \cup B \approx B$. Mais $A \approx B$ est exclu par l'hypothèse. Ce cas est donc impossible.

$\square$

LEMooMRVQooUZSSyL

Lemme 1.240 ([1]).

Si A est infini et si B est une partie strictement subpotente de A , alors il existe $U \subset A$ disjoint de B et équipotent à B .

Démonstration. Le lemme 1.239 nous donne une bijection $\varphi: A \rightarrow A \setminus B$. Il suffit alors de poser $U = \varphi(B)$. Cette partie est disjointe de B parce que φ prend ses valeurs dans $A \setminus B$. $\square$

Lemme 1.241 ([43]).

Soit un ensemble infini A ainsi qu'un sous-ensemble $B \subset A$. Nous supposons l'existence d'une fonction surjective $f: B \rightarrow B \times B$.

Alors $B \leq B \times B \leq B \leq A$.

Démonstration. La première est l'hypothèse sur f . La seconde est l'existence (évidente) d'une surjection $B \times B \rightarrow B$. La troisième est le fait que B soit inclus dans A . $\square$

LEMooPOEFooXaifhT

Lemme 1.242 ([43]).

Soit un ensemble infini A ainsi qu'un sous-ensemble strictement subpotent $B \subset A$. Nous supposons l'existence d'une fonction surjective $f: B \rightarrow B \times B$.

Alors f peut être étendue en une injection $f: D \rightarrow D \times D$ où $D \subset A$ contient strictement B .

Démonstration. Par le lemme 1.240, nous considérons une partie $U \subset A$ disjointe de B et équipotente à B . Nous pouvons écrire le développement

$$(B \cup U) \times (B \cup U) = (B \times B) \cup (B \times U) \cup (U \times B) \cup (U \times U). \quad (1.310)$$

Nous savons que B est surpotent à U (il est même équipotent); donc le lemme 1.232 nous dit que $B \cup U \approx B$. De plus il existe une bijection $B \rightarrow U$, donc

$$U \approx B \approx B \times B \approx B \times U \approx U \times B \approx U \times U. \quad (1.311)$$

Chacun des ensembles $U \times B$, $B \times U$ et $U \times U$ est équipotent à U . Leur union est donc équipotente⁹² à U et nous avons une bijection

$$\varphi: U \rightarrow U \times B \cup (B \times U) \cup (U \times U). \quad (1.312)$$

Et enfin nous définissons

$$g: B \cup U \rightarrow (B \times U) \times (B \cup U) \\ x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in B \\ \varphi(x) & \text{si } x \in U. \end{cases} \quad (1.313)$$

Cette définition est bonne parce que U et B sont disjoints, et g est injective. $\square$

92. Lemme 1.232.

NORMooBijectionAA

1.243.

Le théorème suivant est une généralisation de la proposition 1.234. Elle implique, entre autres choses, qu'il existe une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Pour le cas de $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$, il y a la proposition 1.216 qui donne une bijection explicite et donc sans axiome du choix et sans lemme de Zorn.

THOooDGOVooRdURVi

Théorème 1.244.

Si A est infini, alors $A \approx A \times A$.

Démonstration. Une fois de plus, ce sera le lemme de Zorn qui va s'y coller. Soit l'ensemble

$$\mathcal{A} = \left\{ (X, \varphi) \text{ tel que } \begin{cases} X \subset A \\ \varphi: X \rightarrow X \times X \text{ est surjective.} \end{cases} \right\} \quad (1.314)$$

Cet ensemble est non vide parce que A est infini ; il contient donc une partie dénombrable N , et nous connaissons la surjection $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ du lemme 1.216.

Nous ordonnons $\mathcal{A}$ par l'inclusion : $(X, \varphi) \leq (Y, \phi)$ lorsque $X \subset Y$ et $\phi|_X = \varphi$. La tambouille usuelle montre que $\mathcal{A}$ est un ensemble inductif et le lemme de Zorn 1.37 donne l'existence d'un élément maximal que nous notons (B, φ) .

Puisque B est subpotent à A (parce qu'il est inclus), soit il est strictement subpotent, soit il est équipotent. Nous commençons par montrer que B ne peut pas être strictement subpotent à A .

En effet, si nous avons une surjection $B \rightarrow B \times B$, alors que B est strictement subpotent à A . Le lemme 1.242 nous dit alors que φ peut être étendue, ce qui contredirait la maximalité de (B, φ) .

Donc la partie B est équipotente à A : il existe une bijection $g: A \rightarrow B$. Mais nous avons une surjection $B \rightarrow B \times B$ et donc aussi une injection $B \times B \rightarrow B$. Vu que nous avons par ailleurs une injection $B \rightarrow B \times B$, le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein 1.75 nous donne une bijection $\phi: B \times B \rightarrow B$. Avec ça, l'application

$$\begin{aligned} f: A \times A &\rightarrow A \\ (a, b) &\mapsto \phi(g(a), g(b)) \end{aligned} \quad (1.315)$$

est une bijection. Donc les ensembles A et $A \times A$ sont équipotents. □

LEMooNKKDooUvSYPO

Lemme 1.245.

Si A est infini, et si pour tout $i \in \mathbb{N}$ nous avons $A_i \approx A$, alors

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \approx A. \quad (1.316)$$

Démonstration. Pour chaque $i \in \mathbb{N}$ nous avons une bijection $\varphi_i: A_i \rightarrow A$. Nous posons

$$\begin{aligned} \varphi: A \times \mathbb{N} &\rightarrow \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \\ (a, i) &\mapsto \varphi_i(a). \end{aligned} \quad (1.317) \quad \text{EQooCHJAooRpHypV}$$

Cette application est surjective mais peut-être pas injective parce que les A_i peuvent avoir des intersections non vides. Nous avons alors le calcul

$$A \approx A \times \mathbb{N} \quad (1.318a) \quad \text{SUBEQooICFEooTLuFHZ}$$

$$\geq \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \quad (1.318b) \quad \text{SUBEQooRVPBocJleky}$$

$$\geq A \quad (1.318c) \quad \text{SUBEQooFJRooJnervy}$$

Justifications :

- Pour (1.318a), c'est la proposition 1.237.
- Pour (1.318b), c'est la surjection (1.317).
- Pour (1.318c), c'est le fait que seulement A_0 possède déjà une surjection vers A .

Donc $\bigcup_i A_i$ est à la fois surpotent et subpotent à A . Il est donc équipotent par le théorème 1.75. □

1.8 Groupes

1.8.1 Définition, unicité du neutre

La définition d'un groupe est la définition 1.83.

LEMooECDMooCkwxXf

Lemme-Définition 1.246 (Unicité).

Dans un groupe, l'inverse et le neutre sont uniques. Plus précisément, si G est un groupe nous avons :

- (1) il existe un unique élément $e \in G$ tel que $eg = ge = g$ pour tout $g \in G$,
- (2) pour tout $g \in G$, il existe un unique élément $h \in G$ tel que $gh = hg = e$.

ITEMooOIWTtooYqmMPP

Le e ainsi défini est nommé **neutre** de G . Le h tel que $gh = hg = e$ est nommé l'**inverse** de g et est noté g^{-1} .

Démonstration. Chaque point séparément.

- (1) Supposons que e_1 et e_2 vérifient la propriété. Nous avons pour tout $g \in G$: $e_1g = ge_1 = g$. En particulier pour $g = e_2$ nous écrivons $e_1e_2 = e_2e_1 = e_2$. Mais en partant dans l'autre sens : $e_2g = ge_2 = g$ avec $g = e_1$ nous avons $e_2e_1 = e_1e_2 = e_1$. En égalant ces deux valeurs de e_2e_1 nous avons $e_1 = e_2$.

Pour la suite de la preuve nous écrivons e l'unique neutre de G .

- (2) Supposons que k_1 et k_2 soient deux inverses de g . On considère alors le produit k_1gk_2 . Puisque $k_1g = e$, on a $k_1gk_2 = ek_2 = k_2$; mais, comme $gk_2 = e$, on a aussi $k_1gk_2 = k_1e = k_1$. Le produit est donc à la fois égal à k_1 et à k_2 , et donc $k_1 = k_2$.

□

LEMooWYLRooNOdZnp

Lemme 1.247 ([44]).

Soient deux groupes G et H . Si $\alpha: G \rightarrow H$ est un morphisme de groupes⁹³, alors

- (1) $\alpha(e_G) = e_H$.
- (2) $\alpha(g^{-1}) = \alpha(g)^{-1}$.

Démonstration. Pour le premier point, soit $g \in G$. Nous avons

$$\alpha(g) = \alpha(ge) = \alpha(g)\alpha(e). \quad (1.319)$$

En multipliant les deux côtés par $\alpha(g)^{-1}$ nous trouvons $e = \alpha(e)$.

Pour le second point, nous vérifions que $\alpha(g^{-1})\alpha(g) = e$. C'est le cas parce que

$$\alpha(g^{-1})\alpha(g) = \alpha(g^{-1}g) = \alpha(e) = e. \quad (1.320)$$

□

LEMooBIBFooBHxFYC

Lemme 1.248.

Si G est un groupe et si $h \in G$, alors les applications

$$\begin{aligned} L_h: G &\rightarrow G \\ g &\mapsto hg \end{aligned} \quad (1.321)$$

et

$$\begin{aligned} R_h: G &\rightarrow G \\ g &\mapsto gh \end{aligned} \quad (1.322)$$

sont des bijections.

Démonstration. D'abord si $L_h(g_1) = L_h(g_2)$, alors $hg_1 = hg_2$ et en multipliant à gauche par h^{-1} nous avons $g_1 = g_2$; donc L_h est injective. Ensuite L_h est surjective parce que si $g \in G$, alors $g = L_h(h^{-1}g)$.

Pour l'application R_h , la preuve est une simple adaptation.

□

93. Définition 1.86.

1.8.2 Ordre d'un groupe et d'un élément

L'ordre d'un groupe et l'ordre d'un élément d'un groupe sont deux choses différentes.

DEFooKWBCooMImpCP

Définition 1.249 (Ordre d'un groupe).

Soit un groupe G .

(1) Si G est un ensemble fini, l'**ordre** de G est son cardinal⁹⁴, et nous le notons $|G|$.

(2) Si l'ensemble G est infini, nous disons que $|G| = \infty$ et qu'il est d'ordre infini.

Oui : nous pourrions simplement toujours dire « cardinalité » et écrire $\text{Card}(G)$. Au lieu de ça, dans le cas particulier des groupes, il y a une tradition de dire « ordre » et d'écrire $|G|$.

DEFooKSTVooOOBpgC

Définition 1.250 (Ordre d'un élément).

L'**ordre** d'un élément g de G est le naturel

$$\min\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ tel que } g^n = e\}, \quad (1.323)$$

si il existe ; dans le cas contraire, nous disons que l'ordre de g est infini.

1.251.

Nous verrons que le corolaire 2.15 au théorème de Lagrange dira que l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe.

1.8.3 Groupe ordonné

DEFooEUHFooYvhnLQ

Définition 1.252 ([45]).

Soient un groupe $(G, +)$, ainsi qu'une relation d'ordre $\leq$ sur G . Nous disons que la relation d'ordre est **compatible** avec la structure de groupe si pour tout $x, y, z \in G$, si $x \leq y$ alors $x + z \leq y + z$ et $z + x \leq z + y$. Dans ce cas, le triple $(G, +, \leq)$ est un **groupe ordonné**.

Si $(G, \leq)$ est totalement ordonné, nous disons que le groupe est totalement ordonné.

1.8.4 Classes de conjugaison

DEFooOLXPooWelsZV

Définition 1.253 (classe de conjugaison).

Soit un groupe G et un élément $g \in G$. La **classe de conjugaison** de g est la partie

$$C_g = \{kgk^{-1} \text{ tel que } k \in G\}. \quad (1.324)$$

LEMooQYBJooYwMwGM

Lemme 1.254.

Un groupe est commutatif si et seulement si ses classes de conjugaison sont des singletons.

Démonstration. Supposons que G soit commutatif. Alors

$$C_g = \{kgk^{-1} \text{ tel que } k \in G\} = \{g\}. \quad (1.325)$$

Donc les classes de conjugaison sont des singletons.

Dans l'autre sens, si les classes sont des singletons, on a $kgk^{-1} = g$ pour tous $k, g \in G$. Cela signifie immédiatement que G est commutatif. $\square$

defGroupeCentre

Définition 1.255 (centralisateur[46]).

Soient un groupe G , un sous-groupe H et un élément $h \in H$. Le **centralisateur** de h dans G est l'ensemble des éléments de G qui commutent avec h :

$$Z_G(h) = \{z \in G \text{ tel que } hz = zh\}. \quad (1.326)$$

Le centralisateur de H dans G est l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de H :

$$Z_G(H) = \bigcap_{h \in H} Z_G(h). \quad (1.327)$$

94. Définition 1.204.

Le **centre** d'un groupe G est l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les autres :

$$Z_G = Z_G(G) = \{z \in G \text{ tel que } gz = zg, \forall g \in G\}. \quad (1.328)$$

DEFooZTSMooBisIly

Définition 1.256 (normalisateur[46]).

Soient un groupe G et un sous-groupe H . Le **normalisateur** de H dans G est

$$\mathcal{N}_G(H) = \{g \in G \text{ tel que } gH = Hg\}. \quad (1.329)$$

DEFooNIIMooFkZgvX

Définition 1.257 (Sous-groupe normal).

Un sous-groupe N de G est **normal** ou **distingué** si pour tout $g \in G$ et pour tout $n \in N$, $gng^{-1} \in N$. Autrement dit lorsque $gNg^{-1} \subset N$.

Lorsque N est normal dans G il est parfois noté $N \triangleleft G$.

DEFooUXXTooCCLmQe

Définition 1.258.

Un sous-groupe H de G est un sous-groupe **caractéristique** si $\alpha(H) \subset H$ pour tout automorphisme⁹⁵ α de G .

Lemme 1.259 ([47]).

Si H est un sous-groupe caractéristique de G , alors $\alpha(H) = H$ pour tout automorphisme α de G .

Démonstration. Si α est un automorphisme de G , alors α^{-1} est encore un automorphisme de G . En particulier $\alpha^{-1}(H) \subset H$.

Soit $h \in H$. Nous devons prouver que $h \in \alpha(H)$. Pour cela :

$$h = \alpha(\alpha^{-1}(h)) \in \alpha(\alpha^{-1}(H)) \subset \alpha(H). \quad (1.330)$$

□

DefGroupeSimple

Définition 1.260 (Groupe simple).

Un groupe est dit **simple** si il est non trivial et si les seuls sous-groupes normaux qu'il admet sont lui-même et le sous-groupe réduit à l'élément neutre.

1.8.5 Permutations, groupe symétrique

Nous donnons ici quelques éléments à propos du groupe symétrique. Beaucoup de choses supplémentaires sont reportées à la section 5.6. Voir aussi le thème 8.

DEFooJNPlooMuzIXd

Définition 1.261.

Soit un ensemble E . Une **permutation** de l'ensemble E est une bijection $E \rightarrow E$. Le **groupe symétrique** de E est le groupe des bijections $E \rightarrow E$; il est noté S_E .

Le **groupe symétrique** S_n est le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. C'est donc l'ensemble des bijections $\{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$.

DEFooSupportPermutation

Définition 1.262.

Le **support** d'une permutation σ est l'ensemble constitué des éléments modifiés par σ :

$$\text{supp } \sigma = \{i \in \{1, \dots, n\} \text{ tel que } \sigma(i) \neq i\}.$$

DEFooMVFKooMpXMqY

Définition 1.263 ([48]).

Soient une permutation $\sigma \in E$ ainsi que $a \in E$. La σ -**orbite** de a est l'ensemble

$$\Omega_\sigma(a) = \{\sigma^i(a)\}_{i \in \mathbb{N}}. \quad (1.331)$$

LEMooSGWKooKFIDyT

Lemme 1.264 ([49]).

Le groupe symétrique S_n est un ensemble fini contenant $n!$ éléments :

$$\text{Card}(S_n) = n!. \quad (1.332)$$

95. Automorphisme de groupe, définition 1.86.

LEMooUPBOooWbwMTx

Lemme 1.265 ([50]).*Deux résultats.*

- (1) Tout groupe est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe symétrique.
- (2) Tout groupe fini d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe de S_n .

Démonstration. Soit, pour $g \in G$ donné, l'application

$$\begin{aligned} \tau_g: G &\rightarrow G \\ x &\mapsto gx. \end{aligned} \tag{1.333}$$

Commençons par prouver que cela est une bijection. D'une part, $\tau_g(x) = y$ pour $x = g^{-1}y$ (surjection) et, d'autre part, $\tau_g(x) = \tau_g(y)$ implique $gx = gy$ et donc $x = y$ (injection).

Nous avons donc $\tau_g \in S_G$. L'application

$$\begin{aligned} \varphi: G &\rightarrow S_G \\ g &\mapsto \tau_g \end{aligned} \tag{1.334}$$

est un morphisme de groupe⁹⁶ :

$$\varphi(gh)x = ghx = \varphi(g)(hx) = \varphi(g)(\varphi(h)x) = (\varphi(g) \circ \varphi(h))x. \tag{1.335}$$

Il est injectif parce que si $\tau_g = \tau_h$ alors $gx = hx$ pour tout x . En particulier $g = h$. Donc $\varphi: G \rightarrow \text{Image}(\varphi)$ est un isomorphisme entre G et un sous-groupe de S_G (proposition 1.87).

Un groupe fini de cardinal n est isomorphe à un sous-groupe de S_G ; or S_G est isomorphe à un des S_n . □

1.8.6 Décomposition en cycles

DEFooRWYSooYmKwph

Définition 1.266 (cycle[48]).

Soit E un ensemble de cardinal⁹⁷ n . Soit un entier $1 \leq k \leq n$. Un élément $\sigma \in S_E$ est un k -cycle si il ne possède qu'une seule orbite⁹⁸ non réduite à un élément et qu'elle est de cardinal k .

LEMooADNGooDZpdTb

Lemme 1.267 ([1]).Soient un k -cycle σ et $a \in \Omega$. Alors

$$\Omega_\sigma(a) = \{a, \sigma(a), \dots, \sigma^{k-1}(a)\} \tag{1.336}$$

et $\sigma^k(a) = a$.En particulier, les éléments $\sigma^q(a)$ avec $q = 0, \dots, k-1$ sont tous distincts.

Démonstration. Soit l le plus grand entier tel que les $\sigma^i(a)$ avec $0 \leq i \leq l$ soient tous distincts, et notons $A = \{\sigma^i(a)\}_{i=0, \dots, l}$. Cet ensemble satisfait

- $\text{Card}(A) = l + 1$
- $A \subset \Omega_\sigma(a)$, et donc $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(\Omega_\sigma(a)) = k$ par le lemme 1.207(3).

Que vaut $\sigma^{l+1}(a)$? Par maximalité de l , $\sigma^{l+1}(a)$ est un des $\sigma^i(a)$ avec $i \leq l$. Par injectivité de σ , nous avons donc forcément $\sigma^{l+1}(a) = a$.

Donc pour tout $i > l$ il existe $j \leq l$ tel que $\sigma^i(a) = \sigma^j(a)$ (parce que $\sigma^i(a) = \sigma^{i-l-1}(a)$). Nous en déduisons que

$$\Omega_\sigma(a) = \{\sigma^i(a)\}_{0 \leq i \leq l} = A. \tag{1.337}$$

Le cardinal de $\Omega_\sigma(a)$ étant k par hypothèse nous avons $k = l + 1$, et donc $l = k - 1$. □⁹⁶. Définition 1.86.⁹⁷. Définition 1.204.⁹⁸. Définition 1.263.

LEMooANVHooOQiTwY

Lemme 1.268.

Si σ est une cycle de longueur k , et si $b \in \Omega_\sigma(a)$, alors

$$\Omega_\sigma(a) = \Omega_\sigma(b) = \{\sigma^i(b)\}_{i=0,\dots,k-1}. \quad (1.338)$$

Démonstration. Comme $b \in \Omega_\sigma(a)$, il existe $l \leq k-1$ tel que $b = \sigma^l(a)$. Pour tout i nous avons $\sigma^i(a) = \sigma^{k-l+1}(b)$, et donc $\Omega_\sigma(a) \subset \Omega_\sigma(b)$.

Mais pour tout i nous avons aussi $\sigma^i(b) = \sigma^{l+1}(a)$ et donc $\Omega_\sigma(b) \subset \Omega_\sigma(a)$.

Nous avons donc montré que $\Omega_\sigma(a) = \Omega_\sigma(b)$. La seconde égalité est le lemme 1.267 appliqué à b . $\square$

LEMooMIHGooQfALbc

Lemme 1.269 ([1]).

Soient un ensemble fini E , une permutation $\sigma \in S_E$ ainsi que $a \in E$. Si $b \in \Omega_\sigma(a)$, alors $\Omega_\sigma(b) = \Omega_\sigma(a)$.

LEMooGWZNooXFezrg

Lemme 1.270 ([48]).

Tout k -cycle est d'ordre⁹⁹ k .

Démonstration. Soit le cycle $\{a, \sigma(a), \dots, \sigma^{k-1}(a)\}$. Tous les $\sigma^i(a)$ avec $i \leq k-1$ sont distincts et $\sigma^k(a) = a$. Donc σ^k est l'identité, et l'ordre de σ est plus petit ou égal à k .

Si $i \leq k-1$, alors $\sigma^i(a) \neq a$ parce que les éléments du cycle sont distincts. Donc $\sigma^i \neq \text{Id}$ pour $i \leq k-1$. Nous en déduisons que l'ordre de σ est k . $\square$

LEMooQLSAooBrXDXw

Lemme 1.271 ([48, 51]).

Tout élément du groupe symétrique S_n peut être décomposé en un nombre fini de cycles de supports disjoints.

Cette décomposition est unique à l'ordre près de l'écriture des cycles.

Plus précisément, si σ est une permutation, alors il existe un unique ensemble fini $\{\omega_i\}_{i \in I}$ de cycles de supports disjoints tels que¹⁰⁰ $\sigma = \prod_{i \in I} \omega_i$.

Démonstration. Soit $\sigma \in S_E$. Si les éléments $\{a, \sigma(a), \dots, \sigma^k(a)\}$ sont distincts, alors soit $\sigma^{k+1}(a)$ est distincts des autres, soit $\sigma^{k+1}(a) = a$. Il n'est en effet pas possible d'avoir $\sigma^{k+1}(a) = \sigma^l(a)$ avec $l < k$ parce que ça contredirait l'injectivité de σ .

Soit donc $a \in E$. Nous considérons le cycle $(a, \sigma(a), \dots, \sigma^k(a))$ où k est maximum tel que tous les éléments sont distincts.

Soit ce cycle contient tous les éléments de E , soit il existe un élément b hors de ce cycle. Dans le second cas, nous considérons le cycle commençant par b .

Et ça continue... $\square$

LEMooWXXLoolzrwJT

Lemme 1.272 ([48]).

Deux cycles de support disjoint commutent.

LEMooVVPWooMkRjyR

Lemme 1.273 ([52]).

Tout cycle de longueur r est le produit de $r-1$ transpositions.

Démonstration. Il suffit de vérifier que

$$(a_1, \dots, a_r) = (a_1, a_r)(a_1, a_{r-1}) \dots (a_1, a_2). \quad (1.339)$$

 $\square$

LEMooGGLUooUSzuAx

Lemme 1.274 ([1]).

Soit une permutation $\sigma \in S_E$. Soit un cycle c et une permutation s de supports disjoints telles que $\sigma = s \circ c$. Alors

99. Définition 1.250.

100. Ici I est un ensemble fini et vu que les supports sont disjoints, le produit est commutatif.

LEMooUHWTooFptoZU

(1) Si $a \in \text{supp}(\sigma)$, alors pour tout $q \in \mathbb{N}$ nous avons $c^q(a) = \sigma^q(a)$.

ITEMooHSDLooIAKYZA

(2) Si $a \in \text{supp}(c)$, alors

$$\Omega_\sigma(a) = \Omega_c(a) = \text{supp}(c). \quad (1.340)$$

(3) Si $a \in \text{supp}(c)$, alors

$$c(x) = \begin{cases} \sigma(x) & \text{si } x \in \Omega_\sigma(a) \\ x & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.341)$$

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Si $a \in \text{supp}(c)$, alors $c(a) = \sigma(a)$** Soit $a \in \text{supp}(c)$. Nous savons que $c(a) \neq a$, et vu que c est injective, nous devons aussi avoir $c(c(a)) \neq c(a)$. Donc a et $c(a)$ sont dans $\text{supp}(c)$. Étant donné que les supports de c et de s sont disjoints, nous déduisons que $c(a)$ n'est pas dans le support de s , et donc que

$$\sigma(a) = (s \circ c)(a) = s(c(a)) = c(a). \quad (1.342)$$

(2) $\sigma^q(a) = c^q(a)$ Juste une récurrence sur le point précédent : si $b \in \text{supp}(a)$, alors $\sigma(b) = c(b) \in \text{supp}(a)$.

(3) **Si $a \in \text{supp}(c)$, alors $\Omega_\sigma(a) = \Omega_c(a)$** Utilisant le point précédent, ainsi que la définition 1.263 d'une orbite,

$$\Omega_\sigma(a) = \{\sigma^q(a)\} = \{c^q(a)\} = \Omega_c(a). \quad (1.343)$$

(4) $\text{supp}(c) \subset \Omega_c(a)$ Comme toujours, a est un élément de $\text{supp}(c)$. Nous considérons $b \in \text{supp}(c)$ et nous montrons que $b \in \Omega_c(a)$. Étant donné que $b \in \text{supp}(c)$, nous avons $c(b) \neq b$, de telle sorte que $\Omega_c(b)$ contienne au moins deux éléments distincts.

Même chose pour a : l'ensemble $\Omega_c(a)$ contient au moins a et $c(a)$. Vu que c est un cycle, il n'existe qu'une seule orbite non triviale. Donc $\Omega_c(a) = \Omega_c(b)$. En particulier $b \in \Omega_c(a) = \Omega_c(a)$.

(5) $\Omega_c(a) \subset \text{supp}(c)$ Soit $b \in \Omega_c(a)$. Le lemme 1.268 nous permet de dire que $\Omega_c(a) = \Omega_c(b)$. Comme $\Omega_c(b)$ contient au moins deux éléments (parce qu'il est égal à $\Omega_c(a)$ et que a est dans le support de c), nous savons que $c(b) \neq b$ et donc que $b \in \text{supp}(c)$.

(6) **La formule pour $c(x)$** Si $x \in \Omega_\sigma(a)$, alors $c(x) = \sigma(x)$ par le point (1). Si x n'est pas dans $\Omega_c(a) = \text{supp}(c)$, alors x n'est pas dans le support de c et donc $c(x) = x$.

□

Le lemme suivant permet d'extraire le cycle de σ associé à un élément de E .

LEMooFFTBooCZsaFu

Lemme 1.275 ([1]).

Soient un ensemble fini E ainsi que $\sigma \in S_E$, et $a \in E$ tel que $\sigma(a) \neq a$. Nous posons

$$c: E \rightarrow E$$

$$x \mapsto \begin{cases} \sigma(x) & \text{si } x \in \Omega_\sigma(a) \\ x & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.344)$$

Alors

(1) Si $b \in \Omega_\sigma(a)$, nous avons $\Omega_c(b) = \Omega_\sigma(a)$.

(2) Si $b \notin \Omega_\sigma(a)$, nous avons $\Omega_c(b) = \{b\}$.

(3) c est un cycle.

Démonstration. Si $b \in \Omega_\sigma(a)$, alors $\sigma^q(b) \in \Omega_\sigma(a)$ pour tout $q \in \mathbb{N}$, et donc

$$c^q(b) = \sigma^q(b) \in \Omega_\sigma(a) \quad (1.345)$$

pour tout q . Donc nous avons

$$\Omega_c(b) = \{c^q(b) \text{ tel que } q \in \mathbb{N}\} = \{\sigma^q(b) \text{ tel que } q \in \mathbb{N}\} = \Omega_\sigma(b) = \Omega_\sigma(a). \quad (1.346)$$

La dernière égalité est le lemme 1.269.

Si $b \notin \Omega_\sigma(a)$, alors $c(b) = b$ et $\Omega_c(b) = \{b\}$.

Nous avons prouvé que c a une seule orbite de taille plus grands ou égale à 2. Donc c est un cycle. $\square$

Théorème 1.276 ([51]).

Soit un ensemble fini E de cardinal au moins deux. Soit une permutation $\sigma \in S_E$.

- (1) Il existe des cycles $c_1, \dots, c_m$ à support disjoints tels que $\sigma = c_1 \circ \dots \circ c_m$.
- (2) Cette décomposition est unique à l'ordre près.

Démonstration. Plusieurs points.

- (1) **Existence** Nous choisissons des éléments $\{a_i\}_{i=1, \dots, p}$ tels que les $\Omega_\sigma(a_i)$ forment une partition de E en sous-ensembles disjoints. En posant $l_k = \min\{r \text{ tel que } \sigma^r(a_k) = a_k\}$, nous avons

$$\Omega_\sigma(a_k) = \{\sigma^q(a_k)\}_{q=1, \dots, l_k-1} \quad (1.347)$$

et tous les $\sigma^q(a_k)$ sont distincts pour $q = 1, \dots, l_k - 1$.

Posons

$$c_k: E \rightarrow E$$

$$x \mapsto \begin{cases} \sigma(x) & \text{si } x \in \Omega_\sigma(a_k) \\ x & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.348)$$

Le lemme 1.274 dit que c_k est un cycle. Vu que $c(a_k) = \sigma(a_k)$, le cycle c est un l_k -cycle.

Nous montrons à présent que $\sigma = c_1 \circ \dots \circ c_p$. Soit $x \in E$. Il existe un $k \in \{1, \dots, p\}$ tel que

$$x \in \Omega_\sigma(a_k) = \Omega_{c_k}(a_k) = \Omega_{c_k}(x), \quad (1.349)$$

la dernière égalité est parce que $x \in \Omega_{c_k}(a_k)$. Nous en déduisons que $c_k(x) \neq x$. D'autre part si $l \neq k$, alors x n'est pas dans $\Omega_\sigma(a_l)$, et donc $c_l(x) = x$. Au final,

$$(c_1 \circ \dots \circ c_p)(x) = c_k(x) = \sigma(x). \quad (1.350)$$

- (2) **Unicité** Nous supposons avoir $\sigma = c_1 \circ \dots \circ c_p = \gamma_1 \circ \gamma_q$ où les c_i et les γ_j sont deux ensembles de cycles de supports disjoints. Nous avons

$$\text{supp}(\sigma) = \bigcup_{i=1}^p \text{supp}(c_i) = \bigcup_{j=1}^q \text{supp}(\gamma_j). \quad (1.351)$$

Montrons que si $\text{supp}(c_i) \cap \text{supp}(\gamma_j) \neq \emptyset$, alors $\text{supp}(c_i) = \text{supp}(\gamma_j)$. En effet si $a \in \text{supp}(c_i) \cap \text{supp}(\gamma_j)$, alors

$$\text{supp}(c_i) = \Omega_{c_i}(a) = \Omega_\sigma(a) = \Omega_{\gamma_j}(a) = \text{supp}(\gamma_j). \quad (1.352)$$

Et comme les $\text{supp}(\gamma_j)$ sont disjoints, l'ensemble $\text{supp}(c_i)$ n'a d'intersection qu'avec un et un seul des $\text{supp}(\gamma_j)$. Cela définit donc une application

$$u: \{1, \dots, p\} \rightarrow \{1, \dots, q\}$$

$$i \mapsto \text{l'unique } j \text{ tel que } \text{supp}(c_i) = \text{supp}(\gamma_j). \quad (1.353)$$

Autrement dit, l'application u permet d'écrire

$$\text{supp}(c_i) = \text{supp}(\gamma_{u(i)}). \quad (1.354)$$

L'application u est injective. En effet si $u(i) = u(l)$, nous avons

$$\text{supp}(c_i) = \text{supp}(\gamma_{u(i)}) \quad (1.355a)$$

$$\text{supp}(c_l) = \text{supp}(\gamma_{u(l)}) \quad (1.355b)$$

$$u(i) = u(l). \quad (1.355c)$$

Donc $\text{supp}(c_i) = \text{supp}(c_l)$. Et comme les supports sont disjoints, $i = l$.

L'application u est surjective. En effet, soit $j \in \{1, \dots, q\}$. Soit $a \in \text{supp}(\gamma_j)$. Il existe un i tel que $a \in \text{supp}(c_i)$. Nous avons alors $a \in \text{supp}(\gamma_j) \cap \text{supp}(c_i)$, autrement dit $u(i) = j$.

Maintenant l'application $u: \{1, \dots, p\} \rightarrow \{1, \dots, q\}$ est bijective. Nous en déduisons que $p = q$. Concluons en montrant que $c_i = \gamma_{u(i)}$. Soit $a \in \text{supp}(c_i) = \text{supp}(\gamma_{u(i)})$.

Nous avons

$$c_i(x) = \begin{cases} \sigma(x) & \text{si } x \in \Omega_\sigma(a) \\ x & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.356)$$

et

$$\gamma_j(x) = \begin{cases} \sigma(x) & \text{si } x \in \Omega_\sigma(a) \\ x & \text{sinon,} \end{cases} \quad (1.357)$$

et donc $c_i = \gamma_j$.

□

LemmvZFWP

Lemme 1.277 ([53]).

Soit $\sigma = (i_1, \dots, i_k) \in S_n$, un cycle de longueur k et $\theta \in S_n$. Alors

$$\theta\sigma\theta^{-1} = (\theta(i_1), \dots, \theta(i_k)). \quad (1.358)$$

Tous les cycles de longueur k sont conjugués entre eux.

PropEAHWXwe

Proposition 1.278 (Classes de conjugaison et structure en cycles[54]).

Une classe de conjugaison¹⁰¹ dans S_n est formée des permutations ayant une décomposition en cycles disjoints de même structure. Autrement dit, deux permutations σ et σ' sont conjuguées si et seulement si le nombre k_i de cycles de longueur i dans σ est le même que le nombre k'_i de cycles de longueur i dans σ' .

Démonstration. Soit $\sigma = c_1 \dots c_m$ la décomposition de σ en cycles c_i de supports disjoints. Si τ est une permutation, alors

$$\sigma' = \tau\sigma\tau^{-1} = (\tau c_1 \tau^{-1}) \dots (\tau c_m \tau^{-1}), \quad (1.359)$$

mais $\tau c_i \tau^{-1}$ est un cycle de même longueur que c_i , puisque le lemme 1.277 nous dit que si $\sigma = (a_1, \dots, a_k)$, alors $\tau c \tau^{-1} = (\tau(a_1), \dots, \tau(a_k))$. Notons encore que les cycles $\tau c_i \tau^{-1}$ restent à support disjoints.

Donc tous les éléments de la classe de conjugaison de σ sont des permutations de même structure que σ .

Réciproquement, si $\sigma' = c'_1 \dots c'_m$ est une décomposition de σ' en cycles disjoints tels que la longueur des c_i est la même que la longueur des c'_i , alors il suffit de construire des permutations τ_i telles que $\tau_i c_i \tau_i^{-1} = c'_i$, à travers le lemme 1.277. Comme les supports des c_i et des c'_i sont disjoints, la permutation $\tau_1 \dots \tau_m$ conjugue σ et σ' . □

101. Définition 1.253.

EXooQAXRooBsPURs

Exemple 1.279.

Voyons les classes de conjugaison de S_3 . Étant donné que ce groupe agit par définition sur un ensemble à 3 éléments, aucun élément de S_3 ne possède un cycle de plus de 3 éléments. Il y a donc seulement des cycles de longueur deux ou trois (à part les triviaux). Aucun élément de S_3 n'a une décomposition en cycles disjoints contenant deux cycles de deux ou un cycle de deux et un de trois.

En résumé il y a trois classes de conjugaison dans S_3 . La première est celle contenant seulement l'identité. La seconde est celle contenant les cycles de longueur deux et la troisième contient les cycles de longueur 3.

Ce sont donc

$$C_1 = \{\text{Id}\} \quad (1.360a)$$

$$C_2 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\} \quad (1.360b)$$

$$C_3 = \{(1, 2, 3), (2, 1, 3)\}. \quad (1.360c)$$

△

DEFooXNAFooGTbTTJ

Définition 1.280 (transposition).

Une **transposition** est une permutation¹⁰² qui échange deux éléments de E . Plus précisément, une bijection $\sigma: E \rightarrow E$ est une transposition si il existe $a, b \in E$ tels que

$$\sigma(x) = \begin{cases} a & \text{si } x = b \\ b & \text{si } x = a \\ x & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.361)$$

ExVYZPzub

Exemple 1.281.

△

PROPooQRZYooKVZTCJ

Proposition 1.282 ([1]).

Les classes de conjugaison de S_4 sont :

ITEMooZIYYooCqpicx

(1) Le cycle vide qui représente la classe constituée de l'identité seule.

ITEMooVDLGooFOkgzc

(2) Les transpositions (de type (a, b)) qui sont au nombre de 6.

ITEMooWKUIooTedZAA

(3) Les doubles transpositions (de type $(a, b)(c, d)$) qui sont au nombre de 6.

ITEMooMHRWooSkUveJ

(4) Les 3-cycles qui sont au nombre de 8.

ITEMooCBYNooZmFsBd

(5) Les 4-cycles qui sont au nombre de 6.

ITEMooGCMYooKZgFHX

(6) Les doubles transpositions, du type $(a, b)(c, d)$ qui sont au nombre de 3.

Démonstration. Nous savons que les classes de conjugaison dans S_4 sont caractérisées par la structure des décompositions en cycles (proposition 1.278). Avec 4 éléments, il n'y a pas des tonnes de cycles qu'on peut faire.

On peut faire des cycles de taille 1, 2, 3 ou 4. Les seules façons de faire 4 avec ces nombres sont :

(1) $1 + 1 + 1 + 1$

(2) $2 + 1 + 1$

(3) $2 + 2$

(4) $3 + 1$

(5) 4

Comptons combien il y a de possibilités dans chaque cas.

(1) **Pour (1)** À propos de la possibilité $1 + 1 + 1 + 1 = 4$. Il y a une seule possibilité de fixer tous les éléments.

102. Une permutation est une bijection, définition 1.261.

- (2) **Pour (2)** À propos de $2 + 1 + 1 = 4$. Il y a 4 possibilités pour a , et 3 pour b . Mais $(a, b) = (b, a)$, donc il faut diviser par deux. Donc 6 en tout.
- (3) **Pour (3)** À propos de $2 + 2 = 4$. Nous cherchons les possibilités pour $(a, b)(c, d)$. Nous venons de voir qu'il y a 6 possibilités pour (a, b) . Les deux autres sont fixés.
- (4) **Pour (4)** Pour savoir **quel est leur nombre** nous commençons par remarquer qu'il y a 4 façons de prendre 3 nombres parmi 4 et ensuite 2 façons de les arranger. Il y a donc 8 éléments dans cette classe de conjugaison.
- (5) **Pour (5)** Le premier est arbitraire (parce que c'est cyclique). Pour le second il y a 3 possibilités, et deux possibilités pour le troisième ; le quatrième est alors automatique. Cette classe de conjugaison contient donc 6 éléments.
- (6) **Pour (6)** Dans ce cas, tous les nombres sont permutés, et l'image de 1 détermine la double transposition. Il y a 3 images possibles, et donc 3 éléments dans cette classe.

□

PropPWIJbu

Proposition 1.283.

Tout élément de S_n peut être écrit sous la forme d'un produit fini de transpositions.

Si E est un ensemble fini, tout élément de S_E peut être écrit sous forme d'un produit fini de transposition de E .

Démonstration. Un élément de S_n se décompose en un nombre fini de cycles par le lemme 1.271 et chacun des cycles peut être décomposé en un nombre fini de transpositions par le lemme 1.273. □

Cette décomposition n'est pas à confondre avec celle en cycles de support disjoints. Par exemple $(1, 2, 3) = (1, 3)(1, 2)$.

1.8.7 Parité d'une permutation, signature

La notion de parité d'une permutation est la clef pour savoir quelles positions du jeu de taquin sont possibles ou impossibles[55, 56].

DEFooYDUHooKIXGNW

Définition 1.284 ([57]).

Soit une permutation $\sigma \in S_E$ où $\text{Card}(E) = n$. Si k est le nombre de σ -orbites dans E , nous définissons la **signature** par

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^{n-k}. \quad (1.362)$$

PROPooWCHBooTgMokj

Proposition 1.285 ([57]).

Soient une transposition τ et une permutation σ de l'ensemble fini E . Nous avons

$$\epsilon(\sigma\tau) = -\epsilon(\sigma). \quad (1.363)$$

Démonstration. Soient $a, b \in E$ tels que $\tau(a) = b$ et $\tau(b) = a$. Nous allons comparer la liste des orbites de σ avec celle de $\sigma\tau$. Il y a deux possibilités : soit a et b sont dans la même orbite de σ , soit ils sont dans des orbites séparées.

Nous notons¹⁰³

- (1) I l'ensemble des orbites de σ ne contenant ni a ni b .
- (2) I' l'ensemble des orbites de $\sigma\tau$ ne contenant ni a ni b .
- (3) $\mathcal{O}_a$ la σ -orbite de a , $\mathcal{O}_b$ la σ -orbite de b .
- (4) $\mathcal{O}'_a$ la $\sigma\tau$ -orbite de a , $\mathcal{O}'_b$ la $\sigma\tau$ -orbite de b .

Il est tout à fait possible à priori d'avoir $\mathcal{O}_a = \mathcal{O}_b$ ou $\mathcal{O}'_a = \mathcal{O}'_b$. Je vous laisse méditer un instant sur le fait que $\text{Card}\{\mathcal{O}_a, \mathcal{O}_b\}$ vaut 1 ou 2 et que le nombre d'orbites de σ est $\text{Card}(I) + \text{Card}\{\mathcal{O}_a, \mathcal{O}_b\}$.

103. Parce que nous adorons à la fois les notations et les listes énumérées.

(1) $I = I'$

Soit une orbite $\mathcal{O}$ de σ ne contenant ni a ni b . Alors pour tout $y \in \mathcal{O}$ nous avons $(\sigma\tau)(y) = \sigma(y)$, et donc $\mathcal{O}$ est également une orbite de $\sigma\tau$. Cela prouve que $I = I'$.

(2) Si $\mathcal{O}_a = \mathcal{O}_b$ Nous supposons que a et b sont dans la même orbite de σ que nous écrivons

$$\mathcal{O} = \{a, x_1, \dots, x_r, b, x_{r+1}, \dots, x_s\} \quad (1.364)$$

avec $\sigma(x_s) = a$. Étudions la $\sigma\tau$ -orbite de a . Nous avons $(\sigma\tau)(a) = \sigma(b) = x_{r+1}$, et $(\sigma\tau)(x_s) = \sigma(x_s) = a$, donc

$$\mathcal{O}'_a = \{a, x_{r+1}, \dots, x_s\} \quad (1.365)$$

ne contient pas b . De même la $(\sigma\tau)$ -orbite de b est

$$\mathcal{O}'_b = \{b, x_1, \dots, x_r\} \quad (1.366)$$

et ne contient pas a . Autrement dit, $\mathcal{O}'_a \neq \mathcal{O}'_b$.

(3) Si $\mathcal{O}_a \neq \mathcal{O}_b$ Disons que $\mathcal{O}_a = \{a, x_1, \dots, x_r\}$ et $\mathcal{O}_b = \{b, y_1, \dots, y_s\}$ avec $\sigma(y_s) = b$ et $\sigma(x_r) = a$. Nous étudions la $(\sigma\tau)$ -orbite de a . Nous avons $(\sigma\tau)(a) = \sigma(b) = y_1$, et ensuite $(\sigma\tau)(y_1) = \sigma(y_1) = y_2$, et ainsi de suite jusqu'à $(\sigma\tau)(y_s) = \sigma(y_s) = b$, et $(\sigma\tau)(b) = \sigma(a) = x_1$. Bref nous avons

$$\mathcal{O}'_a = \{a, y_1, \dots, y_s, b, x_1, \dots, x_r\}, \quad (1.367)$$

et donc $\mathcal{O}'_a = \mathcal{O}'_b$.

Nous avons prouvé que si $\text{Card}\{\mathcal{O}_a, \mathcal{O}_b\} = 1$, alors $\text{Card}\{\mathcal{O}'_a, \mathcal{O}'_b\} = 2$ et que si $\text{Card}\{\mathcal{O}_a, \mathcal{O}_b\} = 2$, alors $\text{Card}\{\mathcal{O}'_a, \mathcal{O}'_b\} = 1$. Donc $\sigma\tau$ a une orbite en plus ou une orbite en moins que σ suivant les cas. Dans les deux cas, $\epsilon(\sigma\tau) = -\epsilon(\sigma)$. $\square$

THOooUILDooRUAZfW

Théorème 1.286 ([57]).

À propos de signature.

ITEMooOLVOooWJKSDY

(1) Soient des transpositions $\tau_1, \dots, \tau_s$. Nous avons

$$\epsilon(\tau_1 \dots \tau_s) = (-1)^s. \quad (1.368)$$

ITEMooWRONooJQkhzG

(2) L'application

$$\epsilon: S_E \rightarrow (\{-1, 1\}, \times) \quad (1.369)$$

est un morphisme de groupe surjectif.

Démonstration. En plusieurs parties.

- (1) **Pour (1)** D'abord si τ est une transposition, alors $\epsilon(\tau) = -1$ parce que τ possède $n - 1$ orbite dans $\{1, \dots, n\}$. Ensuite une récurrence en utilisant la proposition 1.285 donne le résultat.
- (2) **Pour (2)** L'application ϵ est surjective parce que $\epsilon(\tau) = -1$ et $\epsilon(\text{Id}) = 1$. En ce qui concerne le morphisme, si $\sigma, \sigma' \in S_E$, ils peuvent être décomposés en transpositions¹⁰⁴ : $\sigma = \tau_1 \dots \tau_s$ et $\sigma' = \tau_{s+1} \dots \tau_{s+r}$. Nous avons alors

$$\epsilon(\sigma\sigma') = \epsilon(\tau_1 \dots \tau_s \tau_{s+1} \dots \tau_{s+r}) = (-1)^{s+r} = (-1)^s (-1)^r = \epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma'). \quad (1.370)$$

$\square$

PROPooKRHEooAxtmRv

Proposition-Définition 1.287 (parité d'une permutation).

À propos de décomposition ne permutations.

- (1) Si une permutation peut être écrite sous forme d'un produit d'un nombre pair de transpositions, alors toute décomposition en transpositions sera en quantité paire.

104. Par la proposition 1.283.

(2) Si une permutation peut être écrite sous forme d'un produit d'un nombre impair de transpositions, alors toute décomposition en transpositions sera en quantité impaire.

Une permutation qui se décompose en une quantité paire de transpositions est une **permutation paire** (et **impaire** sinon).

Démonstration. Si $\sigma = \tau_1 \dots \tau_s$ et $\sigma = \tau'_1 \dots \tau'_r$, alors le théorème 1.286(1) dit que $\epsilon(\sigma) = (-1)^s$ et $\epsilon(\sigma) = (-1)^r$, ce qui signifie que $(-1)^r = (-1)^s$ et donc que r et s ont la même parité. $\square$

PROPOoXIQOooCcoekP

Proposition 1.288.

La signature de $\sigma \in S_E$ est donné par

$$\begin{aligned} \epsilon: S_E &\rightarrow \{-1, 1\} \\ \sigma &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma \text{ est paire} \\ -1 & \text{si } \sigma \text{ est impaire.} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.371)$$

Démonstration. Si σ est paire, alors, par la définition 1.287, $\sigma = \tau_1 \dots \tau_s$ avec s pair. Dans ce cas¹⁰⁵, $\epsilon(\sigma) = (-1)^s = 1$. Même chose si σ est impaire. $\square$

LEMooWGRXooHWyzLC

Lemme 1.289.

Nous disons qu'un élément $\sigma \in S_n$ est une **inversion** pour les nombres $i < j$ si $\sigma(i) > \sigma(j)$. Soit N_σ le nombre d'inversions que $\sigma \in S_n$ possède (c'est le nombre de couples (i, j) avec $i < j$ tels que $\sigma(i) > \sigma(j)$). Nous avons

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^{N_\sigma} \quad (1.372)$$

où ϵ est la signature¹⁰⁶ dans S_n .

LemhxnkMf

Lemme 1.290 ([48]).

Un k -cycle¹⁰⁷ est une permutation impaire si k est pair et paire si k est impair.

Démonstration. Il faut remonter à la définition 1.284 de la signature. Si σ est un k -cycle, alors il possède une orbite de cardinal k et $n - k$ orbites singleton. Donc $\epsilon(\sigma) = (-1)^{n-(n-k+1)} = (-1)^{k-1}$. Donc la parité de la signature est toujours opposée à la parité de k . $\square$

ProphIuJrC

Proposition 1.291 ([53]).

Soit S_n le groupe symétrique.

ITEMooBQKUooFTkvSu

(1) L'application $\epsilon: S_n \rightarrow \{1, -1\}$ est l'unique homomorphisme surjectif de S_n sur $\{-1, 1\}$.

(2) Si $s = t_1 \dots t_k$ est le produit de k transpositions, alors $\epsilon(s) = (-1)^k$.

Démonstration. La seule partie à prouver est l'unicité. Le reste est dans le théorème 1.286.

Soit un homomorphisme surjectif $\varphi: S_n \rightarrow \{-1, 1\}$ et τ , une transposition telle que $\varphi(\tau) = -1$ (qui existe parce que sinon φ ne serait pas surjectif¹⁰⁸). Si τ' est une autre transposition, il existe $\sigma \in S_n$ tel que $\tau' = \sigma\tau\sigma^{-1}$ (lemme 1.277). Dans ce cas, $\varphi(\tau') = \varphi(\tau) = -1$, et si $\sigma = (\tau_1 \dots \tau_k)$,

$$\varphi(\sigma) = (-1)^k = \epsilon(\sigma). \quad (1.373)$$

 $\square$

CORooZLUKooBOhUPG

Corolaire 1.292.

Si $\sigma \in S_n$, alors

$$\epsilon(\sigma) = \epsilon(\sigma^{-1}). \quad (1.374)$$

Démonstration. Comme énoncé par la proposition 1.291, ϵ est un homomorphisme, donc

$$\epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma^{-1}) = \epsilon(\sigma\sigma^{-1}) = \epsilon(\text{Id}) = 1. \quad (1.375)$$

Puisque $\epsilon(\sigma)$ et $\epsilon(\sigma^{-1})$ ne peuvent valoir que ± 1 , ils doivent être tous les deux égaux à 1 ou tous les deux à -1 pour que le produit soit 1. $\square$

105. Par le théorème 1.286(1)

106. Définition 1.284.

107. Définition 1.266.

108. Nous utilisons ici le fait que tous les éléments de S_n sont des produits de transpositions, proposition 1.283.

1.8.8 Permutation un peu ordonnées

Lemme 1.293 ([1]).

Deux énoncés.

(1) Soit $\pi \in S_k$ satisfaisant $\pi(1) = 1$. Nous définissons $\tau \in S_{k-1}$ par $\tau(i) = \pi(i+1) - 1$.Alors $\epsilon(\tau) = \epsilon(\pi)$.

(2) L'application

$$\begin{aligned} \varphi: \{\pi \in S_k \text{ tel que } \pi(1) = 1\} &\rightarrow S_{k-1} \\ \pi &\mapsto \left[\tau(i) = \pi(i+1) - 1 \right] \end{aligned} \quad (1.376)$$

est une bijection.

Démonstration. Nous nommons π' la restriction de π à $\{2, \dots, k\}$. Cela est encore une bijection, de telle sorte que π' puisse être écrite sous forme d'un produit de n transpositions de $\{2, \dots, k\}$ (proposition 1.283) :

$$\pi = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_n. \quad (1.377)$$

Les σ_i étant des transpositions de $\{2, \dots, k\}$, elles sont des transpositions de $\{1, \dots, k\}$. Tout cela pour dire que π peut être écrite comme produit de transpositions ne faisant pas intervenir 1.

Nous introduisons la bijection

$$\begin{aligned} \psi: \{2, \dots, k\} &\rightarrow \{1, \dots, k-1\} \\ i &\mapsto i-1. \end{aligned} \quad (1.378)$$

En termes de ψ , la définition de τ s'écrit $\psi(\pi) = \psi \circ \pi \circ \psi^{-1}$, et nous avons

$$\tau = \psi \circ \pi \circ \psi^{-1} \quad (1.379a)$$

$$= \psi \circ \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_n \circ \psi^{-1} \quad (1.379b)$$

$$= \psi \circ \sigma_1 \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \psi \circ \sigma_n \circ \psi^{-1}. \quad (1.379c)$$

Bref, en notant $\sigma'_i = \psi \sigma_i \psi^{-1}$ nous avons $\tau = \sigma'_1 \circ \dots \circ \sigma'_n$.

Il suffit maintenant de remarquer que σ'_i est une transposition dans $\{1, \dots, k-1\}$. On vérifie pour cela que si $\sigma = (a, b)$ alors $\sigma' = (\psi(a), \psi(b))$. En effet, pour $i = 1, \dots, k-1$, il y a trois possibilités : soit $i = \psi(a)$, soit $i = \psi(b)$ soit i n'est ni l'un ni l'autre.

Si $i = \psi(a)$, alors $\sigma'(i) = (\psi \sigma \psi^{-1})(\psi(a)) = \psi \sigma(a) = \psi(b)$. Même vérification pour montrer que $\sigma'(\psi(b)) = \psi(a)$. Si i n'est ni $\psi(a)$ ni $\psi(b)$, alors $\psi^{-1}(i)$ n'est ni a ni b et dans ce cas

$$(\psi \sigma \psi^{-1})(i) = \psi \sigma(\psi^{-1}(i)) = \psi(\psi^{-1}(i)) = i. \quad (1.380)$$

Donc la décomposition $\tau = \sigma'_1 \circ \dots \circ \sigma'_n$ est une décomposition de τ en n transpositions. Autrement dit le nombre de transpositions est le même pour τ que pour π .

En particulier les signatures de τ et de π sont les mêmes. Cela finit la preuve du point (1).

Prouvons le point (2).

(1) **Injectif** Supposons que $\varphi(\pi) = \varphi(\sigma)$. Alors pour tout $i = 1, \dots, k-1$ nous avons

$$\pi(i+1) - 1 = \sigma(i+1) - 1, \quad (1.381)$$

c'est-à-dire $\pi(j) = \sigma(j)$ pour tout $j = 2, \dots, k$. Vu que $\pi(1) = \sigma(1)$ nous avons bien $\pi = \sigma$.(2) **Surjectif** Soit $\tau \in S_{k-1}$. En posant

$$\pi(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ \tau(i-1) + 1 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (1.382)$$

nous avons bien $\tau = \varphi(\pi)$.

□

DEFooDFBEooFEIghU

Définition 1.294 ([1, 58]).*Nous notons*

$$S_{(k,l)} = \{\pi \in S_{k+l} \text{ tel que } \pi(1) < \dots < \pi(k), \pi(k+1) < \dots < \pi(k+l)\}, \quad (1.383)$$

et

$$A_{(k,l)} = \{\pi \in S_{(k,l)} \text{ tel que } \pi(1) = 1\}. \quad (1.384)$$

LEMooCKJAooBIAyVs

Lemme 1.295 ([1]).*Deux énoncés.*

ITEMooCNWMooIbnHnz

(1) Soit $\pi \in A_{(k,l)}$. En posant $\tau(i) = \pi(i+1) - 1$ nous avons $\tau \in S_{(k-1,l)}$.

ITEMooKNKRooWbLYrF

(2) L'application

$$\begin{aligned} \varphi: A_{(k,l)} &\rightarrow S_{(k-1,l)} \\ \pi &\mapsto \left[\tau(i) = \pi(i+1) - 1 \right] \end{aligned} \quad (1.385)$$

est une bijection.(3) En ce qui concerne la signature, $\epsilon(\varphi(\pi)) = \epsilon(\pi)$.*Démonstration.* Pour prouver (1), soit d'abord $1 \leq i < j \leq k-1$. Nous avons

$$\tau(i) = \pi(i+1) - 1 < \pi(i+j) - 1 = \tau(j) \quad (1.386)$$

parce que $i+1$ et $j+1$ sont entre 1 et k . Le même raisonnement tient pour $k+1 \leq i < j \leq k+l$.Pour (2). Même preuve que la partie correspondante du lemme 1.293. $\square$

1.9 Symbole de sommation

1.9.1 Somme à valeurs dans un groupe commutatif

Si S est un ensemble fini, nous savons de la proposition 1.204 qu'il existe un unique $N \in \mathbb{N}$ pour lequel il existe une bijection $\varphi: \{0, \dots, N\} \rightarrow S$. Cette bijection n'est à priori pas unique.

DEFooLNEXooYMQjRo

Lemme-Définition 1.296 ([1]).

Soient un groupe commutatif $(G, +)$ ainsi qu'un ensemble fini I contenant n éléments. Soit une application $f: I \rightarrow G$. Si $\sigma_1, \sigma_2: \{1, \dots, n\} \rightarrow I$ sont deux bijections, alors¹⁰⁹

$$\sum_{i=1}^n f(\sigma_1(i)) = \sum_{i=1}^n f(\sigma_2(i)). \quad (1.387)$$

La valeur commune est notée

$$\sum_{i \in I} f(i) \quad (1.388)$$

Démonstration. Nous commençons par considérer une transposition σ (qui permute k et l avec $k < l$). Nous avons

$$\sum_{i=1}^n f(i) = \sum_{i=1}^{k-1} f(i) + f(k) + \sum_{i=k+1}^{l-1} f(i) + f(l) + \sum_{i=l+1}^n f(i) \quad (1.389a)$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} f(i) + f(l) + \sum_{i=k+1}^{l-1} f(i) + f(k) + \sum_{i=l+1}^n f(i) \quad (1.389b)$$

$$= \sum_{i=1}^n f(\sigma(i)). \quad (1.389c)$$

109. Pour rappel, le symbole $\sum_{i=1}^n$ est défini par 1.156.

Pour cela nous avons utilisé le fait que G est commutatif pour permuter $f(l) \in G$ et $f(k) \in G$ avec $\sum_{i=k+1}^{l-1} f(i) \in G$.

Une permutation quelconque est un produit de telles transpositions (proposition 1.283). Donc pour toute permutation σ nous avons

$$\sum_{i=1}^n f(\sigma(i)) = \sum_{i=1}^n f(i). \quad (1.390)$$

□

La définition 1.296 donne lieu à un certain nombre de remarques.

- (1) Elle donne la somme sur un ensemble fini. Un problème avec les ensembles infinis (outre la convergence) est l'ordre de sommation. Si vous voulez sommer sur $\mathbb{Z}$, dans quel ordre le faire ?
- (2) Pour aller plus loin, et sommer sur des ensembles infinis, rendez-vous dans le thème 53.

PROPooJBQVooNqWErk

Proposition 1.297.

Soient un groupe commutatif $(G, +)$, un ensemble fini I , une application $f: I \rightarrow G$ et une bijection $\sigma: I \rightarrow I$. Alors

$$\sum_{i \in I} f(i) = \sum_{i \in I} f(\sigma(i)). \quad (1.391)$$

Démonstration. Par définition 1.296, si $\varphi: \{1, \dots, n\} \rightarrow G$ est une bijection, alors

$$\sum_{i \in I} f(i) = \sum_{i=1}^n (f \circ \varphi)(i) \quad (1.392)$$

et

$$\sum_{i \in I} (f \circ \sigma)(i) = \sum_{i=1}^n (f \circ \varphi \circ \sigma)(i). \quad (1.393)$$

Vu que φ et $\varphi \circ \sigma$ sont des bijections, les deux sont égaux par le lemme 1.296. □

Si nous avons une application $L: S \rightarrow S$, nous notons

$$\sum_{s \in S} f(L(s)) = \sum_{s \in S} (f \circ L)(s). \quad (1.394)$$

Cette façon d'écrire donne une interprétation pour la notation $\sum_{g \in G} f(hg)$ qui arrive dans la proposition 1.300. Il s'agit de considérer l'application L_h du lemme 1.248, de considérer ¹¹⁰

$$\sum_{g \in G} f(hg) = \sum_{g \in G} (f \circ L_h)(g) \quad (1.395)$$

EQooQQBEooFDQBYG

et de faire tourner la définition 1.296. La même chose tient pour définir $\sum_{g \in G} (gh)$ à l'aide de R_h .

LEMooGAMAAooOAFhrc

Lemme 1.298 (Changement de variables dans une somme[1]).

Soient deux ensembles finis I, J ainsi qu'une bijection $\varphi: I \rightarrow J$. Soient un groupe abélien G et une application $f: I \rightarrow G$. Alors

$$\sum_{i \in I} f(i) = \sum_{j \in J} f(\varphi^{-1}(j)). \quad (1.396)$$

LEMooNDBYooAGEkmw

Lemme 1.299.

Soit un ensemble A fini pouvant être écrit comme une union disjointe $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$; nous supposons que les A_i sont non vides. Soient un groupe commutatif $(G, +)$ et une application $f: A \rightarrow G$. Alors

$$\sum_{a \in A} f(a) = \sum_{k=1}^n \sum_{a \in A_k} f(a). \quad (1.397)$$

110. Le fait que L_h soit une bijection n'a pas d'importance ici.

Démonstration. Le lemme 1.70 nous indique que les parties A_k sont des ensembles finis. Nous notons

- (1) $N_0 = 0$, et $N_k = \text{Card}(A_k)$,
- (2) $S_k = \sum_{i=1}^k N_i$.
- (3) $\varphi_k: \{1, \dots, N_k\} \rightarrow A_k$, une bijection (l'existence est dans la proposition 1.204).

Nous avons $\text{Card}(A) = S_n$ par le lemme 1.207(4). Nous définissons une belle bijection comme il faut :

$$\begin{aligned} \alpha: \{1, \dots, S_n\} &\rightarrow A \\ i &\mapsto \varphi_{k+1}(i - S_k) \end{aligned} \quad (1.398)$$

pour $i \in]S_k, S_{k+1}]$.

- (1) **α est bien définie** Puisque $i > S_k$ et $i \leq S_{k+1}$ nous avons $i - S_k \in \{1, \dots, N_{k+1}\}$, et donc φ_{k+1} s'applique bien à $i - S_k$.
- (2) **α est injective** Supposons que $\alpha(i) = \alpha(j)$. Si $i \in]S_k, S_{k+1}]$ et $j \in]S_l, S_{l+1}]$, alors $\alpha(i) = \varphi_{k+1}(i - S_k) \in A_{k+1}$ et $\alpha(j) = \varphi_{l+1}(j - S_l) \in A_{l+1}$. Vu que les A_i sont disjoints, nous avons $k = l$, et donc

$$\varphi_{k+1}(i - S_k) = \varphi_{k+1}(j - S_k). \quad (1.399)$$

Étant donné que φ_{k+1} est injective, nous avons $i - S_k = j - S_k$, ce qui montre que $i = j$.

- (3) **α est surjective** Soit $a \in A$. Il existe k tel que $a \in A_k$. Nous avons donc un $s \in \{1, \dots, N_k\}$ tel que $a = \varphi_k(s)$. En posant $i = s + S_k$, nous avons bien $a = \alpha(s + S_k)$ parce que $s + S_k \in]S_{k-1}, S_k]$.

Vu que α est une bijection, nous avons l'égalité

$$\sum_{a \in A} f(a) = \sum_{i=1}^{S_n} (f \circ \alpha)(i). \quad (1.400)$$

Nous avons encore besoin d'introduire une bijection. Nous posons

$$\begin{aligned} \beta_k:]S_{k-1}, S_k] &\rightarrow A_k \\ i &\mapsto \varphi_k(i - S_{k-1}). \end{aligned} \quad (1.401)$$

C'est une bijection parce que φ_k en est une, et que $i \mapsto i - S_{k-1}$ est une bijection de $]S_{k-1}, S_k]$.

Nous pouvons maintenant terminer :

$$\sum_{a \in A} f(a) = \sum_{i=1}^{S_n} (f \circ \alpha)(i) \quad (1.402a)$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=S_{k-1}+1}^{S_k} (f \circ \alpha)(i) \right) \quad (1.402b)$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i \in]S_{k-1}, S_k]} f(\varphi_k(i - S_{k-1})) \right) \quad (1.402c)$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i \in]S_{k-1}, S_k]} f(\beta_k(i)) \right) \quad (1.402d)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{a \in A_k} f(a) \right). \quad (1.402e)$$

Justifications :

— Pour (1.402b). Associativité de la somme.

□

PROPooWJQQooFINSEc

Proposition 1.300 ([1]).

Soient un groupe fini G et une fonction $f: G \rightarrow A$ où A est un anneau commutatif. Alors

$$\sum_{g \in G} f(g) = \sum_{g \in G} f(gh) = \sum_{g \in G} f(hg) \quad (1.403)$$

pour tout $h \in G$.

Démonstration. Nous avons une bijection $\varphi: \{0, \dots, N\} \rightarrow G$ garantie par la proposition 1.204. Sa définition est

$$\sum_{g \in G} f(g) = \sum_{i=0}^N f(\varphi(i)). \quad (1.404)$$

Par ailleurs, le lemme 1.248 donne une bijection $L_h: G \rightarrow G$ et permet de considérer la composée

$$\begin{aligned} \varphi': \{0, \dots, N\} &\rightarrow G \\ \varphi' &= L_h \circ \varphi. \end{aligned} \quad (1.405)$$

La proposition 1.296 nous permet d'utiliser la bijection φ' au lieu de φ pour exprimer la somme $\sum_{g \in G}$. Ensuite un jeu de notation utilisant (1.395) donne

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} f(g) &= \sum_{i=0}^N f(\varphi(i)) = \sum_{i=0}^N f(\varphi'(i)) = \sum_{i=0}^N (f \circ L_h \circ \varphi)(i) \\ &= \sum_{i=0}^N (f \circ L_h)(\varphi(i)) = \sum_{g \in G} (f \circ L_h)(g) = \sum_{g \in G} f(hg). \end{aligned} \quad (1.406)$$

En ce qui concerne $\sum_{g \in G} f(gh)$, c'est la même chose, en utilisant R_h au lieu de L_h . □

LEMooKSVWooIFsfwm

Lemme 1.301.

Soit un groupe totalement ordonné¹¹¹ $(A, +, \leq)$. Soient deux suites (a_i) et (b_i) dans G telles que $a_i \leq b_i$ pour tout i . Alors pour tout n nous avons

$$\sum_{i=0}^n a_i \leq \sum_{i=0}^n b_i. \quad (1.407)$$

Tout cela nous permet de définir une somme sympathique et bien connue.

Lemme 1.302.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous avons

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (1.408)$$

Démonstration. La preuve est pratiquement immédiate par récurrence. Nous allons donner une preuve plus « constructive », qui formalise l'idée classique d'écrire la somme à l'endroit et à l'envers.

Nous notons S la somme $\sum_{k=0}^n k$. Le lemme 1.296 dit que si les $\sigma_i: \{0, \dots, n\} \rightarrow \{0, \dots, n\}$ sont des bijections, alors $\sum_{k=0}^n f(\sigma_1(k)) = \sum_{k=0}^n f(\sigma_2(k))$. Nous sommes intéressé au cas $f(i) = i$.

En prenant $\sigma_1(k) = k$ et $\sigma_2(k) = n - k$, nous avons

$$S = \sum_{k=0}^n k = \sum_{k=0}^n (n - k). \quad (1.409)$$

Donc

$$2S = \sum_{k=0}^n (k + (n - k)) = \sum_{k=0}^n n = n \sum_{k=0}^n 1 = n(n + 1). \quad (1.410)$$

En divisant par deux, nous obtenons le résultat annoncé. □

111. Définition 1.252.

1.9.2 Symbole de produit

NORMooDBOFooQCwbOY

1.303.

Si $(G, \cdot)$ est un groupe et si $H \subset G$, nous notons le produit des éléments de H par

$$\prod_{g \in H} g = \sum_{g \in H} g \quad (1.411)$$

où à droite, c'est la somme déjà définie. La différence entre $\prod$ et $\sum$ est que nous utilisons $\prod$ pour les groupes notés « multiplicativement » comme $(G, \cdot)$ alors que nous utilisons $\sum$ lorsque le groupe est noté « additivement » comme $(G, +)$.

Dans le cas d'un anneau $(A, +, \cdot)$, la distinction est importante pour savoir quelle opération est sous-entendue.

La définition 1.156(1) signifie qu'une somme vide vaut zéro : $\sum_{x \in \emptyset} x = 0$. Vu que zéro est la façon usuelle de noter le neutre pour une opération notée « + », lorsque l'opération est notée « $\cdot$ » nous avons

$$\prod_{x \in \emptyset} x = 1 \quad (1.412)$$

EQooCSDSooTydfzQ

parce que 1 est la façon usuelle de noter le neutre d'une opération notée « $\cdot$ ».

Notez que (1.412) n'est pas une nouvelle définition ou une nouvelle convention. C'est seulement l'égalité $\sum_{x \in \emptyset} x = 0$, avec des notations adaptées à un groupe dont l'opération est notée multiplicativement.

PROPOoQMUDooQQVRle

Proposition 1.304.

Si E est un ensemble fini et si G est un groupe commutatif, alors pour toute fonction $f: E \rightarrow G$ et pour toute permutation¹¹² σ de E ,

$$\prod_{i \in E} f(i) = \prod_{i \in E} f(\sigma(i)) \quad (1.413)$$

Démonstration. C'est exactement la proposition 1.296, sauf qu'ici la loi de groupe est notée multiplicativement au lieu d'additivement. $\square$

1.10 Anneaux

Nous avons déjà parlé d'anneaux dans la définition 1.90.

DEFooKWKGoIoWGTA

Définition 1.305.

Un **isomorphisme d'anneaux** est un morphisme d'anneaux¹¹³, bijectif.

Soit X un ensemble et un anneau $(A, +, \times)$. Nous considérons $\text{Fun}(X, A)$ l'ensemble des applications $X \rightarrow A$. Cet ensemble devient un anneau avec les définitions

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad (1.414a)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x). \quad (1.414b)$$

C'est la **structure canonique** d'anneau sur $\text{Fun}(X, A)$.

Définition 1.306.

Le **centralisateur** de $x \in A$ dans A est l'ensemble

$$\{y \in A \text{ tel que } xy = yx\}, \quad (1.415)$$

le **centre** de A est

$$\{y \in A \text{ tel que } xy = yx, \forall x \in A\}. \quad (1.416)$$

112. Une permutation est une bijection, définition 1.261.

113. Définition 1.96.

1.10.1 Idéal dans un anneau

DefooQULAAooREUIU

Définition 1.307 (Idéal dans un anneau).

Un sous-ensemble $I \subset A$ est un **idéal à gauche** si

- (1) I est un sous-groupe pour l'addition,
- (2) pour tout $a \in A$, $aI \subset I$.

De même nous disons que $I \subset A$ est un **idéal à droite** lorsque I est un sous-groupe pour l'addition et $Ia \subset I$ pour tout $a \in A$.

Lorsqu'un ensemble est idéal à gauche et à droite, nous disons que c'est un **idéal bilatère**. Lorsque nous parlons d'idéal sans précision, nous parlons d'idéal bilatère.

DEFooZFYSoosJGZndS

Définition 1.308 (Idéaux premiers entre eux[59]).

Deux définitions.

- (1) Deux idéaux I et J de l'anneau A sont **premiers entre eux** si $I + J = A$.
- (2) Des idéaux $I_1, \dots, I_n$ sont **premiers dans leur ensemble** si $I_1 + \dots + I_n = A$.

LEMooMAHXooXSowdn

Lemme 1.309.

Les seuls idéaux d'un corps sont $\{0\}$ et le corps lui-même.

1.10.2 Idéal engendré

Démonstration. Soient un corps $\mathbb{K}$ et un idéal I dans A . Si $I = \{0\}$, c'est un idéal, pas de problèmes. Si $I \neq \{0\}$, alors $0 \in I$ parce qu'un idéal doit contenir le neutre de l'addition.

Soit $x \neq 0$ dans I . Alors pour tout $a \in \mathbb{K}$ nous avons $ax \in I$. En particulier avec $a = x^{-1}$ nous voyons que $1 \in I$. De là, $I = \mathbb{K}$ parce que si $x \in \mathbb{K}$, nous avons $x = x \cdot 1 \in xI \subset I$. $\square$

DefSKTooOTauAR

Proposition-Définition 1.310 (Idéal engendré par un élément).

Soit un anneau A et une partie $S \subset A$. Nous notons (S) l'intersection de tous les idéaux de A contenant S . C'est un idéal.

Nous nommons (S) l'**idéal engendré** par S ,

Démonstration. Nous prouvons que (S) est un idéal. En deux parties.

- (1) **Somme** Soient $a, b \in (S)$. Nous devons prouver que $a + b \in (S)$ c'est-à-dire que si I est un idéal de A , alors $a + b \in I$. Soit donc un idéal I . Vu que $(S) \subset I$ nous avons $a, b \in I$. Et comme I est un idéal, $a + b \in I$.
- (2) $a(S) \subset (S)$ Soit $a \in A$. Nous prouvons que $a(S) \subset (S)$. Soit $x \in (S)$ et un idéal I de A . Nous avons $x \in (S) \subset I$. Donc $ax \in I$.

 $\square$

PROPooDTYUooJPzPZV

Proposition 1.311 ([60, 1]).

Soient un anneau A et une partie $S \subset A$. L'idéal engendré par S est la partie

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^r a_i s_i b_i \text{ tel que } a_i, b_i \in A, s_i \in S \right\}. \quad (1.417)$$

Démonstration. Nous commençons par remarquer que P est un idéal. Ensuite nous prouvons

- (1) $P \subset (S)$ Il faut montrer que P est inclus dans tous les idéaux contenant S . Soit I un tel idéal. Soit un élément $\sum_{i=1}^r a_i s_i b_i$ dans P . Vu que $s_i \in S \subset I$, nous avons $s_i \in I$ et donc $a_i s_i b_i \in I$.
- (2) $(S) \subset P$ Nous savons que P est un idéal contenant S . Comme (S) est l'intersection de tous les idéaux contenant S , en particulier $(S) \subset P$.

 $\square$

PROPooFDJXooYbXEpo

Proposition 1.312 ([1]).Soient un anneau A ainsi que $a, b, x \in A$.

ITEMooVFXMooPljoHf

(1) La partie $(a) + (b)$ est un idéal.

ITEMooMXHAooHPnAdu

(2) Si $a \in (x)$, alors $(a) \subset (x)$.*Démonstration.* En deux parties.

- (1) **Pour (1)** Soient $u, v \in (a) + (b)$. Nous avons $u = u_1 + u_2$ et $v = v_1 + v_2$ avec $u_1, v_1 \in (a)$ et $u_2, v_2 \in (b)$. Donc

$$u + v = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \in (a) + (b) \quad (1.418)$$

parce que $u_1 + v_1 \in (a)$ du fait que (a) est un idéal.

- (2) **Pour (2)** Si $s \in (x)$, alors la proposition 1.311 dit qu'il existe $a, b \in A$ tels que $s = axb$. Donc un élément général de (s) est de la forme $\alpha s \beta$ avec $\alpha, \beta \in A$. Mais $\alpha s \beta = \alpha axb \beta \in (x)$.

□

LEMooSEIAooYVlvPK

Lemme 1.313 ([1]).Soit un anneau A .

(1) Toute union d'idéaux est un idéal.

(2) Une somme finie d'idéaux est un idéal.

LEMooHSVYooRjhGUU

Lemme 1.314 ([1]).Soient un anneau commutatif A ainsi que $S \subset A$. Les parties

$$I = \bigcap_{s \in S} sA \quad (1.419)$$

et

$$J = \bigcup_{\alpha \text{ fini dans } S} \sum_{s \in \alpha} sA \quad (1.420)$$

sont des idéaux.

Démonstration. Nous faisons pour J . Soient $x, y \in J$. Il existe α, β finis dans S et des éléments $a_s, b_s \in A$ pour chaque $s \in \alpha \cup \beta$ tels que $x = \sum_{s \in \alpha} sa_s$ et $y = \sum_{s \in \beta} sb_s$.

Nous posons $a_s = 0$ quand $s \notin \alpha$ et $b_s = 0$ lorsque $s \notin \beta$ et ensuite $\gamma = \alpha \cup \beta$. Nous avons alors

$$x + y = \sum_{s \in \gamma} s(a_s + b_s) \in J. \quad (1.421)$$

De plus si $a \in A$, alors $xa = \sum_{s \in \alpha} sAa \subset \sum_{s \in A} sA$.

□

PROPooMMHPooZYzvdK

Proposition 1.315 ([61, 1]).Soit un anneau commutatif A . Soit une partie S de A .

ITEMooJKGMooCqWYOq

(1) Un élément μ est un ppcm de S si et seulement si il est générateur de l'idéal ¹¹⁴ $I = \bigcap_{s \in S} sA$.

ITEMooZUCV85MpnhU

(2) Si δ est un générateur de l'idéal $J = \bigcup_{\alpha \text{ fini dans } S} \sum_{s \in \alpha} sA$, alors $\delta \in \text{pgcd}(S)$.*Démonstration.* En plusieurs parties.

- (1) **Pour (1)** En deux parties.

(1a) $\Rightarrow$ Soit $m \in \text{ppcm}(S)$. Nous allons montrer que $\mu A = I$, et ce sera suffisant par la proposition 1.311 et le fait que A est commutatif.

(1a.i) $\mu A \subset I$ Vu que $\mu \in \text{ppcm}(S)$, pour tout $s \in S$, il existe $a_s \in A$ tel que $\mu = sa_s$. Donc $\mu A \subset sA$ pour tout $s \in S$. Autrement dit, $\mu A \subset \bigcup_{s \in S} sA = I$.

114. Lemme 1.314.

- (1a.ii) $\underline{I \subset \mu A}$ Soit $m \in I$. Donc m est un multiple de tout élément de S . Vu que μ est un ppcm de S , il existe $a \in A$ tel que $m = \mu a$. Et donc $m \in \mu A$, et donc $I \subset \mu A$.
- (1b) $\Leftarrow$ Soit un générateur μ de I , c'est-à-dire que $\mu A = I$.
- (1b.i) $\underline{S \mid \mu}$. Soit $s \in S$. Vu que $\mu \in I$, nous avons $\mu \in \bigcap_{s \in S} sA$, et donc il existe $a \in A$ tel que $\mu = sa$, c'est-à-dire que $s \mid \mu$. Bref, tout élément de S divise μ .
- (1b.ii) **Si** $S \mid m$, **alors** $\mu \mid m$ Nous supposons que m est un multiple de tout élément de S . Donc pour tout $s \in S$, il existe a_s tel que $m = sa_s$. Donc $m \in I$, et donc μ divise m .
- (2) **Pour (2)** Nous considérons un générateur δ de J , et nous prouvons que $\delta \in \text{pgcd}(S)$.
- (2a) $\underline{\delta \text{ divise } S}$ Soit $s \in S$. Nous avons $s \in J$ et donc il existe $a_s \in A$ tel que $\delta a_s = s$. Donc $\delta \mid s$.
- (2b) **Si** $d \mid S$ **alors** $d \mid \delta$ Vu que $\delta \in J$, il existe une partie fine $\alpha \subset S$ et des $b_s \in A$ tels que $\delta = \sum_{s \in \alpha} sb_s$. En même temps, nous savons que $s = da_s$. Donc

$$\delta = \sum_{s \in \alpha} sb_s = \sum_{s \in \alpha} da_s b_s = d \sum_{s \in \alpha} a_s b_s, \quad (1.422)$$

c'est-à-dire que d divise δ .

□

1.10.3 Autres trucs sur les idéaux

PROPooGXMRooTcUGbi

Proposition-Définition 1.316.

Soit A , un anneau, I un idéal bilatère¹¹⁵ de A . Nous considérons la relation d'équivalence $x \sim y$ si et seulement si $x - y \in I$. Sur le quotient¹¹⁶

$$A/\sim = A/I, \quad (1.423)$$

nous mettons les opérations

- (1) $[x] + [y] = [x + y]$
 (2) $[x][y] = [xy]$.

Nous avons alors les résultats suivants :

ITEMooEJPEooRKAqmS

- (1) Les opérations sont bien définies,
 (2) l'ensemble A/I , muni de ces opérations, est un anneau. Le neutre pour l'addition est $[0]$, l'inverse de $[a]$ est $[-a]$ que nous noterons $-[a]$.
 (3) la surjection canonique $\pi: A \rightarrow A/I$ est un morphisme.

ITEMooYBEGooTlHgNz

ITEMooLNRLoomkoWXZ

Cet anneau est appelé **anneau quotient**.

Démonstration. En plusieurs parties.

- (1) **Pour (1)** Nous savons que, par définition,

$$\bar{x} = \{x + i \text{ tel que } i \in I\}. \quad (1.424)$$

Calculons le produit de représentants génériques de $\bar{x}$ et de $\bar{y}$:

$$(x + i_1)(y + i_2) = xy + xi_2 + yi_1 + i_1i_2. \quad (1.425)$$

Puisque I est un idéal, nous avons $xi_2 + yi_1 + i_1i_2 \in I$ et donc bien

$$(x + i_1)(y + i_2) \in \bar{xy}. \quad (1.426)$$

115. Définition 1.307.

116. Définition 1.51.

(2) **Pour (2)** Il s'agit de vérifier les conditions de la définition 1.90.

D'abord A/I est un groupe de neutre $[0]$. En effet, vu que $(A, +)$ est un groupe commutatif de neutre 0 , nous avons

$$(2a) \text{ Neutre : } [a] + [0] = [a + 0] = [a].$$

$$(2b) \text{ Associativité : } [a] + ([b] + [c]) = [a] + [b + c] = [a + b + c] = [a + b] + [c] = ([a] + [b]) + [c].$$

$$(2c) \text{ Inversibilité : l'inverse de } [a] \text{ est } [-a] \text{ parce que } [a] + [-a] = [a - a] = [0].$$

Nous pouvons noter $-[a]$ l'élément $[-a]$. Le groupe A/I est commutatif :

$$[a] + [b] = [a + b] = [b + a] = [b] + [a]. \quad (1.427)$$

Donc $(A/I, +)$ est un groupe commutatif de neutre $[0]$.

L'associativité de A donne l'associativité dans A/I :

$$([a][b])[c] = [ab][c] = [abc] = [a][bc] = [a]([b][c]). \quad (1.428)$$

Et enfin pour la distributivité,

$$[a]([b] + [c]) = [a][b + c] = [a(b + c)] = [ab + ac] = [ab] + [ac] = [a][b] + [a][c]. \quad (1.429)$$

Nous avons prouvé que A/I est un anneau de neutre $[0]$ et d'unité $[1]$.

(3) **Pour (3)** Nous devons vérifier les trois conditions de la définition 1.96. Cela est immédiat parce que $\pi(x) = [x]$.

□

1.10.4 Élément irréductible et premier

Définition 1.317 ([62]).

Soit un anneau commutatif A . Un élément $p \in A$ est **premier** si il est

- (1) non nul,
- (2) non inversible,
- (3) si p divise un produit ab , alors il divise soit a soit b (ou les deux).

Définition 1.318 (Élément irréductible[63]).

Un élément d'un anneau commutatif est **irréductible** si il n'est ni inversible, ni le produit de deux éléments non inversibles.

1.319.

Nous allons voir dans la section 3.6 que le concept d'élément irréductible n'est vraiment utile que dans le cas des anneaux intègres.

Exemple 1.320.

Un corps n'a pas d'élément irréductible parce qu'à part zéro, tous les éléments sont inversibles. Mais 0 n'est pas irréductible parce qu'il peut être écrit comme produit d'éléments non inversibles : $0 = 0 \cdot 0$. △

Lemme 1.321 ([1]).

Si p est irréductible et si u est inversible, alors pu est irréductible.

Démonstration. D'abord pu n'est pas inversible parce que p ne l'est pas.

Ensuite supposons que $pu = ab$. Vu que u est inversible, nous avons $p = a(bu^{-1})$. Comme p est irréductible, soit a , soit bu^{-1} est inversible.

Si c'est a , c'est gagnée. Sinon, soit k un inverse de bu^{-1} : $bu^{-1}k = 1$. Nous voyons que $u^{-1}k$ est un inverse de b . Donc b est inversible. □

PROPooKDWQooTtScrN

Proposition 1.322.

Les éléments irréductibles de l'anneau $\mathbb{Z}$ sont les nombres premiers¹¹⁷.

Démonstration. Les seuls inversibles de $\mathbb{Z}$ sont ± 1 .

Si p est premier et $p = ab$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, alors nous avons soit $a = \pm 1$ soit $b = \pm 1$. Donc p n'est pas le produit de deux éléments non inversibles.

Dans le sens inverse, supposons que p soit irréductible dans $\mathbb{Z}$. D'abord p ne peut pas être ± 1 parce que ± 1 sont inversibles. Ensuite supposons que $p = ab$. Vu que p est irréductible, nous avons $a = \pm 1$ ou $b = \pm 1$. Autrement dit, dans $p = ab$, soit a soit b est un inversible. $\square$

1.10.5 Anneau intègre

DEFooHRRYooTmbUTH

Définition 1.323 (Éléments nilpotents, unipotents).

On dit que $a \in A$ est **nilpotent** si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = 0$. Il est dit **unipotent** si $a - 1$ est nilpotent, c'est-à-dire si $(a - 1)^n = 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

DEFooCIHVooAhpJxy

Définition 1.324 (Éléments inversibles).

Un élément $a \in A$ est dit **inversible** si il existe $b \in A$ tel que $ab = 1$.

L'ensemble $U(A)$ des éléments inversibles de A est un groupe pour la multiplication. Nous notons $A^* = A \setminus \{0\}$.

Conformément à la définition 1.99 de diviseur, nous posons la définition suivante pour les diviseurs de zéro.

DEFooCIYLooFkhVOc

Définition 1.325 (diviseur de zéro[64]).

Un élément $a \neq 0$ est un **diviseur de zéro à gauche** si il existe $x \neq 0$ tel que $ax = 0$. L'élément a est un diviseur de zéro **à droite** si il existe $y \neq 0$ tel que $ya = 0$.

Nous disons que a est un **diviseur de zéro** si il est un diviseur de zéro à gauche ou à droite.

DEFooTAOPooWDPYmd

Proposition-Définition 1.326 (Anneau intègre[1]).

Soit A un anneau non réduit à $\{0\}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

ITEMooMXMKooXMYpkN

(1) **(1) implique (2)** A ne possède pas de diviseurs de zéro¹¹⁸.

ITEMooLAJCooFwxXrV

(2) La règle du produit nul s'applique dans A : pour tous $a, b \in A$, si $ab = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$.

ITEMooQNTFooSRrVPK

(3) On peut simplifier par un même élément non-nul, deux expressions produit dans A qui sont égales : pour tous $a, b, c \in A$ avec $a \neq 0$, si $ab = ac$, alors $b = c$.

Un anneau non réduit à $\{0\}$ qui vérifie ces propriétés est dit **intègre**.

Démonstration. En trois implications.

(1) **(1) implique (2)**

Si $ab = 0$ avec $b \neq 0$ alors a est un diviseur de zéro. Vu que nous supposons que A n'a pas de diviseurs de zéros, a est nul. De même, si $a \neq 0$ b devrait être nul.

(2) **(2) implique (3)**

Si $ab = ac$, alors $a(b - c) = 0$ et l'hypothèse dit que soit $a = 0$, soit $b - c = 0$. Donc si $a \neq 0$, alors $b - c = 0$.

(3) **(3) implique (1)** Si $A = \{0\}$, le point (3) n'est pas applicable.

Si $a \neq 0$ et $ax = 0$, alors nous avons aussi $ax = a \times 0$. Par propriété de simplification, $x = 0$. Donc a n'est pas un diviseur de zéro à gauche. Nous prouvons de la même façon qu'il n'y a pas de diviseurs de zéro à droite. $\square$

117. Nombre premier, définition 1.317.

118. Définition 1.325.

LEMooIKNMooMfvQnu

Lemme 1.327.

Un corps est un anneau intègre¹¹⁹. Tout corps satisfait la règle du produit nul.

Démonstration. Nous vérifions la définition 1.326, et nous nommons $\mathbb{K}$ le corps considéré.

- (1) **Pour (1)** Soit $a \in \mathbb{K}$. Si $ax = 0$ avec $x \neq 0$ alors en multipliant par x^{-1} nous trouvons $a = 0$. Donc a n'est pas un diviseur de zéro non nul.
- (2) **Pour (2)** Idem à ce que nous venons de faire. Si dans $ab = 0$ l'un des deux est non nul, en multipliant par son inverse, nous trouvons que l'autre est nul.
- (3) **Pour (3)** Si $ab = ac$ avec $a \neq 0$, alors il suffit de multiplier à gauche par a^{-1} (qui existe parce que nous sommes dans un corps) pour obtenir $b = c$.

□

Conséquence : dans un corps nous avons toujours la règle du produit nul, et l'élément nul n'est jamais inversible.

PROPooZBTlooRhAhvg

Proposition 1.328 ([65]).

Soit un anneau unitaire et intègre A . Soit $p \in A$.

ITEMooJWRYooHndNpV

- (1) p est premier si et seulement si l'idéal pA est premier.
- (2) p est irréductible si et seulement si il n'existe pas d'idéal principal I tel que $pA \subsetneq I \subsetneq A$.

ITEMooGHGCooRkJilg

Démonstration. En plusieurs parties.

- (1) **(1) $\Rightarrow$**

Supposons que p est premier. Soient $a, b \in A$ tels que $ab \in pA$. En particulier $p \mid ab$, et p étant premier¹²⁰, nous avons soit $p \mid a$ soit $p \mid b$. Supposons que $p \mid a$. Il existe $k \in A$ tel que $pk = a$, et donc

$$a = pk \in pA. \quad (1.430)$$

De même si $p \mid b$ nous avons $b \in pA$.

- (2) **(1) $\Leftarrow$**

Nous supposons que l'idéal pA est premier, et nous prouvons que p est premier. Soient $a, b \in A$ tels que $p \mid ab$. Il existe $k \in A$ tel que $pk = ab$. Donc $ab \in pA$. L'idéal pA étant premier, nous avons soit $a \in pA$ soit $b \in pA$. Donc soit $a \mid a$ soit $b \mid p$.

- (3) **(2) $\Rightarrow$**

Supposons que p est irréductible. Soit un idéal principal I vérifiant $pA \subset I$. Nous allons montrer que soit $I = pA$ soit $I = A$. Vu que I est principal, il existe $a \in A$ tel que $I = aA$. Nous avons $pA \subset aA$, et en particulier $p \in aA$. Notons $b \in A$ un élément tel que $ab = p$.

Vu que p est irréductible, il n'est pas le produit de deux non inversibles. Donc soit a soit b est inversible.

Si a est inversible, alors $I = A$.

Si b est inversible, alors $a = pb^{-1}$, de telle sorte que $a \in pA$. De ce fait $I = pA$.

- (4) **(2) $\Leftarrow$**

Enfin, nous supposons qu'il n'existe pas d'idéal principal I tel que $pA \subsetneq I \subsetneq A$, et nous montrons que p est irréductible. Soient $a, b \in A$ tels que $p = ab$.

Nous avons $p \in aA$ et donc $pA \subset aA$. Donc soit $aA = pA$ soit $aA = A$.

Si $aA = pA$, alors il existe $k \in A$ tel que $pk = a$. En multipliant l'égalité $ab = p$ par k nous trouvons $abk = pk = a$. Vu que A est intègre, nous pouvons simplifier par a et trouver $bk = 1$, de telle sorte que b soit inversible.

Si $aA = A$, alors a est inversible parce que $1 \in A = aA$.

119. Définition 1.326.

120. Définition 1.317.

□

LEMooSFHMooQoKsPV

Lemme 1.329 ([1]).

Soient un anneau intègre A , et une partie $S \subset A$. Si un des pgcd de S est inversible¹²¹, alors ils le sont tous.

Démonstration. Pour rappel, les pgcd d'une partie de A sont définis dans 1.103. Soit un pgcd inversible de S , ainsi qu'un autre pgcd que nous nommons δ' . Vu que δ' divise tous les éléments de S , il est divisé par δ : $\delta \mid \delta'$. Réciproquement, $\delta' \mid \delta$.

Soient x et y définis par $\delta = x\delta'$ et $\delta' = y\delta$. Nous avons

$$\delta = x\delta' = xy\delta. \quad (1.431)$$

Comme l'anneau A est intègre, nous pouvons simplifier par δ et voir $xy = 1$, ce qui signifie que x et y sont inversibles. Donc si δ est inversible, alors $\delta' = y\delta$ est inversible. □

LEMooMHZQoolcSNSf

Lemme 1.330 ([1, 66]).

Soient un anneau intègre, A , une partie $S \subset A$ et un élément $a \in A$. Nous avons¹²²

$$\text{pgcd}(aS) = a \text{pgcd}(S). \quad (1.432)$$

Démonstration. Deux inclusions à prouver.

- (1) $\text{pgcd}(aS) \subset a \text{pgcd}(S)$ Soit un pgcd δ de aS . Nous devons trouver un $\delta' \in \text{pgcd}(S)$ tel que $\delta = a\delta'$. En termes de notations, nous notons $S = \{s_i\}_{i \in I}$. Pour chaque i nous avons $\delta \mid as_i$: il existe $x_i \in A$ tel que

$$\delta x_i = as_i. \quad (1.433)$$

Vu que a divise tous les éléments de aS , il divise n'importe quel pgcd de aS , et en particulier $a \mid \delta$: il existe $\delta' \in A$ tel que $\delta = a\delta'$. Nous montrons que $\delta' \in \text{pgcd}(S)$.

Nous savons que $\delta x_i = as_i$. En remplaçant δ par $a\delta'$, $a\delta'x_i = as_i$. Vu que nous sommes dans un anneau intègre, nous pouvons simplifier par a (définition 1.326(3)) :

$$\delta'x_i = s_i. \quad (1.434)$$

Donc δ' divise tous les éléments de S , et vérifie la première condition pour être un pgcd de S . Pour la seconde condition, nous supposons que d divise tous les éléments de S . Nous avons $d \mid S$, donc $ad \mid aS$. Et comme δ est un pgcd de aS , nous déduisons que ad divise δ . Il existe $y \in A$ tel que

$$ady = \delta. \quad (1.435)$$

Nous remplaçons δ par sa valeur $a\delta'$: $ady = a\delta'$. Encore une fois nous simplifions par a et nous trouvons $dy = \delta'$, c'est-à-dire que δ divise δ' .

- (2) $a \text{pgcd}(S) \subset \text{pgcd}(aS)$

Soit un pgcd δ de S . Nous voulons que $a\delta \in \text{pgcd}(aS)$. Vu que $\delta \in \text{pgcd}(S)$ nous avons $\delta x_i = s_i$ pour tout i , et donc aussi $a\delta x_i = as_i$, de telle sorte que $a\delta$ divise tous les éléments de aS .

Soit maintenant $d \in A$ divisant tous les éléments de aS . Nous devons prouver que $d \mid a\delta$.

(2a) Travail préliminaire

Nous considérons $\delta' \in \text{pgcd}(aS)$. Vu que $\delta \mid s$ pour tout $s \in S$, nous avons aussi $a\delta \mid as$ pour tout $s \in S$. Comme δ' est un pgcd de aS , nous avons donc

$$a\delta \mid \delta'. \quad (1.436)$$

Soit $u \in A$ tel que $\delta' = a\delta u$.

121. Définition 1.324.

122. Définition du pgcd : 1.103.

En utilisant la première partie de la preuve, nous avons

$$\delta' \in \text{pgcd}(aS) \subset a \text{pgcd}(S). \quad (1.437)$$

Donc il existe $\delta_1 \in \text{pgcd}(S)$ tel que $\delta' = a\delta_1$. En écrivant l'égalité $\delta' = a\delta u$ avec cette valeur de δ' , nous trouvons

$$a\delta_1 = a\delta u, \quad (1.438)$$

et donc $\delta_1 = \delta u$ parce que A est intègre. Vu que $\delta_1 \in \text{pgcd}(S)$, nous avons aussi $\delta u \in \text{pgcd}(S)$. En particulier δu divise tous les éléments de S , et donc divise δ qui est un pgcd de S : $\delta u \mid \delta$. En multipliant par a ,

$$\delta' = a\delta u \mid a\delta. \quad (1.439)$$

(2b) **Résumé** Nous avons considéré $\delta \in \text{pgcd}(S)$ et nous sommes en train de prouver que $a\delta \in \text{pgcd}(aS)$. Nous avons déjà prouvé que si $\delta' \in \text{pgcd}(aS)$, alors nous avons $\delta' \mid a\delta$. Nous posons $y \in A$ tel que $\delta'y = a\delta$.

(2c) **Et enfin** Soit d divisant tous les éléments de $a\delta$. Donc $d \mid \delta'$: il existe $x \in A$ tel que $dx = \delta'$. En multipliant par y ,

$$dxy = \delta'y = a\delta. \quad (1.440)$$

Nous avons montré que d divise $a\delta$, ce qu'il nous fallait.

□

LEMooZSUNooUmYmgt

Lemme 1.331 ([67]).

Soient un anneau intègre A et une partie $S \subset A$. Si $\delta \in \text{pgcd}(S)$, alors $\text{pgcd}(S/\delta)$ ne contient que des inversibles.

Démonstration. En utilisant le lemme 1.330, nous avons

$$\text{pgcd}(S) = \text{pgcd}(\delta(S/\delta)) = \delta \text{pgcd}(S/\delta). \quad (1.441)$$

Soit $d \in \text{pgcd}(S/\delta)$. Notre but est de montrer que d est inversible. D'abord

$$\delta d \in \delta \text{pgcd}(S/\delta) = \text{pgcd}(S). \quad (1.442)$$

Donc δd divise tous les éléments de S . Étant donné que δ est un pgcd de S , la définition 1.103(2) nous dit que δd divise δ . Il existe donc $d' \in A$ tel que $\delta dd' = \delta$, c'est-à-dire

$$\delta(dd' - 1) = 0. \quad (1.443)$$

Étant donné que $\delta \neq 0$ et que A est intègre nous avons $dd' - 1 = 0$ (définition 1.326(2)), c'est-à-dire $dd' = 1$. Cela montre que d' est un inverse de d , et donc que d est inversible. □

LEMooZKASooKstTuK

Lemme 1.332 ([1]).

Soit un anneau intègre A . Si $\delta \in \text{pgcd}(S)$ et si $u \in A$ est inversible, alors $\delta u \in \text{pgcd}(S)$.

Démonstration. Soit $s \in S$. Si $\delta x = s$, alors $u\delta(u^{-1}x) = s$. Donc $u\delta$ divise tous les éléments de S . De plus si $d \mid S$, alors $d \mid \delta$. Dans ce cas il existe y tel que $dy = \delta$. Nous avons alors aussi

$$dxu = \delta u, \quad (1.444)$$

de telle sorte que d divise δu . □

1.10.6 Fonction puissance

Voici une première définition de la fonction puissance. Il y en aura d'autres, de plus en plus générales. Voir le thème 52.

DEFooGVSFooFVLTNo

Définition 1.333.

Si A est un anneau, si $a \in A$ et si $n \in \mathbb{N}$, nous définissons a^n par récurrence :

(1) $a^0 = 1$ (l'unité pour la multiplication dans A),

ITEMooOUIPooGjAgQb

(2) $a^{k+1} = a \cdot a^k$.

Si vous n'êtes pas sûr de vous, ne citez pas le théorème 1.120. Il est indispensable pour faire fonctionner cette définition, mais vous pouvez faire comme si vous n'avez rien vu.

Le lemme suivant dit que le point (2) de la définition 1.333 aurait pu être écrit $a^k \cdot a$ au lieu de $a \cdot a^k$.

LEMooWPARooYlZlZr

Lemme 1.334 ([1]).

Si A est un anneau, si $a \in A$ et si $n \in \mathbb{N}$, alors

$$a^n = a \cdot a^{n-1} = a^{n-1} \cdot a. \quad (1.445)$$

Démonstration. Cela se prouve par récurrence. Pour $n = 1$ c'est l'égalité $a = a^0 a$ qui est correcte parce que par définition $a^0 = 1$.

Supposons que le résultat soit bon pour n et voyons ce que ça donne pour $n + 1$:

$$a^{n+1} = aa^n \quad \text{Définition de } a^{n+1} \quad (1.446a)$$

$$= a(a^{n-1}a) \quad \text{hypothèse de récurrence pour } a^n \quad (1.446b)$$

$$= (aa^{n-1})a \quad \text{associativité} \quad (1.446c)$$

$$= a^n a \quad \text{Définition de } a^n. \quad (1.446d)$$

□

PROPooPLLSooUpiLKa

Proposition 1.335 ([1]).

Soit un naturel $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Soit un naturel $m > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $b^n > m$.

1.10.7 Anneau euclidien

DefAXitWRL

Définition 1.336 (Wikipédia).

Soit A un anneau intègre¹²³. Un **stathme euclidien** sur A est une application $\alpha: A \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ tel que

ITEMooLVJAooLpjgEz

(1) $\forall a, b \in A \setminus \{0\}$, il existe $q, r \in A$ tel que

$$a = qb + r \quad (1.447)$$

et $\alpha(r) < \alpha(b)$.

(2) Pour tout $a, b \in A \setminus \{0\}$, $\alpha(b) \leq \alpha(ab)$.

Un anneau est **euclidien** si il accepte un stathme euclidien.

Le stathme est la fonction qui donne le « degré » à utiliser dans la division euclidienne. La contrainte est que le degré du reste soit plus petit que le degré du dividende.

LEMooFUSTooDCcBDb

Lemme 1.337.

L'ensemble $\mathbb{Z}$ avec les opérations usuelles est un anneau intègre¹²⁴.

123. Définition 1.326.

124. Anneau intègre, définition 1.326.

ExwqlCwvV

Exemple 1.338.

Le stathme de $\mathbb{N}$ pour la division euclidienne usuelle est $\alpha(n) = n$. Si $a, b \in \mathbb{N}$ nous écrivons

$$a = qb + r \quad (1.448)$$

où q est l'entier le plus proche *inférieur* à a/b (on veut que le reste soit positif) et $r = a - qb$. Nous avons donc

$$r - b = a - b(q + 1) < a - b\frac{a}{b} = 0, \quad (1.449)$$

ce qui montre que $r < b$. △

Cet exemple ne fonctionne pas avec $\mathbb{Z}$ au lieu de $\mathbb{N}$ parce que le stathme doit avoir des valeurs dans $\mathbb{N}$. Cela ne veut cependant pas dire qu'il n'existe pas de stathme sur $\mathbb{Z}$; cela veut seulement dire que $\alpha(x) = x$ ne fonctionne pas.

1.10.8 Anneau principal et idéal premier

DEFooMZRKooBPLAWH

Définition 1.339 (Idéal principal^[68]).

Soit un idéal¹²⁵ I dans A .

- (1) Il est **principal à gauche** si il existe $a \in I$ tel que $I = Aa$.
- (2) Il est **principal à droite** si il existe $a \in I$ tel que $I = aA$.
- (3) Nous disons qu'il est **principal bilatère** si il existe $a \in I$ tel que

$$I = \left\{ \sum_{i=1}^r x_i a y_i \text{ tel que } x_i, y_i \in A \right\}. \quad (1.450)$$

Définition 1.340.

DEFooGWOZooXzUlhK

Un anneau est **principal** si

- (1) il est commutatif et intègre
- (2) tous ses idéaux¹²⁶ sont principaux¹²⁷.

Souvent pour prouver qu'un anneau est principal, nous prouvons qu'il est euclidien (définition 1.336) et nous utilisons la proposition 1.341 qui dit qu'un anneau euclidien est principal.

Une manière de prouver qu'un anneau n'est pas principal est de prouver qu'il n'est pas factoriel, théorème 3.68.

Propkllxnv

Proposition 1.341 ([69]).

Tout anneau euclidien¹²⁸ est principal¹²⁹.

Démonstration. Soit A un anneau euclidien et α un stathme sur A . Nous considérons un idéal I non nul de A . Nous devons montrer que I est généré par un élément. En l'occurrence nous allons montrer qu'un élément $a \in I \setminus \{0\}$ qui minimise $\alpha(a)$ va générer¹³⁰ I .

Soit $x \in I$. Par construction, il existe $q, r \in A$ tels que $x = aq + r$ avec $r = 0$ ou $\alpha(r) < \alpha(a)$. Étant donné que $x, a \in I$, $r \in I$. Si $r \neq 0$, alors r contredirait la minimalité de $\alpha(a)$. Donc $r = 0$ et $x = aq$, ce qui signifie que I est principal. □

PROPooPJGLooQsrJTU

Proposition 1.342.

L'anneau $\mathbb{Z}$ est principal¹³¹ et euclidien¹³².

125. Idéal, définition 1.307.

126. Idéal, définition 1.339.

127. Définition 1.339.

128. Euclidien, définition 1.336.

129. Principal, définition 1.339

130. Un tel élément existe. . .

131. Définition 1.340.

132. Définition 1.336.

Démonstration. Nous allons seulement montrer que $\alpha(x) = |x|$ est un stathme euclidien. Ainsi $\mathbb{Z}$ sera euclidien et donc principal par la proposition 1.341.

D'abord $\mathbb{Z}$ est intègre, c'est le lemme 1.337.

La condition $\alpha(b) \leq \alpha(ab)$ est immédiate : $|a| \leq |ab|$ pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$.

Soient maintenant $a, b \in \mathbb{Z}$. Nous définissons $q_0, r_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$|a| = q_0|b| + r_0 \quad (1.451)$$

avec $r_0 < |b|$. Cela existe parce que $\alpha(x) = x$ est un stathme sur $\mathbb{N}$ par l'exemple 1.338.

(1) **Si $a > 0$ et $b > 0$**

Alors $a = q_0b + r_0$ et le couple (q_0, r_0) vérifie les conditions de la définition 1.336(1).

(2) **Si $a > 0$ et $b < 0$**

Alors $a = -q_0b + r_0$, et le couple $(-q_0, r_0)$ vérifie les conditions de la définition 1.336(1).

(3) **Si $a < 0$ et $b > 0$** Alors $a = -q_0b - r_0$, et le couple $(-q_0, -r_0)$ vérifie les conditions de la définition 1.336(1) parce que

$$\alpha(-r_0) = r_0 < |b| = \alpha(b). \quad (1.452)$$

(4) **Si $a < 0$ et $b < 0$** Alors $a = q_0b - r_0$, et le couple $(q_0, -r_0)$ vérifie les conditions de la définition 1.336(1).

□

1.11 Le groupe et anneau des entiers

Certes $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe mais en ajoutant la multiplication, $(\mathbb{Z}, +, \times)$ devient un anneau 133.

1.11.1 Division euclidienne

ThoDivisEuclide

Théorème-Définition 1.343 (Division euclidienne[70]).

Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, avec $0 \leq r < b$, tel que

$$a = bq + r. \quad (1.453)$$

L'opération $(a, b) \mapsto (q, r)$ ainsi définie est la **division euclidienne**. Le nombre q est le **quotient** et r est le **reste** de la division de a par b .

Démonstration. Remarquons que $r = a - bq$, et donc, une fois l'existence et l'unicité de q établie, celle de r suivra.

(1) **Unicité** Nous supposons avoir $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tels que

$$\begin{cases} 0 \leq r < b \\ a = bq + r. \end{cases} \quad (1.454a)$$

$$(1.454b)$$

Ce système implique que

$$0 \leq a - bq < b. \quad (1.455)$$

En ajoutant qb dans les trois membres de cette inégalité,

$$qb \leq a < (q+1)b. \quad (1.456)$$

Cela implique que

$$q = \max\{k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } kb \leq a\}. \quad (1.457)$$

Donc q est unique et la relation $a = bq + r$ implique que r est également unique.

133. Définition 1.90.

Soit

$$E = \{q \in \mathbb{Z} \mid bq \leq a\}.$$

La partie E est non vide (parce qu'elle contient $-|a|$) et admet un majorant : l'élément $|a|$. Elle admet donc un maximum q par le lemme 1.193. Ce maximum vérifie

$$bq \leq a < b(q+1). \quad (1.458)$$

Cela donne $0 \leq a - bq < b$ et le résultat, en posant $r = a - qb$.

□

Le lemme suivant est souvent pris pour la définition d'un nombre premier lorsqu'on parle de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$.

Lemme 1.344 ([71, 1]).

Dans $\mathbb{N}$, un nombre est premier si et seulement si il admet exactement deux diviseurs entiers distincts.

Démonstration. En deux parties.

- (1) $\Rightarrow$ Soit un élément premier $p \in \mathbb{N}$. Il y a trois possibilités : $p = 0$, $p = 1$ et $p > 1$.

Le nombre $p = 0$ n'est pas premier parce qu'il est nul. Le nombre $p = 1$ n'est pas premier parce qu'il est inversible. Donc nous savons que si p est premier, alors $p > 1$.

Un élément $p > 1$ dans $\mathbb{N}$ a toujours au moins deux diviseurs distincts : 1 et p . Soit un diviseur k de p . Il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que $p = kl$. Vu que p est premier et divise le produit kl , il divise k ou l . Disons que p divise k . De cette façon p divise k et k divise p .

Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $k = np$. En y substituant $p = kl$, on trouve $k = np = nkl$. En simplifiant par k , il vient

$$1 = nl, \quad (1.459)$$

ce qui prouve que $n = l = 1$ et donc que $k = p$ et donc que p n'a pas d'autres diviseurs que 1 et p .

- (2) $\Leftarrow$ Nous supposons que $p \in \mathbb{N}$ ait exactement deux diviseurs entiers distincts. Nous vérifions que p vérifie les trois conditions de la définition 1.317.

(2a) $p \neq 0$ parce que 0 a nettement plus que deux diviseurs distincts.

(2b) $p \neq 1$ parce que 1 a exactement un diviseur. Donc p n'est pas inversible dans $\mathbb{N}$.

(2c) Soit p admettant exactement deux diviseurs distincts. Soit p divisant le produit ab' pour certains a et b' dans $\mathbb{N}$. Nous supposons que p ne divise pas a , et nous allons prouver que p divise b' en supposant d'abord que p ne divise pas b' .

(2c.i) **Un ensemble** Pour cela nous posons

$$E = \{x \in \mathbb{N} \text{ tel que } p \mid ax, p \nmid x\}. \quad (1.460)$$

Nous posons $b = \min(E)$. Nous avons pour hypothèse que E est non vide ; en particulier $0 < b$.

(2c.ii) $b < p$ On vérifie que si $p + k \in E$ alors $k \in E$. Donc b ne peut pas être plus grand que p . Vu que p lui-même n'est pas dans E , nous avons $b < p$.

(2c.iii) **Division euclidienne** Nous effectuons la division euclidienne du théorème 1.343 :

$$p = mb + r. \quad (1.461)$$

En multipliant par a , $ar = ap - mab$. Vu que ab est un multiple de p $ap - mab$ est un multiple de p . En particulier ar est divisible en p .

(2c.iv) **La contradiction** Nous avons donc $r \in E$, alors que $r < b$. Impossible.

□

PROPooWMNPooZdvOBt

Proposition 1.345 ([72]).

Dans un anneau intègre¹³⁴ tout élément premier est irréductible¹³⁵.

Démonstration. Soit p , un élément premier dans un anneau intègre A .

- (1) p n'est pas inversible Cela fait partie de la définition d'un élément premier.
- (2) p n'est pas un produit d'inversibles Soient $a, b \in A$ tels que $p = ab$. Par le point (3) de la définition 1.317, p divise soit a soit b . Supposons que p divise a . Alors il existe $x \in A$ tel que $a = px$. En remettant dans $p = ab$ nous avons :

$$p = pxb. \quad \text{EQooPYBGooLFHMJZ} \quad (1.462)$$

Mais l'anneau est intègre et permet donc des simplifications par tout élément non nul. La relation 1.462 donne donc

$$1 = xb, \quad (1.463)$$

ce qui signifie que b est inversible.

Un travail similaire montre que a est inversible si p divise b .

□

Exemple 1.346.

Si nous avons l'égalité $7 = ab$ dans $\mathbb{Z}$, alors soit a soit b vaut 1. Mettons $a = 1$. Dans ce cas, $b = 7$ et n'est donc pas inversible. △

Sur un anneau non intègre, la notion d'élément premier n'est pas aussi intéressante que sur un anneau intègre. Par exemple la proposition 1.345 devient fausse.

EXooEIUEooCZCPMC

Exemple 1.347.

Soit l'anneau $\mathbb{Z}^2$. L'élément $(1, 0)$ est premier mais pas irréductible.

- (1) $(1, 0)$ est premier L'élément $(1, 0)$ est non nul ; ça c'est pas cher. Pour qu'il soit inversible, il faudrait $(1, 0)(x, y) = (1, 1)$. Entre autres, $0 \times y = 1$, ce qui est impossible. Donc il n'est pas inversible.
Supposons que $(1, 0)$ divise le produit $(a, b)(c, d) = (ac, bd)$. Alors il existe (x, y) tel que $(1, 0)(x, y) = (ac, bd)$. Cela signifie que $x = ac$ et $0 \times y = bd$. En particulier, soit $b = 0$ soit $d = 0$. Si $b = 0$, nous avons $(a, b) = (a, 0)$ et effectivement, $(1, 0)$ le divise.
- (2) $(1, 0)$ n'est pas irréductible Nous avons $(1, 0) = (1, 0)(1, 0)$. Donc l'élément $(1, 0)$ est le produit de deux éléments non inversibles.

△

1.11.2 Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$

PropSsgpZestnZ

Proposition 1.348 (liste des sous groupes de $\mathbb{Z}$).

À propos de sous-groupes de $\mathbb{Z}$.

- (1) Une partie H du groupe $(\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $H = n\mathbb{Z}$.
- (2) Si H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, il existe un unique n tel que $H = n\mathbb{Z}$.

ITEMooOWNZooUsYRok

Démonstration. Soit $H \neq \{0\}$ un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. L'ensemble $H \cap \mathbb{N}^*$ contient un élément minimum que nous notons n . Nous avons certainement $n\mathbb{Z} \subset H$ parce que H est un groupe (donc $n + n$ et $-n$ sont dans H dès que n est dans H). Nous devons prouver que $H \subset n\mathbb{Z}$.

Si $x \in H$, par le théorème de division euclidienne 1.343, il existe $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{N}$, uniques, tels que $x = nq + r$ et $0 \leq r < n$. Nous savons déjà que $nq \in H$, donc $r = x - nq \in H$. Le nombre r est

134. Si pas intègre, voir l'exemple 1.347.

135. Toutes les définitions dans le thème 6.

donc un élément de H strictement plus petit que n . Mais nous avons décidé que n serait le plus petit élément de $H \cap \mathbb{N}^*$. Par conséquent $r = 0$ et $x = nq \in n\mathbb{Z}$.

En ce qui concerne l'unicité, supposons que $n\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$. Le nombre n divise m (parce que $m \in m\mathbb{Z} \subset n\mathbb{Z}$) et le nombre m divise n parce que $n \in m\mathbb{Z}$. Par conséquent $n = m$. $\square$

1.11.3 Théorème de Bézout

Une généralisation de Bézout 1.349 à plus de 2 variables et dans un anneau principal : proposition 3.59.

ThoBuNjam

Théorème 1.349 (Théorème de Bézout ¹³⁶[73], thème 3).

Si $\{a_i\}_{i=1,\dots,N}$ sont des entiers non nuls. Nous avons $\text{pgcd}(a_1, \dots, a_N) = 1$ si et seulement si il existe $u_1, \dots, u_N$ tels que

$$\sum_i a_i u_i = 1. \quad (1.464)$$

Démonstration. En deux parties.

- (1) $\Rightarrow$ Soit $E = \{\sum_{i=1}^N a_i u_i \text{ tel que } u_i \in \mathbb{Z}\}$. Cet ensemble est non vide. Il contient par exemple a_1 . Nous posons $m = \min(E \setminus \{0\})$, et nous considérons des $v_i \in \mathbb{Z}$ tels que

$$m = \sum_j a_j v_j. \quad (1.465)$$

EQooQSJLooOGbTzx

Nous prouvons à présent que m divise tous les a_i . Nous nous fixons $i \in \{1, \dots, N\}$ et nous considérons la division euclidienne ¹³⁷ $a_i = mq + r$ avec $0 \leq r < m$. En remplaçant dedans la valeur de m de (1.465) nous trouvons $a_i = \sum_j a_j v_j q + r$, et en isolant r :

$$r = a_i - \sum_j a_j v_j q = a_i(1 - v_i q) - \sum_{j \neq i} a_j v_j q \in E. \quad (1.466)$$

Mais comme $0 \leq r < m$ et $r \in E$ et $m = \min(E \setminus \{0\})$ nous avons $r = 0$, ce qui signifie que m divise a_i .

Donc $m = 1$ parce que 1 est le seul diviseur commun des tous les a_i . Donc $1 \in E$, ce qu'il fallait démontrer.

- (2) $\Leftarrow$ Supposons qu'il existe des nombres u_i tels que $\sum_i a_i u_i = 1$. Si δ divise tous les a_i , alors il existe v_i tels que $a_i = \delta v_i$ et donc tels que

$$\sum_i a_i u_i = \sum_i \delta v_i u_i = \delta \sum_i v_i u_i, \quad (1.467)$$

ce qui montre que $\delta \mid 1$ et donc que $\delta = 1$. Nous avons démontré que 1 est le seul diviseur commun des tous les a_i . $\square$

CorgEMtLj

Corolaire 1.350.

Soient p et q deux entiers premiers entre eux. Alors

$$p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z} = \mathbb{Z}; \quad (1.468)$$

en particulier, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, il existe u_x, v_x entiers tels que $u_x p + v_x q = x$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{Z}$. Le théorème de Bézout nous donne k et l tels que $kp + lq = 1$. Alors, $(xk)p + (xl)q = x$. $\square$

136. Il y a une super application ici : https://perso.univ-rennes1.fr/matthieu.romagny/agreg/dvt/mauvais_prix.pdf.

137. Théorème 1.161.

Notons que l'application $p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$ n'est évidemment pas injective : les u_x et v_x ne sont pas uniques à x fixé, car si $\alpha p + \beta q = x$, alors $(\alpha + kq)p + (\beta - kp)q = x$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

CORooLINXooBIUKPG

Corolaire 1.351.

Les groupes quotients du groupe $(\mathbb{Z}, +)$ sont $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Démonstration. Tous les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$. En effet en vertu de la proposition 1.348, les seuls sous-groupes de $\mathbb{Z}$ (en tant que groupe additif) sont les $n\mathbb{Z}$. Tous les idéaux sont donc de cette forme. De plus les $n\mathbb{Z}$ sont effectivement tous des idéaux¹³⁸ : si $a \in n\mathbb{Z}$ et si $k \in \mathbb{Z}$ alors $ak \in n\mathbb{Z}$. $\square$

PropZpintssipremUzn

Proposition 1.352.

Soient $n \geq 2$ un entier et $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ la surjection canonique. Nous noterons $\bar{a} = \phi(a)$. Alors l'ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est donné par

$$U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \phi(P_n) = \{\bar{x} \text{ tel que } 0 \leq x \leq n \text{ tel que } \text{pgcd}(x, n) = 1\}. \quad (1.469)$$

où P_n est l'ensemble $P_n = \{x \in \{0, \dots, n-1\} \text{ tel que } \text{pgcd}(x, n) = 1\}$.

De plus,

$$\text{Card}(U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})) = \phi(n). \quad (1.470)$$

Démonstration. Soit $0 \leq x \leq n$ tel que $\text{pgcd}(x, n) = 1$. Il existe donc¹³⁹ $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $ux + vn = 1$. En passant aux classes,

$$\overline{ux} = \bar{1}, \quad (1.471)$$

donc $\bar{u}$ est l'inverse de $\bar{x}$. Cela prouve que $\phi(P_n) \subset U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Nous prouvons maintenant l'inclusion inverse. Soient $\bar{x}$ et $\bar{y}$ inverses l'un de l'autre : $\overline{xy} = \bar{1}$. Il existe donc $q \in \mathbb{Z}$ tel que $xy - qn = 1$, ce qui prouve¹⁴⁰ que $\text{pgcd}(x, n) = 1$. $\square$

1.11.4 PGCD, PPCM

Puisque $\mathbb{Z}$ est un anneau intègre, nous avons la définition 1.103 de pgcd et de ppcm.

PROPooAVRGooUfhjwF

Proposition 1.353 (PPCM et PGCD).

Soient $p, q \in \mathbb{Z}^*$.

- (1) Le pgcd de p et q est le plus grand diviseur commun de p et q .
- (2) Le ppcm de p et q est leur plus petit multiple commun.

Démonstration. Démontrons le premier point. Notons δ le pgcd de p et q . Si d est un diviseur commun de p et q , alors d divise δ . Dans $\mathbb{Z}$, $d \mid \delta$ implique $d \leq \delta$ (proposition 1.196). $\square$

Lemme 1.354.

Soient $p, q \in \mathbb{Z}^*$. Les entiers $\text{ppcm}(p, q)$ et $\text{pgcd}(p, q)$ fournissent les isomorphismes de groupes suivants :

$$p\mathbb{Z} \cap q\mathbb{Z} = \text{ppcm}(p, q)\mathbb{Z} \quad (1.472a)$$

$$p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z} = \text{pgcd}(p, q)\mathbb{Z}. \quad (1.472b)$$

DEFooXSPFooPumQSy

Définition 1.355.

Nous disons que deux éléments d'un anneau principal¹⁴¹ sont **premiers entre eux** si leurs diviseurs communs sont inversibles.

Vu que $\mathbb{Z}$ est un anneau principal (proposition 1.342), la définition 1.355 d'éléments premiers entre eux s'applique.

138. Définition 1.307.

139. Théorème de Bézout 1.349

140. À nouveau avec le Théorème de Bézout.

141. Anneau principal, définition 1.340.

LEMooLKLTooXUdsgB

Lemme 1.356.

Dans $\mathbb{Z}$, les nombres p et q sont premiers entre eux si et seulement si $\text{pgcd}(p, q) = 1$.

DefZHRXooNeWicB

Définition 1.357.

Soit un anneau A . Nous disons que les éléments $a_1, \dots, a_n$ sont Si nous avons un ensemble d'entiers a_i , nous disons qu'ils sont premiers **dans leur ensemble** si

$$\text{pgcd}(a_1, \dots, a_n) = 1. \quad (1.473)$$

Les nombres 2, 4 et 7 ne sont pas premiers deux à deux (à cause de 2 et 4), mais ils sont premiers dans leur ensemble parce qu'il n'y a pas de diviseurs communs plus grand que 1, au triplet (2, 4, 7).

La proposition suivante établit que si x est assez grand, alors il peut même être écrit comme une combinaison de p et q à coefficients positifs. Elle sera utilisée pour démontrer que les états apériodiques d'une chaîne de Markov peuvent être atteints à tout moment (assez grand), voir la définition 38.33 et ce qui suit.

PropLabRSE

Proposition 1.358.

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{N}$ premiers entre eux. Il existe $N > 0$ tel que tout $x > N$ appartient à $a\mathbb{N} + b\mathbb{N}$.

Démonstration. Soient a et b , premiers entre eux, et $x \in \mathbb{N}$. Disons tout de suite, pour éviter les cas triviaux et pénibles, que x , a et b sont strictement positifs.

(1) Une décomposition pour x

On applique le théorème 1.343 de division euclidienne à x et $a + b$: il existe des entiers p_x, r_x , uniques, tels que

$$\begin{cases} x = (p_x - 1)(a + b) + r_x \\ 0 \leq r_x < a + b. \end{cases} \quad (1.474a)$$

$$(1.474b)$$

En d'autres termes, $p_x(a + b)$ est le premier multiple de $a + b$ supérieur ou égal à x . De plus, p_x est strictement positif car x l'est. Il existe alors des entiers u et v tels que

$$ua + vb = p_x(a + b) - x \quad (1.475)$$

EQooXYSZooJqxPui

par le corolaire 1.350. Ainsi, x peut s'écrire

$$x = (p_x - u)a + (p_x - v)b. \quad (1.476)$$

(2) Des maximums

Il s'agit maintenant de savoir si nous pouvons être assuré d'avoir $p_x > u$ et $p_x > v$ dès que x est assez grand. Pour cela, grâce au corolaire 1.350, nous considérons les nombres u_i et v_i définis par

$$u_i a + v_i b = i \quad (1.477)$$

pour $i = 1, \dots, a + b$. Nous posons $u^* = \max\{u_i\}$, $v^* = \max\{v_i\}$, et $p^* = \max\{u^*, v^*\}$. Nous posons alors $N = p^*(a + b)$, et considérons $x > N$.

(3) Nouvelle décomposition pour x

Nous voulons écrire

$$x = (p_x - u_k)a + (p_x - v_k)b \quad (1.478)$$

EQooIKNWooBKlYz

pour un certain k . Cela demande $u_k a + v_k b = ua + vb = p_x(a + b) - x$ par l'équation (1.475). Vu que $p_x(a + b) - x > 0$, les nombres u_k et v_k existent : il suffit de prendre $k = p_x(a + b) - x$.

(4) **Conclusion**

Avec tous ces choix, nous avons d'abord $x > p^*(a + b)$ et donc

$$x = (p_x - 1)(a + b) + r_x > p^*(a + b), \quad (1.479)$$

ce qui donne

$$(p_x - 1)(a + b) > p^*(a + b) - r_x > (p^* - 1)(a + b). \quad (1.480)$$

ou encore $p_x > p^*$. Nous avons finalement

$$p_x \geq p^* \geq u^* \geq u_k \quad (1.481)$$

et

$$p_x \geq p^* \geq v^* \geq v_k. \quad (1.482)$$

De ce fait, la décomposition (1.478) est celle que nous voulions. □

1.359.

Une méthode pour obtenir les entiers naturels u et v qui permettent la décomposition $x = au + bv$ est d'abord de choisir u_0 et v_0 tels que au_0 et bv_0 soient les plus proches possibles de $x/2$, puis de décomposer le nombre (relativement petit) $x - au_0 - bv_0$ en $au_1 + bv_1$. Deux nombres u et v qui fonctionnent sont alors $u = u_0 + u_1$ et $v = v_0 + v_1$.

Exemple 1.360.

Écrivons $1000 = u \cdot 7 + v \cdot 5$ avec $u, v \in \mathbb{N}$. D'abord $72 \cdot 7 = 504$ et $100 \cdot 5 = 500$. Nous avons donc

$$1004 = 72 \cdot 7 + 100 \cdot 5. \quad (1.483)$$

Ensuite $4 = 25 - 21 = -3 \cdot 7 + 5 \cdot 5$. Au final,

$$1000 = 75 \cdot 7 + 95 \cdot 5. \quad (1.484)$$

△

1.11.5 Décomposition en facteurs premiers

LemPRuUrsD

Lemme 1.361 (Lemme de Gauss).

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que a divise bc . Si a est premier avec c , alors a divise b .

Démonstration. Puisque a est premier avec c , nous avons $\text{pgcd}(a, c) = 1$ et le théorème de Bézout 1.349 nous donne donc $s, t \in \mathbb{Z}$ tels que $sa + tc = 1$. En multipliant par b , nous avons $sab + tbc = b$. Mais les deux termes du membre de gauche sont multiples de a parce que a divise bc . Par conséquent b est somme de deux multiples de a et donc est multiple de a . □

Il y a une généralisation du lemme de Gauss pour les anneaux principaux dans 3.60.

LemAXINooOeuMJZ

Lemme 1.362 (Lemme d'Euclide[74]).

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Si le nombre premier p divise le produit ab , alors p divise a ou b .

Démonstration. Comme p est premier, si il ne divise pas a c'est que $\text{pgcd}(a, p) = 1$. Dans ce cas le lemme de Gauss 1.361 implique que p divise b . □

LEMooSRFMooHgEMwj

Lemme 1.363.

Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que a divise b et b divise a . Alors $a = b$.

LEMooFVSJooRysGAm

Lemme 1.364 ([1]).

Soient $k, n, p \in \mathbb{Z}$. Le nombre kp divise kn si et seulement si p divise n .

Démonstration. En deux parties.

- (1) $\Rightarrow$ Nous supposons que $kp \mid kn$. Il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $kpl = kn$. On peut simplifier par k : $pl = n$, ce qui signifie que $p \mid n$.
- (2) $\Leftarrow$ Si $p \mid n$, alors il existe l tel que $lp = n$. Avec ça, $kn = klp$, et donc $kp \mid kn$.

□

Le théorème fondamental de l'arithmétique permet de décomposer des nombres en facteurs premiers.

ThoAJFJooAveRvY

Théorème 1.365 (Décomposition en facteurs premiers[75]).

Tout entier strictement positif peut être écrit comme un produit de nombres premiers d'une unique façon, à l'ordre près des facteurs.

En d'autres termes, pour tout entier $n > 1$, il existe une unique suite finie unique $(p_1, k_1), \dots, (p_r, k_r)$ telle que :

- (1) *les p_i sont des nombres premiers tels que, si $i < j$, alors $p_i < p_j$;*
- (2) *les k_i sont des entiers naturels non nuls ;*
- (3) *$n = \prod_{i=1}^r p_i^{k_i}$.*

Démonstration. Soit n un entier positif. Nous prouvons l'existence d'une décomposition en facteurs premiers par récurrence. Le nombre $n = 1$ est le produit d'une famille finie de nombres premiers : la famille vide¹⁴².

Supposons que tout entier strictement inférieur à un certain entier $n > 1$ est produit de nombres premiers. Deux possibilités apparaissent pour n : il est premier ou non. Si n est premier, et donc produit d'un unique entier premier, à savoir lui-même, le résultat est vrai. Si n n'est pas premier, il se décompose sous la forme kl avec k et l strictement inférieurs à n . Dans ce cas, l'hypothèse de récurrence implique que les entiers k et l peuvent s'écrire comme produits de nombres premiers. Leur produit aussi, ce qui fournit une décomposition de n en produit de nombres premiers. Par application du principe de récurrence, tous les entiers naturels peuvent s'écrire comme produit de nombres premiers.

Nous prouvons maintenant l'unicité. Prenons deux produits de nombres premiers qui sont égaux. Prenons n'importe quel nombre premier p du premier produit. Il divise le premier produit, et, de là, aussi le second. Par le lemme d'Euclide 1.362, p doit alors diviser au moins un facteur dans le second produit. Mais les facteurs sont tous des nombres premiers eux-mêmes, donc p doit être égal à un des facteurs du second produit. Nous pouvons donc simplifier par p les deux produits. En continuant de cette manière, nous voyons que les facteurs premiers des deux produits coïncident précisément.

□

LEMooDTQqooYoJABt

Lemme 1.366 ([1]).

Nous notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers dans $\mathbb{N}$. Soient des suites finies $(a_p)_{p \in \mathcal{P}}$ et $(b_p)_{p \in \mathcal{P}}$. Nous posons

$$a = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{a_p} \quad \text{et} \quad b = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{b_p}. \quad (1.485)$$

Alors $a \mid b$ si et seulement si $a_p \leq b_p$ pour tout p .

Démonstration. Dire que $a \mid b$ signifie qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $as = b$; le théorème 1.365 nous permet de décomposer s en $s = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{s_p}$. Puisque le produit dans $\mathbb{N}$ est commutatif et associatif,

$$b = as = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{s_p + a_p}. \quad (1.486)$$

Par unicité de la décomposition de b (toujours le théorème 1.365), nous en déduisons que $b_p = s_p + a_p \geq a_p$.

142. Voir 1.303.

Dans l'autre sens, l'hypothèse $a_p \leq b_p$ implique l'existence de $s_p \geq 0$ tels que $b_p = a_p + s_p$. En posant $s = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{s_p}$, nous avons

$$as = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{s_p + a_p} = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{b_p} = b. \quad (1.487)$$

Donc $a \mid b$. □

LEMooGLZHooUcRNgu

Lemme 1.367.

Soient un nombre premier q ainsi que $a \in \mathbb{Z}$. Soit un entier $n \geq 1$. Le nombre q divise a si et seulement si il divise a^n .

Démonstration. Nous numérotions les nombres premiers p_i pour que p_1 soit q . La décomposition en nombre premiers du théorème 1.365 nous dit que

$$a = q^{a_1} \prod_{i \neq 1} p_i^{a_i} \quad (1.488)$$

et

$$a^n = q^{na_1} \prod_{i \neq 1} p_i^{na_i} \quad (1.489)$$

Nous avons équivalence entre les énoncés suivants :

- q divise a
- $a_1 \neq 0$
- $na_1 \neq 0$ (parce que $n \neq 0$)
- q divise a^n .

□

CORooWBSQooQOEmaC

Corolaire 1.368.

Si $n \in \mathbb{N}$ n'est pas une puissance d'un nombre premier, alors il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $\text{pgcd}(a, b) = 1$ et $n = ab$.

Démonstration. Si n n'est pas une puissance d'un nombre premier, alors le théorème 1.365 de décomposition en nombres premiers dit que

$$n = \prod_{i=1}^r p_i^{k_i} \quad (1.490)$$

avec au moins $r = 2$, et les k_i non nuls. En prenant $a = p_1^{k_1}$ et $b = \prod_{i=2}^r p_i^{k_i}$ nous avons bien $n = ab$. Montrons que a et b n'ont pas de diviseurs communs. Soit, par l'absurde, q un diviseur premier commun à a et b .

Vu que q divise $p_1^{k_1}$, le nombre q divise p_1 par le lemme 1.367. Étant donné que q divise $\prod_{i=2}^r p_i^{k_i}$, il divise au moins un des facteurs (lemme d'Euclide 1.362). Disons que q divise $p_i^{k_i}$. Dans ce cas q divise p_i .

Donc q divise p_i et p_1 et donc $q = 1$ parce que p_i et p_1 sont des nombres premiers distincts. □

1.11.6 Binôme de Newton

DEFooHXNFooOBKgqD

Définition 1.369 (Coefficient binomial).

Soient des entiers n et k avec $k \leq n$. Nous définissons **coefficients binomiaux** par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (1.491)$$

EQooJJYGooTymSAAt

Lorsque α est un multiindice, la factorielle $\alpha!$ et les coefficients binomiaux sont définis en 3.36.

LEMooHWMNooIINsxu

Lemme 1.370.

Un formule pour les coefficients binomiaux :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} \quad (1.492)$$

Démonstration. Simple mise au même dénominateur :

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!(n-k+1) + n!k}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!(n+1)}{k!(n+1-k)!}. \quad (1.493)$$

□

LEMooUTDTTooXAmvdF

Lemme 1.371 ([1]).

Nous considérons ces deux ensembles :

$$A = \{I = (i_1, \dots, i_k) \text{ tel que } 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\} \quad (1.494a)$$

$$C = \{\text{parties de cardinal } k \text{ dans } \{1, \dots, n\}\}. \quad (1.494b)$$

Il existe une bijection entre A et C .

Nous avons de plus¹⁴³

$$\text{Card}(A) = \text{Card}(C) = \binom{n}{k} \quad (1.495)$$

EQooSPVNooHoPnOe

1.11.7 Divisibilité des coefficients binomiaux

LEMooYBOIoEtvfDQ

Lemme 1.372 (Formule du pion[76]).

Soient n et k deux nombres entiers tels que $1 \leq k \leq n$. Nous avons

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}. \quad (1.496)$$

EQooDNBYooZfJEAg

Proposition 1.373 ([77, 78]).

PROPooVPOYooNNugWU

Un entier $n \geq 2$ est premier si et seulement si il divise $\binom{n}{k}$ pour tout $k = 1, \dots, n-1$.

Démonstration. En deux parties.

(1) $\Rightarrow$ Nous supposons que n est un nombre premier. La formule du pion (1.496) nous dit que

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}. \quad (1.497)$$

Donc n divise le produit $k \binom{n}{k}$; vu que n est premier, le lemme d'Euclide 1.362 dit qu'il divise un des deux facteurs. Le nombre n ne peut pas diviser k parce que $k < n$. Donc il divise l'autre. C'est à dire que n divise $\binom{n}{k}$.

(2) $\Leftarrow$ Nous allons à la contraposée : nous supposons que n n'est pas premier, et nous allons montrer qu'il y a (au moins) un des $\binom{n}{k}$ que n ne divise pas.

Posons $n = lp$ où p est premier. Nous montrons que n ne divise pas $\binom{n}{p}$. Pour cela nous utilisons encore la formule du pion :

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1} = l \frac{(n-1) \dots (n-p+1)}{(p-1)!}. \quad (1.498)$$

Le lemme 1.364 dit que le tout est divisible par lp si et seulement si

$$\frac{(n-1) \dots (n-p+1)}{(p-1)!} \quad (1.499)$$

EQooIHXGooIQooMC

est divisible par p . Vu que p divise n , il ne divise aucun des nombres $n-1, \dots, n-p+1$. Et comme p est premier, il ne peut pas diviser le produit sans diviser aucun des facteurs. Et vlan, p ne divise pas (1.499).

□

143. Pour le coefficient binomial, définition 1.369.

1.11.8 Coefficient binomiaux et polynômes

NORMooROXXooXOybXN

1.374.

Une convention d'écriture. Si A est un anneau, et si $\lambda \in \mathbb{N}$ alors nous notons

$$\lambda a = \sum_{i=1}^{\lambda} a. \quad (1.500)$$

Et nous posons également $0a = 0$. À gauche : le 0 de $\mathbb{N}$ et à droite celui de A .

Si $\lambda \in \mathbb{Z}$, alors lorsque $\lambda < 0$ nous posons $\lambda a = -(-\lambda a)$

PropBinomFExOIL

Proposition 1.375 (Formule binomiale[79]).

Soit un anneau commutatif A . Pour tout $x, y \in A$ et $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \quad (1.501) \quad \text{EqNewtonB}$$

où les coefficients binomiaux sont donnés dans le lemme 1.371, et où nous utilisons les conventions d'écriture de 1.374.

Démonstration. La preuve se fait par récurrence. La vérification pour $n = 0$ et $n = 1$ se fait aisément pour peu que l'on se rappelle que $x^0 = 1$ et que $0! = 1$, ce qui donne entre autres $\binom{0}{0} = 1$.

Supposons que la formule (1.501) soit vraie pour $n \geq 1$, et prouvons la pour $n + 1$. Nous avons

EqBinTrav

$$(x + y)^{n+1} = (x + y) \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \quad (1.502a) \quad \text{SUBEQooBEUCooHSBtug}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \quad (1.502b) \quad \text{SUBEQooRURMooGVtbbL}$$

$$= x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} + y^{n+1}. \quad (1.502c)$$

Notez le passage de (1.502a) à (1.502b) qui demande la commutativité de la multiplication. La formule binomiale ne se généralise pas de façon directe à un anneau non commutatif.

La seconde grande somme peut être transformée en posant $i = k + 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i-1} x^{n-(i-1)} y^{i-1+1}, \quad (1.503)$$

dans lequel nous pouvons immédiatement renommer i par k . En remplaçant dans la dernière expression de (1.502), nous trouvons

$$(x + y)^{n+1} = x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] x^{n-k+1} y^k. \quad (1.504)$$

La thèse découle maintenant de la formule du lemme 1.370. □

LEMooLPCXooYIzJsD

Lemme 1.376 ([1]).

Si $n \geq k$ nous avons

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \leq \frac{n^{k-1}}{k!}. \quad (1.505)$$

Démonstration. Nous décomposons le produit définissant $n!$ en les facteurs entre 1 et $n - k$ et ceux entre $n - k + 1$ et n :

$$n! = (n - k)! \prod_{i=n-k+1}^n i \leq n^{k-1} (n - k)!. \quad (1.506)$$

Donc

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \leq \frac{n^{k-1}}{k!}. \quad (1.507)$$

□

Tant que nous sommes à démontrer des égalités, en voici une.

LEM00LPOQ00ICJYdV

Lemme 1.377 ([80]).

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ nous avons

$$a^n + (-1)^{n-1}b^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-1-k} b^k. \quad (1.508)$$

Démonstration. C'est un simple calcul :

$$\begin{aligned} (a+b) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-1-k} b^k &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-k-1} b^{k+1} \\ &= a^n + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k a^{n-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k a^{n-k-1} b^{k+1} + (-1)^{n-1} b^n \quad \text{SUBEQ00UCIB00KsuEbh} \\ &= a^n + (-1)^{n-1} b^n \quad \text{SUBEQ00LTIH00ZPMxVF} \end{aligned} \quad (1.509a)$$

$$(1.509b)$$

$$(1.509c)$$

Justifications.

- Pour (1.509b). Dans la première somme, nous avons séparé le terme $k = 0$ et dans la seconde nous avons séparé le terme $k = n - 1$
- Pour (1.509c). Dans la seconde somme, décaler les termes pour sommer de 1 à $n - 1$ et remarquer que ce qu'on obtient annule la première somme.

□

1.12 Idéal dans un anneau

La définition d'un idéal dans un anneau est la définition 1.307.

DefTMN00KXHUd

Définition 1.378 ([81]).

Un **corps** est un anneau¹⁴⁴ $(A, +, \times)$ dans lequel tout élément non nul est inversible pour l'opération $\times$ (pour l'opération $+$, tous les éléments sont inversibles parce que $(A, +)$ est un groupe).

1.379.

Dans le Frido, nous ne parlons que de corps commutatifs ; nous ne le répéterons pas toujours.

1.380.

Pour savoir ce qu'est un « ring » ou « field » en anglais, voir -1.3.

DefAJVTPxb

Définition 1.381.

Un sous-ensemble $B \subset A$ d'un anneau est un **sous anneau** si

- (1) $1 \in B$
- (2) B est un sous-groupe pour l'addition
- (3) B est stable pour la multiplication.

Remarque 1.382.

Un idéal n'est pas toujours un anneau parce que l'identité pourrait manquer. Un idéal qui contient l'identité est l'anneau complet.

144. Définition 1.90.

LEMooQAYSooCYJXkC

Lemme 1.383.

La partie $2\mathbb{Z}$ est un idéal¹⁴⁵ de $\mathbb{Z}$. On peut aussi le noter (2).

PROPooPZGFooEbsBXD

Proposition 1.384 ([82] Premier théorème d'isomorphisme).

Soit des anneaux A et B ainsi qu'un idéal bilatère¹⁴⁶ I . Nous considérons la projection canonique $\pi: A \rightarrow A/I$.

Soit un morphisme d'anneaux¹⁴⁷ $f: A \rightarrow B$ vérifiant $f(I) = \{0\}$. Alors il existe un unique morphisme $\tilde{f}: A/I \rightarrow B$ tel que $\tilde{f} \circ \pi = f$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ A/I & & \end{array} \quad (1.510)$$

Démonstration. Soient $a, b \in A$ tels que $\pi(a) = \pi(b)$. Alors $a - b \in I$ et donc $f(a - b) = 0$. Vu que f est un morphisme nous en déduisons que $f(a) = f(b)$. La proposition 1.55 dit qu'il existe alors une unique application $\tilde{f}: A/I \rightarrow B$ telle que

$$\tilde{f}(\pi(a)) = f(a) \quad (1.511)$$

pour tout $a \in A$.

Nous devons prouver que cette application est un morphisme d'anneaux. Le neutre de A/I est la classe $[1]$ et nous avons $\tilde{f}([1]) = 1$. En ce qui concerne la somme, soient $\alpha, \beta \in A/I$. Si $a \in \alpha$ et $b \in \beta$ nous avons

$$\tilde{f}(\alpha + \beta) = \tilde{f}([a + b]) \quad (1.512a)$$

$$= f(a + b) \quad (1.512b)$$

$$= f(a) + f(b) \quad (1.512c)$$

$$= \tilde{f}([a]) + \tilde{f}([b]) \quad (1.512d)$$

$$= \tilde{f}(\alpha) + \tilde{f}(\beta). \quad (1.512e)$$

Pour la multiplication c'est le même genre de vérifications. □

PROPooJALPooHFIObB

Proposition 1.385 (Premier théorème d'isomorphisme pour les anneaux).

Soient A et B des anneaux et un morphisme $f: A \rightarrow B$. Nous considérons l'injection canonique $j: f(A) \rightarrow B$ et la surjection canonique $\phi: A \rightarrow A/\ker f$. Alors il existe un unique isomorphisme

$$\tilde{f}: A/\ker f \rightarrow f(A) \quad (1.513)$$

tel que $f = j \circ \tilde{f} \circ \phi$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \phi \downarrow & & \uparrow j \\ A/\ker f & \xrightarrow{\tilde{f}} & f(A) \subset B \end{array} \quad (1.514)$$

Démonstration. Il s'agit d'appliquer la proposition 1.384 au cas particulier $I = \ker(f)$. Vérifions que $\tilde{f}$ est alors bien injective. Supposons que $\alpha, \beta \in A/\ker(f)$ vérifient $\tilde{f}(\alpha) = \tilde{f}(\beta)$. Soient $a \in \alpha$ et $b \in \beta$. Nous avons

$$f(a) = \tilde{f}(\alpha) = \tilde{f}(\beta) = f(b). \quad (1.515)$$

Donc $f(a - b) = 0$, ce qui signifie $a - b \in \ker(f)$ et donc $\alpha = \beta$. □

145. Idéal, définition 1.307.

146. Définition 1.307.

147. Morphisme d'anneaux, définition 1.96.

PropIJJJdsousphi

Proposition 1.386.

Soient I un idéal de A et la projection canonique

$$\phi: A \rightarrow A/I. \quad (1.516)$$

C'est une bijection entre les idéaux de A contenant I et les idéaux de A/I .

Dit de façon imagée :

$$\{\text{idéaux de } A \text{ contenant } I\} \simeq \{\text{idéaux de } A/I\}. \quad (1.517) \quad \text{EqKbrizu}$$

Démonstration. Si $I \subset J$ et si J est un idéal de A , alors $\phi(J)$ est un idéal dans A/I . En effet un élément de $\phi(J)$ est de la forme $\phi(j)$ et un élément de A/I est de la forme $\phi(i)$. Leur produit vaut

$$\phi(i)\phi(j) = \phi(ij) \in \phi(J). \quad (1.518)$$

Soit maintenant K un idéal dans A/I et soit $J = \phi^{-1}(K)$. Étant donné qu'un idéal doit contenir 0 (parce qu'un idéal est un groupe pour l'addition), $[0] \in K$ et par conséquent $I \subset \phi^{-1}(K)$. $\square$

PROPooUOAWuGZpSVvR

Proposition 1.387 ([1]).

Si A est un anneau, nous avons les équivalences

ITEMooLAAVooXhTcMe

(1) A est un corps¹⁴⁸.

ITEMooDGZIoRopYGx

(2) A est non nul et ses seuls¹⁴⁹ idéaux à gauche sont $\{0\}$ et A .

ITEMooLPWHooDJPtBr

(3) A est non nul et ses seuls idéaux à droite sont $\{0\}$ et A .

Démonstration. Nous allons montrer que le point (1) est équivalent aux deux autres.

- (1) **(1) implique (2)** Si I est un idéal à gauche différent de $\{0\}$, alors il contient un certain $a \neq 0$. Puisque A est un corps, il contient un inverse a^{-1} , et comme I est un idéal, $a^{-1}I \subset I$. En particulier $a^{-1}a \in I$. Donc $1 \in I$ et $I = A$.
- (2) **(2) implique (1)** Supposons que les seuls idéaux de A soient $\{0\}$ et A . Soit $a \in A$. Si a est non nul, alors aA est un idéal de A . Vu qu'il contient $a \neq 0$, nous avons $aA = A$ (par hypothèse, un idéal qui n'est pas $\{1\}$ est A). En particulier, $1 \in aA$, c'est-à-dire qu'il existe $b \in A$ tel que $ab = 1$. L'élément a est donc inversible.
- (3) **(1) implique (3)** Comme pour (1) implique (2).
- (4) **(3) implique (1)** Comme pour (2) implique (1).

Notez que je n'ai pas vérifié les deux derniers points. Donc vous devriez le vérifier et m'écrire si il y a un problème. $\square$

DEFIdealMax

Définition 1.388 ([83]).

Soit un anneau A . Un idéal $I \neq A$ est dit **idéal maximal** si il n'existe pas d'idéal $J \neq A$ contenant strictement I .

PROPooSHHWooCyZPPw

Proposition 1.389 (Thème 18).

Un idéal I dans un anneau A est maximum si et seulement si A/I est un corps.

Démonstration. Soit un idéal maximum $I \subset A$. Alors les idéaux contenant I sont A et I . L'application ϕ de la proposition 1.386 est une bijection, donc l'ensemble des idéaux de A/I ne contient que deux éléments. Les seuls idéaux de A/I sont donc $\{0\}$ et A/I ; donc A/I est un corps par la proposition 1.387.

Dans l'autre sens, c'est la même chose : si A/I est un corps, il possède exactement deux idéaux, donc A ne contient que deux idéaux contenant I . Donc I est un idéal maximum. $\square$

148. Définition 1.378.

149. Je vous laisse vous poser de grandes questions sur le fait que le vide est un idéal ou non.

THOooFWYLooOofaPa

Théorème 1.390 (Théorème de Krull[84]).

Pour tout idéal propre I d'un anneau commutatif A , il existe au moins un idéal maximal de A contenant I .

DEFooAQSZooVhvQWv

Définition 1.391.

Nous disons qu'un idéal I dans A est **premier** si I est strictement inclus dans A et si pour tout $a, b \in A$ tels que $ab \in I$ nous avons $a \in I$ ou $b \in I$.

LEMooYRFBbooYxXXsi

Lemme 1.392.

L'idéal nul (réduit à $\{0\}$) est premier si et seulement si A est intègre¹⁵⁰.

Démonstration. En deux sens.

- (1) **Si $\{0\}$ est premier** Alors $A \neq \{0\}$ parce que $I = \{0\}$ est propre (définition d'idéal premier). De plus, si $ab = 0$, alors $ab \in I$ qui est un idéal premier. Donc soit a soit b est dans I , c'est-à-dire que soit a soit b est nul. Donc A est intègre.
- (2) **Si A est intègre** Alors $A \neq \{0\}$ et l'idéal $I = \{0\}$ est strictement inclus dans A . Si $ab \in I$, alors $ab = 0$ et comme A est intègre, soit a soit b est nul, c'est-à-dire appartient à I .

□

PROPOooRUQKooIfbnQX

Proposition 1.393 ([83]).

Soit un anneau commutatif¹⁵¹ et un idéal I dans A .

ITEMooUGBTooOGrnWl

- (1) I est un idéal premier¹⁵² si et seulement si A/I est un anneau intègre.

ITEMooGLXSooUjINqR

- (2) I est un idéal maximal¹⁵³ si et seulement si A/I est un corps.

ITEMooTFFQooOUajFw

- (3) Tout idéal maximal propre est premier.

Démonstration. En plein d'étapes.

- (1) **(1), $\Rightarrow$** Évacuons le cas trivial pour être sûr. Si $I = \{0\}$ alors A est intègre par le lemme 1.392. Donc $A/I = A/\{0\} = A$ est intègre également.

Soient $a, b \in A$ tels que $[a][b] = [0]$. Donc $[ab] = [0]$, c'est-à-dire $ab \in I$. Puisque I est un idéal premier nous avons $a \in I$ ou $b \in I$, c'est-à-dire $[a] = 0$ ou $[b] = 0$; nous en déduisons que A/I est un anneau intègre.

- (2) **(1), $\Leftarrow$**

Soit $ab \in I$. Alors $[ab] = 0$, ce qui signifie que $[a][b] = 0$ donc que $[a] = 0$ ou que $[b] = 0$ parce que A/I est intègre. Mais la condition $[a] = 0$ signifie $a \in I$, et $[b] = 0$ signifie $b \in I$. Nous avons donc prouvé que soit a soit b est dans I , c'est-à-dire que I est premier.

- (3) **(2), $\Rightarrow$**

Nous devons montrer que tout élément non nul de A/I est inversible. Un élément non nul de A/I est $[x]$ avec $x \in A \setminus I$.

Nous considérons $J = Ax + I$, qui est un idéal parce que pour tout $a \in A$, $aAx + aI \in Ax + I$. Mais comme I est maximal, $J = I$ ou $J = A$.

Si $J = I$, nous aurions que pour tout $a \in A$ et pour tout $i \in I$, $ax + i \in I$. En particulier pour $a = 1$ et $i = 0$ nous aurions $x \in I$, ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur x .

Donc $J = A$. En particulier, $1 \in J$, c'est-à-dire qu'il existe $a \in A$ et $i \in I$ tels que $ax + i = 1$. En passant aux classes, $[ax] = 1$, c'est-à-dire $[a][x] = 1$ qui signifie que $[a]$ est un inverse de $[x]$ dans A/I .

Nous avons prouvé que A/I est un corps.

150. Définition 1.326 d'anneau intègre.

151. Tous les anneaux du Frido sont commutatifs

152. Idéal premier, définition 1.391.

153. Idéal maximal, définition 1.388.

(4) **(2)**, $\Leftarrow$ Si $x \in A \setminus I$, il faut prouver que tout idéal contenant I et x est A .

Un idéal contenant I et x doit contenir l'idéal $J = Ax + I$. Comme $x \notin I$, nous avons $[x] \neq 0$ dans A/I . Donc $[x]$ est inversible et il existe $a \in A$ tel que $[ax] = [1]$. C'est-à-dire que $ax - 1 \in I$. Nous avons alors

$$1 = ax + \underbrace{(1 - ax)}_{\in I}. \quad (1.519)$$

C'est-à-dire que $1 \in Ax + I$ et donc $Ax + I = A$.

Enfin nous prouvons que tout idéal maximal propre est premier.

Si I est maximal, A/I est un corps par le point **(2)**, et vu que I est propre, le corps A/I n'est pas réduit à $\{0\}$. Donc le lemme 1.327 dit que A/I est un anneau intègre. Le point **(1)** dit alors que I est un idéal premier. $\square$

Remarque 1.394.

Puisqu'un corps peut être réduit à $\{0\}$, dans **(2)**, l'idéal peut être A . Mais pas dans **(3)**, parce qu'un idéal premier est propre, ça fait partie de la définition 1.391.

PROPOoHABIoBZZQMj

Proposition 1.395 ([85]).

Si A est un anneau commutatif intègre, alors un idéal I dans A est premier si et seulement si A/I est intègre.

Démonstration. Supposons que I soit un idéal premier. Si $[a], [b] \in A/I$ sont tels que $[a][b] = 0$, alors $[ab] = 0$, ce qui signifie que $ab \in I$. Mais alors, puisque I est premier, soit a soit b est dans I . Cela signifie que soit $[a]$ soit $[b]$ est nul dans A/I . Cela prouve que A/I est un anneau intègre.

Dans l'autre sens, nous supposons que A/I est intègre. Cela implique immédiatement que $I \neq A$ parce que A/A n'est pas un anneau intègre (tout le monde est évidemment diviseur de zéro).

Soient donc $a, b \in A$ tels que $ab \in I$. Alors $[a][b] = [ab] = 0$ dans A/I , mais comme A/I est intègre, cela implique que soit $[a]$ soit $[b]$ est nul. Autrement dit, soit a soit b est dans I . $\square$

PROPOoSGLNoBYKNyo

Proposition 1.396.

Dans un idéal principal, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) L'élément p est premier.
- (2) L'élément p est irréductible.
- (3) L'idéal pA est un idéal maximal.

1.13 Anneau intègre

LEMSEZSMRBoMtrhSXgkZ

Lemme 1.397.

Un corps ¹⁵⁴ est un anneau intègre.

Démonstration. En effet, soient un corps $\mathbb{K}$ et deux éléments $x, y \in \mathbb{K}$ tels que $xy = 0$. Si y est inversible, alors nous pouvons multiplier par y^{-1} pour trouver $x = 0$. Cela prouve que $\mathbb{K}$ est un anneau intègre. $\square$

Exemple 1.398.

L'anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ n'est pas intègre parce que $3 \cdot 2 = 0$ alors que ni 3 ni 2 ne sont nuls. $\triangle$

Nous verrons au théorème 3.92 que l'anneau A est intègre si et seulement si $A[X]$ est intègre.

CorZnInternprem

Corolaire 1.399.

L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre si et seulement si n est premier.

154. Définition 1.378.

Démonstration. Supposons que n soit premier. La proposition 1.352 donne les inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par

$$U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \{\bar{x} \text{ tel que } 0 \leq x \leq n \text{ tel que } \text{pgcd}(x, n) = 1\}. \quad (1.520)$$

Mais comme n est premier, $\text{pgcd}(x, n) = 1$ pour tout x , et donc tous les éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont inversibles. Donc $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre.

Si n n'est pas premier, alors $n = pq$ avec $1 < p \leq q < n$. Alors

$$[p]_n[q]_n = [pq]_n = [0]_n. \quad (1.521)$$

Donc lorsque n n'est pas premier, l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ possède des diviseurs de zéro et n'est alors pas intègre. $\square$

PropomqcGe

Proposition 1.400 (Thème 18, [1]).

Soit A un anneau principal¹⁵⁵ qui n'est pas un corps. Pour un idéal propre I de A , les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) I est un idéal maximal¹⁵⁶ ;

ITEMooNOVFooEHtcwE

(2) I est un idéal premier non nul¹⁵⁷ ;

ITEMooMQWVooNocVEU

(3) il existe p irréductible¹⁵⁸ dans A tel que $I = (p)$.

ITEMooJBXGooEISNuW

Démonstration. En plusieurs implications.

(1) **(1) implique (2)** Par hypothèse, I est un idéal propre, de plus il n'est pas égal à $\{0\}$, parce que lorsque A et $\{0\}$ sont les seuls idéaux, nous avons un corps (proposition 1.387). Étant donné que I est un idéal maximal, le quotient A/I est un corps par la proposition 1.389.

Soient maintenant, pour entrer dans le vif du sujet, des éléments $a, b \in A$ tels que $ab \in I$. Dans le corps A/I nous avons $[ab] = 0$, et par définition du produit dans le quotient, $[a][b] = 0$. Par intégrité de l'anneau A/I (un corps est un anneau intègre, lemme 1.397) nous avons soit $[a] = 0$, soit $[b] = 0$, soit les deux en même temps. Dans tous les cas, soit a soit b est dans I .

(2) **(2) implique (3)** Maintenant I est un idéal premier non réduit à $\{0\}$. Puisque A est un anneau principal, il existe $x \in A$ tel que $I = (x)$. Nous devons prouver que x peut être choisi irréductible ; et nous allons faire plus : nous allons prouver que x ne peut être que irréductible¹⁵⁹.

Supposons que x ne soit pas irréductible. Alors il existe $a, b \in A$ non inversibles tels que $x = ab$. Si $a \in (x)$ alors il existe $k \in A$ tel que $a = xk$, et en particulier, $a = abk$, c'est-à-dire $1 = bk$ (parce que A est principal et donc intègre). Cela signifie que b est inversible alors que nous avons dit qu'il ne l'était pas. Nous en déduisons que a n'est pas dans (x) . On montre de manière similaire que b n'est pas dans (x) non plus.

Nous nous retrouvons donc avec $a, b \in A$ tel que $ab \in I$ sans que ni a ni b ne soient dans I . Cela contredit le fait que I soit un idéal premier. En conclusion, x est irréductible.

(3) **(3) implique (1)** Nous avons $I = (p)$ avec p irréductible dans A . Supposons que J est un idéal différent de A contenant I . Comme A est principal, il existe $y \in A$ tel que $J = (y)$. En particulier $p \in J$, donc $p = ay$ pour un certain $a \in A$. Mais p est irréductible, donc soit a est inversible, soit y est inversible. Si y est inversible, alors $J = A$, ce qui est exclu. Si a est inversible, alors $(y) = (p)$, et $I = J$.

 $\square$

1.401.

Dans la proposition 1.400, l'hypothèse d'idéal propre est importante. En effet dans le cas $I = A$, nous avons évidemment que I est un idéal maximum. Mais A n'est d'abord pas un idéal premier

155. Définition 1.340.

156. Définition 1.388.

157. Définition 1.391.

158. Définition 1.318.

159. ça me semble un peu trop facile. Lisez attentivement, et écrivez-moi pour dire si vous êtes d'accord ou pas.

parce qu'un idéal premier doit être strictement inclus dans l'anneau. Et ensuite, A est en général loin d'être garanti d'être égal à (p) pour un de ses éléments p .

PropoTMMXCx

Proposition 1.402.

Soit A un anneau principal, et soit $p \in A$ un élément irréductible. Alors

(1) (p) est un idéal maximum.

ITEMooKPJQooWuPZXS

(2) $A/(p)$ est un corps.

Démonstration. Nous notons $I = (p)$. Soit un idéal J contenant I . Comme A est principal, J est monogène : $J = (q)$. Mais comme p est dans I qui est dans J , il existe $a \in A$ tel que $p = qa$.

Puisque p est irréductible, soit q , soit a est inversible. Si q est inversible, alors $J = A$. Si a est inversible, alors nous avons $p = qa$, donc $q = pa^{-1}$, ce qui signifie que $q \in (p)$ et donc que $J = I$.

Cela prouve que (p) est un idéal maximum.

Le fait que $A/(p)$ soit un corps est maintenant la proposition 1.389. $\square$

Exemple 1.403.

L'anneau $\mathbb{Z}$ est principal parce qu'il est intègre et que ses seuls idéaux sont les $n\mathbb{Z}$ qui sont principaux : $n\mathbb{Z}$ est engendré par n . $\triangle$

EXooCJRPOoYkWdyr

Exemple 1.404 (Les idéaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).

Les idéaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont principaux, mais l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est pas principal lorsque n n'est pas premier. Nous allons voir ça.

- (1) **Les idéaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont principaux** Soit un idéal S dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Nous considérons la projection canonique $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. La proposition 1.386 dit que $S = \phi(J)$ où J est un idéal de $\mathbb{Z}$ contenant $n\mathbb{Z}$. Mais le corolaire 1.351 nous dit qu'alors $J = m\mathbb{Z}$ pour un certain m . Pour que $m\mathbb{Z}$ contienne $n\mathbb{Z}$, il faut que m divise n .

Bref, $S = \phi(m\mathbb{Z})$ avec $m \mid n$. Nous montrons maintenant que S est engendré par $[m]_n$. D'abord, l'élément $[m]_n$ est bien dans $\phi(m\mathbb{Z})$. Ensuite un élément de $\phi(m\mathbb{Z})$ est de la forme

$$[km]_n = k[m]_n \in ([m]_n). \quad (1.522)$$

Donc $S \subset ([m]_n)$. Et l'inclusion dans l'autre sens est tout aussi immédiate : un élément de $([m]_n)$ est de la forme

$$k[m]_n = [km]_n = \phi(km) \in \phi(m\mathbb{Z}). \quad (1.523)$$

- (2) **Si n n'est pas premier, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est pas principal** Le fait est que lorsque n n'est pas premier, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est pas intègre (corolaire 1.399).
- (3) **Moralité** Un anneau comme $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est un anneau dont tous les idéaux sont principaux, mais qui n'est pas principal. $\triangle$

Exemple 1.405.

Nous verrons dans la proposition 26.68 que l'anneau des fonctions holomorphes sur un compact de $\mathbb{C}$ est principal. $\triangle$

1.14 Théorèmes chinois et idéaux

PROPooFGDKooPiDCAE

Proposition 1.406 ([59]).

Soit un anneau A . Soient des idéaux $I_1, \dots, I_n$ premiers deux à deux¹⁶⁰. Nous posons

$$J_i = \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n I_j. \quad (1.524)$$

Alors les idéaux J_i sont premiers dans leur ensemble.

160. Définition 1.308.

Démonstration. Nous y allons par récurrence. Pour $n = 2$ c'est facile parce que $J_1 = I_2$ et $J_2 = I_1$. Donc $J_1 + J_2 = I_2 + I_1 = A$.

Supposons que la propriété soit vraie pour n , et voyons pour $n + 1$. Soient donc des idéaux $I_1, \dots, I_{n+1}$ premiers deux à deux. Pour $i = 1, \dots, n$ nous posons

$$K_i = \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n I_j. \quad (1.525)$$

Par hypothèse de récurrence les K_i sont premiers dans leur ensemble. Il existe $(k_1, \dots, k_n) \in K_1 \times \dots \times K_n$ tels que

$$k_1 + \dots + k_n = 1. \quad (1.526)$$

Par ailleurs I_i est premier avec I_{n+1} , donc il existe $a_i \in I_i$ et $b_i \in I_{n+1}$ tels que $a_i + b_i = 1$. Nous avons donc l'égalité

$$k_1(a_1 + b_1) + \dots + k_n(a_n + b_n) = 1 \quad (1.527)$$

que nous réarrangeons en

$$(k_1 a_1 + \dots + k_n a_n) + k_1 b_1 + \dots + k_n b_n = 1. \quad (1.528) \quad \text{EQooDOFHooQUWtss}$$

Vu que $k_i \in K_i$ et $a_i \in I_i$ et vu que les idéaux sont absorbants,

$$k_i a_i \in I_i \cap \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n I_j = \bigcap_{j=1}^n I_j = \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq n+1}}^{n+1} I_j = J_{n+1}. \quad (1.529)$$

Vu que cela est vrai pour chaque i , et vu que les idéaux sont stables par somme, nous avons

$$k_1 a_1 + \dots + k_n a_n \in J_{n+1}. \quad (1.530)$$

De même pour chaque i nous avons $k_i \in I_i$ et $b_i \in I_{n+1}$, et donc

$$k_i b_i \in K_i \cap I_{n+1} = I_{n+1} \cap \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n I_j = \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} I_j = J_i. \quad (1.531)$$

Nous pouvons revenir à l'équation (1.528) :

$$\underbrace{(k_1 a_1 + \dots + k_n a_n)}_{\in J_{n+1}} + \underbrace{k_1 b_1}_{\in J_1} + \dots + \underbrace{k_n b_n}_{\in J_n} = 1. \quad (1.532)$$

Nous avons donc démontré que $1 \in J_1 + \dots + J_{n+1}$ et donc que ces idéaux sont premiers dans leur ensemble. $\square$

PROPooKWZLooCHhSjs

Proposition 1.407 (Théorème des restes chinois version congruence[59]).

Soit un anneau A . Soient $a_1, \dots, a_n \in A$. Soient des idéaux premiers entre eux $I_1, \dots, I_n$. Nous considérons l'ensemble

$$S = \{x \in A \text{ tel que } x \in [a_i]_{I_i} \forall i\}. \quad (1.533)$$

Alors

ITEMooTGOEooZfsiKG

(1) S est non vide.

(2) Si $x \in S$ alors $S = [x]_{I_1 \cap \dots \cap I_n}$.

ITEMooCECDooQzGovx

Démonstration. En deux parties.

- (1) **Pour (1)** Nous commençons par poser

$$J_i = \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n I_j \quad (1.534)$$

qui sont des idéaux premiers dans leur ensemble par 1.406. Il existe donc $(j_1, \dots, j_n) \in J_1 \times J_n$ tel que $j_1 + \dots + j_n = 1$. Nous posons alors

$$x = a_1 j_1 + \dots + a_n j_n, \quad (1.535)$$

et nous vérifions que $x \in S$. Pour cela nous fixons un i et nous calculons un petit peu :

$$x - a_i = a_1 j_1 + \dots + a_n j_n - (a_i j_1 + \dots + a_i j_n) \quad (1.536a)$$

$$= (a_1 - a_i) j_1 + \dots + (a_n - a_i) j_n. \quad (1.536b)$$

Notez que dans la dernière somme, le coefficient de j_i est $(a_i - a_i) = 0$. Pour les autres termes ($k \neq i$) nous avons

$$(a_k - a_i) j_k \in J_k = \bigcup_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n I_l \subset I_i. \quad (1.537)$$

La dernière inclusion est parce que $i \neq k$, donc il y a un terme $l = i$ dans l'intersection. Nous avons démontré que chaque terme de la somme (1.536b) est dans I_i .

Donc $x - a_i \in I_i$. Cela étant valable pour tout i , nous avons bien prouvé que $x \in S$.

- (2) **Pour (2)** Soit $x \in S$. Nous prouvons les deux inclusions.

(2a) $S \subset [x]_{I_1 \cap \dots \cap I_n}$ Soit $s \in S$. Vu que x et s sont dans S , pour chaque i nous avons

$$s - a_i = e_i \quad (1.538a)$$

$$x - a_i = f_i \quad (1.538b)$$

pour certains éléments $e_i, f_i \in I_i$. En soustrayant, $s - x = e_i - f_i \in I_i$. Un tel calcul étant valable pour chaque i , nous avons $s - x \in I_1 \cap \dots \cap I_n$, c'est-à-dire $s \in [x]_{I_1 \cap \dots \cap I_n}$.

(2b) $[x]_{I_1 \cap \dots \cap I_n} \subset S$ Nous posons $s = x + e$ avec $e \in I_1 \cap \dots \cap I_n$, et nous prouvons que $s \in S$. Nous avons

$$s - a_i = \underbrace{x - a_i}_{\in I_i} - \underbrace{e}_{\in I_i} \in I_i. \quad (1.539)$$

Donc $s \in [a_i]_{I_i}$ pour chaque i . Donc $s \in S$. □

Théorème 1.408 (Théorème des restes chinois version anneaux quotients, thème 3[59, 86]).

Soient un anneau A et des idéaux $I_1, \dots, I_n$ premiers entre eux deux à deux.

- (1) Il existe une unique application $f: A/I_1 \cap \dots \cap I_n \rightarrow A/I_1 \times \dots \times A/I_n$ vérifiant

$$f([x]) = ([x]_{I_1}, \dots, [x]_{I_n}) \quad (1.540)$$

pour tout $x \in A$.

- (2) Cette application est un isomorphisme d'anneaux.

Démonstration. En plusieurs points.

- (1) **Existence et unicité** Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} g: A &\rightarrow A/I_1 \times \dots \times A/I_n \\ x &\mapsto ([x]_{I_1}, \dots, [x]_{I_n}). \end{aligned} \quad (1.541)$$

Afin d'utiliser la proposition 1.55 nous vérifions que si $u \in [x]_{I_1 \cap \dots \cap I_n}$ alors $g(x) = g(y)$. En effet dire $y \in [x]$ signifie $x - y \in I_1 \cap \dots \cap I_n$ et donc pour tout j nous avons $x - y \in I_j$. Du coup pour tout j nous avons $[x]_{I_j} = [y]_{I_j}$. Voila. Donc la proposition 1.55 prouve le point (1).

- (2) **Injective** Soient $\alpha, \beta \in A/I_1 \cap \dots \cap I_n$ tels que $f(\alpha) = f(\beta)$. Nous considérons $x \in \alpha$ et $y \in \beta$. Nous avons

$$f(\alpha) = ([x]_{I_1}, \dots, [x]_{I_n}) \quad (1.542a)$$

$$f(\beta) = ([y]_{I_1}, \dots, [y]_{I_n}). \quad (1.542b)$$

Donc $[x]_{I_i} = [y]_{I_i}$ pour tout i . Pour chaque i , il existe un $e_i \in I_i$ tel que $x - y = e_i$. Forcément tous les e_i sont égaux et nous avons donc $x - y \in I_1 \cap \dots \cap I_n$. Cela prouve que $\alpha = \beta$ et donc que f est injective.

- (3) **Surjective** Soient $\alpha_i \in A/I_i$. Nous avons besoin de trouver $\alpha \in A/I_1 \cap \dots \cap I_n$ tel que $f(\alpha) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Pour chaque α_i nous considérons $a_i \in \alpha_i$ et nous cherchons $x \in A$ tel que

$$x \in [a_i]_{I_i} \quad (1.543)$$

pour tout i . La version congruence du théorème chinois (proposition 1.407) dit qu'un tel x existe. En prenant $\alpha = [x]_{I_1 \cap \dots \cap I_n}$ nous avons bien $f(\alpha) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

- (4) **Morphisme** L'application f est un morphisme d'anneaux parce que si $\alpha, \beta \in A/I_1 \cap \dots \cap I_n$ et si $x \in \alpha$ et $y \in \beta$, alors

$$f(\alpha + \beta) = f([x] + [y]) = f([x + y]) = ([x + y]_1, \dots) = ([x]_1 + [y]_1, \dots) = f(\alpha) + f(\beta). \quad (1.544)$$

Le même genre de vérification marche pour le produit.

□

Pour la suite nous rappelons que $[x]_a$ est la classe de x pour le quotient par l'idéal (a) . Donc

$$[x]_a = \{y \in A \text{ tel que } x - y \in (a)\}. \quad (1.545)$$

Notez au passage que

$$[xa]_a = [0]_a \quad (1.546)$$

Nous avons vu dans 1.342 que $\mathbb{Z}$ est principal; le lemme suivant nous dit que $\mathbb{Z}[X]$ n'est lui, pas principal.

Lemme 1.409 ([87]).

Si A est un anneau intègre¹⁶¹ qui n'est pas un corps, alors $A[X]$ n'est pas principal.

Démonstration. Soit un élément non nul $a \in A$.

- (1) **Un idéal principal contenant a et X est $A[X]$**

Soit (P) un idéal principal contenant a et X . Puisque $a \in (P)$, il existe Q tel que $a = QP$. Donc P divise a dans $\mathbb{Z}[X]$. L'égalité des degrés indique que P est un polynôme constant, c'est-à-dire en réalité un élément de A . Soit $P = k \in A$.

Comme P divise X , nous avons aussi $X = kQ$ pour un certain $Q \in \mathbb{Z}[X]$. L'égalité des degrés dit qu'il existe $k' \in A$ tel que $Q = k'X$ et donc $X = k'kQ$, ce qui implique que $kk' = 1$. L'idéal engendré par k contient donc en particulier $kk' = 1$ et donc contient $A[X]$ en entier :

$$1 = k'k \in k'(P) = (P). \quad (1.547)$$

- (2) **Si $(a, X) = A[X]$ alors a est inversible**

Si $(a, X) = A[X]$, en particulier, $1 \in (a, X)$, ce qui signifie qu'il existe des polynômes $U, V \in A[X]$ tels que

$$1 = UX + Va. \quad (1.548)$$

Nous évaluons cette égalité en 0 : comme $(UX)(0) = 0$, nous avons $1 = V(0)a$, ce qui signifie que $V(0)$ est un inverse de a . Donc a est inversible.

161. Définition 1.326.

(3) **Si a n'est pas inversible alors (a, X) n'est pas principal**

Si (a, X) était principal, alors nous aurions, par ce qui est dit plus haut, $(a, X) = A[X]$.

Mais cette dernière égalité impliquerait que a soit inversible.

En conclusion, si A n'est pas un corps, il possède un élément ni nul ni inversible. Dans ce cas, l'idéal (a, X) n'est pas principal dans $A[X]$ et nous en déduisons que $A[X]$ n'est pas un anneau principal. $\square$

Nous verrons dans le lemme 3.98 que si $\mathbb{K}$ est un corps, alors $\mathbb{K}[X]$ est principal.

1.15 Sous-groupe normal

Proposition 1.410.

Soit N un sous-groupe de G . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) N est normal¹⁶² dans G .

(2) N est une union de classes de conjugaison¹⁶³ de G ,

(3) $gNg^{-1} \subseteq N$ pour tout $g \in G$,

(4) $gNg^{-1} = N$ pour tout $g \in G$,

(5) $gN = Ng$ pour tout $g \in G$,

(6) Le normalisateur¹⁶⁴ de N est $G : \mathcal{N}_G(N) = G$.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **(1) implique (3)** C'est la définition de sous-groupe normal.

(2) **(3) implique (4)** Soit $g \in G$. Nous avons $gNg^{-1} \subset N$, mais aussi (en appliquant l'hypothèse à g^{-1}) $g^{-1}Ng \subset N$. En combinant nous avons

$$N \subset g(g^{-1}Ng)g^{-1} \subset gNg^{-1}. \quad (1.549)$$

Nous avons l'inclusion dans les deux sens. Donc l'égalité.

(3) **(4) implique (5)** Soit $g \in G$. Un élément général de gN est de la forme gn avec $n \in N$. Nous devons trouver un $n' \in N$ tel que $gn = n'g$. En posant $n' = gng^{-1}$ nous avons

$$n' = gng^{-1} \in gNg^{-1} \subset N. \quad (1.550)$$

Il est immédiat de prouver que $gn = n'g$. Cela prouve que $gN \subset Ng$.

Le même raisonnement donne $Ng \subset gN$.

(4) **(5) implique (3)** Un élément de gNg^{-1} est $a = gng^{-1}$ avec $n \in N$. Nous devons prouver que $a \in N$. Puisque $gn \in gN$, par hypothèse il existe n' tel que $gn = n'g$. En remplaçant dans la définition de a ,

$$a = gng^{-1} = n'gg^{-1} = n' \in N. \quad (1.551)$$

(5) **(5) implique (2)** Pour chaque $a \in G$ nous notons C_a la classe de conjugaison de a dans G :

$$C_a = \{gag^{-1} \text{ tel que } g \in G\}. \quad (1.552)$$

Comme $a \in C_a$ (prendre $g = e$ dans (1.552).) nous avons forcément

$$N \subset \bigcup_{n \in N} C_n. \quad (1.553)$$

Prouvons maintenant l'inclusion inverse. Nous avons déjà prouvé que (5) implique (3). Donc si $n \in N$, alors $gng^{-1} \in N$. Nous avons alors

$$C_n = \{gng^{-1} \text{ tel que } g \in G\} \subset N. \quad (1.554)$$

Donc il est vrai que $N = \bigcup_{n \in N} C_n$.

162. Définition 1.257.

163. Définition 1.253.

164. Définition 1.256.

- (6) **(2) implique (1)** Nous supposons que $N \subset G$ est un sous-groupe de la forme

$$N = \bigcup_{a \in I} C_a \quad (1.555)$$

où I est une partie de G . Nous devons montrer que pour tout $g \in G$ et pour tout $n \in N$ nous avons $gng^{-1} \in N$. Puisque $n \in N$, il existe $a \in I$ tel que $n \in C_a$ et donc il existe $k \in G$ tel que $n = kak^{-1}$. Nous avons donc

$$gng^{-1} = g(kak^{-1})g^{-1} = (gk)a(gk)^{-1} \in C_a \subset N. \quad (1.556)$$

Le lecteur attentif aura remarqué l'utilisation de l'axiome du choix. La prudence l'incitera à ne pas le faire remarquer au jury.

- (7) **(6) si et seulement si (5)** C'est la définition du normalisateur.

□

Définition 1.411.

Soit $g \in G$ et $n \in \mathbb{Z}$. Nous définissons g^n par

- (1) $g^0 = e$ et $g^n = gg^{n-1}$ si n est positif.
- (2) si $n < 0$, nous posons $g^n = (g^{-1})^{-n}$.

LemHUKMxp

Lemme 1.412 ([48, 15]).

Soient un groupe G et deux sous-groupes normaux¹⁶⁵ H et K tels que $H \cap K = \{e\}$. Alors :

ITEMooDFVBooSnnlgR

- (1) Tout élément de H commute avec tout élément de K .

ITEMooVVBGooZSJqjp

- (2) HK est un sous-groupe de G .

IMTEooPCBZooQoZFOD

- (3) L'application

$$\begin{aligned} \varphi: H \times K &\rightarrow HK \\ (h, k) &\mapsto hk \end{aligned} \quad (1.557)$$

est un isomorphisme de groupes.

Démonstration. Point par point.

- (1) **(1)** Soient $h \in H$ et $k \in K$. Nous voulons montrer que $hk = kh$. Pour cela nous considérons l'élément $a = hkh^{-1}k^{-1}$. Comme H est normal dans G , nous avons

$$kh^{-1}k^{-1} \in H \quad (1.558)$$

et donc $a \in H$. De même K étant normal dans G , nous avons $hkh^{-1} \in K$ et donc $a \in K$. Au final $a \in H \cap K = \{e\}$. Nous avons prouvé que

$$hkh^{-1}k^{-1} = e, \quad (1.559)$$

et donc que $hk = kh$.

- (2) **(2)** Puisque H et K sont des sous-groupes, $\{e\}$ est dans les deux, de telle sorte que $e \in HK$. De plus si $h_i \in H$ et $k_i \in K$, la commutativité du point **(1)** donne

$$(h_1k_1)(h_2k_2) = h_1h_2k_1k_2 \in HK. \quad (1.560)$$

Donc le produit de deux éléments de HK est dans HK .

- (3) **(3)** En trois sous-parties.

165. Sous-groupe normal, définition 1.257.

(3a) **Morphisme** Soient $h_i \in H$ et $k_i \in K$. En utilisant la commutativité du point (1) nous avons

$$\varphi((h_1, k_1)(h_2, k_2)) = \varphi(h_1 h_2, k_1 k_2) \quad (1.561a)$$

$$= (h_1 h_2)(k_1 k_2) \quad (1.561b)$$

$$= (h_1 k_1)(h_2 k_2) \quad (1.561c)$$

$$= \varphi(h_1, k_1) \varphi(h_2, k_2). \quad (1.561d)$$

(3b) **Injectif** Si $\varphi(h_1, k_1) = \varphi(h_2, k_2)$ nous avons successivement

$$h_1 k_1 = h_2 k_2 \quad (1.562a)$$

$$h_1 k_1 h_2^{-1} = k_2 \quad (1.562b)$$

$$h_1 k_1 h_2^{-1} k_1^{-1} = k_2 k_1^{-1} \quad (1.562c)$$

$$h_1 h_2^{-1} = k_2 k_1^{-1}. \quad (1.562d)$$

Le membre de gauche est un élément de H et le membre de droite un élément de K . Comme $H \cap K = \{e\}$ nous avons $h_1 h_2^{-1} = e$ et $k_2 k_1^{-1} = e$, c'est-à-dire $h_1 = h_2$ et $k_1 = k_2$.

(3c) **Surjectif** Un élément général de HK est hk avec $h \in H$ et $k \in K$, c'est-à-dire $\varphi(h, k)$. □

DefvtSAyb

Définition 1.413.

L'**exposant** du groupe G est le plus petit entier non nul n tel que $g^n = e$ pour tout $g \in G$. S'il n'existe pas un tel n , nous disons que l'exposant du groupe est infini.

PROPooSWHHooOzqWkw

Proposition 1.414.

À propos d'exposant de groupe et de ppcm.

ITEMooFIPBooFOaPkU

(1) Si l'ensemble des ordres de tous les éléments d'un groupe est majoré, alors l'exposant du groupe est le plus petit commun multiple des ordres des éléments du groupe. ITEMooLIREooYEtdL

(2) Pour un groupe fini, l'exposant est le ppcm des ordres des éléments du groupe.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)** Soit p le ppcm des ordres de tous les éléments du groupe. Si g est d'ordre a , il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = ak$. Avec ça nous avons $g^p = (g^a)^k = e^k = e$. Donc p a bien la propriété $g^p = e$ pour tout $g \in G$.

Si $q < p$, nous montrons que q ne peut pas avoir cette propriété. Il existe un élément g dont l'ordre a ne divise pas q . Par la division euclidienne 1.343, nous avons des entiers u et v tels que $q = ua + v$ avec $v < a$. Nous avons alors

$$g^q = g^{ua} g^v = g^v \neq e \quad (1.563)$$

parce que $v < a$ et que a est le plus petit n tel que $g^n = e$.

(2) **Pour (2)** Même chose. Pour un groupe fini, le ppcm existe toujours. □

Le théorème de Burnside 8.311 nous donnera un bon paquet d'exemples de groupes d'exposant fini dans $GL(n, \mathbb{C})$.

PropSRMJooIDPBoW

Proposition 1.415.

Soit un groupe G . Nous considérons un sous-groupe normal H de G ainsi qu'un morphisme $\psi: G \rightarrow H$. Alors

(1) $\psi(H)$ est normal dans $\psi(G)$

(2) Si G/H est abélien alors $\psi(G)/\psi(H)$ est abélien.

Démonstration. Soient $h \in H$ et $g \in G$. Alors $\psi(g)\psi(h)\psi(g)^{-1} = \psi(ghg^{-1}) \in \psi(H)$. Donc $\psi(H)$ est normal dans $\psi(G)$.

Pour la seconde partie nous notons $[\dots]$ les classes par rapport à $\psi(H)$ et $\overline{\dots}$ celles par rapport à H . Nous avons

$$[\psi(g_1)][\psi(g_2)] = [\psi(g_1)\psi(g_2)] \quad (1.564a)$$

$$= [\psi(g_1g_2)] \quad (1.564b)$$

$$= \{\psi(g_1g_2)\psi(h) \text{ tel que } h \in H\} \quad (1.564c)$$

$$= \{\psi(g_1g_2h) \text{ tel que } h \in H\} \quad (1.564d)$$

$$= \psi\left(\{g_1g_2h \text{ tel que } h \in H\}\right) \quad (1.564e)$$

$$= \psi(\overline{g_1g_2}) \quad (1.564f)$$

$$= \psi(\overline{g_2g_1}) \quad (1.564g)$$

$$= \text{refaire à l'envers} \quad (1.564h)$$

$$= [\psi(g_2)][\psi(g_1)]. \quad (1.564i)$$

Par conséquent $\psi(G)/\psi(H)$ est abélien. $\square$

1.16 Corps

La définition d'un corps est 1.378.

1.16.1 Définitions, morphismes

La proposition suivante donne une caractérisation d'un corps, en disant un tout petit peu plus que la définition 1.378.

Proposition 1.416.

L'anneau A est un corps si et seulement si $U(A) = A^*$.

Démonstration. En deux parties.

- (1) **Sens direct** Nous supposons que A est un corps. D'une part tous les éléments non nuls sont inversibles, c'est-à-dire $A^* \subset U(A)$.

Pour l'inclusion inverse, nous montrons qu'un élément inversible ne peut pas être nul. Cela n'est autre que le lemme 1.91 couplé à la proposition 1.92 : $a \cdot 0 = 0 \neq 1$ pour tout a .

- (2) **Sens inverse** Si $U(A) = A^*$, nous avons immédiatement que tous les éléments non nuls sont inversibles et donc que A est un corps. $\square$

LEMooJNIBooAURhrt

Lemme 1.417.

Si $\mathbb{K}$ est un corps et si $a \in \mathbb{K}$ vérifie $a^2 = 1$, alors $a = \pm 1$.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{K}$ tel que $a^2 = 1$. Alors $a^2 - 1 = 0$. Il est facile de vérifier¹⁶⁶ que $(a+1)(a-1) = a^2 - 1$. Bref, on a le produit nul

$$(a+1)(a-1) = 0. \quad (1.565)$$

Le lemme 1.327 dit que tout corps respecte la règle du produit nul. Donc soit $a+1 = 0$ soit $a-1 = 0$. Donc $a \in \{1, -1\}$. $\square$

DEFooWGKFooJaakjf

Définition 1.418 (Morphisme de corps).

*Un corps étant un anneau sans plus de structure, un **morphisme de corps** n'est qu'un morphisme des anneaux¹⁶⁷.*

¹⁶⁶. Parce que tous les corps du Frido sont commutatifs.

¹⁶⁷. Définition 1.96.

Le lemme suivant montre que définir un morphisme de corps comme étant simplement un morphisme des anneaux est une bonne idée.

LEMooWBOPooZnsZgQ

Lemme 1.419.

Si $\varphi: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}'$ est un morphisme de corps, alors

- (1) pour tout $a \in \mathbb{K}$ nous avons $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$;
- (2) le morphisme φ est injectif.

Démonstration. Vu que $\varphi(1) = 1$, nous avons aussi

$$1 = \varphi(aa^{-1}) = \varphi(a)\varphi(a^{-1}). \quad (1.566)$$

Donc, par unicité de l'inverse¹⁶⁸, $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$.

Pour l'injectivité nous supposons $\varphi(a) = \varphi(b)$. Étant donné que $\mathbb{K}'$ est un corps, nous pouvons multiplier par $\varphi(b)^{-1}$:

$$\varphi(a)\varphi(b)^{-1} = 1. \quad (1.567)$$

En utilisant le premier point nous avons $1 = \varphi(a)\varphi(b^{-1})$, puis le morphisme d'anneaux : $1 = \varphi(ab^{-1})$, et encore le morphisme d'anneaux nous permet de déduire $ab^{-1} = 1$ et donc $a = b$. $\square$

1.16.2 Sous-groupe engendré

DefooRDRXooEhVxxu

Définition 1.420 (Sous-groupe engendré).

Soit A une partie du groupe G . Le sous-groupe **engendré** par A est l'intersection de tous les sous-groupes de G contenant A . Nous notons ce groupe $\text{gr}_G(A)$.

Lorsque A est fini (disons $A = \{a_1, \dots, a_n\}$), on note aussi le sous-groupe engendré $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$.

1.421.

Un sous-groupe engendré n'est jamais vide parce qu'il contient toujours au moins le neutre (parce que c'est un sous-groupe). Si G est un groupe, le sous-groupe $\text{gr}_G(\emptyset)$ lui-même contient e ¹⁶⁹.

1.422.

Dans de nombreux cas, le groupe « ambiant » G est entendu par le contexte et nous noterons $\text{gr}(A)$ au lieu de $\text{gr}_G(A)$.

Si par exemple A est la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, le groupe $\text{gr}(A)$ est à comprendre dans $\text{GL}(2, \mathbb{R})$. Il faudrait être fou pour avoir en tête un autre groupe que $\text{GL}(2, \mathbb{R})$ sans le préciser.

D'ailleurs, connaissez-vous un groupe contenant la matrice A et n'étant pas un sous-groupe de $\text{GL}(2, \mathbb{C})$?

Lemme 1.423.

Si G est un groupe et A une partie de G , alors $\text{gr}(A)$ est un sous-groupe de G .

Le sous-groupe engendré par A est le plus petit (pour l'inclusion) groupe de G contenant A . Plus formellement, nous avons le résultat suivant :

Lemme 1.424.

Tout sous-groupe de G contenant A contient $\text{gr}(A)$.

Démonstration. Si H est un sous-groupe de G contenant A , alors $\text{gr}(A)$ est l'intersection de H avec tous les autres sous-groupes de G contenant A . Il contient donc $\text{gr}(A)$. $\square$

LemFUIZooBZTCiy

Lemme 1.425 ([88]).

Si A est une partie du groupe G , alors le sous-groupe $\text{gr}(A)$ engendré¹⁷⁰ par A est l'ensemble de tous les produits finis d'éléments de A et de A^{-1} (l'identité est le produit à zéro éléments).

168. Lemme 1.246 (2).

169. Demandez-vous si il est possible que $\text{gr}(\emptyset)$ contienne d'autres éléments que e .

170. Définition 1.420.

C'est-à-dire que tout élément de $\text{gr}(A)$ peut être écrit sous la forme¹⁷¹

$$\prod_{i=1}^n g_i^{a_i} \quad (1.568)$$

où $a_i \in \mathbb{Z}$ et $g: \mathbb{N} \rightarrow A$ n'est pas spécialement injective : il peut arriver que $g_i = g_j$.

Démonstration. Puisqu'un produit vide est égal à l'identité¹⁷², le lemme est vrai (un peu trivialement) dans le cas où $A = \emptyset$. À partir de maintenant, nous supposons que A est non vide.

Nous nommons $\text{gr}(A)$ le groupe engendré par A et H , l'ensemble

$$H = \{g_1 \dots g_n \text{ tel que } g_i \in A \cup A^{-1}\}. \quad (1.569)$$

Nous commençons par prouver que H est un groupe.

- Puisque A est non vide, nous considérons $a \in A$. Dans ce cas, $e = aa^{-1} \in H$. Donc $e \in H$.
- L'inverse de $g_1 \dots g_n$ est $g_n^{-1} \dots g_1^{-1}$ qui est également dans H .
- Le produit de $g_1 \dots g_n$ par $h_1 \dots h_n$, tous éléments de H , est également dans H ¹⁷³.

Comme H est un groupe contenant A , nous avons $\text{gr}(A) \subset H$ parce que $\text{gr}(A)$ est une intersection dont un des éléments est H .

Par ailleurs tout groupe contenant A doit contenir les inverses et les produits finis, donc $H \subset \text{gr}(A)$.

Au final, $H = \text{gr}(A)$, ce qu'il fallait. □

LEMooCFTVooKvmyKN

Lemme 1.426.

Soit un groupe G et un sous-groupe $H = \text{gr}(h_1, \dots, h_n)$. Si $\alpha \in G$, alors

$$\alpha H \alpha^{-1} = \text{gr}(\alpha h_1 \alpha^{-1}, \dots, \alpha h_n \alpha^{-1}). \quad (1.570)$$

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence du lemme 1.425. Un élément de $\text{gr}(\alpha h_1 \alpha^{-1}, \dots, \alpha h_n \alpha^{-1})$ est un produit d'éléments de G de la forme $\alpha h_i \alpha^{-1}$ ou $(\alpha h_j \alpha^{-1})^{-1} = \alpha h_j^{-1} \alpha^{-1}$. Or nous avons

$$\alpha h_i \alpha^{-1} \alpha h_j \alpha^{-1} = \alpha h_i h_j \alpha^{-1} \in \alpha H \alpha^{-1}. \quad (1.571)$$

Donc

$$\text{gr}(\alpha h_1 \alpha^{-1}, \dots, \alpha h_n \alpha^{-1}) \subset \alpha H \alpha^{-1}. \quad (1.572)$$

L'inclusion dans l'autre sens est du même tonneau. □

DEFooWMFVooLDqVxR

Définition 1.427 (Partie génératrice, groupe monogène).

Soient un groupe G , et une partie $A \subset G$. Si $\text{gr}(A) = G$, alors nous disons que A est une **partie génératrice** du groupe G .

Un groupe est **monogène** si il a une partie génératrice réduite à un seul élément.

DefHFJWooFxxkzCF

Définition 1.428 (Groupe cyclique).

Un élément $a \in G$ est un **générateur** de G si tous les éléments de G s'écrivent sous la forme a^n pour un certain $n \in \mathbb{Z}$. Un groupe fini et monogène est dit **cyclique**.

1.429.

La différence entre un groupe monogène et un groupe cyclique est qu'un groupe cyclique est fini. Dans un groupe cyclique, à force d'itérer le générateur, nous finissons par tourner en rond – d'où le nom.

171. Les a_i négatifs correspondent aux inverses. Notons que si $g \in A$, il n'y a pas de garanties que g^{-1} soit également dans A .

172. Voir 1.303.

173. Et c'est ici qu'on se rend compte que la décomposition n'est probablement que rarement unique.

Exemple 1.430.

Soit le groupe $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}, +)$. L'élément $[2]_{10}$ n'est pas générateur parce que ses puissances¹⁷⁴ sont

$$\text{gr}([2]_{10}) = \{[2]_{10}, [4]_{10}, [6]_{10}, [8]_{10}, [0]_{10}\}. \quad (1.573)$$

Par contre l'élément $[3]_{10}$ est générateur : ses puissances sont dans l'ordre

$$[3]_{10}, [6]_{10}, [9]_{10}, [2]_{10}, [5]_{10}, [8]_{10}, [1]_{10}, [4]_{10}, [7]_{10}, [0]_{10}. \quad (1.574)$$

△

Un exemple presque identique, mais un peu masqué sera l'exemple 18.155.

Lemme 1.431 ([1]).

Si $n = dr$, alors

(1) $r\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un groupe.

(2) Le groupe $r\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est cyclique¹⁷⁵.

(3) $\text{Card}(r\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = d = n/r$.

LEMooTHBIooJPjBlp

LEMooSAAxooMezYui

ITEMooGCGQooIfZULt

1.17 Module sur un anneau

DEFooHXITooBFvzrR

Définition 1.432 (module sur un anneau[89]).

Soit un anneau A . Un **module à gauche** sur A est la donnée d'un triplet $(M, +, \cdot)$ où

(1) $+$ est une loi de composition interne à M , c'est-à-dire $+: M \times M \rightarrow M$,

(2) $\cdot$ est une loi de composition externe, c'est-à-dire $\cdot: A \times M \rightarrow M$

telles que

(1) $(M, +)$ est un groupe¹⁷⁶.

(2) $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$,

(3) $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$,

(4) $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$

(5) $1 \cdot x = x$.

pour tout $a, b \in A$ et $x, y \in M$.

Si M et N sont des A -modules, un **morphisme** de M vers N est une application $f: M \rightarrow N$ qui

(1) est un morphisme de groupes entre $(M, +)$ et $(N, +)$

(2) vérifie $f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$ pour tout $a \in A$, $x \in M$.

L'ensemble des morphismes entre M et N est noté $\text{Hom}_A(M, N)$. Si B est un sous-anneau de A , nous parlons de $\text{Hom}_B(M, N)$ pour parler des morphismes de groupes qui ne vérifient $f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$ que pour $a \in B$.

PROPooGARGooDiMqtN

Proposition 1.433.

Si M est un module sur un anneau, alors $(M, +)$ est un groupe commutatif.

Démonstration. Il suffit de calculer $(1 + 1) \cdot (x + y)$ de deux façons différentes :

$$(1 + 1) \cdot (x + y) = 1 \cdot (x + y) + 1 \cdot (x + y) = x + y + x + y \quad (1.575)$$

d'une part et

$$(1 + 1) \cdot (x + y) = (1 + 1) \cdot x + (1 + 1) \cdot y = x + x + y + y, \quad (1.576)$$

174. Attention aux notations ; en général on écrit la loi de groupe de façon multiplicative et on parle des puissances d'un élément, mais ici on écrit la loi de groupe additivement, donc les « puissances » sont en réalité les multiples.

175. Définition 1.428.

176. Nous verrons dans la proposition 1.433 qu'il est forcément commutatif.

d'autre part. En égalant les deux expressions, il vient

$$x + y + x + y = x + x + y + y, \quad (1.577)$$

qui se simplifie (nous sommes dans un groupe) en $y + x = x + y$. $\square$

DEFooKHWZooIfxdNc

Définition 1.434.

Un **espace vectoriel** est un module¹⁷⁷ sur un corps commutatif¹⁷⁸.

DEFooRUKVooLnXxdS

Définition 1.435 ([90]).

Soient un A -module M et un ensemble I . Une famille $\{m_i\}_{i \in I}$ est **libre** si les m_i sont **linéairement indépendants**, c'est-à-dire si pour tout choix d'une partie finie J dans I et d'éléments $(a_j)_{j \in J}$ dans A , si nous avons

$$\sum_{j \in J} a_j m_j = 0, \quad (1.578)$$

alors $a_j = 0$ pour tout j .

DEFooWBOBooJNyyBF

Définition 1.436 ([91]).

Soit S , une partie du A -module M . Le **sous-module engendré** par S est l'ensemble des éléments de M qui sont des combinaisons linéaires finies d'éléments de S , c'est-à-dire de sommes de la forme

$$\sum_{t \in T} a_t t \quad (1.579)$$

où T est fini dans S et $a_t \in A$.

1.17.1 Module produit

DEFooLcJEooBvVmkV

Lemme-Définition 1.437 ([90]).

Soient un anneau A et un ensemble I . Le **A -module produit** A^I est l'ensemble des applications $I \rightarrow A$.

En termes de notations, nous écrivons ceci :

$$A^I = \{(a_i)_{i \in I}, a_i \in A\}. \quad (1.580)$$

L'ensemble A^I devient un module par les définitions, pour $x, y \in A^I$ et $a \in A$:

$$\begin{aligned} ax &= (ax_i)_{i \in I} & \text{E} \text{Qoo} \text{PLBSooFuQXrj} & (1.581a) \\ x + y &= (x_i + y_i)_{i \in I}. & \text{E} \text{Qoo} \text{ODBMooQKLUGd} & (1.581b) \end{aligned}$$

En d'autres termes, $A^I = \text{Fun}(I, A)$.

Démonstration. Il faut vérifier toutes les conditions de la définition 1.432. En guise d'exemple, nous vérifions la distributivité. Soient $a \in A$ et $x, y \in A^I$. Nous avons

$$\begin{aligned} [a \cdot (x + y)]_i &= a(x + y)_i & (1.581a) & (1.582a) \\ &= a(x_i + y_i) & (1.581b) & (1.582b) \\ &= ax_i + ay_i & \text{distrib. dans } A & (1.582c) \\ &= (ax + ay)_i & (1.581b) & (1.582d) \end{aligned}$$

$\square$

¹⁷⁷. Définition 1.432.

¹⁷⁸. La condition de commutativité n'est pas indispensable, mais comme nous ne parlerons que de corps commutatifs...

Lemme 1.438.

Pour chaque $i \in I$ nous considérons l'élément $e_i \in A^I$ donné par

$$\begin{aligned} e_i &: I \rightarrow A \\ j &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.583)$$

La famille $\{e_i\}_{i \in I}$ est libre¹⁷⁹ dans A^I .

Démonstration. Soient J fini dans I ainsi que des éléments $a_j \in A$ ($j \in J$). Nous supposons que¹⁸⁰ $\sum_{j \in J} a_j e_j = 0$. Calculons un peu :

$$\sum_{j \in J} a_j e_j = \sum_{j \in J} (a_j \delta_{ji})_{i \in I} = \left(\sum_{j \in J} a_j \delta_{ji} \right)_{i \in I}. \quad (1.584)$$

Pour que le tout soit nul dans A^I , il faut que

$$\sum_{j \in J} a_j \delta_{ji} \quad (1.585)$$

soit nul pour tout $i \in I$. Si nous fixons $i \in I$, la somme sur j possède un seul terme non annulé par δ_{ji} , et c'est le terme $j = i$. Nous avons donc $a_i = 0$. $\square$

DEFooBMEPooFsCHgb

Définition 1.439.

Nous notons $A^{(I)}$ le sous-module de A^I engendré¹⁸¹ par les e_i .

Lemme 1.440 ([1]).

L'ensemble $A^{(I)}$ est l'ensemble des applications $I \rightarrow A$ de support fini.

Démonstration. En deux sens.

- (1) Si $x \in A^{(I)}$ Pour rappel, la définition 1.437 nous dit que x est une application $I \rightarrow A$. Vu que x est dans le sous-module engendré par les e_i , il existe une partie finie $J \subset I$ telle que

$$x = \sum_{j \in J} x_j e_j. \quad (1.586)$$

Pour $i \in I$ nous avons

$$x(i) = \sum_{j \in J} x_j \delta_{ij} = \begin{cases} x_i & \text{si } i \in J \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.587)$$

Donc le support de x est dans J qui est fini. Vu que toute partie d'un ensemble fini est fini (lemme 1.70), le support de x est fini.

- (2) Si x est de support fini Supposons que le support de $x: I \rightarrow A$ soit la partie finie $J \subset I$. En notant $x_j = x(j)$ pour tout $j \in J$, nous avons

$$x = \sum_{j \in J} x_j e_j. \quad (1.588)$$

$\square$

THOooPDZCooJnHbOd

Théorème 1.441 (Propriété universelle de $A^{(I)}$ [90]).

Soient un anneau A ainsi qu'un A -module P . Pour $\phi \in \text{Hom}_A(A^{(I)}, P)$, nous considérons

$$\begin{aligned} \phi|_I &: I \rightarrow P \\ i &\mapsto \phi(e_i). \end{aligned} \quad (1.589)$$

179. Définition 1.435.

180. Pour rappel, les sommes finies sont définies par 1.296.

181. Définition 1.436.

(1) *L'application*

$$\begin{aligned} f: \operatorname{Hom}_A(A^{(I)}, P) &\rightarrow \operatorname{Fun}(I, P) \\ \phi &\mapsto \phi|_I \end{aligned} \quad (1.590)$$

est une bijection.

(2) *L'application inverse est $g: \operatorname{Fun}(I, P) \rightarrow \operatorname{Hom}_A(A^{(I)}, P)$ donnée par*

$$g(\psi)\left(\sum_{j \in J} a_j e_j\right) = \sum_{j \in J} a_j \psi(j) \quad (1.591)$$

pour tout J fini dans I et choix de $a_j \in A$.

Démonstration. Nous allons montrer que $g(f(\phi)) = \phi$ et que $f(g(\psi)) = \psi$ pour tout $\phi \in \operatorname{Hom}_A(A^{(I)}, P)$ et pour tout $\psi \in \operatorname{Fun}(I, P)$.

Dans un premier sens nous avons :

$$g(f(\phi))\left(\sum_j a_j e_j\right) = \sum_j a_j f(\phi)(j) \quad (1.592a)$$

$$= \sum_j a_j \phi(e_j) \quad (1.592b)$$

$$= \phi\left(\sum_j a_j e_j\right). \quad (1.592c)$$

Justifications :

- Pour (1.592b), nous avons utilisé le fait que $f(\phi)(i) = \phi|_I(i) = \phi(e_i)$.
- Pour (1.592c), nous utilisons le fait que ϕ est un morphisme de modules.

Et pour l'autre sens,

$$f(g(\psi))(i) = g(\psi)(e_i) = \psi(i). \quad (1.593)$$

Vérifions que cela est suffisant pour que f soit une bijection.

- (1) **Surjectif** Soit $\psi \in \operatorname{Fun}(I, P)$. Nous avons $f(g(\psi)) = \psi$, ce qui prouve que ψ est dans l'image de f .
- (2) **Injectif** Supposons que $f(\phi_1) = f(\phi_2)$. Alors en appliquant g des deux côtés, il vient $\phi_1 = \phi_2$.

□

1.17.2 Sous-module

Soient M un A -module et $x = (x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de M paramétrée par l'ensemble I . Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \mu_x: A^{(I)} &\rightarrow M \\ (a_i)_{i \in I} &\mapsto \sum_{i \in I} a_i x_i. \end{aligned} \quad (1.594)$$

Ici $A^{(I)}$ désigne l'ensemble de toutes les applications $I \rightarrow A$ de support fini (définition 1.439).

DefBasePouyKj

Définition 1.442.

À l'instar des espaces vectoriels, les modules ont une notion de partie libre, génératrice et de bases :

- (1) Si μ_x est surjective, nous disons que x est une partie **génératrice**.
- (2) Si μ_x est injective, nous disons que la partie x est **libre**.
- (3) Si μ_x est bijective, nous disons que la partie x est une **base**.

Définition 1.443.

Un sous-ensemble $N \subset M$ est un **sous-module** si $(N, +)$ est un sous-groupe de $(M, +)$ et si $a \cdot x \in N$ pour tout $x \in N$ et pour tout $a \in A$.

Exemple 1.444.

Un anneau A est lui-même un A -module et ses sous-modules sont les idéaux. $\triangle$

DEFooZACWooWydFDp

Définition 1.445 (Projecteur).

Soit M un module sur un anneau commutatif A . Un **projecteur** est une application linéaire $p: M \rightarrow M$ telle que $p^2 = p$.

Une famille $(p_i)_{i \in I}$ sur M est **orthogonale** si $p_i \circ p_j = 0$ pour tout $i \neq j$. La famille est **complète** si $\sum_{i \in I} p_i = \mathbb{1}$.

ThoProjModpAlsUR

Théorème 1.446.

Soient des sous-modules $M_1, \dots, M_n$ du module M tels que $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$. Les applications p_i définies par

$$p_i(x_1 + \dots + x_n) = x_i \quad (1.595)$$

forment une famille orthogonale de projecteurs et $p_1 + \dots + p_n = \text{Id}$.

Inversement, si $(p_1, \dots, p_n)$ est une famille orthogonale de projecteurs dans un module $\mathcal{E}$ tel que $\sum_{i=1}^n p_i = \text{Id}$, alors

$$M = \bigoplus_{i=1}^n p_i(M). \quad (1.596)$$

Démonstration. En deux parties.

- (1) **Première partie** Les p_i sont des projecteurs parce que $p_i^2(x_1 + \dots + x_n) = p_i(x_i) = x_i = p_i(x_1 + \dots + x_n)$. Ils sont orthogonaux parce que

$$(p_i \circ p_j)(x_1 + \dots + x_n) = p_i(x_j) = 0 \quad (1.597)$$

lorsque $i \neq j$. De plus nous avons

$$(p_1 + \dots + p_n)(x_1 + \dots + x_n) = x_1 + \dots + x_n, \quad (1.598)$$

donc la somme est l'identité.

- (2) **L'autre sens** Tout élément de M doit pouvoir être écrit de façon unique comme somme d'éléments des $p_i(M)$. Avant de nous lancer dans la preuve proprement dite, notons que si $i \neq j$, alors $p_j(x_i) = 0$. En effet il existe $m \in M$ tel que $x_i = p_i(m)$; donc $p_j(x_i) = (p_j \circ p_i)(m) = 0$.

Pour l'existence, soit $x \in M$. Nous avons

$$x = (p_1 + \dots + p_n)(x) = p_1(x) + \dots + p_n(x). \quad (1.599)$$

En ce qui concerne l'unicité, si $x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_n$ avec $x_i, y_i \in p_i(M)$, en prenant p_i des deux côtés, nous obtenons

$$x_i = p_i(x_1 + \dots + x_n) = p_i(y_1 + \dots + y_n) = y_i. \quad (1.600)$$

Donc $x_i = y_i$ pour tout i et nous avons l'unicité. $\square$

Définition 1.447.

Un module est **simple** ou **irréductible** si il n'a pas d'autres sous-modules que $\{0\}$ et lui-même. Un module est **indécomposable** si il ne peut pas être écrit comme somme directe de sous-modules.

Un module simple est a fortiori indécomposable. L'inverse n'est pas vrai comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1.448.

Soit $\mathcal{E} = \mathbb{C}[X]/(X^2)$ vu comme $\mathbb{C}[X]$ -module. C'est le $\mathbb{C}[X]$ -module des polynômes de la forme $aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$. L'ensemble des polynômes de la forme aX est un sous-module. Le module $\mathcal{E}$ n'est donc pas simple. Il est cependant indécomposable parce que $\{aX\}$ est le seul sous-module non trivial. En effet si $\mathcal{F}$ est un sous-module de $\mathcal{E}$ contenant $aX + b$ avec $b \neq 0$, alors $\mathcal{F}$ contient $X(aX + b) = bX$ et donc contient tout $\mathcal{E}$. $\triangle$

DefAEbnJqI

Définition 1.449 (Algèbre^[92]).

Si $\mathbb{K}$ est un corps commutatif¹⁸², une $\mathbb{K}$ -**algèbre** A est un espace vectoriel¹⁸³ muni d'une opération bilinéaire $\times: A \times A \rightarrow A$, c'est-à-dire telle que pour tout $x, y, z \in A$ et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$$(1) (x + y) \times z = x \times z + y \times z$$

$$(2) x \times (y + z) = x \times y + x \times z$$

$$(3) (\alpha x) \times (\beta y) = (\alpha\beta)(x \times y).$$

Si A et B sont deux $\mathbb{K}$ -algèbres, une application $f: A \rightarrow B$ est un **morphisme d'algèbres** entre A et B si pour tout $x, y \in A$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$(1) f(xy) = f(x)f(y)$$

$$(2) f(x + \alpha y) = f(x) + \alpha f(y)$$

où nous avons noté xy pour $x \times y$.

LEMooVKLKooSAHmpZ

Lemme 1.450 ([1]).

Soient une algèbre A et une famille $(X_i)_{i \in I}$ de sous-algèbres de A (ici I est un ensemble quelconque). Alors la partie $X = \bigcap_{i \in I} X_i$ est une sous-algèbre de A .

Démonstration. Nous devons prouver que si x et y sont dans X et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors xy , $x + y$ et λx sont dans X . Pour tout $i \in I$ nous avons $x, y \in X_i$ et donc $xy \in X_i$, $x + y \in X_i$ et $\lambda x \in X_i$ (parce que X_i est une algèbre). Donc xy , $x + y$ et λx sont dans X_i pour tout i , et donc dans X . $\square$

DefkAXaWY

Définition 1.451.

L'**algèbre engendrée** par X est l'intersection de toutes les sous-algèbres de A contenant X (qui est une algèbre par le lemme 1.450).

1.18 Caractéristique d'un anneau

LEMDEFooVEWZooUrPaDw

Lemme-Définition 1.452.

Soit l'application

$$\begin{aligned} \mu: \mathbb{Z} &\rightarrow A \\ n &\mapsto n \cdot 1_A \end{aligned} \tag{1.601}$$

où $n \cdot 1_A$ est expliqué dans 1.374.

ITEMooPBWYooAWaCKJ

(1) C'est un morphisme d'anneaux.

ITEMooOQWMooFYcmFf

(2) Le noyau est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$

ITEMooWDWEooMSMxfN

(3) Il existe un unique $p \in \mathbb{Z}$ tel que $\ker(\mu) = p\mathbb{Z}$.

Ce p est la **caractéristique** de A .

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1)** Nous avons $\mu(1) = 1$ et $\mu(0) = 0$. De plus

$$\mu(n + m) = \sum_{i=1}^{n+m} 1_A = \sum_{i=1}^n 1_A + \sum_{i=n+1}^{n+m} 1_A = \mu(n) + \sum_{i=1}^m 1_A = \mu(n) + \mu(m). \tag{1.602}$$

Notez le passage délicat de $\sum_{i=n+1}^{n+m} 1_A = \sum_{i=1}^m 1_A$. Vu que ce qui est dans la somme sur i ne dépend pas de i , seul le cardinal de l'ensemble parcouru par i compte.

Nous avons donc $\mu(m + n) = \mu(n) + \mu(m)$. Notez que c'est également valide pour les négatifs grâce aux différentes conventions prises.

Le lemme 1.199 conclut que μ est un morphisme.

182. Définition 1.378

183. Définition 1.434.

(2) **Pour (2)** Nous avons $\mu(0) = 0$ et donc $0 \in \ker(\mu)$. Si $k, l \in \ker(\mu)$, alors

$$\mu(k + l) = \mu(k) + \mu(l) = 0 + 0 = 0, \quad (1.603)$$

donc $k + l \in \ker(\mu)$.

(3) **Pour (3)** La proposition 1.182 montre que tout sous-groupe de $\mathbb{Z}$ est de la forme $p\mathbb{Z}$.

□

Par exemple la caractéristique de $\mathbb{Q}$ est zéro parce qu'aucun multiple de l'unité n'est nul.

À propos de diagonalisation en caractéristique 2, voir l'exemple 8.222.

Lemme 1.453.

Si A est de caractéristique nulle, alors A est infini.

Démonstration. En effet, $\ker \mu = \{0\}$ implique que $n1_A \neq m1_A$ dès que $n \neq m$ et par conséquent A contient $\mathbb{Z}1_A$, et est infini. □

LemHmDaYH

Lemme 1.454.

Soit un anneau A de caractéristique p .

ITEMooPKSEooPKChGM

(1) Si $p > 0$, alors nous avons l'isomorphisme d'anneaux

$$\mathbb{Z}1_A \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}. \quad (1.604)$$

ITEMooBTUIooYzOycc

(2) Si $p = 0$, alors nous avons l'isomorphisme d'anneaux

$$\mathbb{Z}1_A \simeq \mathbb{Z} \quad (1.605)$$

Démonstration. Pour (1), l'isomorphisme est donné par l'application $n1_A \mapsto \phi(n)$ si ϕ est la projection canonique $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Pour (2), la preuve est encore à faire. Écrivez-moi. □

PropGExaUK

Proposition 1.455.

La caractéristique d'un anneau fini divise son cardinal.

Démonstration. Si A est un anneau, le groupe $\mathbb{Z}$ agit sur A par

$$n \cdot a = a + n1_A. \quad (1.606)$$

Chaque orbite de cette action est de la forme

$$\mathcal{O}_a = \{a + n1_A \text{ tel que } n = 0, \dots, p-1\} \quad (1.607)$$

où p est la caractéristique de A . Les orbites ont p éléments et forment une partition de A , donc le cardinal de A est un multiple de p . □

LEMooJQIKooQgukqn

Lemme 1.456 ([93]).

Un anneau totalement ordonné est de caractéristique nulle.

Démonstration. Le morphisme $\mu: \mathbb{Z} \rightarrow A, n \mapsto n1_A$ est strictement croissant, en particulier $\mu(x) \neq \mu(y)$ dès que $x \neq y$. Donc $\ker(\mu) = \{0\}$. □

L'ensemble typique de caractéristique p est $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

1.18.1 Endomorphisme de Frobenius

PropFrobHAMkTY

Proposition 1.457 (Endomorphisme de Frobenius[94]).

Soit A un anneau commutatif unitaire dont la caractéristique est un nombre premier p . L'application

$$\begin{aligned} \text{Frob}_A: A &\rightarrow A \\ x &\mapsto x^p \end{aligned} \quad (1.608)$$

est un automorphisme d'anneau unitaire.

En particulier nous avons

$$(a + b)^p = a^p + b^p. \quad (1.609)$$

Cet automorphisme est nommé **morphisme de Frobenius**. Nous utiliserons aussi les itérés du morphisme de Frobenius : $\text{Frob}^k: x \mapsto x^{p^k}$.

Démonstration. Nous utilisons la formule du binôme de la proposition 1.375 :

$$\text{Frob}_A(x, y) = (x + y)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} x^{p-k} y^k. \quad (1.610)$$

Nous savons par le lemme 1.452 que si $\lambda \in p\mathbb{Z}$ et $x \in A$, alors $\lambda x = 0$ (attention aux notations, c'est expliqué dans 1.374). La proposition 1.373 dit que tous les termes de la somme (sauf le premier et le dernier) sont de la forme λx avec $\lambda \in p\mathbb{Z}$ et $x \in A$. Bref, tous ces coefficients sont divisibles par p et donc les éléments de A correspondants sont nuls :

$$\text{Frob}_A(x, y) = x^p + y^p = \text{Frob}_A(x) + \text{Frob}_A(y) \quad (1.611)$$

Le lemme 1.452 conclut que Frob_A est un morphisme. □

Exemple 1.458.

Soit à factoriser $X^p - 1$ dans $\mathbb{F}_p$. Grâce au morphisme de Frobenius, nous avons immédiatement

$$X^p - 1 = (X - 1)^p. \quad (1.612)$$

△

LemCaractIntergnbrcartpre

Lemme 1.459.

La caractéristique¹⁸⁴ d'un anneau intègre est zéro ou un élément premier¹⁸⁵.

Démonstration. Si A est intègre, alors $\mathbb{Z}1_A$ est a fortiori intègre. Notons p la caractéristique de A . Si $p = 0$, la preuve est finie ; supposons donc que $p \neq 0$. Alors, l'anneau $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}1_A$, et est donc intègre. Or, la proposition 1.399 dit que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est intègre si et seulement si p est premier, ce qui conclut la preuve. □

Exemple 1.460.

Il existe des corps dont la caractéristique n'est pas égale au cardinal (contrairement à ce que laisserait penser l'exemple des $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$). En effet les matrices $n \times n$ inversibles sur $\mathbb{F}_3$ forment un corps qui n'est pas de cardinal trois alors que la caractéristique est 3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (1.613)$$

△

184. Définition 1.452.

185. Définition 1.317.

1.18.2 Caractéristique deux

Beaucoup de résultats demandent une caractéristique différente de deux. Qu'a donc de particulier la caractéristique deux ?

Si $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique 2, alors l'égalité $x = -x$ n'implique pas $x = 0$, puisque $2x = 0$ est vérifiée pour tout x . Cela se répercute sur un certain nombre de résultats. Par exemple, en caractéristique deux, une forme antisymétrique n'est pas toujours alternée : voir le lemme 8.8.

1.19 Polynômes

1.19.1 Polynômes d'une variable

Et voilà la définition que tout le monde attendait ; la définition des anneaux de polynômes. Pour ne pas taper trop fort du premier coup, nous commençons par les polynômes d'une seule variable ¹⁸⁶.

L'ensemble des polynômes sur A sera simplement $A^{(\mathbb{N})}$ (notation 1.439). Puisque $\mathbb{N}$ est un ensemble bien particulier possédant plein de structure, nous allons pouvoir installer sur $A^{(\mathbb{N})}$ une structure non seulement de A -module (ça c'est déjà fait), mais en plus d'anneau, ainsi qu'une évaluation.

DEFooFYZRooMikwEL

Définition 1.461.

L'ensemble des **polynômes** en une indéterminée sur l'anneau A est l'anneau

$$\mathcal{P}(A) = A^{(\mathbb{N})} \quad (1.614)$$

défini en 1.439.

1.462.

En ce qui concerne la notation $A[X]$, voir 1.19.2. Pour $\mathbb{K}(X)$ lorsque $\mathbb{K}$ est un corps, voir 6.84.

DefDegrePoly

Proposition-Définition 1.463 ([95]).

Soit P non nul dans $\mathcal{P}(A)$. Nous notons a_n la valeur ¹⁸⁷ de P en $n \in \mathbb{N} : P = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- (1) L'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } a_n \neq 0\}$ est fini dans $\mathbb{N}$.
- (2) Cet ensemble possède un minimum et un maximum.

Le **degré** de P est

$$\deg(P) = \max\{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } a_n \neq 0\}, \quad (1.615)$$

et la **valuation** de P est

$$\text{val}(P) = \min\{n \text{ tel que } a_n \neq 0\}. \quad (1.616)$$

Nous notons

$$\mathcal{P}_n(A) = \{P \in \mathcal{P}(A) \text{ tel que } \deg(P) \leq n\}, \quad (1.617)$$

EQooAULWooDgogWT

Dans le cas du polynôme nul, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } a_n \neq 0\}$ est vide, et les définitions ne s'appliquent pas. Nous convenons que

$$\text{val}(0) = +\infty \quad (1.618a)$$

$$\deg(0) = -\infty. \quad (1.618b)$$

Démonstration. Le fait que P soit non nul implique que $A = \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } a_n \neq 0\}$ est non vide. De plus cet ensemble est fini parce que $P \in A^{(\mathbb{N})}$. Toute partie finie non vide de $\mathbb{N}$ étant majorée et minorée (lemme 1.210), le lemme 1.209 définit correctement le minimum et le maximum de A . $\square$

¹⁸⁶. Pour les polynômes à plusieurs variables, voir la définition 3.39.

¹⁸⁷. Ici il y a une énorme subtilité de terminologie. Formellement, P est une application $\mathbb{N} \rightarrow A$. Cela n'a rien à voir avec le fait que P puisse être évalué sur A avec des formule du type $P(x) = \sum_n a_n x^n$. D'ailleurs nous n'avons pas encore vu cette évaluation.

Vu que $A^{(\mathbb{N})}$ est engendré par les e_i , tout polynôme sur A s'écrit $P = \sum_{i=1}^n a_i e_i$.

DEFooNXKUooLrGeuh

Définition 1.464.

Nous ajoutons deux structures à $A^{(\mathbb{N})}$.

L'évaluation Si $\alpha \in A$ et si $P \in A^{(\mathbb{N})}$, nous définissons $P(\alpha)$ par

$$P(\alpha) = \left(\sum_{i=0}^n a_i e_i \right)(\alpha) = \sum_{i=0}^n a_i \alpha^i, \quad (1.619)$$

EQooDJISooTEkMOw

étant entendu que $\alpha^0 = 1$ dans A .

Cette définition s'étend immédiatement au cas où B est un anneau qui étend A . Dans ce cas nous pouvons définir $P(b)$ pour tout $P \in A^{(\mathbb{N})}$ et $b \in B$ avec la même formule (1.619).

Le produit C'est ici que la structure particulière de $\mathbb{N}$ est utilisée. Nous définissons le produit $A^{\mathbb{N}} \times A^{(\mathbb{N})} \rightarrow A^{(\mathbb{N})}$ de la façon suivante. Si $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est la suite (presque partout nulle) d'éléments de A qui définit P et si $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est celle de Q , nous notons

$$(PQ)_n = \sum_{k=0}^n P_k Q_{n-k}, \quad (1.620)$$

EQooTNCSoOKklisb

et donc $PQ = \sum_i (PQ)_i e_i$. Plus explicitement,

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i e_i \right) \left(\sum_{j=0}^m b_j e_j \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ i+j=k}} a_i b_j \right) e_k. \quad (1.621)$$

EQooCIBUooAgpxjL

Notons qu'à droite, la somme sur k est une somme finie.

PROPooGDQCooHziCPH

Proposition 1.465.

Soit un anneau A . À propos de structure sur $A^{(\mathbb{N})}$.

- (1) Avec le produit, l'ensemble $A^{(\mathbb{N})}$ devient un anneau.
- (2) L'application

$$\begin{aligned} g: A^{(\mathbb{N})} &\rightarrow A \\ P &\mapsto P(\alpha) \end{aligned} \quad (1.622)$$

est un morphisme d'anneaux¹⁸⁸. En particulier, $(PQ)(\alpha) = P(\alpha)Q(\alpha)$.

Démonstration. En plusieurs points

- (1) **Anneau** L'identité pour le produit dans $A^{(\mathbb{N})}$ est le polynôme donné par $a_0 = 1$ et $a_i = 0$ pour $i \neq 0$. Cela se vérifie en utilisant directement la définition (1.621). La distributivité aussi¹⁸⁹.
- (2) **Le morphisme** Nous notons P_k les éléments de la suite définissant P et Q_k ceux de Q . Alors nous avons

$$(P + Q)(\alpha) = \sum_k (P_k + Q_k) \alpha^k = \sum_k P_k \alpha^k + \sum_k Q_k \alpha^k = P(\alpha) + Q(\alpha). \quad (1.623)$$

Vous aurez noté que la première égalité était la définition (1.581b). De même,

$$P(\alpha)Q(\alpha) = \left(\sum_n P_n \alpha^n \right) \left(\sum_k Q_k \alpha^k \right) = \sum_k Q_k \left(\sum_n P_n \alpha^n \right) \alpha^k = \sum_k \sum_n Q_k P_n \alpha^{n+k} \quad (1.624a)$$

$$= \sum_m \left(\sum_{l=0}^m P_l Q_{m-l} \right) \alpha^m = \sum_m (PQ)_m \alpha^m = (PQ)(\alpha). \quad (1.624b)$$

188. Définition 1.96.

189. Je n'ai pas fait les calculs, écrivez-moi pour me dire si ça va facilement.

□

LEMooWVUXooQlaepO

Lemme 1.466.

Si A est un anneau commutatif, alors $A^{(\mathbb{N})}$ est commutatif.

Démonstration. Soient $P, Q \in A^{(\mathbb{N})}$; pour rappel, le produit est donné par la définition 1.620. L'application

$$\begin{aligned} \varphi: \{0, \dots, n\} &\rightarrow \{0, \dots, n\} \\ k &\mapsto n - k \end{aligned} \quad (1.625)$$

est une bijection. Voici maintenant le calcul :

$$(PQ)_n = \sum_{k=0}^n P_k Q_{n-k} \quad (1.626a)$$

$$= \sum_{k=0}^n P_{\varphi(k)} Q_{n-\varphi(k)} \quad (1.626b)$$

SUBEQooISTNooLPxSIx

$$= \sum_{k=0}^n P_{n-k} Q_k \quad (1.626c)$$

$$= \sum_{k=0}^n Q_k P_{n-k} \quad (1.626d)$$

SUBEQooCUMAgooFjggHW

$$= (QP)_n. \quad (1.626e)$$

Justifications

- Pour (1.626b). Lemme 1.296 et le fait que φ soit une bijection.
- Pour (1.626d). Commutativité de A .

□

1.19.2 La notation $A[X]$

Si A est un anneau, nous avons déjà défini les polynômes en une indéterminée sur A comme étant le module $A^{(\mathbb{N})}$ qui est devenu un anneau par la proposition 1.465.

SUBSECooLEKVooFBPSJz

Le polynôme donné par la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est souvent notée

$$\sum_k a_k X^k. \quad (1.627)$$

Par exemple avec $a = (4, 2, 8)$ nous avons $a = 8X^2 + 2X + 4$. Nous utiliserons souvent cette notation, qui est très pratique parce qu'elle s'adapte bien aux règles de multiplication et d'addition, en particulier la distributivité.

Il y a (au moins) deux façons de comprendre ce que signifie réellement « X » dans cette notation.

1.19.2.1 Première façon (qui botte en touche)

La première est de dire qu'il n'a pas de significations, et que X^2 est un simple abus de notations pour écrire $(0, 0, 1, 0, \dots)$. Avec cette façon de voir, nous notons l'anneau des polynômes sur A par « $A[X]$ » où le X n'a pas d'autres raisons d'être que d'avertir le lecteur que nous réservons la lettre « X » pour utiliser la notation pratique des polynômes.

1.19.2.2 Seconde façon (la bonne)

SUBSUBSQRooRNBMoWwXSHrg

1.467.

La seconde façon de voir le « X » est de nous rappeler que $A^{(\mathbb{N})}$ a une base en tant que module : les e_k dont nous avons parlé plus haut. Nous posons $X = e_1$, et nous prenons la convention $X^0 = 1$. Alors nous avons $e_k = X^k$ et nous notons $A[X]$ l'anneau $A^{(\mathbb{N})}$ exprimé avec X .

Dans les deux cas, il n'est pas vraiment légitime d'écrire des égalités comme « $P(X) = X^2 + 2X - 3$ », et encore moins de dire « Le polynôme P , évalué en X vaut $X^2 + 2X - 3$ » : il est plus correct d'écrire « $P = X^2 + 2X - 3$ ».

Le lemme suivant montre que ces notations tombent vraiment à point. La véritable difficulté de l'énoncé est de comprendre qu'il n'est pas trivial.

Nous avons vu dans la définition 1.464 que si B est un anneau qui étend A , et si $P \in A[X]$, alors nous avons une définition de $P(b)$ pour tout $b \in B$. Nous appliquons cela à $B = A[X]$, qui est un anneau qui étend A . Autrement dit, si P et Q sont des polynômes, ça a un sens d'écrire $P(Q)$ et le résultat sera un élément de $A[X]$.

Dans le cas particulier $Q = X$, nous avons une chouette formule.

LEMooGKWQooVOyeDX

Lemme 1.468.

Nous avons

$$P(X) = P \quad (1.628)$$

pour tout $P \in A[X]$.

Démonstration. Si $P = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ alors par définition $P(\alpha) = \sum_k a_k \alpha^k$ dès que α est dans un anneau B qui étend A . Nous considérons le cas particulier $B = A[X]$ et $\alpha = X$, c'est-à-dire $Q = (0, 1, 0, \dots)$, l'élément $P(X)$ de $A[X]$ vaut

$$\sum_k a_k X^k, \quad (1.629)$$

EQooABULooFCFasf

qui est exactement P lui-même. □

Mais il faut bien comprendre que si P est le polynôme $(-3, 2, 1, 0, \dots)$, noté $X^2 + 2X - 3$, écrire $P(X) = X^2 + 2X - 3$ est une pirouette de notations que rien ne justifie par rapport à simplement écrire $P = X^2 + 2X - 3$.

1.19.3 Action du groupe symétrique

DefActionGroupe

Définition 1.469 (Action de groupe Thème 9).

Une **action de groupe** G sur un ensemble E est une application $\phi: G \times E \rightarrow E$ telle que

$$\begin{aligned} \phi(e, x) &= x, & \forall x \in E; \\ \phi(gh, x) &= \phi(g, \phi(h, x)) & \forall g, h \in G, \forall x \in E. \end{aligned}$$

On dit dans ce cas que G **agit** sur E .

Nous allons souvent noter l'élément $\phi(g, x)$ pourra être noté de plein de façons :

$$\phi(g, x) = \phi_g(x) = \phi_x(g) = g \cdot x. \quad (1.630)$$

La définition d'un groupe agissant continuent sera la définition 13.3.

Par souci de notations, nous notons $\mathcal{P}_n(A)$ l'anneau des polynômes de n variables sur A . La propriété universelle de $\mathcal{P}_n(A) = A^{(\mathbb{N}^n)}$ du théorème 1.441 nous donne une application

$$g: \text{Fun}(\mathbb{N}^n, \mathcal{P}_n(A)) \rightarrow \text{Hom}_A(\mathcal{P}_n(A), \mathcal{P}_n(A)) \quad (1.631)$$

Avec cela nous pouvons énoncer et démontrer le lemme qui donne l'action de S_n ¹⁹⁰ sur $\mathcal{P}_n(A)$.

LEMooIRVQooHvoNBq

Lemme 1.470 ([96]).

Pour $\sigma \in S_n$ nous définissons

$$\begin{aligned} \phi_\sigma: \mathbb{N}^n &\rightarrow \mathcal{P}_n(A) \\ m &\mapsto e_{\sigma(m)}. \end{aligned} \quad (1.632)$$

190. Définition du groupe symétrique S_n en 1.261.

Alors l'application

$$\begin{aligned} \rho: S_n &\rightarrow \text{Hom}_A(\mathcal{P}_n(A), \mathcal{P}_n(A)) \\ \sigma &\mapsto g(\phi\sigma) \end{aligned} \quad (1.633)$$

est une action¹⁹¹.

Démonstration. Nous commençons par donner une expression à notre ρ . Un élément de $\mathcal{P}_n(A)$ est de la forme $\sum_{m \in \mathbb{N}^n} a_m e_m$, et nous avons¹⁹²

$$\rho(\sigma)\left(\sum_{m \in \mathbb{N}^n} a_m e_m\right) = \sum_m a_m \phi_\sigma(m) = \sum_m a_m e_{\sigma(m)}. \quad (1.634)$$

Nous avons tout de suite $\rho(\text{Id}) = \text{Id}$.

En ce qui concerne la composition, nous avons d'une part

$$\rho(\sigma_1 \sigma_2)\left(\sum_m a_m e_m\right) = g(\phi_{\sigma_1 \sigma_2})\left(\sum_m a_m e_m\right) = \sum_m a_m e_{\sigma_1 \sigma_2(m)}, \quad (1.635)$$

et d'autre part,

$$\rho(\sigma_1)\rho(\sigma_2)\left(\sum_m a_m e_m\right) = \rho(\sigma_1)\left(\sum_m a_m e_{\sigma_2(m)}\right) \quad (1.636a)$$

$$= \rho(\sigma_1)\left(\sum_m a_{\sigma_2^{-1}(m)} e_m\right) \quad (1.636b)$$

$$= \sum_m a_{\sigma_2^{-1}(m)} e_{\sigma_1(m)} \quad (1.636c)$$

$$= \sum_m a_m e_{\sigma_1 \sigma_2(m)} \quad (1.636d)$$

La proposition 1.297 est utilisée pour (1.636b) et pour (1.636d). $\square$

1.19.4 Corps des fractions

Proposition 1.471 ([97]).

Soit un anneau commutatif et intègre¹⁹³ A . Nous posons $E = A \times A \setminus \{0\}$, et nous définissons les deux opérations suivantes sur E :

$$(1) (a, b) + (c, d) = (ad + cb, bd);$$

$$(2) (a, b)(c, d) = (ac, bd).$$

Nous notons a/b la classe de (a, b) . Alors

$$(1) \text{ La relation } (a, b) \sim (c, d) \text{ si et seulement si } ad = bc \text{ est une relation d'équivalence.}^{194}$$

$$(2) \text{ La somme passe au quotient : si } (x, y) \sim (a, b) \text{ et } (z, t) \sim (c, d), \text{ alors}$$

$$(x, y) + (z, t) \sim (a, b) + (c, d). \quad (1.637)$$

$$(3) \text{ Le produit passe au quotient : si } (x, y) \sim (a, b) \text{ et } (z, t) \sim (c, d), \text{ alors}$$

$$(x, y)(z, t) \sim (a, b)(c, d). \quad (1.638)$$

$$(4) \text{ Le quotient}$$

$$\text{Frac}(A) = (A \times A \setminus \{0\}) / \sim \quad (1.639)$$

muni des sommes et produits passées au quotient est un corps dont

191. Définition 1.469.

192. La somme est définie par 1.296, et ça va être important. Ah oui, en réalité partout, les sommes sont finies parce que les a_m ($m \in \mathbb{N}^n$) sont presque tous nuls. Il faudrait écrire sur la somme sur $\{m \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } a_m \neq 0\}$, mais vous vous imaginez la complication dans la notation.

193. Définition 1.326.

194. Définition 1.50.

- (4a) La classe de $(0, 1)$ est neutre pour la somme. ITEMooLFSEooAIBFK
 (4b) La classe de $(1, 1)$ est neutre pour la multiplication. ITEMooYUNEooAKZJEh
 (4c) L'opposé de a/b est $(-a)/b$. ITEMooOGPCooAZGWoF
 (4d) Si $a \neq 0$, alors l'inverse de a/b est b/a . ITEMooECDBooJdJEza
 (5) Soit un couple $(\mathbb{K}, \epsilon)$ où $\mathbb{K}$ est un corps commutatif et $\epsilon: A \rightarrow \mathbb{K}$ est un morphisme injectif d'anneaux tels que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, il existe $(a, b) \in A \times A^*$ tels que ITEMooZOTMooMaIbIt

$$\lambda = \epsilon(a)(\epsilon(b))^{-1} \quad (1.640)$$

Alors il y a un isomorphisme de corps entre $\mathbb{K}$ et $\text{Frac}(A)$.

Un corps $\mathbb{K}$ ayant les propriétés de (5) est un **corps des fractions** de A . Lorsque nous parlons du corps des fractions de A sans précisions¹⁹⁵, nous parlons de $\text{Frac}(A)$.

Démonstration. En plein de parties.

- (1) **Pour (1) : relation d'équivalence** Il faut vérifier les conditions de la définition 1.50. Vu que $ab = ba$ nous avons $(a, b) \sim (a, b)$. Pour la symétrie c'est la même chose. Pour la transitivité, si $(a, b) \sim (c, d)$ et $(c, d) \sim (x, y)$ alors $ad = bc$ et $cy = dx$. Si $c = 0$ alors comme $d \neq 0$ et $ad = bc$, nous avons $a = 0$ (par 1.326(2)) et comme $cy = dx$, nous avons $x = 0$. Donc $ay = 0 = bx$. Si $c \neq 0$, alors nous multiplions les deux égalités entre elles : $adc y = bcd x$. Nous pouvons simplifier par d et c en vertu de la définition 1.326(3) d'un anneau intègre. Il reste $ay = bx$, c'est-à-dire $(a, b) \sim (x, y)$.

- (2) **Pour (2)** L'hypothèse est que $xb = ya$ et $zd = tc$. Nous avons

$$(a, b) + (c, d) = (ad + cb, bd) \quad (1.641a)$$

$$(x, y) + (z, t) = (xt + yz, yt). \quad (1.641b)$$

Pour voir qu'ils sont équivalents, nous vérifions que $(ad + cb)(yt) = bd(xt + yz)$. Il suffit de développer et de substituer xb par ya et zd par tc là où vous les trouvez.

- (3) **Pour (3)** L'hypothèse est que $xb = ya$ et $zd = tc$. Nous avons

$$(x, y)(z, t) = (xz, yt) \quad (1.642a)$$

$$(a, b)(c, d) = (ac, bd). \quad (1.642b)$$

Encore une fois, on vérifie que $xzbd = ytac$.

- (4) **Pour (4)** Il y a quelques vérifications à faire pour l'associativité et la distributivité¹⁹⁶.

Nous nous concentrons sur les sous-points.

- (4a) **Pour (4a)** Simple vérification : $(a, b) + (0, 1) = (a + 0, b) = (a, b)$.

- (4b) **Pour (4b)** Nous devons prouver que si $(x, y) \in 1/1$, alors $(a, b)(x, y) \sim (1, 1)$. L'hypothèse est que $(x, y) \sim (1, 1)$, c'est-à-dire $x = y$. À partir de là il suffit de calculer $(a, b)(x, y)$ et de voir que $ayb = bxa$.

- (4c) **Pour (4c)** Nous avons $(a, b) + (-a, b) = (0, b^2) \sim (0, 1)$. Donc

$$\overline{(a, b)} + \overline{(-a, b)} = \overline{(a, b) + (-a, b)} = \overline{0, 1}. \quad (1.643)$$

- (4d) **Pour (4d)** Nous avons simplement le calcul

$$(a, b)(b, a) = (ab, ab) \sim (1, 1). \quad (1.644)$$

195. Par exemple lorsque nous dirons que $\mathbb{Q}$ est le corps des fractions de $\mathbb{Z}$.

196. Je vous invite à les faire parce que je n'ai pas vérifié.

(5) **Morphisme de corps** Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} f: A \times A^* &\rightarrow \mathbb{K} \\ (a, b) &\mapsto \epsilon(a)\epsilon(b)^{-1}, \end{aligned} \quad (1.645)$$

et nous prouvons que $f(a, b) = f(x, y)$ si et seulement si $(a, b) \sim (x, y)$.

(5a) $\Rightarrow$ Si $f(a, b) = f(x, y)$, alors nous avons

$$\epsilon(a)\epsilon(b)^{-1} = \epsilon(x)\epsilon(y)^{-1} \quad (1.646a)$$

$$\epsilon(a)\epsilon(y) = \epsilon(x)\epsilon(b) \quad (1.646b)$$

$$\epsilon(ay) = \epsilon(xb) \quad (1.646c)$$

$$ay = xb \quad \epsilon \text{ est injectif} \quad (1.646d)$$

$$(a, b) \sim (x, y) \quad (1.646e)$$

(5b) $\Leftarrow$ Même calcul, à l'envers, en partant de $ay = bx$.

Nous pouvons donc définir

$$\begin{aligned} \varphi: \text{Frac}(A) &\rightarrow \mathbb{K} \\ \overline{(a, b)} &\mapsto f(a, b) = \epsilon(a)\epsilon(b)^{-1}. \end{aligned} \quad (1.647)$$

(5a) **φ est injectif** Si $\varphi(\overline{(a, b)}) = \varphi(\overline{(x, y)})$, alors $f(a, b) = f(x, y)$, c'est à dire $(a, b) \sim (x, y)$ par ce qui a été fait juste au-dessus.

(5b) **φ est un morphisme** D'abord

$$\varphi(\overline{(a, b)(c, d)}) = \varphi(\overline{(ad, bc)}) = f(ad, bc) = \epsilon(ad)\epsilon(bc)^{-1}. \quad (1.648)$$

Et en même temps,

$$\varphi(\overline{(a, b)})\varphi(\overline{(c, d)}) = f(a, b)f(c, d) = \epsilon(a)\epsilon(b)^{-1}\epsilon(c)\epsilon(d)^{-1}. \quad (1.649)$$

Le fait que ce soit égal provient de

$$\epsilon(bc)^{-1} = [\epsilon(b)\epsilon(c)]^{-1} = \epsilon(b)^{-1}\epsilon(c)^{-1}. \quad (1.650)$$

□

DEFooXHKGooCcJbTR

Définition 1.472 ([1]).

Lorsque A est un anneau de polynômes¹⁹⁷, alors les éléments de $\text{Frac}(A)$ sont des ***fractions rationnelles***.

PROPOoUULNooKbwuEw

Proposition 1.473.

Soit un anneau commutatif A . Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} i: A &\rightarrow \text{Frac}(A) \\ a &\mapsto a/1. \end{aligned} \quad (1.651)$$

(1) Elle est injective.

(2) Elle est un morphisme d'anneaux¹⁹⁸.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Injective** Supposons que $f(a) = f(b)$, c'est-à-dire que $a/1 = b/1$. En vertu de la relation d'équivalence donnée en 1.471, nous avons $a1 = b1$, c'est-à-dire $a = b$.

197. Définition 1.461.

198. Définition 1.96.

(2) Morphisme d'anneaux D'abord nous avons

$$i(a) + i(b) = (a/1) + (b/1) \quad (1.652a)$$

$$= (a1 + 1b)/1 \quad (1.652b)$$

$$= i(a + b). \quad (1.652c)$$

Ensuite,

$$i(a)i(b) = (a/1)(b/1) = ab/1 = i(ab). \quad (1.653)$$

Et enfin $i(1) = 1/1$ est bien l'unité de $\text{Frac}(A)$ par 1.471(4b).

□

NORMooFBKEooBQuATg

1.474.

Si $a \in A$, nous nous permettrons de noter également a l'élément $a/1$ de $\text{Frac}(A)$. Ce sera toujours clair dans le contexte.

NORMooVYEMooUiUfnE

1.475.

En vertu de la proposition 1.473, à partir de maintenant, nous allons identifier la partie $i(\mathbb{Z})$ à $\mathbb{Z}$. Nous nous autorisons donc à dire que $4 \in \mathbb{Q}$ ou que $-7 \in \mathbb{Q}$, et même que $0 \in \mathbb{Q}$.

PROPooTXGUooRvVivT

Proposition 1.476 (Règle de simplification de fraction[1]).

Soit un anneau commutatif A . Si $a, x, y \in A$ avec $a, y \neq 0$, nous avons

(1)

$$ax/a = x/1. \quad (1.654)$$

Si vous avez suivi 1.474, cela signifie que $ax/a = x$ dans $\text{Frac}(A)$.

(2)

$$ax/ay = x/y \quad (1.655)$$

dans $\text{Frac}(A)$.

LEMooBJRCooIZnaid

Lemme 1.477.

Soient un anneau A ainsi que $a, b, x, y \in A$. Si $b, y \neq 0$, nous avons $ay = bx$ dans A si et seulement si nous avons $ab^{-1} = xy^{-1}$ dans $\text{Frac}(A)$ 199.

Démonstration. Deux parties.

(1) $\Rightarrow$ Nous supposons avoir $ay = bx$ dans A . En passant aux classes, cela donne l'égalité $ay/1 = bx/1$ dans $\text{Frac}(A)$. Nous multiplions les deux membres par $(b/1)^{-1}(y/1)^{-1}$. En utilisant les différents points de la définition 1.471, et en particulier (4d), nous avons $(b/1)^{-1}(y/1)^{-1} = 1/by$. Nous avons donc

$$(ay/1)(1/by) = (bx/1)(1/by). \quad (1.656)$$

En utilisant les relations de simplification de la proposition 1.476, nous avons $ay/by = a/b$ à gauche et $bx/by = x/y$ à droite. Bref, nous avons

$$a/b = x/y. \quad (1.657)$$

Le membre de gauche peut être récrit $a/b = (a/1)(b/1)^{-1}$, ce qui peut s'écrire ab^{-1} .

$\Leftarrow$ L'hypothèse s'écrit, sans abus de notations sous la forme

$$(a/1)(b/1)^{-1} = (x/1)(y/1)^{-1}. \quad (1.658)$$

En multipliant les deux côtés par $(b/1)(y/1)$ nous trouvons

$$ay/1 = xb/1. \quad (1.659)$$

199. Rappel de 1.475 : si $a \in A$, nous nommons $a \in \text{Frac}(A)$ l'élément $a/1$, c'est-à-dire la classe de $(a, 1)$

Nous pouvons écrire cela explicitement avec la relation d'équivalence qui définit $\text{Frac}(A)$ (définition 1.471) :

$$(ay, 1) \sim (xb, 1), \quad (1.660)$$

c'est-à-dire $ay1 = 1xb$, ce que nous voulions. $\square$

La proposition suivante montre encore que le corps des fractions est le plus petit corps que l'on puisse imaginer à partir d'un anneau.

PROPoolJBEooDjsoHr

Proposition 1.478 ([15, 1]).

Soit un anneau commutatif A . Tout corps commutatif contenant un sous-anneau isomorphe²⁰⁰ à A contient un sous-corps isomorphe à $\text{Frac}(A)$.

Démonstration. Soit un corps $\mathbb{K}$ contenant un sous-anneau A' isomorphe à A . Nous notons $\sigma: A' \rightarrow A$ un isomorphisme d'anneaux entre A' et A .

(1) **Une partie bien choisie**

Nous considérons la partie suivante de $\mathbb{K}$:

$$S = \{ab^{-1} \text{ tel que } a, b \in A'\}. \quad (1.661)$$

(2) **S est un corps** Deux éléments arbitraires de S sont ab^{-1} et xy^{-1} . Nous devons prouver plusieurs choses.

(2a) **Neutres** En prenant $a = b = 1$ nous avons $ab^{-1} = 1 \in S$. En prenant $a = 0$ et $b = 1$ nous avons $ab^{-1} = 0 \in S$.

(2b) **Somme** Il faut remarquer que $ab^{-1} + xy^{-1} = (ay + xb)(by)^{-1}$. En effet,

$$(ay + xb)(by)^{-1} = (ay + xb)y^{-1}b^{-1} \quad (1.662a)$$

$$= ayy^{-1}b^{-1} + xby^{-1}b^{-1} \quad (1.662b)$$

$$= ab^{-1} + xy^{-1} \quad (1.662c)$$

SUBEQooRGPSooXaBCyx

SUBEQooOHJGooWrfPow

Justifications :

— Pour (1.662b). Distributivité.

— Pour (1.662c). Commutativité dans A .

(2c) **Produit** Il s'agit du même genre de calculs en utilisant les mêmes propriétés. Nous avons

$$(ab^{-1})(xy^{-1}) = (ax)(by)^{-1}. \quad (1.663)$$

(3) **Ce qui va être notre isomorphisme**

Ensuite nous montrons que l'application

$$\begin{aligned} \varphi: S &\rightarrow \text{Frac}(A) \\ ab^{-1} &\mapsto \sigma(a)/\sigma(b) \end{aligned} \quad (1.664)$$

est bien définie et est un isomorphisme de corps.

(4) **Bien définie**

Si $ab^{-1} = xy^{-1}$ alors $ay = xb$. Puisque σ est un isomorphisme nous avons aussi $\sigma(a)\sigma(y) = \sigma(x)\sigma(b)$ et donc $\sigma(a)/\sigma(b) = \sigma(x)/\sigma(y)$ par définition des classes de $\text{Frac}(A)$.

(5) **Morphisme** Deux éléments arbitraires de S sont ab^{-1} et xy^{-1} . Calculons un peu :

$$\varphi((ab^{-1})(xy^{-1})) = \varphi(axy^{-1}b^{-1}) \quad (1.665a)$$

$$= \varphi((ax)(by)^{-1}) \quad (1.665b)$$

$$= \sigma(ax)/\sigma(by) \quad (1.665c)$$

$$= (\sigma(a)/\sigma(b))(\sigma(x)/\sigma(y)) \quad (1.665d)$$

$$= \varphi(ab^{-1})\varphi(xy^{-1}). \quad (1.665e)$$

SUBEQooRONTTooKYTBdZ

SUBEQooNOTAooZYIymC

SUBEQooVQUOooVxVjEU

Justifications :

200. Morphisme d'anneaux, définition 1.96.

- Pour (1.665a). Commutativité dans A .
- Pour (1.665b). Associativité dans A .
- Pour (1.665d). Définition 1.471(2) de la multiplication de fractions.

(6) **Surjectif**

Tout élément de $\text{Frac}(A)$ est de la forme a'/b' avec $a', b' \in A$, et donc de la forme $\sigma(a)/\sigma(b)$ avec $a, b \in A'$. Un tel élément est l'image par φ de $ab^{-1} \in S$.

(7) **Injectif**

Si $\varphi(ab^{-1}) = \varphi(xy^{-1})$ alors $\sigma(a)/\sigma(b) = \sigma(x)/\sigma(y)$, et par définition des classes nous avons $\sigma(a)\sigma(y) = \sigma(b)\sigma(x)$. De là nous avons $\sigma(ay) = \sigma(bx)$ et donc $ay = bx$ (parce que σ est un isomorphisme). Nous en déduisons que $ab^{-1} = xy^{-1}$.

□

1.479.

Soit un anneau A et son anneau des polynômes $\mathcal{P}(A)$. Si $\alpha \in A$, nous avons la définition 1.464 qui donne l'évaluation $P(\alpha)$.

Si par contre P et Q sont des polynômes sur A , nous n'avons pas encore défini ce que serait l'évaluation de la fraction rationnelle P/Q en α . Nous comblons à présent ce manque.

DEFooLBIWooCPCaSY

Définition 1.480 (Évaluation d'une fraction rationnelle).

Soit un corps $\mathbb{K}$ contenant l'anneau A . Si $R = P/Q \in \text{Frac}(A)$ et si $\alpha \in \mathbb{K}$ nous définissons²⁰¹

$$R(\alpha) = (P/Q)(\alpha) = P(\alpha)Q^{-1}(\alpha). \quad (1.666)$$

Dans cette formule, les polynômes, l'inverse et le produit sont calculés dans $\mathbb{K}$ et non dans A .

1.19.5 Corps totalement ordonné

Rappel. Vu qu'un corps est un anneau, nous avons déjà défini la notion d'être totalement ordonné en 1.105 valeur absolue sur un corps en 1.111.

DefKCGBooLRNdJf

Définition 1.481.

Ordre et choses reliées dans un corps.

ItemVXOZooTYpcYN

- (1) La suite (x_n) dans le corps totalement ordonné $\mathbb{K}$ est **de Cauchy** si pour tout $\epsilon > 0$ dans $\mathbb{K}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $p, q \geq N$ alors $|x_p - x_q| \leq \epsilon$. ITEMooDERQooLmJwFR
- (2) La suite (x_n) dans le corps totalement ordonné $\mathbb{K}$ est **convergente** si il existe $q \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $\epsilon > 0$ dans $\mathbb{K}$, il existe N tel que si $k \geq N$ alors $|x_k - q| \leq \epsilon$. ITEMooKZZYooDaidGU
- (3) Un corps totalement ordonné est **complet** si toute suite de Cauchy y est convergente. ITEMooMWASooEzhVyh
- (4) Si $a, \epsilon \in \mathbb{K}$ avec $\epsilon > 0$ alors nous définissons la **boule ouverte** de centre a et de rayon ϵ par

$$B(a, \epsilon) = \{x \in \mathbb{K} \text{ tel que } |a - x| < \epsilon\}, \quad (1.667)$$

et la **boule fermée** par

$$\overline{B(a, \epsilon)} = \{x \in \mathbb{K} \text{ tel que } |a - x| \leq \epsilon\}. \quad (1.668)$$

Lemme 1.482.

Une suite (x_k) converge vers q si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que $x_k \in B(q, \epsilon)$ pour tout $k \geq N$.

Démonstration. Il s'agit de mettre côte à côte les points (2) et (4) de la définition 1.481. □

1.483.

Ces boules prendront une nouvelle force avec le super-théorème 7.142.

²⁰¹. Les fractions rationnelles, définition 1.471.

PROPooJZIMooHOimlv

Proposition 1.484 ([1]).

Soit une suite de Cauchy (x_n) dans $\mathbb{Q}$. Nous supposons que (x_n) admette une sous-suite convergente vers $q \in \mathbb{Q}$. Alors $x_n \rightarrow q$.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Nous considérons $N > 0$ tel que si $n, k \geq N$ alors $|x_k - q| < \epsilon/2$. Soit $k > N$ tel que $|x_k - q| < \epsilon/2$. Cela existe ; il suffit de prendre k assez loin dans la sous-suite qui converge vers q . Pour tout $n \geq k$ nous avons alors

$$|x_n - q| \leq |x_n - x_k| + |x_k - q| = \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \quad (1.669)$$

□

Parmi ces définitions, celles de suite convergente, de Cauchy et de corps complet seront utilisées dans le cas de $\mathbb{Q}$ (et de $\mathbb{R}$ pour la complétude). Elles seront prouvées être équivalentes aux définitions topologiques dans le cas particulier de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ lorsque la topologie métrique sera définie. Dans cet état d'esprit nous n'allons pas démontrer tout de suite que $\mathbb{R}$ est un corps complet. Nous allons directement démontrer que c'est un espace topologique complet.

LEMooQXDCooPEABBM

Lemme 1.485 (À propos de boules).

Soient un corps totalement ordonné $\mathbb{K}$ et des éléments $x, y \in \mathbb{K}$. Soit aussi $\epsilon > 0$ dans $\mathbb{K}$. Nous avons :

ITEMooXJGVooSebiip

(1) $y \in B(x, \epsilon)$ si et seulement si $x - \epsilon < y < x + \epsilon$.

ITEMooRUBBooRayiMs

(2) Si $y \in \overline{B(x, \epsilon)}$ alors $y \in B(x, \epsilon')$ pour tout $\epsilon' > \epsilon$.

Démonstration. Pour rappel,

$$|x - y| = \begin{cases} x - y & \text{si } x - y \geq 0 \\ y - x & \text{si } x - y \leq 0. \end{cases} \quad (1.670)$$

Nous pouvons maintenant démontrer nos assertions.

(1) **(1)** En deux parties.

(1a) $\Rightarrow$ Nous supposons que $|x - y| < \epsilon$.

Si $x - y \geq 0$ alors l'hypothèse signifie $x - y < \epsilon$, ce qui donne $y > x - \epsilon$. Mais l'inégalité $x - y \geq 0$ donne également $x \geq y$ et donc $x + \epsilon \geq y + \epsilon > y$. Notez le jeu de l'inégalité non stricte qui se change en inégalité stricte.

Si $x - y \leq 0$ nous pouvons faire le même raisonnement.

(1b) $\Leftarrow$ Des inégalités $x - \epsilon < y$ et $y < x + \epsilon$ nous tirons $x - y < \epsilon$ et $y - x < \epsilon$. Donc quel que soit le signe de $x - y$ nous avons toujours $|x - y| < \epsilon$.

(2) **(2)**

C'est immédiat parce que

$$|x - y| \leq \epsilon < \epsilon'. \quad (1.671)$$

□

LEMooVZNCooRJatKK

Lemme 1.486 ([98]).

Tout anneau totalement ordonné est de caractéristique nulle.

Démonstration. Si $x \in A$ vérifie $x > 0$, alors la définition 1.105(1) nous permet d'écrire

$$x + 1_A > 1_A > 0. \quad (1.672)$$

Nous avons tenu compte de 1.107(4). Il n'existe en particulier aucun p tel que $p1_A = 0$. Sinon nous aurions $(p - 1)1_A + 1_A = 0$. □

1.20 Les rationnels

Note : pour l'existence et l'unicité de l'écriture $q = k/d$, il faut voir le théorème 3.29.

Une construction très explicite est faite dans [34]. Ici nous allons prendre plus court :

Définition 1.487.

Le corps des fractions de $\mathbb{Z}$ (définition 1.471) est noté $\mathbb{Q}$ et ses éléments sont les **rationnels**.

La proposition suivante provient de 1.473.

PROPooKUIYooCxMHTX

Proposition 1.488 ([1]).

L'application

$$\begin{aligned} i: \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Q} \\ a &\mapsto a/1 \end{aligned} \quad (1.673)$$

est un morphisme injectif.

PROPooDHIAooZysvNs

Proposition 1.489.

L'ensemble des rationnels est infini dénombrable²⁰².

Démonstration. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est infini²⁰³ et la proposition 1.473 donne une injection $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$. Donc $f(\mathbb{Z})$ est infini.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ contient une partie infinie. Il est donc infini par le lemme 1.70.

L'application

$$\begin{aligned} g: \mathbb{Z}^2 &\rightarrow \mathbb{Q} \\ a, b &\mapsto a/b \end{aligned} \quad (1.674)$$

est surjective alors que $\mathbb{Z}^2$ est dénombrable. Le lemme 1.221 dit alors que $\mathbb{Q}$ est fini ou dénombrable. Vu que nous avons déjà prouvé que $\mathbb{Q}$ était infini, nous déduisons que $\mathbb{Q}$ est infini dénombrable. $\square$

1.20.1 Relation d'ordre

PROPooEBCHooYEQkIO

Proposition 1.490 ([1]).

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $ab \geq 0$ ²⁰⁴. Alors si $(x, y) \sim (a, b)$, nous avons $xy \geq 0$.

Démonstration. L'hypothèse $(x, y) \sim (a, b)$ dit que $ab = ya$. L'astuce est de calculer $(xy)(bb)$ en nous servant de $xb = ya$:

$$(xy)b^2 = yayb = aby^2. \quad (1.675)$$

Vu que $ab \geq 0$ et $y^2 \geq 0$, le membre de droite est positif (proposition 1.192). Nous avons donc aussi $xyb^2 \geq 0$. La proposition 1.192(7) dit encore que dans ce cas $xy \geq 0$. $\square$

PROPooEOZWooLxRPXa

Proposition 1.491 ([1]).

La partie

$$\mathbb{Q}^+ = \{a/b \text{ tel que } ab > 0\} \subset \mathbb{Q} \quad (1.676)$$

est bien définie et est une positivité²⁰⁵

Démonstration. Le fait que ce soit bien défini est la proposition 1.490.

(1) Supposons pour le plaisir de la contradiction que $a/b \in \mathbb{Q}^+$ et $-(a/b) \in \mathbb{Q}^+$. En utilisant la propriété 1.471(4c) nous avons $ab > 0$ et $(-a)b > 0$. En utilisant 1.179(1) nous avons

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} (ab) > 0 \\ -(ab) > 0. \end{array} \right. & \quad (1.677a) \\ & \quad (1.677b) \end{aligned}$$

202. Ouais, je sais, dans les définitions prises ici, un ensemble dénombrable est toujours infini. Mais l'excès de précision ne tue pas, loin s'en faut.

203. Lemme 1.198.

204. Définition 1.186 pour l'ordre dans $\mathbb{Z}$.

205. Définition 1.97.

En utilisant 1.192(2) nous trouvons $ab(-ab) > 0$. En utilisant encore une des nombreuses propriétés déjà citées, nous trouvons $-a^2b^2 > 0$, c'est-à-dire

$$a^2b^2 < 0, \quad (1.678)$$

ce qui est faux parce que $a^2b^2 \geq 0$.

- (2) Supposons que $a/b \in \mathbb{Q}^+$ et $x/y \in \mathbb{Q}^+$ (b et y sont non nuls). Cette hypothèse signifie que $ab > 0$ et $xy > 0$. Nous devons prouver que $(a/b) + (x/y) \in \mathbb{Q}^+$. Nous avons

$$\frac{a}{b} + \frac{x}{y} = \frac{ay + bx}{by}. \quad (1.679)$$

Nous avons un petit calcul à faire :

$$by(ay + bx) = aby^2 + b^2xy. \quad (1.680)$$

Par hypothèse, $ab > 0$. Nous savons aussi que $y^2 \geq 0$. Mais dans notre cas nous avons $y^2 \neq 0$. Donc $aby^2 > 0$. Même raisonnement pour b^2xy . Bref ce que nous avons dans (1.680) est strictement positif.

□

DEFooZEXXooUtOhqB

Proposition-Définition 1.492 (Ordre sur $\mathbb{Q}$ [34]).

Nous considérons l'ensemble

$$\mathbb{Q}^+ = \{a/b \text{ tel que } ab > 0\} \subset \mathbb{Q}. \quad (1.681)$$

ITEMooUSILooIfkVsR

- (1) $\mathbb{Q}^+$ est une positivité sur $\mathbb{Q}$.

ITEMooSDSVooEOTRLY

- (2) Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ nous disons $\alpha \leq \beta$ si et seulement si

$$\beta - \alpha \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}. \quad (1.682)$$

Cela définit un ordre total²⁰⁶.

Démonstration. Plusieurs points.

- (1) **Pour (1)** C'est la proposition 1.491.
 (2) **Pour (2)** C'est la proposition 1.98.

□

PROPooNSICooAQczDh

Proposition 1.493 ([1]).

Soient $q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ tels que

$$\begin{cases} q_1 \geq r_1 \\ q_2 \geq r_2. \end{cases} \quad (1.683a)$$

$$(1.683b)$$

Alors $q_1 + q_2 \geq r_1 + r_2$.

PROPooCILQooOuyrfl

Proposition 1.494 ([1]).

Soit $q \in \mathbb{Q}$.

- (1) Nous avons $q^2 \geq 0$.
 (2) Nous avons $q^2 = 0$ si et seulement si $q = 0$.

PROPooXNBVooIvBmkW

Proposition 1.495 ([1]).

L'application

$$\begin{aligned} i: \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Q} \\ a &\mapsto a/1 \end{aligned} \quad (1.684)$$

est un morphisme injectif qui respecte l'ordre.

206. Définition 1.24.

Démonstration. Le fait que ce soit un morphisme injectif est la proposition 1.488.

Le respect de l'ordre doit encore être fait²⁰⁷. □

1.496.

Le lemme suivant 1.499 dit que tout rationnel est majoré par un naturel. Vu que les naturels et les rationnels ne sont pas du tout les mêmes ensembles (les entiers sont des classes de naturels et les rationnels des classes d'entiers), l'énoncé n'a à priori pas de sens.

La réalité est que nous identifions $\mathbb{N}$ à une partie de $\mathbb{Q}$ via les propositions 1.181 et 1.495. L'énoncé exact serait que si $q \in \mathbb{Q}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $i(\iota(n)) > q$. PROPOoTEREooZgblWu

Proposition 1.497 ([1]).

Si $q > 0$ dans $\mathbb{Q}$, alors il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $q = a/b$.

Démonstration. Posons $q = a/b$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$. Si $a, b > 0$, c'est bon. Si $a = 0$ alors $q = 0 = 0/1$ c'est bon aussi. Supposons que ce ne soit pas le cas. L'hypothèse $q > 0$ dit que $q = a/b$ avec $ab > 0$. La proposition 1.192(8) dit qu'il n'y a que deux possibilités : soit $a, b > 0$, soit $a, b < 0$.

Supposons que $a, b < 0$. En vertu des classes d'équivalence, nous avons $a = a/b = (-a)/(-b)$. Vu que nous avons $-a > 0$ et $-b > 0$, c'est bon. □

Proposition 1.498 ([1]).

Soit $a > 0$ et $b > 1$. Alors $a > a/b$. PROPOoPSGBooLuMXoI

Démonstration. Pour prouver que $a > a/b$, nous devons calculer

$$a - \frac{a}{b} = \frac{a}{1} - \frac{a}{b} = \frac{ab - a}{b}. \quad (1.685)$$

Nous devons donc évaluer la quantité $b(ab - a)$. Vu que $b > 1$, le lemme 1.190 dit que $ab > a$. Donc $ab - a > 0$. Le produit $b(ab - a)$ est donc le produit de deux entiers strictement positifs. En vertu de la proposition 1.192(2) nous avons donc $b(ab - a) > 0$, et donc $a > a/b$. □

Lemme 1.499.

Tout rationnel est strictement majoré par un naturel. LEMooEBTIooGMOHsj

Démonstration. Si $q < 0$, alors $n = 0$ fait l'affaire. Si $q = 0$, alors $n = 1$ fonctionne. Supposons donc que $q = a/b > 0$ avec $ab > 0$ ainsi que $a, b \in \mathbb{N}$ ²⁰⁸. Si $b = 1$, alors $n = a + 1$ fonctionne.

Si $b > 1$, alors la proposition 1.498 dit que $a > a/b$, et donc $n = a$ fonctionne. □

Proposition 1.500.

Si $q < 1$ dans $\mathbb{Q}$, alors $ql < l$ pour tout $l \in \mathbb{Q}^+$. PROPOoBTCooVVvaeL

Démonstration. Si $q < 0$ c'est facile. Supposons que $0 < q < 1$. Vu que $q - 1 < 0$ et $l > 0$, nous avons

$$ql - l = (q - 1)l < 0. \quad (1.686)$$

Mais dire $ql - l < 0$ signifie $ql < l$. □

Lemme 1.501.

Si $q \in \mathbb{Q}$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $kq \in \mathbb{Z}$. LEMooMUYAooDLgDcf

Proposition 1.502.

Le corps $\mathbb{Q}$ est archimédien²⁰⁹. PROPOoMXGPooDUkOuv

Démonstration. Soit $x, y \in \mathbb{Q}$ avec $x > 0$. Si $y \leq 0$, nous avons directement $x \geq y$. Sinon, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $mx \in \mathbb{N}$ (lemme 1.501). Vu que $\mathbb{N}$ est archimédien (proposition 1.155), il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nm x > y$. □

207. Rédigez une preuve, faites un scan de votre feuille et envoyez-moi.

208. Existe pas la proposition 1.497.

209. Définition 1.143.

1.20.2 Caractéristique

LEMooYCPUooNxEPbB

Lemme 1.503.

Le corps $\mathbb{Q}$ est de caractéristique²¹⁰ nulle.

Démonstration. Il s'agit de comprendre le noyau de l'application définie dans la définition 1.452. Pour $n \in \mathbb{Z}$ nous avons $\mu(n) = n \in \mathbb{Q}$. La seule façon d'avoir $\mu(n) = 0$ est d'avoir $n = 0$. Donc $\ker(\mu) = \{0\}$ et $\mathbb{Q}$ est de caractéristique nulle. $\square$

1.21 Suite de Cauchy dans un corps totalement ordonné

LEMooLTBIooSZnvsQ

Lemme 1.504 ([93, 1]).

Tout corps commutatif de caractéristique nulle contient un sous-corps isomorphe à $\mathbb{Q}$.

Démonstration. Soit un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle. Nous savons du lemme 1.452 que

$$\begin{aligned} \mu: \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{K} \\ n &\mapsto n1_{\mathbb{K}} \end{aligned} \tag{1.687}$$

est un morphisme d'anneaux vérifiant $\ker(\mu) = \{0\}$. Nous posons $Z = \mu(\mathbb{Z})$. L'application $\mu: \mathbb{Z} \rightarrow Z$ est un isomorphisme d'anneaux. Prouvons cela :

- (1) **Morphisme** L'application μ est un morphisme par le lemme 1.452.
- (2) **Surjectif** Par définition les éléments de Z sont dans l'image de $\mathbb{Z}$.
- (3) **Injectif** Si $x, y \in \mathbb{Z}$ vérifient $\mu(x) = \mu(y)$, alors $\mu(x - y) = 0$ parce que μ est un morphisme. Mais $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle, c'est-à-dire $\ker(\mu) = \{0\}$. Donc $x - y = 0$.

Le corps $\mathbb{K}$ contient donc un sous-anneau isomorphe à $\mathbb{Z}$. Puisque $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}$ sont commutatifs, la proposition 1.478 s'applique et $\mathbb{K}$ contient un sous-corps isomorphe à $\text{Frac}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$. $\square$

La proposition suivante donne des précisions à propos du lemme 1.504.

PROPooKNROooFdgIeQ

Proposition 1.505 ([1]).

Soit un corps totalement ordonné $\mathbb{K}$. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \mu: \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{K} \\ n &\mapsto n \cdot 1_{\mathbb{K}} \end{aligned} \tag{1.688}$$

et ensuite

$$\begin{aligned} \sigma: \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{K} \\ a/b &\mapsto \mu(a)\mu(b)^{-1}. \end{aligned} \tag{1.689}$$

Alors

- (1) L'application σ est bien définie.
- (2) L'application σ est un morphisme de corps.
- (3) Si $q \leq q'$ dans $\mathbb{Q}$, alors $\sigma(q) \leq \sigma(q')$.

Démonstration. En plusieurs morceaux.

- (1) **σ est bien définie** Montrons que σ est bien définie. Pour cela nous considérons $a, b, x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $a/b = x/y$ dans $\mathbb{Q}$. Par définition des classes (définition 1.471 du corps des fractions), nous avons $ay = bx$ dans $\mathbb{Q}$. Vu que μ est un morphisme nous avons alors

$$\mu(a)\mu(y) = \mu(b)\mu(x) \tag{1.690}$$

et donc $\mu(a)\mu(b)^{-1} = \mu(x)\mu(y)^{-1}$, c'est-à-dire $\sigma(a/b) = \sigma(x/y)$. L'application σ est donc bien définie.

210. Définition 1.452.

(2) **Morphisme pour la somme**

L'application μ est un morphisme d'anneaux, comme déjà dit depuis le lemme 1.452. Notons aussi que, parce que $\mathbb{K}$ est commutatif,

$$\mu(qy)^{-1} = \mu(q)^{-1}\mu(y)^{-1}. \quad (1.691)$$

En utilisant la définition 1.471(1) de la somme nous avons

$$\sigma(p/q + x/y) = \sigma((py + qx)/qy) \quad (1.692a)$$

$$= [\mu(py) + \mu(qx)]\mu(qy)^{-1} \quad (1.692b)$$

$$= \mu(py)\mu(qy)^{-1} + \mu(qx)\mu(qy)^{-1} \quad (1.692c)$$

$$= \mu(p)\mu(q)^{-1} + \mu(x)\mu(y)^{-1} \quad (1.692d)$$

$$= \sigma(p/q) + \sigma(x/y). \quad (1.692e)$$

(3) **Morphisme pour le produit** Même genre de calculs que pour la somme.(4) **Croissante**

Nous savons aussi par le lemme 1.107(4) que $1 \geq 0$. Puisque μ est un morphisme d'anneaux,

$$\mu(n+1) = \mu(n) + \mu(1) = \mu(n) + 1 \quad (1.693)$$

La définition 1.481(1) dit alors que $\mu(n) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous avons pour la même raison que si $m \geq n$ dans $\mathbb{N}$, alors $\mu(m) \geq \mu(n)$ dans $\mathbb{K}$.

Soient maintenant $p, q \in \mathbb{N}$, et prouvons que $\sigma(p/q) \geq 0$. D'abord

$$\sigma(p/q) = \mu(p)\mu(q)^{-1} \quad (1.694)$$

où $\mu(p) \geq 0$ et $\mu(q) \geq 0$. Ensuite le lemme 1.107(5) nous indique que $\mu(q)^{-1} \geq 0$. Enfin la condition 1.481(2) nous permet de conclure que $\sigma(p/q) \geq 0$.

Finalement, si $q_1 \geq q_2$ dans $\mathbb{Q}$, alors $q_1 - q_2 \geq 0$, et nous avons

$$\sigma(q_1) = \sigma(q_2 + q_1 - q_2) = \sigma(q_2) + \sigma(q_1 - q_2) \geq \sigma(q_2) \quad (1.695)$$

par la condition 1.481(1).

□

NORMooJRRZooTwTVYG

1.506.

Si $\mathbb{K}$ est un corps totalement ordonné, la proposition 1.505 nous donne un morphisme de corps $\sigma: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{K}$ qui respecte l'ordre. Pour $q \in \mathbb{Q}$ et $k \in \mathbb{K}$ nous notons

$$qk = \sigma(q)k. \quad (1.696)$$

EQooERFIooMpZVEs

Nous pourrions donc écrire $\frac{k}{2}$ pour $\sigma(1/2)k$.

Le lemme suivant explique que la notation (1.696) n'est pas complètement idiote.

LEMooWIONooGTKfcJ

Lemme 1.507.

Soit un corps commutatif totalement ordonné $\mathbb{K}$. Soit $k \in \mathbb{K}$. Nous avons

$$k + k = 2k. \quad (1.697)$$

Démonstration. Vu que $\sigma: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{K}$ est un morphisme, il vérifie $\sigma(1) = 1$, donc

$$k + k = \sigma(1)k + \sigma(1)k \quad (1.698a)$$

$$= (\sigma(1) + \sigma(1))k \quad (1.698b)$$

$$= \sigma(2)k \quad (1.698c)$$

$$= 2k. \quad (1.698d)$$

□

PROPooTFVooFoSHPg

Proposition 1.508.

Toute suite convergente dans un corps totalement ordonné est de Cauchy²¹¹.

Démonstration. Soit un corps totalement ordonné $\mathbb{K}$ et une suite $x_n \xrightarrow{\mathbb{K}} x$. Soit $\epsilon > 0$. Il est important de se rendre compte que $\epsilon \in \mathbb{K}$ et que l'inégalité est au sens de l'ordre dans $\mathbb{K}$; en particulier ce n'est pas $\epsilon \in \mathbb{R}$ ni $\epsilon \in \mathbb{Q}$. D'ailleurs nous n'avons pas encore défini $\mathbb{R}$.

Vu que (x_n) converge vers x , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k > N$,

$$|x_k - x| < \epsilon. \quad (1.699)$$

Soient $p, q > N$. Alors en utilisant la majoration du lemme 1.112(4),

$$|x_p - x_q| = |(x_p - x) + (x - x_q)| \leq |x_p - x| + |x - x_q| \leq 2\epsilon. \quad \text{EQooMQYGooLpgEQQ} \quad (1.700)$$

En analyse en général, on s'arrête là et on dit que (x_n) est de Cauchy parce qu'il n'y a pas vraiment de différence entre réaliser une majoration avec ϵ ou avec 2ϵ . Détaillons toutefois comment ça se passe dans le cas où ϵ est un élément d'un corps totalement ordonné.

Le 2ϵ arrivant à la fin de (1.700) est en réalité $\epsilon + \epsilon = \sigma(2)\epsilon$ en vertu de ce qui est raconté en 1.506 et en vertu du lemme 1.507.

Considérons $\epsilon' = \sigma(1/2)\epsilon$, que nous pouvons noter $\epsilon' = \epsilon/2$. Vu que $\epsilon' > 0$, il existe un N' tel que pour tout $p, q > N'$ nous ayons

$$|x_p - x_q| \leq 2\epsilon' = \sigma(2)\sigma(1/2)\epsilon = \sigma(1)\epsilon = \epsilon. \quad (1.701)$$

Ce dernier ϵ étant bien celui fixé au début de la preuve, nous en déduisons que (x_n) est de Cauchy. $\square$

1.21.1 Suites de Cauchy dans les rationnels

PropFFDJooAapQlP

Proposition 1.509 ([34]).

Principales propriétés des suites de Cauchy²¹² dans $\mathbb{Q}$.

ItemRKClooJguHdji

(1) Toute suite convergente est de Cauchy²¹³.

ItemRKClooJguHdjii

(2) Toute suite de Cauchy est bornée.

ItemRKClooJguHdjiii

(3) Si $x_n \rightarrow 0$ et si (y_n) est bornée, alors $x_n y_n \rightarrow 0$

(4) Si (x_n) et (y_n) sont de Cauchy alors $(x_n + y_n)$, $(x_n - y_n)$ et $(x_n y_n)$ sont également de Cauchy.

ITEMoolAFSoAAUpAN

(5) Si il existe $a, b \in \mathbb{Q}$ tels que $x_n \rightarrow a$ et $y_n \rightarrow b$ alors $x_n + y_n \rightarrow a + b$, $x_n - y_n \rightarrow a - b$ et $x_n y_n \rightarrow ab$.

ItemRKClooJguHdjvi

(6) Soit (x_n) une suite de Cauchy qui ne converge pas vers zéro. Alors il existe n_0 tel que la suite $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n \geq n_0}$ soit de Cauchy.

Démonstration. Point par point.

(1) C'est la proposition 1.508.

(2) Soit (x_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$. Avec $\epsilon = 1$ dans la définition, si $q > N$, nous avons

$$|x_q - x_N| \leq 1. \quad (1.702)$$

Et donc pour tout q plus grand que N , $x_N - 1 \leq x_q \leq x_N + 1$, ou encore, pour tout n :

$$|x_n| \leq \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, |x_N + 1|\}. \quad (1.703)$$

La suite est donc bornée.

211. Définition 1.481(1).

212. Définition 1.481(1).

213. Et non la réciproque, qui sera justement la grande innovation des nombres réels.

- (3) Soit $\epsilon > 0$. Les hypothèses disent qu'il existe un N tel que $|x_n| \leq \epsilon$ dès que $n \geq N$. Et il existe aussi $M \geq 0$ tel que $|y_n| \leq M$ pour tout n . Du coup, lorsque $n \geq N$ nous avons $|x_n y_n| \leq M\epsilon$.
- (4) En ce qui concerne la somme,

$$|x_p + y_p - x_q - y_q| \leq |x_p - x_q| + |y_p - y_q|. \quad (1.704)$$

Soit N_1 tel que si $p, q \geq N_1$ alors $|x_p - x_q| \leq \epsilon$ et N_2 de même pour la suite (y_n) . En prenant $N = \max\{N_1, N_2\}$, la somme (1.704) est plus petite que 2ϵ dès que $p, q \geq N$.

Passons à la démonstration du fait que le produit de deux suites de Cauchy est de Cauchy. Les suites (x_n) et (y_n) sont bornées et quitte à prendre le maximum, nous disons qu'elles sont toutes les deux bornées par le nombre M : pour tout n nous avons $|x_n| \leq M$ et $|y_n| \leq M$. Nous avons :

$$|x_p y_p - x_q y_q| \leq |x_p y_p - x_q y_p| + |x_q y_p - x_q y_q| \leq |y_p| |x_p - x_q| + |x_q| |y_p - y_q|. \quad (1.705)$$

Puisque (x_n) et (y_n) sont de Cauchy, si p et q sont assez grands, les deux différences sont majorées par ϵ et nous avons

$$|x_p y_p - x_q y_q| \leq M\epsilon + M\epsilon = 2M\epsilon, \quad (1.706)$$

ce qui prouve que $(x_n y_n)$ est de Cauchy.

- (5) En ce qui concerne la somme, nous pouvons tout de suite calculer

$$|x_n + y_n - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b|. \quad (1.707)$$

Il existe une valeur de n à partir de laquelle le premier terme est plus petit que ϵ et une à partir de laquelle le second terme est plus petit que ϵ . En prenant le maximum des deux, la somme est plus petite que 2ϵ .

En ce qui concerne le produit,

$$|x_n y_n - ab| \leq |x_n y_n - a y_n| + |a y_n - ab| \leq |y_n| |x_n - a| + |a| |y_n - b|. \quad (1.708)$$

Les suites $|x_n - a|$ et $|y_n - b|$ convergent vers zéro ; la suite (y_n) est bornée parce que convergente (combinaison des points (1) et (2)) et a (la suite constante) est également bornée. Donc par le point (3), nous avons

$$y_n |x_n - a| + a |y_n - b| \rightarrow 0. \quad (1.709)$$

Au passage nous avons également utilisé la propriété de la somme que nous venons de démontrer.

- (6) Soit (x_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ ne convergeant pas vers zéro : il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $|x_n| > \alpha$. Mais notre suite est de Cauchy, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $p, q \geq n_0$ alors

$$|x_p - x_q| \leq \frac{\alpha}{2}. \quad (1.710)$$

En fixant $N = n_0$, on obtient un naturel $n \geq n_0$ tel que $|x_n| \geq \alpha$. De plus, comme la suite est de Cauchy, si $p > n$ nous avons aussi $|x_n - x_p| \leq \frac{\alpha}{2}$. Cela implique $|x_p| \geq \frac{\alpha}{2}$ et en particulier $x_p \neq 0$.

Nous venons de prouver que la suite ne s'annule plus à partir de l'indice n , et même que $|x_k| \geq \alpha/2$ pour tout $k \geq n$. La suite $(1/x_k)_{k \geq n}$ est donc bien définie.

Soit $\epsilon > 0$. Soit n_0 tel que $|x_p - x_q| < \epsilon$ pour tout $p, q > n_0$. Soit K plus grand que n_0 et que n . En prenant $p, q \geq K$, nous avons $|x_p| > \frac{\alpha}{2}$ et $|x_q| > \frac{\alpha}{2}$. Nous en déduisons que

$$\left| \frac{1}{x_p} - \frac{1}{x_q} \right| \leq \frac{|x_q - x_p|}{|x_p x_q|} \leq \frac{4}{\alpha^2} |x_q - x_p| \leq \frac{4}{\alpha^2} \epsilon. \quad (1.711)$$

Donc $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ est de Cauchy.

□

1.22 Insuffisance des rationnels

Nous allons voir qu'il n'existe pas de nombres rationnels x tels que $x^2 = 2$, mais que pourtant il existe une infinité de suites de rationnels (x_n) tels que $x_n^2 \rightarrow 2$.

LemJPIUooWFHaFM

Lemme 1.510.

Un entier x est pair si et seulement si l'entier x^2 est pair.

Démonstration. Si x est un nombre pair, alors il existe un entier a tel que $x = 2a$ alors $x^2 = 4a^2$ est pair.

Inversement, si x est impair alors il existe un entier a tel que $x = 2a + 1$ et alors $x^2 = 4a^2 + 4a + 1 = 2(2a^2 + 2a) + 1$ est impair. $\square$

Le théorème 3.32 nous dira que tous les $\sqrt{n}$ sont irrationnels dès que n n'est pas un carré parfait. Voici déjà le résultat pour $n = 2$. Le fait que $\sqrt{2}$ existe dans $\mathbb{R}$ sera la proposition 1.581.

PropooRJMSooPrdeJb

Proposition 1.511 (Irrationalité de $\sqrt{2}$).

Il n'existe pas de fractions d'entiers dont le carré soit égal à 2.

Démonstration. Nous supposons que la fraction d'entiers a/b est telle que $a^2/b^2 = 2$, et nous allons construire une suite d'entiers strictement décroissante et strictement positive, ce qui est impossible.

Grâce au lemme 1.510 nous avons successivement les affirmations suivantes :

- $\frac{a^2}{b^2} = 2$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$.
- $a^2 = 2b^2$, donc a^2 est pair.
- a est alors pair et a^2 est divisible par 4. Soit $a^2 = 4k$.
- $4k/b^2 = 2$, donc $4k = 2b^2$, donc $b^2 = 2k$ et b^2 est pair.
- Nous déduisons que b est pair.

La fraction $\frac{a/2}{b/2}$ est alors une nouvelle fraction d'entiers dont le carré vaut 2. En procédant de la même façon, en remplaçant a par $a/2$ et b par $b/2$, on obtient que la fraction d'entiers $\frac{a/4}{b/4}$ a la même propriété.

En particulier, tous les nombres de la forme $a/2^n$ sont des entiers. Ils forment une suite strictement décroissante d'entiers strictement positifs. Impossible, me diriez-vous ? Et vous auriez bien raison : toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément ²¹⁴. Il n'y a donc pas de fractions d'entiers dont le carré vaut 2. $\square$

LEMooOTVUooImvush

Lemme 1.512 (Série géométrique).

Si $q \neq 1$ dans $\mathbb{Q}$ et $p \in \mathbb{N}$ nous avons

$$\sum_{k=0}^p q^k = \frac{1 - q^{p+1}}{1 - q}. \quad (1.712)$$

Démonstration. En posant $S_p = 1 + q + q^2 + \cdots + q^p$, nous avons $S_p - qS_p = 1 - q^{p+1}$ et donc

$$S_p = \sum_{k=0}^p q^k = \frac{1 - q^{p+1}}{1 - q}. \quad (1.713)$$

 $\square$

Proposition 1.513.

La suite donnée par

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad (1.714)$$

est de Cauchy et ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.

²¹⁴. Voir [34], et attention : ce n'est pas tout à fait évident.

Démonstration. Si $p > q > 0$ nous avons

$$x_p - x_q = \sum_{k=q+1}^p \frac{1}{k!} \quad (1.715a)$$

$$\leq \sum_{k=q+1}^p \frac{1}{(q+1)!} \frac{1}{(q+1)^{k-q-1}} \quad (1.715b) \quad \text{SUBEQooAXILooEAccVB}$$

$$\leq \frac{1}{(q+1)!} \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^p \frac{1}{(q+1)^k} \quad (1.715c) \quad \text{SUBEQooNDPTooDSEYEJ}$$

$$\leq \frac{1}{(q+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{q+1}} \quad (1.715d) \quad \text{SUBEQooEMHJooSnCUiK}$$

$$\leq \frac{1}{(q+1)!} \frac{q+1}{q} \quad (1.715e)$$

$$\leq \frac{1}{q!q}. \quad (1.715f)$$

Justifications :

- Pour (1.715b), il s'agit de remplacer dans $k!$ tous les facteurs plus grands que $(q+1)$ par $q+1$. Cela rend le dénominateur plus petit.
- Pour (1.715c), il y a une inégalité parce que la suite $p \mapsto \sum_{k=0}^p 1/(q+1)^k$ est une suite strictement croissante.
- Pour (1.715d), le lemme 1.512 donne la valeur de la somme finie. En ce qui concerne la limite, nous avons demandé $p > q > 0$ et donc $q+1 > 1$. Dans ce cas la limite fonctionne.

Cette inégalité une fois établie nous permet de prouver les assertions. La suite (x_n) est de Cauchy car, pour tout $\epsilon \in \mathbb{Q}$ s'écrivant $\epsilon = \frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}$, en prenant $p, q > b$, nous avons

$$x_p - x_q \leq \frac{1}{b!b} < \frac{1}{b} < \frac{a}{b} = \epsilon. \quad (1.716)$$

Montrons par l'absurde que cette suite ne converge pas dans $\mathbb{Q}$. Pour cela, nous supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Pour tout $p > q$ nous avons établi

$$0 < x_p - x_q < \frac{1}{qq!}. \quad (1.717)$$

Prenons la limite $p \rightarrow \infty$; par stricte croissance de la suite, les inégalités restent strictes :

$$0 < \frac{a}{b} - x_q < \frac{1}{qq!}. \quad (1.718) \quad \text{EqQLCTooOgQOdh}$$

Si $n > b$ alors nous pouvons écrire

$$\frac{a}{b} - x_n = \frac{\alpha}{n!} \quad (1.719)$$

avec $\alpha \in \mathbb{Z}$ parce que le dénominateur commun entre $\frac{a}{b}$ et x_n est dans $n!$. En prenant donc $q > n$ dans (1.718) nous pouvons écrire

$$0 < \frac{\alpha}{q!} < \frac{1}{qq!}, \quad (1.720)$$

c'est-à-dire $0 < \alpha < \frac{1}{q}$, ce qui est impossible pour $\alpha \in \mathbb{Z}$. □

Lemme 1.514.

Soit $A > 0$ dans $\mathbb{Q}$. Il existe un rationnel $q > 0$ tel que $q^2 < A$. LEMooDTXYooKwmlZh

Démonstration. Vu que $\mathbb{Q}$ est archimédien (proposition 1.502), il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 < nA$. Pour ce n , nous avons

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2 < \frac{1}{n} < A. \quad (1.721)$$

□

La proposition suivante donne une suite de rationnels qui convergerait dans $\mathbb{R}$ vers $\sqrt{A}$ (non encore défini à ce stade). Il est expliqué dans [99] que la suite peut être vue comme une forme de méthode de Newton 34.54; voir l'exemple 34.57. Si vous aimez les dessins et les approches géométriques, il y a une explication sur Wikipédia[100].

PROPooSTQXooHIGVf

Proposition 1.515 ([99]).

Soient $A > 0$ dans $\mathbb{Q}$ et $x_0 \in \mathbb{Q}$. La suite (x_k) définie par

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{A}{x_k} \right) \quad (1.722)$$

EQooOUIVooUqWhXe

a les propriétés suivantes :

- (1) La suite $y_k = x_k^2$ converge dans $\mathbb{Q}$ vers A .
- (2) La suite (x_k) est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.
- (3) La suite (x_k) ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ dans le cas de $A = 2$.

Démonstration. En plusieurs points.

- (1) **La suite s_k** En posant $y_k = x_k^2$ nous calculons que

$$y_{k+1} - A = \frac{(y_k - A)^2}{4y_k}. \quad (1.723)$$

Autrement dit, la suite $s_k = y_k - A$ vérifie

$$s_{k+1} = \frac{s_k^2}{4(A + s_k)}. \quad (1.724)$$

Quelle que soit la valeur de $s_0 = x_0^2 - A$, nous avons

$$s_1 = \frac{s_0^2}{4(A + s_0)} = \frac{(x_0^2 - A)^2}{4(A + x_0^2 - A)} = \frac{(x_0^2 - A)^2}{4x_0^2} > 0. \quad (1.725)$$

Donc à partir de s_1 , tous les éléments sont positifs. Vu que $A > 0$ nous avons aussi

$$s_{k+1} < \frac{s_k^2}{4s_k} = \frac{s_k}{4} \quad (1.726)$$

et donc $s_k < s_0/4^k$. Donc $s_k \rightarrow 0$.

- (2) **La suite (y_k)** Nous venons de prouver que si $y_k = A + s_k$, alors $s_k \rightarrow 0$. Autrement dit, la suite y_k converge vers A dans $\mathbb{Q}$.

La suite (y_k) est donc de Cauchy par la proposition 1.509(1).

- (3) **La suite (x_k) est de Cauchy** Soit $\epsilon > 0$ dans $\mathbb{Q}$. Puisque (y_k) est de Cauchy, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$|x_r^2 - x_s^2| < \epsilon \quad (1.727)$$

pour tout $r, s \geq n_0$.

Soit par ailleurs $q \neq 0$ dans $\mathbb{Q}$ tel que $q^2 < A$, assuré par le lemme 1.514. Quitte à augmenter la valeur de n_0 , nous supposons que $x_r, x_s > q$, et en particulier que $x_r + x_s \neq 0$. Cela permet d'écrire d'abord

$$x_r^2 - x_s^2 = (x_r + x_s)(x_r - x_s) \quad (1.728)$$

et ensuite de prendre la valeur absolue et de diviser par $|x_r + x_s|$:

$$|x_r - x_s| = \frac{|x_r^2 - x_s^2|}{|x_r + x_s|} < \frac{\epsilon}{2q}. \quad (1.729)$$

Donc (x_k) est une suite de Cauchy.

- (4) **Pas de convergence pour $A = 2$** Supposons que $x_k \rightarrow a \in \mathbb{Q}$. Dans ce cas nous aurions $x_k^2 \rightarrow a^2 = A = 2$ (proposition 1.509(5)). Mais nous savons par la proposition 1.511 que $a^2 = 2$ est impossible dans $\mathbb{Q}$.

□

Notons que cette proposition ne présume en rien de l'existence ou de la non-existence dans $\mathbb{Q}$ d'un élément qui pourrait décemment être nommé $\sqrt{A}$. Il se fait que le théorème 3.32 dira que $\sqrt{n}$ est soit entier, soit irrationnel.

1.516.

Un petit programme en python pour explorer la suite de la proposition 1.515.

```

1 #!/usr/bin/python3
2
3 def rec(A,x):
4     return ((x**2+A)/x)/2
5
6 A = 3          # Compute square root of 3
7 x = 1000       # Initial guess: 1000
8
9 for i in range(1,100):
10    print(i, x, x**2, x**2-A)
11    x = rec(A, x)

```

tex/frido/codeSnip_4.py

1.23 Les réels

Une construction des réels via les coupures de Dedekind est donnée dans [101].

NormooHRDZooRGtCd

1.517.

La construction des réels va nécessiter un petit « bootstrap » au niveau de la topologie. En effet la notion de suite de Cauchy est une notion topologique (définition 7.309) alors que la topologie métrique (celle entre autres de $\mathbb{Q}$) ne sera définie que par le théorème 7.142. Nous avons donc dû définir en la définition 1.481 *ex nihilo* les notions de

- suite de Cauchy
- suite convergente
- complétude

Nous allons ensuite construire $\mathbb{R}$ comme ensemble de classes d'équivalence de suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$. Ce ne sera que plus tard, après avoir défini la notion d'espace métrique que nous allons voir que sur $\mathbb{R}$, ces trois notions coïncident avec celles topologiques²¹⁵. Et par conséquent que $\mathbb{R}$ sera un espace métrique complet²¹⁶.

Dans cette optique, il est intéressant de lire ce que dit Wikipédia à propos des suites de Cauchy dans l'article consacré à la construction des nombres réels[102].

1.23.1 L'ensemble

DEFooGXOPooFReesm

Définition 1.518.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites de Cauchy²¹⁷ dans $\mathbb{Q}$. Soit aussi l'ensemble $\mathcal{E}_0$ constituée des suites

²¹⁵. Proposition 7.321.

²¹⁶. Théorème 1.559 pour la complétude en tant que corps et théorème 1.508 pour la complétude en tant que espace métrique.

²¹⁷. Définition 1.481(1)

qui convergent vers zéro²¹⁸.

PROPooCYPMooRwMUnI

Proposition 1.519 ([1]).

En posant

$$x + y = (x_n + y_n) \quad (1.730)$$

et

$$xy = (x_n y_n), \quad (1.731)$$

l'ensemble $\mathcal{E}$ devient un anneau²¹⁹ commutatif dont le neutre de l'addition est la suite constante $x_n = 0$ et le neutre pour la multiplication est la suite constante $x_n = 1$.

PROPooNUQVooAAkieK

Proposition 1.520.

La partie $\mathcal{E}_0$ est un idéal²²⁰ de l'anneau $\mathcal{E}$.

Démonstration. Nous savons par la proposition 1.509(1) que les suites convergentes sont de Cauchy ; par conséquent $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$.

L'ensemble structuré $(\mathcal{E}_0, +)$ est un sous-groupe de $\mathcal{E}$ par les propriétés de la proposition 1.509 (il s'agit du fait que la somme de deux suites convergeant vers zéro est une suite convergente vers zéro).

En ce qui concerne la propriété fondamentale des idéaux, si $x \in \mathcal{E}_0$ et $y \in \mathcal{E}$ nous devons prouver que $xy \in \mathcal{E}_0$. Puisque $(\mathcal{E}_0, \cdot)$ est commutatif, cela suffira pour être un idéal bilatère. Vu que y est une suite de Cauchy, elle est bornée ; et étant donné que $x \rightarrow 0$ nous avons alors $xy \rightarrow 0$ (par la proposition 1.509(3)). $\square$

DefooFKYKooOngSCB

Théorème-Définition 1.521 (L'anneau des réels[34]).

Sur l'ensemble quotient $\mathcal{E}/\mathcal{E}_0$, les opérations

$$(1) \quad \bar{u} + \bar{v} = \overline{u + v}$$

$$(2) \quad \bar{u} \cdot \bar{v} = \overline{uv}$$

sont bien définies et donnent à $\mathcal{E}/\mathcal{E}_0$ une structure de corps commutatif appelé **corps des réels** et noté $\mathbb{R}$

Démonstration. Nous divisons la preuve en plusieurs parties.

- (1) **Les opérations sont bien définies** La partie $\mathcal{E}_0$ est un idéal par la proposition 1.520. Le quotient est donc bien défini et est un anneau par la proposition 1.316(2).
- (2) **Caractérisation des classes** Soit $q \in \mathbb{Q}$ et une suite x convergente vers q . Cette suite est de Cauchy comme toute suite convergente. Montrons que

$$\bar{x} = \{\text{suites qui convergent vers } q\}. \quad (1.732)$$

Si $y \in \bar{x}$ alors $y = x + h$ avec $h \in \mathcal{E}_0$, et comme $h_n \rightarrow 0$, on a $y_n \rightarrow q$. Réciproquement, si $y_n \rightarrow q$ alors pour chaque n nous avons

$$y_n = x_n + (y_n - x_n), \quad (1.733)$$

mais $y_n - x_n \rightarrow 0$. Donc la suite $y - x \in \mathcal{E}_0$ ce qui signifie que $y \in \bar{x}$.

- (3) **Neutre et unité** Il est vite vérifié que $\bar{0}$, la classe de la suite constante égale à zéro est neutre pour l'addition. De même, $\bar{1}$, est un neutre pour la multiplication.
- (4) **Corps** Nous devons prouver que tout élément non nul est inversible. C'est-à-dire que si $\bar{x} \in \mathcal{E}$ ne converge pas vers zéro²²¹ alors il existe $y \in \mathcal{E}$ tel que $xy \in \bar{1}$.

218. Nous rappelons qu'à ce niveau nous n'avons pas encore prouvé que toutes les suites de Cauchy convergent.

219. Définition 1.90.

220. Définition 1.307.

221. $x \in \mathcal{E}$ peut soit ne pas converger du tout, soit converger vers autre chose que zéro.

Nous savons par la proposition 1.509(6) que x étant une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n \geq n_0}$ est une suite de Cauchy. Nous posons alors

$$y_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq n_0 \\ \frac{1}{x_n} & \text{si } n > n_0. \end{cases} \quad (1.734)$$

Nous avons alors

$$(xy)_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq n_0 \\ 1 & \text{si } n > n_0 \end{cases} \quad (1.735)$$

et donc $xy \in \bar{1}$.

□

NORMooWBYNooBQaPPk

1.522 (Quelques notations entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$).

Si $k \mapsto x_k$ est une suite, nous notons (x_k) avec des parenthèses la suite elle-même. Le k dans (x_k) est un indice muet, et dans les cas où il peut y avoir une ambiguïté, nous pouvons noter $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Cette dernière notation est plus lourde, mais plus exacte.

Le mieux est d'écrire simplement x la suite, mais alors il faut être prudent et ne pas noter x la limite. Nous éviterons donc d'écrire $x_k \rightarrow x$.

Si (x_k) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, nous notons $\bar{x}$ l'élément de $\mathbb{R}$ qui lui correspond. En fait $\bar{x} = (x_k) : \bar{x}$ est la suite-elle même, mais pour nous souvenir de l'origine nous allons adopter cette notation.

D'autre part nous définissons

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{R} \\ q &\mapsto \overline{[k \mapsto q]}, \end{aligned} \quad (1.736)$$

c'est-à-dire que $\varphi(q)$ est la classe de la suite constante $x_k = q$.

PropooEPFCooMtDOff

Proposition 1.523.

Soit l'application

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{R} \\ q &\mapsto \bar{q}. \end{aligned} \quad (1.737)$$

où par $\bar{q}$ nous entendons la classe de la suite constante égale à q (qui est de Cauchy).

- (1) *C'est un homomorphisme de corps injectif.*
- (2) *Image(φ) est un sous-corps de $\mathbb{R}$*
- (3) *$\varphi: \mathbb{Q} \rightarrow \text{Image}(\varphi)$ est un isomorphisme de corps.*

Démonstration. Le fait que ce soit un homomorphisme est simplement

- $\varphi(q + q') = \overline{q + q'} = \bar{q} + \bar{q}'$
- $\varphi(qq') = \overline{qq'} = \bar{q}\bar{q}'$.

En ce qui concerne l'injectivité, si q est tel que $\varphi(q) = \bar{0} = \mathcal{E}_0$, c'est que

$$\varphi(q) = \{\text{suites de Cauchy qui convergent vers zéro}\} \quad (1.738)$$

Mais nous savons aussi que ²²²

$$\varphi(q) = \bar{q} = \{\text{suites de Cauchy qui convergent vers } q\} \quad (1.739)$$

Nous en déduisons que $q = 0$.

□

Lorsque dans la suite nous parlerons d'un élément de $\mathbb{Q}$ comme étant un réel, nous aurons en tête l'image de cet élément par φ .

²²². Voir dans la démonstration du théorème 1.521.

LEMooYlQBooFistHs

Lemme 1.524.

Soient $q, l \in \mathbb{Q}$ tels que $\bar{q} = \bar{l}$. Alors $q = l$ dans $\mathbb{Q}$.

Démonstration. La suite constante $x_n = q$ est un représentant de $\bar{q}$, et la suite constante $y_n = l$ est représentant de $\bar{l}$. Dire que $\bar{l} = \bar{q}$ signifie qu'il existe une suite $z \in \mathcal{E}_0$ tel que

$$x = y + z. \quad (1.740)$$

Pour tout n nous avons donc $x_n = y_n + z_n$, ou encore

$$z_n = q - l \quad (1.741)$$

pour tout n . Puisque z est une suite constante, elle ne peut appartenir à $\mathcal{E}_0$ que si elle est la suite constante nulle, c'est-à-dire si $q = l$. $\square$

1.23.2 Relation d'ordre**Définition 1.525.**

Nous définissons les parties $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$ de $\mathcal{E}$ par

- (1) $x \in \mathcal{E}^+$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ (ϵ est dans $\mathbb{Q}$), il existe N_ϵ tel que $n > N_\epsilon$ implique $x_n > -\epsilon$.
- (2) $x \in \mathcal{E}^-$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe N_ϵ tel que $n > N_\epsilon$ implique $x_n < \epsilon$.

Nous notons aussi $\mathcal{E}^{++} = \mathcal{E}^+ \setminus \mathcal{E}_0$.

LEMooJOYQooCDIhHW

Lemme 1.526 (À propos du zéro).

Les parties $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$ partitionnent $\mathcal{E}$ de la façon suivante :

ITEMooKRBYYooZGhhch

- (1) $\mathcal{E}^+ \cap \mathcal{E}^- = \mathcal{E}_0$
- (2) Le neutre pour l'addition dans $\mathbb{R}$ est $\bar{\mathcal{E}}_0$ c'est-à-dire la classe de la suite constante nulle.
- (3) $\mathcal{E}^+ \cup \mathcal{E}^- = \mathcal{E}$

ITEMooRCIZooHUIymE

ITEMooZRVXooANHspZ

Démonstration. En deux parties.

- (1) **Pour (1)** On prouve d'abord que $\mathcal{E}^+ \cap \mathcal{E}^- \subset \mathcal{E}_0$, l'inclusion inverse est évidente. Soit $\epsilon > 0$ et $x \in \mathcal{E}^+ \cap \mathcal{E}^-$. Il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_n > -\epsilon$ et $x_n < \epsilon$ pour tout $n \geq N$. Par conséquent, $|x_n| \leq \epsilon$ pour tout $n \geq N$ et la suite x converge vers zéro, c'est-à-dire $x \in \mathcal{E}_0$.
- (2) **Pour (2)** Soit $a \in \mathbb{R}$. Nous montrons que si $x_n = 0$ pour tout n , alors $a + \bar{x} = a$. Nous notons y un représentant de a . Par définition, $a + \bar{x} = \bar{y} + \bar{x}$. Et donc

$$a + \bar{x} = \overline{y + x} = \bar{y} = a. \quad (1.742)$$

- (3) **Pour (3)** Soit $x \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}^-$, et prouvons que $x \in \mathcal{E}^+$. La condition $x \notin \mathcal{E}^-$ donne qu'il existe un $\alpha > 0$ (dans $\mathbb{Q}$) tel que pour tout n , il existe $p > n$ avec $x_p > \alpha$. Mais x est une suite de Cauchy, donc nous avons un n_0 tel que si $n, p \geq n_0$ alors $|x_n - x_p| \leq \frac{\alpha}{2}$. En particulier, si $n \geq n_0$, et si $p > n$ est tel que $x_p > \alpha$, on obtient

$$x_n > \frac{\alpha}{2} > 0 \quad (1.743)$$

Par conséquent $x \in \mathcal{E}^+$ parce que $x \in \mathcal{E}$ et les x_n sont tous positifs à partir d'un certain rang. $\square$

LEMooXNWSooHbNcAV

Lemme 1.527 ([1]).

Si $x \in \mathcal{E}^{++}$, alors il existe N tel que $x_n > 0$ pour tout $n > N$.

Démonstration. La suite x ne tend pas vers zéro. Donc il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $N > 0$ il existe $n > N$ vérifiant $x_n > \delta$.

Mais la suite x est également de Cauchy. Écrivons cette condition pour $\delta/2$. Il existe $N_2 > 0$ tel que $p, q > N_2$ implique $|x_p - x_q| < \delta/2$.

Nous fixons $n > N_2$ tel que $x_n > \delta$. Alors pour tout $p > N_2$ nous avons aussi

$$|x_p - x_n| < \frac{\delta}{2}. \quad (1.744)$$

Cela implique que $x_p > \delta/2 > 0$ pour tout $p > N_2$. □

La proposition suivante est une version plus précise du lemme 1.527. Elle peut également être démontrée en utilisant la proposition 1.484.

PROP00ZRC00FGdtII

Proposition 1.528 ([15]).

Soit une suite de Cauchy (x_n) dans $\mathbb{Q}$. Nous supposons que

- (1) $x \in \mathcal{E}^+$
- (2) x ne converge pas vers 0.

Note : ces hypothèses signifient que $x \in \mathcal{E}^{++}$.

Alors il existe $r \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$x_n \geq r \quad (1.745)$$

pour tout $n \geq N$.

Démonstration. Fixons $\epsilon \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}$, et procédons par l'absurde. Du coup nous savons trois choses sur la suite (x_n) .

ITEM00TNZD00HKZdBe

- (1) Hypothèse absurde : pour tout $q \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $p \geq N$ vérifiant $x_p < q$.
- (2) Vu que $x \in \mathcal{E}^{++} \subset \mathcal{E}^+$, il existe $P_1 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n > -\epsilon$ pour tout $n \geq P_1$.
- (3) La suite x est de Cauchy. Donc il existe $P_2 \in \mathbb{N}$ tel que si $m, n \geq P_2$, nous avons $|x_m - x_n| < \epsilon/2$.

Nous considérons $P \geq \max\{P_1, P_2\}$ et nous prenons $q = \epsilon/2$, $N = P$ dans la propriété (1). Il existe donc $p > P$ tel que $x_p < \epsilon/2$.

Prenons aussi $n > p$ et écrivons les deux autres propriétés :

- (1) $x_n > -\epsilon$ parce que $n > p > P > P_1$.
- (2) $|x_n - x_p| < \epsilon/2$ parce que $n, p > P > P_2$.

Du coup nous avons

$$x_n < x_p + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon, \quad (1.746)$$

et donc $-\epsilon < x_n < \epsilon$.

Au final, nous avons prouvé que pour tout $\epsilon \in \mathbb{Q}^+ \setminus \{0\}$, il existe P tel que $n > P$ implique $|x_n| < \epsilon$. Cela signifie que

$$x_n \xrightarrow{\mathbb{Q}} 0, \quad (1.747)$$

c'est-à-dire $x \in \mathcal{E}_0$, ce qui est contraire à l'hypothèse. □

LEM00RKXS00FsIohe

Lemme 1.529 ([34]).

Quelques propriétés du partitionnement.

ITEM00RQVK00CnwWOY

- (1) $x \in \mathcal{E}^-$ si et seulement si $(-x) \in \mathcal{E}^+$
- (2) $x \in \mathcal{E}^+$ et $y \in \mathcal{E}^+$ implique $x + y \in \mathcal{E}^+$
- (3) $x \in \mathcal{E}^+$ et $y \in \mathcal{E}^+$ implique $xy \in \mathcal{E}^+$
- (4) Si $x, y \in \mathcal{E}$ sont tels que $x - y \in \mathcal{E}_0$ alors soit $x, y \in \mathcal{E}^+$ soit $x, y \in \mathcal{E}^-$.

ITEM00JUP00OBubqA

ITEM00DQLJ00PViuVC

Démonstration. Point par point.

- (1) Définition de $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$.
- (2) Pour $n \geq N_{\epsilon/2}$ nous avons $x_n > -\epsilon/2$ et $y_n > -\epsilon/2$. Donc $x_n + y_n > -\epsilon$.
- (3) Si x ou y est dans $\mathcal{E}_0$ alors $xy \in \mathcal{E}_0$ et c'est bon. Si par contre $x, y \in \mathcal{E}^{++}$ alors le lemme 1.527 nous indique que pour n suffisamment grand, $x_n > 0$ et $y_n > 0$. Et dans ce cas, $(xy)_n > 0$, c'est-à-dire $xy \in \mathcal{E}^+$.
- (4) Supposons que $x - y \in \mathcal{E}_0$ avec $x \in \mathcal{E}^+$ et prouvons qu'alors $y \in \mathcal{E}^+$. Soit donc $\epsilon > 0$; il existe n_1 tel que $x_n > -\frac{\epsilon}{2}$ dès que $n \geq n_1$. Mais $x - y \in \mathcal{E}_0$, donc il existe n_2 tel que $|x_n - y_n| < \frac{\epsilon}{2}$ dès que $n \geq n_2$. En prenant n plus grand que n_1 et n_2 , nous avons en même temps

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n > -\frac{\epsilon}{2} \\ |x_n - y_n| < \frac{\epsilon}{2} \end{array} \right. \quad (1.748a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n > -\frac{\epsilon}{2} \\ |x_n - y_n| < \frac{\epsilon}{2} \end{array} \right. \quad (1.748b)$$

Cela implique que $y_n > -\epsilon$ et donc que $y \in \mathcal{E}^+$.

Nous pouvons de même prouver que si $x \in \mathcal{E}^-$ alors $y \in \mathcal{E}^-$.

□

DefooLMQIooTgzZXd

Définition 1.530 (Positivité dans $\mathbb{R}$).

Vocabulaire et notations. Rappel que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_0$ sont définis dans 1.518.

- (1) Nous notons $\mathbb{R} = \mathcal{E}/\mathcal{E}_0$.
- (2) Nous notons $\mathbb{R}^+ = \bar{\mathcal{E}}^+ = \mathcal{E}^+/\mathcal{E}_0$.
- (3) Nous notons $\mathbb{R}^- = \bar{\mathcal{E}}^-$.
- (4) Un élément de $\mathbb{R}$ est **positif** si il est la classe d'une suite de Cauchy appartenant à $\mathcal{E}^+$.
- (5) Un élément de $\mathbb{R}$ est **négatif** si il est la classe d'une suite de Cauchy appartenant à $\mathcal{E}^-$.
- (6) Lorsque nous parlons de nombres réels, le symbole « 0 » signifie $\mathcal{E}_0$ ou plus précisément la classe d'un élément de $\mathcal{E}_0$ modulo $\mathcal{E}_0$.

REMooOCXLooKQrDoq

1.531.

Avec les conventions de la définition 1.530, et en anticipant sur nos connaissances à propos des réels,

- (1) zéro est positif et négatif.
- (2) L'intersection entre $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$ est le singleton $\{0\}$.
- (3) L'ensemble des nombres *strictement* positifs est noté $(\mathbb{R}^+)^*$ ou $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.
- (4) Le mot « positif » signifie « positif ou nul »; le mot « négatif » signifie « négatif ou nul ». Ce sont des conventions qui sont également celles de Wikipédia[103].

DEFooBXHJooOEYPRI

Définition 1.532 (Ordre sur $\mathbb{R}$).

Si $x, y \in \mathbb{R}$ nous notons $x \leq y$ si et seulement si $y - x \in \bar{\mathcal{E}}^+$.

PROPooYMJVooNAsXae

Proposition 1.533.

Le couple $(\mathbb{R}, \leq)$ est un corps totalement ordonné²²³

Démonstration. Il s'agit de vérifier, dans l'ordre, les définitions 1.23, 1.24 et 1.105. Pour la suite nous considérons $x, y, z \in \mathbb{R}$ et des suites de Cauchy a, b, c représentant x, y, z , c'est-à-dire telles que $x = \bar{a}$, $y = \bar{b}$ et $z = \bar{c}$.

- (1) **Réflexivité** Pour savoir si $x \geq x$, nous devons nous demander si $x - x \in \bar{\mathcal{E}}^+$. Nous avons $x - x = \bar{a} - \bar{a} = \bar{0} = 0$.

223. Corps totalement ordonné, définition 1.481.

- (2) **antisymétrie** Nous supposons que $x \geq y$ et $y \geq x$. Du côté des suites de Cauchy, cela signifie que $a - b \in \mathcal{E}^+$ et $b - a \in \mathcal{E}^+$. Le lemme 1.529(1) nous indique alors que $a - b = -(b - a) \in \mathcal{E}^-$. Donc

$$a - b \in \mathcal{E}^+ \cap \mathcal{E}^- = \{\bar{0}\}. \quad (1.749)$$

Donc le réel $x - y$ est la classe de la suite constante 0. Le lemme 1.526(2) dit alors que $x - y = 0$ ou encore que $x = y$.

- (3) **transitivité** Nous supposons que $x \leq y$ et $y \leq z$. L'hypothèse $x \leq y$ signifie $y - x \in \bar{\mathcal{E}}^+$ ou encore que $b - a \in \mathcal{E}^+$. Même chose pour $y \leq z$ qui signifie que $c - b \in \mathcal{E}^+$. Nous avons alors

$$c - a = c - b + b - a \quad (1.750a)$$

$$= (c - b) + (b - a) \quad (1.750b)$$

$$\in \mathcal{E}^+ + \mathcal{E}^+ \quad (1.750c)$$

$$\subset \mathcal{E}^+ \quad (1.750d)$$

où nous avons utilisé le lemme 1.529(2). Puisque $c - a \in \mathcal{E}^+$, nous avons $z - x = \overline{c - a} \geq 0$.

- (4) **Ordre total** Nous devons prouver que pour $x, y \in \mathbb{R}$ nous avons toujours $x \leq y$ ou $y \leq x$. Supposons que nous n'ayons pas $x \leq y$, c'est-à-dire $\overline{b - a} \notin \mathcal{E}^+$. Vu le lemme 1.526(3) nous avons $\overline{b - a} \in \mathcal{E}^-$, ce qui donne, par le lemme 1.529(1) que $\overline{a - b} \in \mathcal{E}^+$, c'est-à-dire $y \leq x$.
- (5) **Corps ordonné** Enfin nous devons vérifier les deux conditions de la définition 1.105. Pour la première condition, nous supposons $x \leq y$, c'est-à-dire $b - a \in \mathcal{E}^+$. Nous avons donc

$$(b + c) - (a + c) = b - a \in \mathcal{E}^+, \quad (1.751)$$

donc $\overline{a + c} \leq \overline{b + c}$, c'est-à-dire $x + z \leq y + z$.

Pour la seconde condition, c'est le lemme 1.529(3).

□

Définition 1.534.

Puisque $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné (proposition 1.533), si $x \in \mathbb{R}$, nous définissons $|x|$ conformément à 1.111.

LEMooTJAXooKEqPCG

Lemme 1.535.

L'application

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{R} \\ q &\mapsto \bar{q} \end{aligned} \quad (1.752)$$

dont nous avons déjà parlé dans la proposition 1.523 est strictement croissante.

Démonstration. Nous supposons $q < l$ dans $\mathbb{Q}$. Nous devons montrer que $\bar{q} \leq \bar{l}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que $\bar{q} \leq \bar{l}$ et $\bar{q} \neq \bar{l}$.

Considérons la suite constante $x_n = l - q \in \mathbb{Q}$. Pour tout $\epsilon > 0$ dans $\mathbb{Q}$ nous avons

$$x_n = l - q > 0 > -\epsilon, \quad (1.753)$$

et donc $x_n \in \mathcal{E}^+$. Donc $\overline{l - q} \geq 0$. Cela signifie $\bar{q} \leq \bar{l}$.

D'autre part le lemme 1.524 dit que $\bar{q} = \bar{l}$ uniquement si $q = l$, ce qui est exclu parce que $q < l$. Donc $\bar{q} \neq \bar{l}$.

□

LEMooNHMTooEdtBnQ

Lemme 1.536.

Si $a, b \in \mathbb{R}^+$ satisfont $a + b = 0$, alors $a = b = 0$.

Démonstration. Par hypothèse nous avons $a \in \mathcal{E}^+ \mathcal{E}_0$ et $b \in \mathcal{E}^+ / \mathcal{E}_0$. Nous considérons $x, y \in \mathcal{E}^+$ tels que $a = \bar{x}$ et $b = \bar{y}$. Par 1.521 nous avons $a + b = \overline{x + y}$. L'hypothèse $a + b = 0$ signifie donc que

$$x + y \in \mathcal{E}_0. \quad (1.754)$$

EQooYmZTTooZYuoAaK

Supposons que x n'est pas dans $\mathcal{E}_0$. Alors x ne converge²²⁴ pas vers 0. Par la proposition 1.528, il existe $r > 0$ dans $\mathbb{Q}$ et $N_1 > 0$ dans $\mathbb{N}$ tels que $x_n > r$ pour tout $n > N_1$.

Vu que $y \in \mathcal{E}^+$, il existe $N_2 > 0$ dans $\mathbb{N}$ tel que $y_n > -r/2$ pour tout $n > N_2$.

Donc pour $n > \max\{N_1, N_2\}$ nous avons²²⁵ :

$$x_n + y_n \geq r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} > 0. \quad (1.755)$$

Donc la suite $x + y$ ne peut pas converger vers zéro et nous n'avons pas $x + y \in \mathcal{E}_0$. Contradiction avec (1.754). Nous en déduisons que $a = 0$.

Nous déduisons que $b = 0$ alors immédiatement parce que $a + b = 0$ avec $a = 0$ donne $b = 0$. $\square$

Voici une version dans $\mathbb{R}$ du lemme 1.190.

LEMooKAXFooIPyzJC

Lemme 1.537.

Soient $a > 0$ et $b > 1$ dans $\mathbb{R}$. Nous avons

$$ab > a. \quad (1.756)$$

Remarque 1.538.

Comme déjà mentionné plus haut, à chaque fois que nous parlerons d'un élément de $\mathbb{Q}$ comme étant un élément de $\mathbb{R}$, nous considérons la classe de la suite constante.

PROPooWYPNooCcBERG

Proposition 1.539 ([1]).

Soient $a \leq b$ dans $\mathbb{R}$.

(1) Si $\lambda > 0$ alors $\lambda a \leq \lambda b$.

(2) Si $\lambda < 0$ alors $\lambda a \geq \lambda b$.

LemooYNVOooOwoRwD

Lemme 1.540.

Si $x, y, z \in \mathbb{R}$ avec $x > 0$ sont tels que $z > y/x$ alors $zx > y$.

Démonstration. Nous savons que

$$z - \frac{y}{x} \in \mathcal{E}^+ \setminus \{0\} = \mathcal{E}^{++}. \quad (1.757)$$

Puisque $x \in \mathcal{E}^{++}$, multiplier par x fait rester dans $\mathcal{E}^{++}$:

$$zx - x \frac{y}{x} \in \mathcal{E}^{++}. \quad (1.758)$$

Un représentant de $x \frac{y}{x}$ est la suite $n \mapsto x_n \frac{y_n}{x_n} = y_n$. Donc $x \frac{y}{x} = y$. Cela signifie que $zx - y \in \mathcal{E}^{++}$ et donc que $zx > y$. $\square$

LemooMWOUooVWgaEi

Lemme 1.541.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $p > a$.

Démonstration. Nous allons donner deux preuves différentes de ce lemme.

(1) Première façon

L'élément a de $\mathbb{R}$ admet un représentant (a_n) qui est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$. C'est donc une suite bornée, c'est-à-dire qu'il existe $m, q \in \mathbb{N}$ tels que $|a_n| \leq m/q$ pour tout n (proposition 1.509(2)). Soit M un naturel strictement plus grand que m/q ²²⁶.

La suite de Cauchy $(M - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constituée de rationnels positifs et est donc dans $\mathcal{E}^+$.

La classe de $M - a$ est donc un réel positif²²⁷. Par définition de la relation d'ordre, $M \geq a$.

224. Je rappelle que x et y sont des suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.

225. Notez l'utilisation de la proposition 1.493.

226. Lemme 1.499.

227. Et nous allons d'ailleurs arrêter de toujours préciser « la classe de » lorsque ce n'est pas nécessaire.

(2) Seconde façon

La suite (a_n) est majorée par $\frac{m}{q}$, donc on a dans $\mathbb{Q}$ et pour tout n :

$$a_n \leq \frac{m}{q} = M \leq qM. \quad (1.759)$$

L'application $\varphi: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante, donc

$$\varphi((a_n)) \leq \varphi(qM). \quad (1.760)$$

□

En corolaire, nous avons

LEMooMWOUooVWgbFi

Lemme 1.542.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $q < x$.

Démonstration. Utilisation du lemme précédent avec $a = -x$: on prend $q = -p$. □

ThooKJTTooCaxEny

Théorème 1.543 ([34]).

Le corps $\mathbb{R}$ est archimédien²²⁸.

Démonstration. La proposition 1.533 dit que $\mathbb{R}$ est totalement ordonné. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x > 0$; posons $a = \frac{y}{x}$. Le lemme 1.541 nous donne un $p \in \mathbb{N}$ tel que $p > a$. Nous concluons alors avec le lemme 1.540 :

$$px > ax = \frac{y}{x}x = y. \quad (1.761)$$

□

Le lemme suivant n'est pas loin de dire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, à part que nous n'avons pas encore donné de topologie sur $\mathbb{R}$.

LemooHLHTooTyCZYL

Lemme 1.544.

À propos de rationnels entre des réels.

ITEMooGVTMooQsoTCi

(1) Si $x, y \in \mathbb{R}$ sont tels que $x < y$, alors il existe $s \in \mathbb{Q}$ tel que $x < s < y$.

ITEMooCVDSooAjimCL

(2) Si $\epsilon > 0$ dans $\mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} < \epsilon$.

ITEMooASUXooImjqzK

(3) Si $a \in \mathbb{R}$ vérifie $|a| < \epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$, alors $a = 0$.

Démonstration. Nous avons par hypothèse que $y - x > 0$ et donc le fait que $\mathbb{R}$ soit archimédien (théorème 1.543) nous donne $q \in \mathbb{N}$ tel que $q(y - x) > 1$. Soit

$$E = \{n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \frac{n}{q} \leq x\}. \quad (1.762)$$

Cet ensemble n'est pas vide à cause du lemme 1.542 ; de plus, comme $|x|q \leq n_0$ pour un certain n_0 (à cause du lemme 1.541), l'ensemble E est majoré par n_0 . Donc E possède un plus grand élément²²⁹ p qui vérifie

$$\frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q}. \quad (1.763)$$

De plus $(p+1)/q < y$ parce que

$$\frac{p+1}{q} = \frac{p}{q} + \frac{1}{q} \leq x + \frac{1}{q} < x + y - x = y \quad (1.764)$$

où nous avons utilisé l'inégalité stricte $y - x > \frac{1}{q}$.

228. Définition 1.143.

229. Lemme 1.193.

Nous avons donc

$$x < \frac{p+1}{q} < y, \quad (1.765)$$

et le nombre $(p+1)/q$ convient comme s . Le point (1) est prouvé.

Pour le point (2), par le point (1) nous considérons $s \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < s < \epsilon$. Si $s = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$ nous avons

$$0 < \frac{1}{q} \leq \frac{p}{q} < \epsilon. \quad (1.766)$$

Pour (3), supposons $a \neq 0$. Alors $|a| > 0$. Par le point (1), il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $0 < m < |a|$, ce qui est contraire à l'hypothèse. $\square$

REMOOXOI0ooHjwMvA

Remarque 1.545.

Le lemme 1.544 a également pour conséquence que des ensembles comme $[-1, 1]$ ne sont pas bien ordonnés (définition 1.24). En effet la partie $]0, 1[$ ne possède pas de minimum parce que si $x \in]0, 1[$ alors $0 < x$ et il existe $s \in \mathbb{Q}$ (a fortiori $s \in \mathbb{R}$) tel que $0 < s < x$, c'est-à-dire que x n'est pas un minimum de $]0, 1[$.

Tant que nous y sommes dans les encadrements de réels...

1.546.

Soit $q_0 \in \mathbb{Q}$ tel que $0 \leq q_0 < 1$. On définit alors $d_1 \in \{0, 1\}$ comme valant 1 si $2q_0 \geq 1$ et 0 sinon. Puis on pose $q_1 = 2q_0 - d_1$.

Poursuivant de la sorte, on crée une suite $(d_n)_{n \geq 1}$: c'est le **développement dyadique** de q_0 .

PROPOoSZZBooUmsPeM

Proposition 1.547 ([1]).

Si $q \neq q'$, alors leurs développements dyadiques sont différents.

LEMooRSLIooVrZMxM

Lemme 1.548 ([1]).

Soit q, q' deux rationnels tels que $0 \leq q < q' < 1$. Il existe deux entiers naturels a et N tels que $q < \frac{a}{2^N} < q'$.

Démonstration. On crée les développements dyadiques de q et q' , que l'on note respectivement $(d_n)_{n \geq 1}$ et $(d'_n)_{n \geq 1}$. Notons

$$E = \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } d_n \neq d'_n\}. \quad (1.767)$$

Comme $q \neq q'$, les développements dyadiques sont différents²³⁰, l'ensemble E est non-vide, et il admet un plus petit élément N . Or, $q < q'$, et donc nécessairement $d_N < d'_N$. On construit alors $a = \sum_{i=1}^N d_i 2^i$. $\square$

CorDensiteDyadiques

Corolaire 1.549.

Deux choses.

(1) Pour tous réels x, y tels que $0 \leq x < y \leq 1$, il existe un nombre de la forme $d = a/2^n$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{N}$, $a \leq 2^n$, tel que $x < d < y$.

(2) La partie

$$D = \left\{ \frac{a}{2^b} \text{ tel que } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\} \quad (1.768)$$

est dense dans $\mathbb{R}$.

Ce D est nommé l'ensemble des **fractions dyadiques**.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Le lemme 1.544(1) nous permet de considérer un rationnel q tel que $x < q < y$. Une utilisation combinée de 1.544(2) et de 1.335 permet de choisir n tel que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. Nous posons

$$a = \min\{s \in \mathbb{N} \text{ tel que } \frac{s}{2^n} > q\}. \quad (1.769)$$

230. Proposition 1.547.

Nous avons $a/2^n < q + \epsilon$, sinon prendre $a - 1$ aurait convenu. Nous avons donc

$$x < q \leq \frac{a}{2^n} < a + \epsilon < y. \quad (1.770)$$

En ce qui concerne la densité, soient $r \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$. Nous considérons $n \in \mathbb{N}$ tel que $1/2^n < \epsilon$. Ensuite nous posons

$$a = \min\{a \in \mathbb{N} \text{ tel que } \frac{a}{2^n} \geq r\}. \quad (1.771)$$

Nous avons alors $\frac{a}{2^n} - r < \epsilon$. Cela prouve que $B(r, \epsilon) \cap D \neq \emptyset$. □

LEMooEGYLooCGrDrl

Lemme 1.550 ([1]).

Soient des réels a, b, x, y tels que

$$a \leq x \leq b \quad (1.772)$$

et

$$a \leq y \leq b, \quad (1.773)$$

alors $|x - y| \leq |b - a|$.

LEMooNLGSooSGdvAo

Lemme 1.551.

Si $a \in \mathbb{R}$.

$$(1) \ a^2 \geq 0$$

$$(2) \ a^2 = 0 \text{ si et seulement si } a = 0.$$

Démonstration. Il a trois possibilités : $a < 0$, $a = 0$ et $a > 0$. Nous les faisons une par une.

(1) **Si $a = 0$** Alors en posant $a = \bar{x}$ nous avons $x_n \xrightarrow{\mathbb{Q}} 0$. La définition 1.521 dit que $a^2 = \bar{x}\bar{x} = \overline{xx}$. Mais $(xx)_n \rightarrow 0$. Donc $a^2 = \overline{xx} = \bar{0} = 0$. Nous avons donc prouvé que $a^2 = 0$.

(2) **Si $a > 0$** Nous avons encore $a^2 = \bar{x}\bar{x}$. La proposition 1.528 dit qu'il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $x_n > r$ pour tout n assez grand. Nous avons, pour ces n que $(xx)_n > r^2 > 0$ (utilisation de 1.494), et donc $xx \in \mathcal{E}^+ \setminus \mathcal{E}_0$. Donc $a^2 = \bar{x}\bar{x} > 0$.

(3) **Si $a < 0$** Même raisonnement, mais avec $x_n < r$ pour n assez grand. Ensuite nous avons quand même $(xx)_n > r^2$. □

PROPooRJOWooGbieCA

Proposition 1.552 ([1]).

Si $x, y \geq 0$ dans $\mathbb{R}$, alors

$$|x - y| = \max(|x| - |y|, |y| - |x|). \quad (1.774)$$

LEMooFQMVoDNaTDT

Lemme 1.553.

Soient $a, b, x \in \mathbb{R}$ tels que $a + x = b + x$. Alors $a = b$.

PROPooVIDJooSzXPLP

Proposition 1.554.

Si $a > b$ dans $\mathbb{R}$, alors

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}. \quad (1.775)$$

1.23.3 Complétude

Le théorème 17.135 donne une complétion de tout espace métrique en un espace complet. Il serait tentant de l'utiliser ici pour définir $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$. Cette méthode ne fonctionne cependant pas parce que la démonstration de 17.135 utilise le fait que $\mathbb{R}$ est complet.

LEMooXCVRooOSZYWv

Lemme 1.555.

Nous avons

$$|\varphi(q)| = \varphi(|q|) \quad (1.776)$$

pour tout $q \in \mathbb{Q}$.

Démonstration. Soit $q \in \mathbb{Q}$. Si $q \geq 0$ alors nous avons d'une part $|q| = q$ dans $\mathbb{Q}$, et d'autre part $\varphi(q) \geq 0$ dans $\mathbb{R}$. Donc au final

$$|\varphi(q)| = \varphi(q) = \varphi(|q|). \quad (1.777)$$

Supposons au contraire que $q < 0$. Alors $|q| = -q$ dans $\mathbb{Q}$, mais aussi $\varphi(q) \leq 0$. Donc

$$|\varphi(q)| = -\varphi(q) = \varphi(-q) = \varphi(|q|). \quad (1.778)$$

□

LemmoRTGFooYVstwS

Lemme 1.556 ([34, 1]).

Toute suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ converge dans $\mathbb{R}$ vers le réel qu'elle représente.

Plus précisément, en suivant les notations de 1.522, si (x_k) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, alors

(1) $\varphi(x_k)$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

(2) $\varphi(x_k) \xrightarrow{\mathbb{R}} \bar{x}$.

Ici $\bar{x}$ est la classe de la suite x . C'est donc un élément de $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit (x_n) une suite de Cauchy de $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire que $x_k \in \mathbb{Q}$ pour tout k et qu'elle est de Cauchy. Elle représente un réel $\bar{x} \in \mathbb{R}$, et nous voulons prouver que pour la topologie de $\mathbb{R}$ nous avons $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \bar{x}$.

(1) $\varphi(x_k)$ est de Cauchy

Soit $\epsilon > 0$ dans $\mathbb{R}$. Nous considérons $\epsilon' \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < \epsilon' < \epsilon$. Plus précisément tel que

$$0 < \varphi(\epsilon') < \epsilon. \quad (1.779)$$

Soit $N > 0$ tel que $|x_p - x_q| < \epsilon'$ pour tout $p, q \geq N$. Cela existe parce que (x_k) est dans Cauchy dans $\mathbb{Q}$. Nous avons alors

$$|\varphi(x_p) - \varphi(x_q)| = |\varphi(x_p - x_q)| \quad (1.780a)$$

$$= \varphi(|x_p - x_q|) \quad (1.780b)$$

$$\leq \varphi(\epsilon') \quad (1.780c)$$

$$\leq \epsilon. \quad (1.780d)$$

Justifications :

— Pour (1.780b). C'est le lemme 1.555.

— Pour (1.780c). L'application φ est croissante, lemme 1.535.

Donc la suite $\varphi(x_k)$ est de Cauchy.

(2) $\varphi(x_k) \xrightarrow{\mathbb{R}} \bar{x}$ Nous devons prouver que pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}$, il existe N tel que $n > N$ implique $\varphi(x_n) \in B(\bar{x}, \epsilon)$. Nous allons faire ça en deux parties. D'abord $\epsilon \in \mathbb{Q}$ et ensuite $\epsilon \in \mathbb{R}$.

(2a) Avec $\epsilon \in \mathbb{Q}$ Soit $\epsilon \in \mathbb{Q}$. Puisque x est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, il existe N tel que si $p, n > N$ nous avons

$$x_p - \epsilon < x_n < x_p + \epsilon. \quad (1.781)$$

Ces inégalités sont dans $\mathbb{Q}$. Nous fixons p et nous commençons par écrire plus en détail la première inéquation :

$$x_p - \epsilon - x_n < 0. \quad (1.782)$$

Autrement dit, pour tout n nous avons

$$(\overline{x_p - \epsilon})_n < x_n. \quad (1.783)$$

Pour rappel, la suite $\overline{x_p - \epsilon}$ est la suite constante dans $\mathbb{Q}$. La suite

$$n \mapsto x_n - (\overline{x_p - \epsilon})_n \quad (1.784)$$

est dans $\mathcal{E}^+$. Donc, en vertu de la définition 1.532 nous avons

$$\bar{x} - \overline{x_p - \epsilon} \geq 0. \quad (1.785)$$

Nous pouvons aussi bien écrire

$$\bar{x} \geq \varphi(x_p) - \varphi(\epsilon). \quad (1.786)$$

En prenant l'autre inégalité de (1.781) nous trouvons de la même manière que

$$\bar{x} \leq \varphi(x_p) + \varphi(\epsilon). \quad (1.787)$$

Ces deux inégalités ensemble montrent que

$$\varphi(x_p) \in B(\bar{x}, \varphi(\epsilon)). \quad (1.788)$$

(2b) **Avec** $\epsilon \in \mathbb{R}$ Nous considérons $\epsilon \in \mathbb{R}$ et $\epsilon' \in \mathbb{Q}$ tel que $\varphi(\epsilon') < \epsilon$. Par le point précédent, il existe N tel que $p > N$ implique

$$\varphi(x_p) \in B(\bar{x}, \varphi(\epsilon')). \quad (1.789)$$

Étant donné que $\varphi(\epsilon') < \epsilon$ nous avons

$$\varphi(x_p) \in B(\bar{x}, \varphi(\epsilon')) \subset B(\bar{x}, \epsilon). \quad (1.790)$$

□

PROPooZSQYooWRKNGY

Proposition 1.557.

Soit une suite convergente $x_k \xrightarrow{\mathbb{Q}} q$. Alors

$$\varphi(x_k) \xrightarrow{\mathbb{R}} \varphi(q) \quad (1.791)$$

où φ est la fonction qui à un rationnel fait correspondre la classe de la suite constante correspondante²³¹.

Démonstration. Le fait d'avoir une convergence $x_k \rightarrow q$ dans $\mathbb{Q}$ implique que la suite (x_k) est de Cauchy, par la proposition 1.509(1).

Le lemme 1.556 nous indique que $\varphi(x_k)$ est une suite dans $\mathbb{R}$ qui converge vers $\bar{q}$, la classe de la suite (x_k) .

À prouver : $\varphi(x) = \bar{q}$. Autrement dit, nous devons prouver que la classe de la suite constante $a_k = q$ et la classe de la suite x sont les mêmes.

La suite $(x_k - q)$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ et converge vers zéro par hypothèse. Donc les suites x et (q) sont dans la même classe. □

PROPooFGBOooHiZqbs

Proposition 1.558 ([1]).

Deux choses à propos de suites de rationnels convergeant vers un réel.

ITEMooMAVYooKFtqlx

- (1) Soit un réel x . Il existe une suite de rationnels strictement croissante qui converge vers x .
ITEMooVOVYooFUbccG
- (2) Si de plus $x > 0$, alors la suite (toujours strictement croissante) peut être choisie parmi les rationnels strictement positifs.

Démonstration. Le lemme 1.544 nous sera d'une grande aide. Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe $q_0 \in \mathbb{Q}$ tel que $x - 1 < q_0 < x$. Ensuite nous construisons la suite par récurrence : q_k est choisi tel que $q_{k-1} < q_k < x$. Cela règle le point (1).

Pour (2). Il suffit de faire la même chose, en partant de $0 < q_0 < x$. □

231. Voir les notations en 1.522.

Notez la grande similitude entre ce théorème et le théorème 7.339. Ils ne sont pas équivalents, ne parlent pas exactement du même objet « $\mathbb{R}$ », ni des mêmes notions de suites de Cauchy et de complétude.

THOooUFVJooYJlieh

Théorème 1.559 (Complétude de $\mathbb{R}$, critère de Cauchy[34]).

Nous avons :

- (1) Le corps $\mathbb{R}$ est un corps complet (définition 1.481(3))
- (2) Une suite dans $\mathbb{R}$ est convergente (définition 1.481(2)) si et seulement si elle est de Cauchy (définition 1.481(1)).

Démonstration. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Pour chaque n , il existe par le lemme 1.544 un $y_n \in \mathbb{Q}$ tel que

$$x_n - \frac{1}{n} < y_n < x_n + \frac{1}{n}. \quad (1.792)$$

- (1) (y_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ Nous prouvons que (y_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ (définition 1.481(1)). Vu que (x_n) est de Cauchy pour le corps $\mathbb{R}$, si $\epsilon > 0$ dans $\mathbb{R}$ est donné, il existe n_ϵ tel que si $p, q \geq n_\epsilon$, alors $|x_p - x_q| < \epsilon$.

Nous avons :

$$|y_p - y_q| \leq |y_p - x_p| + |x_p - x_q| + |x_q - y_q| < \frac{1}{p} + \epsilon + \frac{1}{q}. \quad (1.793)$$

En choisissant $N_\epsilon > \max\{n_\epsilon, \frac{1}{\epsilon}\}$ (ce qui est possible par le lemme 1.541), et en prenant $p, q > N_\epsilon$, nous avons

$$|y_p - y_q| \leq 3\epsilon, \quad (1.794)$$

ce qui prouve que (y_p) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, pour la notion de suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.

- (2) Le réel représenté

Puisque (y_p) est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, elle représente un réel que nous notons $\bar{y}$.

- (3) Convergence de (x_n)

Nous prouvons que $x_n \xrightarrow{\mathbb{R}} \bar{y}$.

Nous savons qu'une suite de Cauchy de rationnels converge dans $\mathbb{R}$ vers le réel qu'elle représente, c'est-à-dire : $y_n \xrightarrow{\mathbb{R}} \bar{y}$ où chaque $y_n \in \mathbb{Q}$ est vu comme la suite constante (cela est le lemme 1.556). Autrement dit, pour $\epsilon > 0$, il existe un $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $p > N_\epsilon$ alors $|\bar{y} - y_p| < \epsilon$. Pour un tel p nous avons

$$|\bar{y} - x_p| \leq |\bar{y} - y_p| + |y_p - x_p| \leq \epsilon + \frac{1}{p}. \quad (1.795)$$

Donc dès que p est plus grand que $\max\{N_\epsilon, \frac{1}{\epsilon}\}$, nous avons $|\bar{y} - x_p| < 2\epsilon$, ce qui signifie que la suite (x_n) converge vers $\bar{y}$ dans $\mathbb{R}$.

Ceci achève de prouver que $\mathbb{R}$ est un corps complet.

En ce qui concerne l'équivalence entre les suites convergentes et de Cauchy, nous venons de prouver que toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ est convergente. La réciproque est la proposition 1.508. □

Nous avons terminé avec la construction des réels. Les propriétés topologiques arrivent en la section 9.3. En particulier le théorème 7.339 pour la complétude de $\mathbb{R}$ en tant qu'espace métrique.

LEMooSWBTooSkmhK

Lemme 1.560 ([1]).

Soit $\epsilon > 0$. Si $a, x \in \mathbb{R}$ vérifient $|x - a| < \epsilon$ alors $x < a + \epsilon$ et $x > a - \epsilon$.

1.23.4 Intervalles

Nous avons déjà défini la notion d'intervalle pour un espace totalement ordonné en 1.27. Nous posons quelques notations dans $\mathbb{R}$.

DEFooAQB UooKLChOW

Définition 1.561.

Soient $a \neq b$ dans $\mathbb{R}$. Nous définissons les parties suivantes de $\mathbb{R}$:

- (1) $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } a < x < b\}$
- (2) $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } a \leq x < b\}$
- (3) $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } a < x \leq b\}$
- (4) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } a \leq x \leq b\}$
- (5) $] -\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \leq a\}$
- (6) $] -\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x < a\}$
- (7) $]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x > a\}$
- (8) $[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \geq a\}$.
- (9) $] -\infty, \infty[= \mathbb{R}$.

La proposition 1.572 nous dira que tous les intervalles de $\mathbb{R}$ sont d'une de ces formes.

LEMooCZLZooTtkXgR

Lemme 1.562 ([1]).

Si I et J sont des intervalles, alors $I \setminus J$ est une union de 0, 1 ou 2 intervalles.

PROPooJEXCooHwHAKq

Proposition 1.563 ([1]).

Soient un intervalle I et des intervalles $\{I_k\}_{k=1, \dots, n}$ tels que $I = \bigcup_{k=1}^n I_k$. Alors il existe des intervalles $\{J_i\}_{i=1, \dots, m}$ tels que

- (1) $I = \bigcup_{i=1}^m J_i$,
- (2) les J_i sont disjoints,
- (3) pour tout $i = 1, \dots, m$, il existe un $k = 1, \dots, n$ tel que $J_i \subset I_k$.

Démonstration. Nous posons

$$\begin{cases} A_1 = I_1 \\ A_k = I_k \setminus \bigcup_{l=1}^{k-1} A_l. \end{cases} \quad (1.796a)$$

$$(1.796b)$$

Les A_k sont par construction disjoints. Avec une récurrence utilisant le lemme 1.562, on démontre que si A_k est une union finie disjointe d'intervalles, alors A_{k+1} aussi.

Finalement $I = \bigcup_{k=1}^n A_k$ est donc une union finie d'intervalles disjoints. $\square$

1.23.5 Maximum, supremum et compagnie

Ce n'est un secret pour personne que $\mathbb{R}$ est un ensemble totalement ordonné²³² : il y a des éléments plus grands que d'autres, et mieux : à chaque fois que je prends deux éléments différents dans $\mathbb{R}$, il y en a un des deux qui est plus grand que l'autre. Il n'y a pas d'*æquo* dans $\mathbb{R}$.

La définition du maximum d'une partie est la définition 1.28.

Proposition 1.564.

Soient $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$. Alors nous avons

$$\frac{1}{\min(x_i)} = \max\left(\frac{1}{x_i}\right). \quad (1.797)$$

Démonstration. En effet notons $y = \min(x_i)$. Nous avons alors $1/x_i \leq 1/y$ pour tout i . $\square$

232. Proposition 1.533.

Définition 1.565.

Soit A , une partie de $\mathbb{R}$.

- (1) Un nombre M est un **majorant** de A si M est plus grand que tous les éléments de A : pour tout $x \in A$, $M \geq x$.
- (2) Un nombre m est un **minorant** de A si m est plus petit que tous les éléments de A : pour tout $x \in A$, $m \leq x$.

Nous parlons de majorant ou de minorants stricts lorsque les inégalités sont strictes.

Nous insistons sur le fait que l'inégalité n'est pas stricte. Ainsi, 1 est un majorant de $[0, 1]$. Dès qu'un ensemble a un majorant, il en a plein. Si s majore l'ensemble A , alors $s + 1$, $s + 4$, et $s + \frac{3}{7}$ majorent également A .

Exemple 1.566.

Une petite galerie d'exemples de majorants.

- L'intervalle fermé $[4, 8]$ admet entre autres 8 et 130 comme majorants,
- l'intervalle ouvert $]4, 8[$ admet également 8 et 130 comme majorants,
- 7 n'est pas un majorant de $[1, 5] \cup]8, 32]$,
- 10/10 majore les notes qu'on peut obtenir à un devoir.
- l'intervalle $[4, \infty[$ n'a pas de majorant.

$\triangle$

DefSupeA

Proposition-Définition 1.567 (Least-upper-bound property[104]).

Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$. Il existe un unique élément $M \in \mathbb{R}$ tel que

- (1) $M \geq x$ pour tout $x \in A$,
- (2) pour tout ε , le nombre $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A , c'est-à-dire qu'il existe un élément $x \in A$ tel que $x > M - \varepsilon$.

Cet élément est nommé **supremum** de A et est noté $\sup(A)$. De la même façon, **l'infimum** de A , noté $\inf A$ est l'unique réel $m \in \mathbb{R}$ vérifiant

- (1) $m \leq a$ pour tout $a \in A$,
- (2) pour tout $\epsilon > 0$, le nombre $m + \epsilon$ n'est pas un minorant : il existe $a \in A$ tel que $a \leq m + \epsilon$.

Par convention, si la partie n'est pas bornée vers le haut, nous dirons que son supremum n'existe pas, ou bien qu'il est égal à $+\infty$, suivant les contextes. Pour votre culture générale, sachez toutefois que $\infty \notin \mathbb{R}$.

Démonstration. Nous faisons la preuve pour l'infimum.

(1) Unicité

En ce qui concerne l'unicité, soient m_1 et m_2 , deux infimums de A . Supposons $m_1 > m_2$. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $m_2 < m_2 + \epsilon < m_1$ (c'est le lemme 1.544). Cela prouve que $m_2 + \epsilon$ est un minorant de A et donc que m_2 n'est pas un infimum.

(2) Existence

Soit A , une partie de $\mathbb{R}$. Nous allons trouver son infimum en suivant une méthode de dichotomie. Pour cela nous allons construire trois suites en même temps de la façon suivante. D'abord nous choisissons un point x_0 de A et un point x_1 qui minore A (qui existe par hypothèse) :

$$\begin{aligned} x_0 &\text{ est un élément de } A, \\ x_1 &\text{ est un minorant de } A, \\ a_0 &= x_0 \\ b_0 &= x_1 \\ b_1 &= x_1. \end{aligned} \tag{1.798}$$

Ensuite, nous faisons la récurrence suivante :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2}, \\ a_{n+1} &= \begin{cases} a_n & \text{si } x_{n+1} \text{ minore } A \\ x_{n+1} & \text{sinon,} \end{cases} \\ b_{n+1} &= \begin{cases} x_{n+1} & \text{si } x_{n+1} \text{ minore } A \\ b_n & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.799)$$

Nous allons montrer que (a_n) et (b_n) sont des suites convergentes de même limite et que cette limite est l'infimum de A .

Soit $n \in \mathbb{N}$; il y a deux possibilités. Soit $a_n = a_{n-1}$ et $b_n = x_n$, soit $a_n = x_n$ et $b_n = b_{n-1}$. Supposons que nous soyons dans le premier cas (le second se traite de façon similaire). Alors nous avons

$$\begin{aligned} |a_n - b_n| &= |a_{n-1} - x_n| \\ &= \left| a_{n-1} - \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \right| \\ &= \frac{1}{2} |a_{n-1} - b_{n-1}|, \end{aligned} \quad (1.800)$$

ce qui prouve que $|a_n - b_n| \rightarrow 0$. Nous montrons maintenant que la suite (a_n) est de Cauchy. En effet nous avons

$$|a_n - a_{n-1}| = \begin{cases} 0 \\ |a_n - b_n| \end{cases} \leq \frac{1}{2^n}. \quad (1.801)$$

Il en est de même pour la suite (b_n) . Ce sont deux suites de Cauchy (donc convergentes par la proposition 1.508) qui convergent vers la même limite. Soit ℓ cette limite.

Le nombre ℓ minore A . En effet si $a \in A$ est plus petit que ℓ , les éléments b_n tels que $|b_n - \ell| < |a - \ell|$ ne peuvent pas minorer A . D'autre part, pour tout ϵ , le nombre $\ell + \epsilon$ ne peut pas minorer A . En effet, ℓ est la limite de la suite décroissante (a_n) , donc il existe a_n entre ℓ et $\ell + \epsilon$. Mais a_n ne minore pas A , donc $\ell + \epsilon$ ne minore pas non plus A .

Nous avons prouvé que toute partie minorée de $\mathbb{R}$ possède un infimum.

La preuve que toute partie majorée possède un supremum se fait de la même façon. $\square$

LEMooSSVKooDPhSkq

Lemme 1.568.

Soit une partie A de $\mathbb{R}$. Si M est un majorant de A , alors $M \geq \sup(A)$.

Démonstration. Si $M < \sup(A)$, alors en posant $\epsilon = \sup(A) - M$, le nombre $\sup(A) - \epsilon$ est encore un majorant de A , ce qui est impossible par définition d'un supremum. $\square$

PROPOoGOPOooYyZSuU

Proposition 1.569 ([1]).

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors

ITEMooAQNRooXFnsrA

(1) Si $\lambda \geq 0$, nous avons $\inf(\lambda A) = \lambda \inf(A)$.

ITEMooPCDXooRJraYV

(2) Si $\lambda \geq 0$, nous avons $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$.

ITEMooHPBEooGaKRDf

(3) Si $\lambda \leq 0$, nous avons $\inf(\lambda A) = \lambda \sup(A)$.

(1.802)

Démonstration. En plusieurs parties. Vérification des conditions de la définition 1.567.

(1) **Pour (1)** Nous posons $m = \inf(A)$, et nous prouvons que $\lambda m = \inf(\lambda A)$. Si $a \in A$, alors $m \leq a$ et donc $\lambda m \leq \lambda a$ par la proposition 1.539. Donc λm minore λA .

Vu que $m = \inf(A)$, si $\epsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $m + \epsilon/\lambda \geq a$. Donc, en multipliant par λ , $\lambda m + \epsilon \geq \lambda a$. Et donc $\lambda m + \epsilon$ ne minore pas λA .

- (2) **Pour (2)** Même raisonnement que pour (1)²³³.
- (3) **Pour (3) avec $\lambda = -1$** Nous posons $s = \sup(A)$, et nous pouvons que $-s = \inf(-A)$. Soit $a \in A$. Nous avons $s \geq a$, et donc $-s \leq -a$, de telle sorte que $-s$ minore $-A$. Soit $\epsilon > 0$. Nous voulons un $a \in A$ tel que $-s + \epsilon \geq a$. Vu que $s = \sup(A)$, il existe $a \in A$ tel que $a > s - \epsilon$, et donc, en multipliant par -1 : $-a < -s + \epsilon$.
- (4) **Pour (3), cas général** Nous posons $\lambda = -\lambda'$ avec $\lambda' > 0$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
 \inf(\lambda A) &= \inf(-(\lambda' A)) & (1.803a) \\
 &= -\sup(\lambda' A) & \text{cas } \lambda = -1 \quad (1.803b) \\
 &= -\lambda' \sup(A) & \text{par (2)} \quad (1.803c) \\
 &= \lambda \sup(A). & (1.803d)
 \end{aligned}$$

□

LEMooTRJZooSTuHWs

Lemme 1.570.

Soit une partie bornée A dans $\mathbb{R}$. Si (x_n) est une suite dans A convergente vers $\sup(A)$, alors il existe une sous-suite croissante qui converge également vers $\sup(A)$.

Démonstration. Nous posons $s = \sup(A)$, et nous construisons en parallèle une suite (y_n) et une application $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ par récurrence. D'abord nous posons

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} y_1 = \min\{x_k \text{ tel que } x_k \in B(s, 1)\} \\ \varphi(1) = \min\{k \text{ tel que } x_k = y_1\}. \end{cases} & (1.804a) \\
 & (1.804b)
 \end{aligned}$$

et ensuite la récurrence :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} y_{n+1} = \min\{x_k \text{ tel que } k > \varphi(n), x_k \in B(s, 1/(n+1))\} \\ \varphi(n+1) = \min\{k > \varphi(n) \text{ tel que } x_k = y_{n+1}\}. \end{cases} & (1.805a) \\
 & (1.805b)
 \end{aligned}$$

Voyons que ces définitions fonctionnent. D'abord y_{n+1} est bien défini quelle que soit la valeur $\varphi(n)$ parce qu'à partir d'un certain rang, tous les x_k sont dans $B(s, 1/(n+1))$. De plus (y_n) est bien une suite croissante parce que le minimum est pris sur des ensembles de plus en plus petits. Et enfin $y_n \rightarrow s$ parce que $y_n \in B(s, 1/n)$. □

1.23.5.1 Intervalles

LEMooRMUCooMKiTGr

Lemme 1.571 ([1]).

Soit une partie A de $\mathbb{R}$.

ITEMooIQECooFjJFKz

- (1) Nous supposons que A admette un supremum qui n'est pas dans A . Si x est un élément de A strictement plus petit que $\sup(A)$, alors il existe $y \in A$ tel que $x < y < \sup(A)$.
- (2) Nous supposons que A admette un infimum qui n'est pas dans A . Si x est un élément de A strictement plus grand que $\inf(A)$, alors il existe $y \in A$ tel que $\inf(A) < y < x$.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Par définition 1.567 d'un supremum, le nombre $\sup(A) - \epsilon$ n'est pas un majorant de A . Autrement dit, il existe $y \in A$ tel que $y > \sup(A) - \epsilon$. Vu que $\sup(A)$ est plus grand que tous les éléments de A et qu'il n'est pas lui-même dans A , nous avons aussi $\sup(A) > y$. En mettant bout à bout :

$$x < \sup(A) - \epsilon < y < \sup(A). \quad (1.806)$$

□

PROPooHPMWooQJXCAS

Proposition 1.572 ([1]).

Tous les intervalles²³⁴ de $\mathbb{R}$ sont d'une des formes listées dans la définition 1.561.

233. J'ai pas vraiment vérifié. Écrivez-moi si ça pose problème.

234. Définition 1.27.

Démonstration. Il y a beaucoup de cas, et nous ne les feront pas tous ²³⁵.

- (1) **Si I est borné vers le haut et vers le bas** Il y a 4 possibilités suivant que $\inf(I)$ et $\sup(I)$ soient ou non dans I .
- (2) **Si $\inf(I) \in I$ et $\sup(I) \in I$** Nous prouvons que $I = [\inf(I), \sup(I)]$.
- (2a) **Dans un sens** Si $x \in I$ nous avons $\inf(I) \leq x \leq \sup(I)$ parce que $\inf(I)$ est un minorant de tout élément de I alors que $\sup(I)$ est un majorant de tout élément de I . Donc $x \in [\inf(I), \sup(I)]$.
- (2b) **Dans l'autre sens** Soit $\inf(I) \leq x \leq \sup(I)$. Vu que I est un intervalle et que $\sup(I)$ et $\inf(I)$ sont deux éléments de I , nous avons $x \in I$.
- (3) **$\inf(I) \in I$ et $\sup(I) \notin I$** Nous allons démontrer que $I = [\inf(I), \sup(I)[$.
- (3a) **Dans un sens** Soit $x \in I$. Nous savons (par définition de l'infimum et du supremum) que $\inf(I) \leq x \leq \sup(I)$. Mais nous sommes dans un cas où $\sup(I) \neq x$ parce que $\sup(I)$ n'est pas dans I . Donc

$$\inf(I) \leq x < \sup(I), \quad (1.807)$$

ce qui montre que $I \subset [\inf(I), \sup(I)[$.

- (3b) **Dans l'autre sens** Soit $x \in [\inf(I), \sup(I)[$. Nous utilisons le lemme 1.571(1) : il existe $y \in I$ tel que $\inf(I) \leq x < y < \sup(I)$. Vu que $\inf(I) \in I$, que $y \in I$ et que I est un intervalle, nous avons aussi $x \in I$ et donc $I \subset [\inf(I), \sup(I)[$.
- (4) **$\inf(I) \notin I$ et $\sup(I) \in I$** C'est le même raisonnement, mais en utilisant l'autre partie du lemme.
- (5) **$\inf(I) \notin I$ et $\sup(I) \notin I$** Nous prouvons que $I =]\inf(I), \sup(I)[$.
- (5a) **Dans un sens** Nous avons

$$I \subset \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \inf(I) \leq x \leq \sup(I)\}. \quad (1.808)$$

Mais comme $\inf(I)$ et $\sup(I)$ ne sont pas dans I , nous pouvons les enlever dans le membre de droite :

$$I \subset \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } \inf(I) < x < \sup(I)\} =]\inf(I), \sup(I)[. \quad (1.809)$$

- (5b) **Dans l'autre sens** Si $x \in I$, nous avons $\inf(I) < x < \sup(I)$. En utilisant les deux parties du lemme, nous avons y_1 et y_2 dans I tels que

$$\inf(I) < y_1 < x < y_2 < \sup(I). \quad (1.810)$$

Vu que I est un intervalle, nous en déduisons que $x \in I$.

- (6) **$\inf(I) = -\infty$, $\sup(I) \in I$** Nous prouvons que $I =]-\infty, \sup(I)]$.
- (6a) **Dans un sens** L'inclusion $I \subset \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \leq \sup(I)\}$ est automatique : $\sup(I)$ majore tous les éléments de I .
- (6b) **Dans l'autre sens** Soit $x \leq \sup(I)$. Vu que I n'a pas d'infimum, il existe $y \in I$ tel que $y < x < \sup(I)$. Comme I est un intervalle nous déduisons que $x \in I$.

Je vous laisse voir les autres cas. □

PROPOoBWXyooDcwXrp

Proposition 1.573 ([1]).

Si I est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $I = [a, b]$.

235. Si vous avez un doute, écrivez-moi.

1.23.5.2 Quelques exemples

En matière de notations, le maximum de l'ensemble A est noté $\max A$, le supremum est noté $\sup A$. Le minimum et l'infimum sont notés $\min A$ et $\inf A$.

Exemple 1.574.

Exemples de différence entre majorant, supremum et maximum.

- Le nombre 10 est un supremum, majorant et maximum de l'intervalle fermé $[0, 10]$,
- Le nombre 10 est un majorant et un supremum, mais pas un maximum de l'intervalle ouvert $]0, 10[$,
- Le nombre 136 est un majorant, mais ni un maximum ni un supremum de l'intervalle $[0, 10]$.

△

En utilisant les notations concises, ces différents cas s'écrivent ainsi :

$$10 = \max[0, 10] = \sup[0, 10] \quad 10 = \sup[0, 10[\quad (1.811)$$

Exemple 1.575.

Si on dit qu'un pont s'effondre à partir d'une charge de 10 tonnes, alors 10 tonnes est un *supremum* des charges que le pont peut supporter : si on met 9,99999 tonnes dessus, il tient encore le coup, mais si on ajoute un gramme, alors il s'effondre (on sort de l'ensemble des charges acceptables). △

Exemple 1.576.

Si on dit qu'un pont résiste jusqu'à 10 tonnes, alors 10 tonnes est un *maximum* de la charge acceptable. Sur ce pont-ci, on peut ajouter le dernier gramme. Mais à partir de là, le moindre truc qu'on ajoute, il s'effondre. △

LEMOoWCUXooFqTwDK

Lemme 1.577.

À propos de bornes d'un intervalle dans $\mathbb{R}$.

- (1) La borne inférieure²³⁶ d'un intervalle est son infimum,
- (2) la borne supérieure est le supremum.
- (3) Si de plus l'intervalle est fermé, l'infimum est un minimum et le supremum est un maximum.

Démonstration. Soit I un des intervalles $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$. Nous allons montrer que dans tous ces cas, a est l'infimum de I .

Nous allons prouver que dans tous ces cas, $a = \inf(I)$ en vérifiant les deux conditions de la définition 1.567. D'abord par définition d'un intervalle, pour tout $t \in I$ nous avons $t \geq a$. Première condition vérifiée. Ensuite, nous prenons $\epsilon > 0$. Si $a + \epsilon \geq b$, alors n'importe quel élément de I est plus petit que $a + \epsilon$. Si $a + \epsilon < b$, alors nous avons

$$a < a + \epsilon < b. \quad (1.812)$$

Dans ce cas, le lemme 1.544 donne un réel t tel que $a < t < a + \epsilon < b$. Donc $t \in I$ et $a + \epsilon$ n'est pas un minorant de I . □

Exemple 1.578.

Quelques exemples dans les intervalles.

- (1) $A = [1, 2]$. Tous les nombres plus petits ou égaux à 1 sont minorants, 1 est infimum et minimum. Le nombre 2 est un majorant, le maximum et le supremum.
- (2) $B =]3, \pi[$. Le nombre π est le supremum et est un majorant, mais n'est pas le maximum (parce que $\pi \notin B$). L'ensemble B n'a pas de maximum. Bien entendu, -1000 est un minorant.

Dans les deux cas, le nombre 53 est un majorant. △

Il existe évidemment de nombreux exemples plus vicieux.

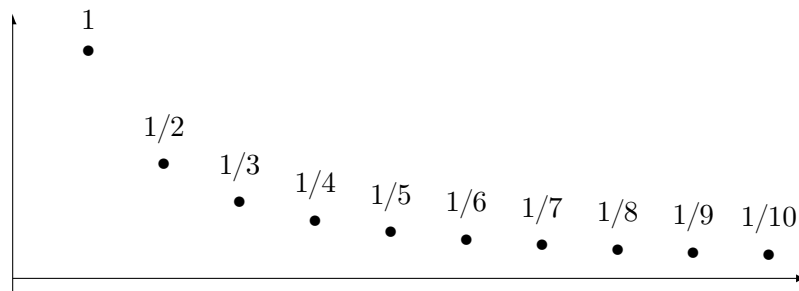
236. Ici par « borne inférieure » nous entendons le a dans les intervalles du type $]a, b]$, $[a, b]$, etc.

Exemple 1.579.

Prenons $E = \{\frac{1}{n} \text{ tel que } n \in \mathbb{N}_0\}$, dont les premiers points sont indiqués sur la figure 1.1. Cet ensemble est constitué des nombres $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$. Le plus grand d'entre eux est 1 parce que tous les nombres de la forme $\frac{1}{n}$ avec $n \geq 1$ sont plus petits ou égaux à 1. Le nombre 1 est donc maximum de E .

L'ensemble E n'a par contre pas de minimum parce que tout élément de E s'écrit $\frac{1}{n}$ pour un certain n et est plus grand que $\frac{1}{n+1}$ qui est également dans E .

Prouvons que zéro est l'infimum de E . D'abord, tous les éléments de E sont strictement positifs, donc zéro est certainement un minorant de E . Ensuite, nous savons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un n tel que $\frac{1}{n}$ est plus petit que ε . L'ensemble E possède donc un élément plus petit que $0 + \varepsilon$, et zéro est bien l'infimum. $\triangle$

FIGURE 1.1: Les premiers points du type $x_n = 1/n$.

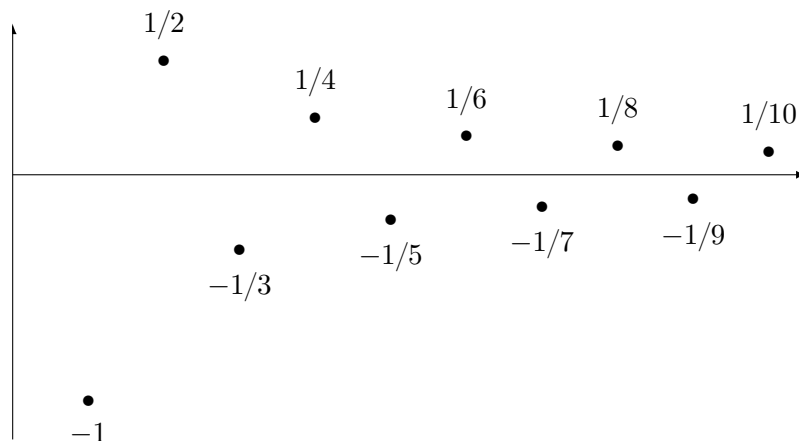
LabelFigSuiteUnSurn

L'exemple suivant est une source classique d'erreurs en ce qui concerne l'infimum.

Exemple 1.580.

Les premiers points de l'ensemble $F = \{\frac{(-1)^n}{n} \text{ tel que } n \in \mathbb{N}_0\}$ sont représentés à la figure 1.2. Bien que (comme nous le verrons plus tard) la limite de la suite $x_n = (-1)^n/n$ soit zéro, il n'est pas correct de dire que zéro est l'infimum de l'ensemble F . Le dessin, au contraire, montre bien que -1 est le minium (aucun point est plus bas que -1), tandis que le maximum est $1/2$.

Nous reviendrons avec cet exemple dans la suite. Pour l'instant, ayez bien en tête que zéro n'est rien de spécial pour l'ensemble F en ce qui concerne les notions de maximum, minimum et compagnie. $\triangle$

FIGURE 1.2: Les quelques premiers points du type $(-1)^n/n$.

LabelFigSuiteInverseAlterne

1.23.6 Racines

SUBSECooMBCNooEqjjTY

Dans cette section, nous définissons $\sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{Q}^+$. Vous notez que c'est fait de façon assez algébrique²³⁷, ou en tout cas, en restant proche des définitions. Des définitions plus technologiques utilisant la continuité de $x \mapsto x^n$ et qui prouvent que l'application est bijective sur un domaine choisi avec prudence existent (voir la définition 1.2.405). Il est même expliqué dans [99] que la méthode décrite ici permet de définir $\sqrt[n]{x}$ pour tout n entier, et pas seulement pour $n = 2$.

PROPooUHKFooVKmpte

Proposition 1.581.

Soit $q \in \mathbb{Q}^+$. Il existe un unique $r \in \mathbb{R}$ tel que $r^2 = q$.

Plus précisément, en termes des notations de 1.522, pour tout $q \in \mathbb{Q}^+$, il existe un unique $r \in \mathbb{R}^+$ tel que $r^2 = \varphi(q)$.

Démonstration. En deux parties : d'abord l'existence et ensuite l'unicité.

- (1) **Existence** Si $q = 0$, c'est $r = 0$. Nous supposons $q > 0$. La suite (x_k) de la proposition 1.515 a la propriété d'être de Cauchy dans $\mathbb{Q}$. Donc il existe un réel r qui est la classe de cette suite. Nous posons donc

$$r = \bar{x}. \quad (1.813)$$

En ce qui concerne r^2 , nous avons, par définition du produit dans $\mathbb{R}$,

$$r^2 = \bar{x}^2 = \overline{(x_k^2)}, \quad (1.814)$$

EQooPHLFooAZhebM

c'est la classe de la suite de Cauchy donnée par les x_k^2 . Posons $y_k = x_k^2$; la relation (1.814) s'écrit

$$r^2 = \bar{y}. \quad (1.815)$$

La proposition 1.515 nous dit également que y est une suite de Cauchy et que

$$y_k \xrightarrow{\mathbb{Q}} q \quad (1.816)$$

La proposition 1.557 donne alors $\bar{y} = \bar{q}$, et finalement

$$r^2 = \bar{q} = \varphi(q). \quad (1.817)$$

Ici tout n'est pas encore terminé avec l'existence parce qu'il faut nous assurer que $r \geq 0$. Ce n'est pas très compliqué : si $r < 0$, alors nous pouvons faire le choix $-r$ qui convient tout aussi bien : $(-r)^2 = r^2$.

- (2) **Unicité** Supposons $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tels que $r_1^2 = r_2^2$. La proposition 1.533 dit que $\mathbb{R}$ est totalement ordonné ; disons pour fixer les idées que $r_1 \leq r_2$. Cela signifie, par définition de l'ordre sur $\mathbb{R}$, que $r_2 - r_1 \geq 0$. En posant $s = r_2 - r_1$ nous avons $r_2 = r_1 + s$. Passons au carré ; la distribution dans le calcul suivant provient du fait que $\mathbb{R}$ est un corps :

$$r_2^2 = (r_1 + s)^2 = r_1^2 + 2r_1s + s^2. \quad (1.818)$$

Vu que $r_1^2 = q = r_2^2$, nous avons $2r_1s + s^2 = 0$ ou encore

$$s(2r_1 + s) = 0. \quad (1.819)$$

Puisque $\mathbb{R}$ est un corps, c'est un anneau intègre²³⁸ et la règle du produit nul s'applique : soit $s = 0$, soit $2r_1 + s = 0$. Puisque $r_2 > 0$ et que $s \geq 0$, nous avons $2r_1 + s > 0$ et donc $s = 0$.

Nous en déduisons que $r_1 = r_2$.

□

237. Discutable parce que des limites sont utilisées.

238. Lemme 1.327.

1.23.7 Partie entière, partie fractionnaire

LEMooLEXTooGAQxGB

Lemme-Définition 1.582 ([105]).

Pour tout réel x , il existe un unique entier n vérifiant

$$n \leq x < n + 1. \quad (1.820)$$

Dans ce cas nous avons $x - n \in [0, 1[$.

Le nombre n ainsi défini est la **partie entière** de x , et il sera noté $\text{int}(x)$. Le nombre $x - \text{int}(x)$ est la **partie fractionnaire** de x que nous notons $\text{frac}(x)$.

Démonstration. En plusieurs parties.

- (1) **Existence** Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous posons $A = \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \leq x\}$. Le lemme 1.541 dit qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $p > x$. Donc $A \subset \{0, \dots, p\}$ et A est fini.

Le lemme 1.208 dit alors que A possède un maximum. En posant $n = \max(A)$ nous avons $n \leq x$ mais aussi $x < n + 1$ parce que si $x \leq n + 1$ nous aurions $n + 1 \in A$, et n ne serait pas le maximum.

- (2) **Unicité** Supposons que m et n aient les propriétés d'être une partie entière de x . Nous avons

$$\begin{cases} n \leq x & \text{EQooBVZLooQGJgTm} & (1.821a) \\ x < n + 1 & \text{EQooLXPSooEkiSee} & (1.821b) \\ m \leq x & \text{EQooJQTDooSUowIT} & (1.821c) \\ x < m + 1 & \text{EQooPFJWooPoeyoT} & (1.821d) \end{cases}$$

Supposons pour fixer les idées que $m \geq n$. Nous avons

$$m - n \leq x - n \quad \text{par (1.821c)} \quad (1.822a)$$

$$< n + 1 - n \quad \text{par (1.821b)} \quad (1.822b)$$

$$= 1 \quad (1.822c)$$

Donc $m - n$ est un entier positif strictement inférieur à 1. Donc $m - n = 0$.

- (3) **L'encadrement** En partant de $n \leq x < n + 1$ et en soustrayant n à tous les membres, nous trouvons $0 \leq x - n < 1$, qui signifie $x - n \in [0, 1[$. □

1.583.

Il est toutefois à noter que la partie fractionnaire de x n'est pas garantie d'être une fraction : elle pourrait être irrationnelle. Cette dénomination est donc un peu trompeuse.

LEMooMMSAooFiRkQd

Lemme 1.584.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ n'est pas un entier, alors $\text{int}(\lambda) + 2 > \lambda$.

1.23.8 Le tore

DEFooRWLLooHkdFDN

Définition 1.585 ([1]).

Nous considérons la relation d'équivalence $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$. Et la relation $(x, y) \sim (x', y')$ si $x - x' \in \mathbb{Z}$ et $y - y' \in \mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}^2$.

DEFooTSSTooOFPxzu

Définition 1.586 ([1]).

Le **tore** de $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble $\mathbb{R}^2 / \sim$. Nous le notons T .

Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \tau: \mathbb{R} &\rightarrow]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ x &\mapsto \begin{cases} \text{frac}(x) & \text{si } \text{frac}(x) \leq 1/2 \\ \text{frac}(x) - 1 & \text{si } \text{frac}(x) < 1/2 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.823)$$

où $\text{frac}: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1[$ est la partie fractionnaire définie par le lemme 1.582. Nous posons aussi

$$\begin{aligned} \tau: \mathbb{R}^2 &\rightarrow]\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ (x, y) &\mapsto (\tau(x), \tau(y)). \end{aligned} \quad (1.824)$$

Notez que si $y = x + k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, nous avons $\tau(y) = \tau(x)$, donc nous pouvons poser

$$\begin{aligned} \tau: \mathbb{R}/\sim &\rightarrow]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ [x] &\mapsto \tau(x). \end{aligned} \quad (1.825)$$

Et enfin nous posons

$$\begin{aligned} \tau: T &\rightarrow]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ [(x, y)] &\mapsto (\tau(x), \tau(y)). \end{aligned} \quad \text{EQooCRZHooMNPBDoo} \quad (1.826)$$

Tout cela pour rapporter le tore au carré de côté 1 centré en $(0, 0)$.

Proposition 1.587 ([1]).

Soit $x \in \mathbb{R}$. Parmi les éléments de $A_x = \{x + k \text{ tel que } k \in \mathbb{Z}\}$, l'élément le plus proche de 0 est $\tau(x)$.

Démonstration. Nous avons $\tau(x) \in]-1/2, 1/2]$. Nommons y l'élément de A_x le plus proche de zéro. Si $1/2 \in A_x$, alors c'est lui le plus proche : $y = 1/2$. Dans ce cas nous avons $|\tau(x)| \leq 1/2 = y$.

Si $1/2$ n'est pas dans A_x , alors l'hypothèse $|y| \leq |\tau(x)|$ donne $|y| < 1/2$. Nous avons alors

$$|\tau(x) - y| \leq |\tau(x)| + |y| < 1, \quad (1.827)$$

ce qui est impossible parce que $\tau(x) - y \in \mathbb{Z}$. □

Lemme 1.588 ([1]).

Pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in T$ nous avons

$$d(\alpha + \gamma, \beta + \gamma) = d(\alpha, \beta). \quad (1.828)$$

Démonstration. Soient $x \in \alpha$, $y \in \beta$ et $z \in \gamma$. Nous avons $\alpha + \gamma = [a + z]$ et $\beta + \gamma = [b + z]$, de telle sorte que

$$d(\alpha + \gamma, \beta + \gamma) = \inf_{\substack{a \in \alpha + \gamma \\ b \in \beta + \gamma}} f(a, b) \quad (1.829a)$$

$$= \inf_{\substack{k \in \mathbb{Z}^2 \\ l \in \mathbb{Z}^2}} d(a + z + k, b + z + l) \quad (1.829b)$$

$$= \inf_{\substack{k \in \mathbb{Z}^2 \\ l \in \mathbb{Z}^2}} d(a + k, b + l) \quad (1.829c)$$

$$= d(\alpha, \beta). \quad (1.829d)$$

□

Lemme 1.589 ([1]).

Soit $\beta \in T$. Nous avons

$$d(0, \beta) = d(0, \tau(\beta)) \quad (1.830)$$

où à gauche nous avons la « distance »²³⁹ sur T et à droite nous avons la distance usuelle sur $\mathbb{R}^2$.

239. Qui n'en est pas une d'ailleurs.

Démonstration. Nous choisissons $b \in \beta$ et nous avons

$$d(0, \beta) = \min_{\substack{k \in \mathbb{Z}^2 \\ l \in \mathbb{Z}^2}} d(k, b + l) \quad (1.831a)$$

$$= \min_{\substack{k \in \mathbb{Z}^2 \\ l \in \mathbb{Z}^2}} f(0, b - k + l) \quad (1.831b)$$

$$= \min_{k \in \mathbb{Z}^2} f(0, b + k) \quad (1.831c)$$

$$= d(0, \tau(b)) \quad \text{prop. 1.587} \quad (1.831d)$$

$$= d(0, \tau(\beta)). \quad (1.831e)$$

□

1.24 Les complexes

La notion de module d'un nombre complexe $|z|$ sera donnée beaucoup plus tard, dans le lemme 9.103. La raison est que le module demande la racine carrée.

Définition 1.590 (Nombres complexes[106]).

L'ensemble des **nombres complexes** $\mathbb{C}$ est l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des opérations suivantes :

(1)

$$\begin{aligned} \times_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ ((x, y), (x', y')) &\mapsto (xx' - yy', xy' + yx') \end{aligned} \quad \text{EQooIJWOooZBiKEW} \quad (1.832)$$

(2)

$$\begin{aligned} +_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ ((x, y), (x', y')) &\mapsto (x + x', y + y') \end{aligned} \quad (1.833)$$

(3)

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\lambda, (x, y)) &\mapsto (\lambda x, \lambda y). \end{aligned} \quad (1.834)$$

Lemme 1.591.

Le triplet $(\mathbb{C}, +_{\mathbb{C}}, \times_{\mathbb{C}})$ est un anneau²⁴⁰ commutatif dont le neutre pour l'addition est $(0, 0)$ et le neutre pour la multiplication est $(1, 0)$.

Démonstration. Ce ne sont que des calculs. Juste pour vous montrer, voici la première partie pour l'associativité :

$$((a, b)(x, y))(s, t) = (ax - by, ay + bx)(s, t) \quad (1.835a)$$

$$= (axs - bys - ayt - bxt, axt - byt + ays + bxs). \quad (1.835b)$$

Nous avons utilisé la distributivité sur $\mathbb{R}$, provenant du fait que $\mathbb{R}$ est un corps par le théorème 1.521. □

LEMooXTDDooFAjWRm

Lemme 1.592.

L'anneau $\mathbb{C}$ est un corps.

Démonstration. Il suffit de trouver un inverse pour chaque élément non nul. Soit un élément non nul $(a, b) \in \mathbb{C}$. En combinant les lemmes 1.536 et 1.551 nous savons que $a^2 + b^2 > 0$. En particulier, cet élément est inversible dans $\mathbb{R}$, et nous pouvons considérer l'élément suivant de $\mathbb{C}$:

$$z = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right). \quad (1.836)$$

Prouver que $z(a, b) = (1, 0)$ est maintenant juste un calcul. □

240. Définition 1.90.

Lemme 1.593.*L'application*

$$\begin{aligned}\varphi: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto (x, 0)\end{aligned}\tag{1.837}$$

*est un morphisme d'anneaux*²⁴¹.*Démonstration.* Simples calculs. Par exemple

$$\varphi(xx') = (xx', 0) = (x, 0)(x', 0) = \varphi(x)\varphi(x').\tag{1.838}$$

□

1.594.

Admirez ...

- Un nombre complexe est un couple de réels.
- Un réel est une classe d'équivalence de suites de Cauchy de rationnels.
- Une suite de Cauchy de rationnels est une application $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ vérifiant certaines propriétés.
- Un rationnel est une classe d'équivalences d'éléments de $\mathbb{Z}$.
- Un élément de $\mathbb{Z}$ est une classe d'équivalence de couples de naturels.
- Un naturel sera ... là c'est plus compliqué. Une construction vraiment rigoureuse des naturels risque d'être en dehors du cadre du Frido.

Bref, les objets que nous manipulons sont d'une effroyable complexité.

1.595.À partir de maintenant, lorsque nous parlons de $\mathbb{R}$, nous parlons en réalité de $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{C}$.**Lemme 1.596.***Nous avons $(0, 1)^2 = (-1, 0)$. Nous notons $i = (0, 1)$.**Démonstration.* Calcul direct à partir de la définition 1.832.

□

DEFooQDDVooRYDsAJ

Définition 1.597.*Si $z = a + bi$ est un nombre complexe (avec $a, b \in \mathbb{R}$), son **complexe conjugué** est le nombre $a - bi$.*

L'étude de la série géométrique est reportée à (beaucoup) plus tard, à la proposition 10.159. Dans l'immédiat il nous est possible de calculer la somme partielle.

LEMooAFSCooWEVlvp

Lemme 1.598 (Somme partielle de la série géométrique).*Soit $q \in \mathbb{C}$. Nous avons*

$$\sum_{n=0}^N q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}.\tag{1.839}$$

Démonstration. Posons $S_N = 1 + q + \dots + q^N$. Nous avons évidemment $S_N - qS_N = 1 - q^{N+1}$ et donc

$$S_N = \sum_{n=0}^N q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}.\tag{1.840}$$

□

EqASYTYCK

1.24.1 Norme et inégalités

Rien ici. La norme sur $\mathbb{C}$ demande la racine carrée qui sera vue plus tard. Voir par exemple la proposition 10.2 pour $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Si vous cherchez des propriétés de la valeur absolue, c'est la proposition 1.112.

241. Définition 1.96.

Chapitre 2

Théorie des groupes

Pour rappel, la notion de groupe est définie en 1.83.

LEMooQYETooZsTFMg

Lemme 2.1 ([1]).

Soient un groupe G ainsi qu'une partie $S \subset G$. Nous notons $i: G \rightarrow G$ l'application $x \mapsto x^{-1}$. Si nous posons $W = A \cap i(A)$, alors $W = W^{-1}$.

Démonstration. Nous montrons que $W^{-1} \subset W$. Un élément de W^{-1} est de la forme x^{-1} avec $x \in W$. Nous avons

$$x \in W \Rightarrow x \in i(A) \Rightarrow x^{-1} \in A, \quad (2.1)$$

et

$$x \in W \Rightarrow x \in A \Rightarrow x^{-1} \in i(A). \quad (2.2)$$

Nous avons prouvé que $x^{-1} \in A \cap i(A) = W$. □

2.1 Groupe dérivé

DEFooVHZAooUgmesE

Définition 2.2.

Si G est un groupe et si $g, h \in G$, nous notons $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ le **commutateur** de g et h .

L'élément neutre est toujours un commutateur : pour $g = h$, $[g, g] = ggg^{-1}g^{-1} = e$.

DEFooBNLPooShKYYa

Définition 2.3.

Le **groupe dérivé** de G est le sous-groupe noté $D(G)$ ou $[G, G]$ engendré¹ par les commutateurs.

Autrement dit, $D(G)$ est l'intersection de tous les sous-groupes de G contenant tous les commutateurs. Le groupe $D(G)$ contient toujours au moins le neutre parce que c'est un groupe.

En vertu du lemme 1.425, le groupe dérivé de G est l'ensemble des produits finis de commutateurs. C'est-à-dire que si S_m est l'ensemble des produits de m commutateurs, alors

$$D(G) = \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m. \quad (2.3)$$

LemMMOCooDJJJhy

Lemme 2.4.

Le groupe dérivé est un sous-groupe caractéristique², et un sous-groupe normal³.

Démonstration. Il est évident que si $\alpha \in \text{Aut}(G)$ alors

$$\alpha([g, h]) = [\alpha(g), \alpha(h)], \quad (2.4)$$

1. Définition 1.420.

2. Définition 1.258.

3. Définition 1.257.

c'est-à-dire que $D(G)$ est un sous-groupe caractéristique. En particulier si c est un commutateur, alors xcx^{-1} en est encore un, ce qui montre que $D(G)$ est normal dans G . Plus spécifiquement,

$$x(ghg^{-1}h^{-1})x^{-1} = (xgx^{-1})(xhx^{-1})(xg^{-1}x^{-1})(xh^{-1}x^{-1}) \quad (2.5a)$$

$$= (xgx^{-1})(xhx^{-1})(xgx^{-1})^{-1}(xhx^{-1})^{-1}. \quad (2.5b)$$

□

PropAPRGooHBkELf

Proposition 2.5.

Le groupe quotient $G/D(G)$ est abélien.

Démonstration. En ce qui concerne le fait que $G/D(G)$ soit abélien, nous savons que pour tout $g, h \in G$ nous avons $h^{-1}g^{-1}hg \in D(G)$ et donc

$$[g][h] = [gh] = [ghh^{-1}g^{-1}hg] = [hg] = [h][g]. \quad (2.6)$$

□

Le groupe quotient $G/D(G)$ est appelé l'**abélianisé** de G et est parfois noté G^{ab} .

Si $f: G \rightarrow A$ est un morphisme entre le groupe G et un groupe abélien A , alors $f(D(G)) = \{0\}$. Du coup f passe au quotient de G par $D(G)$, et il existe une unique application $\bar{f}: G/D(G) \rightarrow A$ telle que $f = \bar{f} \circ \pi$ où $\pi: G \rightarrow G/D(G)$ est la projection canonique.

2.2 Théorèmes d'isomorphismes

DEFooWBIYooGNRYOp

Définition 2.6.

Soient un groupe G , un ensemble X et une application $f: X \rightarrow G$. Le **noyau** de f est la partie

$$\ker(f) = \{x \in X \text{ tel que } f(x) = e\} \quad (2.7)$$

où e est l'élément neutre de G .

Si G est un groupe et si N est un sous-groupe normal, alors l'ensemble G/N a une structure de groupe et la projection canonique $\pi: G \rightarrow G/N$ est un morphisme surjectif de noyau N .

ThoPremierthoisomo

Théorème 2.7 (Premier théorème d'isomorphisme).

Soit $\theta: G \rightarrow H$ un morphisme de groupe. Alors

- (1) $\ker(\theta)$ est normal dans G ,
- (2) $\text{Image } \theta$ est un sous-groupe de H
- (3) nous avons un isomorphisme

ItemWLCldk

$$\frac{G}{\ker(\theta)} \simeq \text{Image } \theta \quad (2.8)$$

Démonstration. Point par point.

- (1) Le fait que $\ker(\theta)$ soit un sous-groupe de G est clair ; montrons qu'il est normal. Si $g \in G$ et $u \in \ker(\theta)$, alors $\theta(g^{-1}ug) = \theta(g^{-1})\theta(u)\theta(g) = (\theta(g))^{-1}\theta(g) = 1_H$, et donc $g^{-1}ug \in \ker(\theta)$.
- (2) Il suffit de remarquer que si $h = \theta(g)$ et $h' = \theta(g')$, alors $h^{-1}h' = \theta(g^{-1}g')$.
- (3) Si $[g]$ représente la classe de g dans $G/\ker(\theta)$, l'isomorphisme est donné par $\varphi([g]) = \theta(g)$.

□

THOooURXUooQJvkjx

Théorème 2.8 (Deuxième théorème d'isomorphisme).

Soient H et N deux sous-groupes de G et supposons que N soit normal⁴. Alors

- (1) $NH = HN$ est un sous-groupe.

4. Si N n'est pas normal, il y aura la proposition 2.9.

- (2) Le groupe N est normal dans NH .
 (3) Le groupe $N \cap H$ est normal dans H .
 (4) Nous avons l'isomorphisme

$$\frac{HN}{N} \simeq \frac{H}{H \cap N}. \quad (2.9)$$

Démonstration. Point par point.

- (1) Il est clair que $1_G \in NH$. Soient nh et $n'h'$ deux éléments de NH ; alors en tenant compte du fait que N est normal,

$$nhn'h' = n \underbrace{hn'h^{-1}}_{\in N} hh' \in NH. \quad (2.10)$$

Cela prouve que NH est un groupe.

De la même façon, nous prouvons que HN est un groupe par

$$hnh'n' = hh' \underbrace{h'^{-1}nh'}_{\in N} n' \in HN \quad (2.11)$$

Nous devons encore prouver que $HN = NH$. Pour cela, $nh \in HN$, car $nh = hh^{-1}nh$, les trois derniers facteurs formant un élément de N par normalité; de même $hn \in NH$, montrant que $NH = HN$. Enfin, comme $(nh)^{-1} = h^{-1}n^{-1}$, les inverses de NH sont dans $HN = NH$.

- (2) N est normal dans G , a fortiori dans l'un de ses sous-groupes.
 (3) Il suffit de voir que, si $h \in H$ et $n \in N \cap H$, alors $hnh^{-1} \in N \cap H$. Or, $hnh^{-1} \in H$ puisque H est un sous-groupe; et $hnh^{-1} \in N$ car N est un sous-groupe normal de G .
 (4) Il faut d'abord remarquer que H et N étant des groupes et le produit NH étant un groupe, nous avons $NH = HN$. Soit le morphisme injectif

$$\begin{aligned} j: H &\rightarrow HN \\ h &\mapsto h \end{aligned} \quad (2.12)$$

et la surjection canonique

$$\sigma: HN \rightarrow HN/N \quad (2.13)$$

Nous considérons ensuite l'application composée

$$\begin{aligned} f: H &\rightarrow HN/N \\ h &\mapsto hN. \end{aligned} \quad (2.14)$$

- (4a) **f est surjective** L'application f est surjective parce que l'élément $hN \in HN/N$ est l'image de h , étant donné que $hN = hN$.
 (4b) $\ker(f) = H \cap N$ Si $a \in H \cap N$, nous avons $f(a) = aN = N$, et donc $H \cap N \subset \ker(f)$. D'autre part, si $h \in H$ vérifie $h \in \ker(f)$, alors $f(h) = hN = N$, ce qui est uniquement possible lorsque $h \in N$.

Le premier théorème d'isomorphisme⁵ implique alors que $H/\ker(f) \simeq \text{Image } f$, c'est-à-dire

$$H/N \cap H \simeq HN/N. \quad (2.15)$$

□

PROPOVBGMooPTlyLF

Proposition 2.9 (Deuxième théorème d'isomorphisme (suite)).

Soient N et H des sous-groupes de G . Si H normalise N , c'est-à-dire si $hNh^{-1} \in N$ pour tout $h \in H$, alors nous avons l'isomorphisme

$$\frac{HN}{N} \simeq \frac{H}{H \cap N}. \quad (2.16)$$

5. Théorème 2.7.

ThoezgBep

Théorème 2.10 (Troisième théorème d'isomorphisme).

Soient N et M deux sous-groupes normaux de G avec $M \subset N$. Alors N/M est normal dans G/M et

$$(G/M)/(N/M) \simeq G/N. \quad (2.17)$$

Démonstration. Afin de montrer que N/M est normal dans G/M , nous considérons $g \in G$, $nM \in N/M$ et nous calculons

$$gnMg^{-1} = gng^{-1} \underbrace{gMg^{-1}}_{=M} = \underbrace{gng^{-1}}_{\in N} M \in N/M. \quad (2.18)$$

Pour prouver l'isomorphisme nous considérons le morphisme

$$\begin{aligned} \varphi: G/M &\rightarrow G/N \\ gM &\mapsto gN. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ce morphisme est surjectif et son noyau est N/M , parce que $\varphi(gM) = N$ uniquement si $g \in N$. Nous pouvons appliquer le premier théorème d'isomorphisme à φ en écrivant

$$(G/M)/\ker(\varphi) \simeq \text{Image } \varphi, \quad (2.20)$$

c'est-à-dire

$$(G/M)/(N/M) \simeq G/N. \quad (2.21)$$

□

2.3 Indice d'un sous-groupe et ordre des éléments

LEMooFNVRooRCkjLc

Lemme 2.11.

Lorsque H est normal dans G , alors la définition

$$[a] \cdot [b] = [ab] \quad (2.22)$$

EQooEUESooSeUWHK

définit une loi de groupe sur l'ensemble G/H .

Démonstration. Le neutre est $[e]$ et l'associativité ne pose pas plus de problème que l'existence d'un inverse. Le point à vérifier est que la formule (2.22) est une bonne définition : $[ah] \cdot [bh'] = [ab]$ pour tout $h, h' \in H$. Nous avons :

$$[ah] \cdot [bh'] = [ahbh'] = [ahb]. \quad (2.23)$$

Pour montrer que c'est $[ab]$, l'astuce est d'introduire bb^{-1} à côté du a :

$$[ahb] = [abb^{-1}hb] = [ab] \quad (2.24)$$

parce que $b^{-1}hb \in H$ du fait que H soit normal dans G . □

EXooFNiKooHxePSs

Exemple 2.12 ([107]).

Il ne faudrait pas croire que le groupe quotient G/H est forcément un sous-groupe de G . Par exemple le quotient $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est l'ensemble $\{0, 1\}$ muni de l'addition. En particulier $1 + 1 = 0$, ce qui est évidemment faux dans $\mathbb{Z}$. Le groupe $(\mathbb{Z}, +)$ ne possède aucun élément d'ordre 2.

Il n'en est pas moins vrai que l'application

$$\begin{aligned} f: G &\rightarrow G/H \\ g &\mapsto [g] \end{aligned} \quad (2.25)$$

est un morphisme de groupes. △

DEFooMPIAooIeZNaR

Définition 2.13.

Si H est un sous-groupe d'un groupe fini, l'**indice** de H dans G est le nombre $|G|/|H|$, souvent noté $|G : H|$.

Le théorème de Lagrange dira en particulier que l'indice est toujours un nombre entier. C'est à ne pas confondre avec le degré d'une extension de corps (définition 6.61).

ThoLagrange

Théorème 2.14 (Théorème de Lagrange).

Soit H un sous-groupe du groupe fini G . Alors

ITEMooDPKSooNpOusd

- (1) L'ordre de H divise l'ordre de G .
- (2) Les trois nombres suivants sont égaux :
 - le nombre de classes de H à gauche,
 - le nombre de classes de H à droite,
 - l'indice de H dans G .

En particulier si H est distingué dans G , nous avons

$$|G/H| = \frac{|G|}{|H|}. \quad (2.26)$$

Démonstration. Nous commençons par montrer que les classes de H ont toutes le même nombre d'éléments que H . En effet pour chaque $g \in G$ nous avons la bijection

$$\begin{aligned} \varphi: H &\rightarrow gH \\ h &\mapsto gh. \end{aligned} \quad (2.27)$$

L'injectivité de φ est le fait que $gh = gh'$ implique $h = h'$. La surjectivité est par définition de la classe.

Les classes à gauche formant une partition de G , le cardinal de G est le produit de la taille des classes par le nombre de classes :

$$|G| = |H| \cdot \text{nombre de classes}. \quad (2.28)$$

En particulier nous voyons que $|H|$ divise $|G|$.

La dernière formule exprime simplement que G/H est par définition le nombre de classes de H à gauche (ou à droite) dans G . $\square$

CorpZItFX

Corolaire 2.15.

L'ordre d'un élément⁶ d'un groupe fini divise l'ordre du groupe. En particulier dans un groupe d'ordre n tous les éléments vérifient $g^n = e$.

Démonstration. Soit G un groupe fini et considérons, à $g \in G$ fixé, le sous-groupe

$$H = \{g^k \text{ tel que } k \in \mathbb{N}\}. \quad (2.29)$$

Par le théorème de Lagrange 2.14, l'ordre de H divise $|G|$, mais l'ordre de H est le plus petit k tel que $g^k = e$, c'est-à-dire l'ordre de g . $\square$

D'autres résultats à propos d'ordres et d'indices de groupes finis dans la proposition 3.26 et le lemme 3.28. En particulier le théorème de Cauchy 3.22 qui dit : si le groupe est cyclique et si p divise l'ordre du groupe G , alors G contient au moins un élément d'ordre p .

6. Ordre d'un élément, définition 1.250.

2.4 Suite de composition

DefJWZSooNcntfK

Définition 2.16 (Suite de composition).

Soit un groupe G .

(1) Une **suite de composition** dans G est une suite finie de sous-groupes $(G_i)_{i=0,\dots,n}$ telle que

$$\{e\} = G_n \subseteq G_{n-1} \subseteq \dots \subseteq G_1 \subseteq G_0 = G \quad (2.30)$$

et telle que G_{i+1} est normal⁷ dans G_i .

(2) Les groupes G_i/G_{i+1} sont les **quotients** de la suite de composition.

(3) Une suite de **Jordan-Hölder** est une suite de composition dont tous les quotients sont simples.

L'objet de nos prochaines pérégrinations mathématiques est de montrer que tout groupe fini admet une suite de Jordan-Hölder (théorème 2.22).

LemsKpXCG

Lemme 2.17 (du papillon ou de Zassenhaus[108]).

Soient G un groupe et des sous-groupes A et B . Soient A' normal dans A et B' normal dans B . Alors

(1) $A'(A \cap B')$ est normal dans $A'(A \cap B)$

(2) $(A' \cap B)B'$ est normal dans $(A \cap B)B'$

(3) Nous avons les isomorphismes de groupes

$$\frac{A'(A \cap B)}{A'(A \cap B')} \simeq \frac{(A \cap B)B'}{(A' \cap B)B'} \simeq \frac{B'(A \cap B)}{B'(A' \cap B)}. \quad (2.31)$$

Démonstration. Nous n'allons pas démontrer chacun des points ; pour plus de détails, nous dirons simplement que « la preuve est très similaire dans les autres cas ».

Commençons par montrer que $A'(A \cap B')$ est un groupe. Si $a, b \in A'$ et $x, y \in A \cap B'$,

$$axby = xx^{-1}axbx^{-1}xy \quad (2.32)$$

En utilisant la normalité, $x^{-1}ax \in A'$, donc $xx^{-1}axbx^{-1} \in A'$ et donc le tout est dans $A'(A \cap B')$. L'ensemble $A'(A \cap B')$ est également stable pour l'inverse parce que

$$x^{-1}a^{-1} = \underbrace{x^{-1}a^{-1}x}_{\in A'} x^{-1}. \quad (2.33)$$

Nous montrons maintenant que $A'(A \cap B')$ est normal dans $A'(A \cap B)$. Soient $a, b \in A'$, $x \in A \cap B'$ et $f \in A \cap B$. Alors

$$(bf)^{-1}(ax)(bf) = (bf)^{-1}(a \underbrace{xbx^{-1}}_{=c \in A'})xf \quad (2.34a)$$

$$= f^{-1}b^{-1}acxf \quad (2.34b)$$

$$= f^{-1}b^{-1}acf \underbrace{f^{-1}xf}_{=y \in A \cap B'} \quad (2.34c)$$

$$= \underbrace{f^{-1}b^{-1}acf}_{\in A'} y \quad (2.34d)$$

$$\in A'(A \cap B'). \quad (2.34e)$$

Pour prouver l'isomorphisme

$$\frac{A'(A \cap B)}{A'(A \cap B')} \simeq \frac{(A \cap B)B'}{(A' \cap B)B'}, \quad (2.35)$$

7. Nous rappelons au cas où, que « normal » signifie « distingué ».

nous allons utiliser le deuxième théorème d'isomorphisme (2.9) que nous appliquons à $H = A \cap B$ et $N = A'(A \cap B')$. La vérification que H normalise N est usuelle. Nous commençons par écrire

$$\frac{A'(A \cap B')(A \cap B)}{A'(A \cap B')} \simeq \frac{A \cap B}{A \cap B \cap A'(A \cap B')}. \quad (2.36)$$

Pour simplifier un peu cette expression nous prouvons d'abord que

$$(A \cap B) \cap A'(A \cap B') = (A' \cap B)(A \cap B'). \quad (2.37)$$

L'inclusion $\supset$ est facile. Pour l'autre sens, étant donné que $A'(A \cap B') \subset A$ nous avons

$$A \cap B \cap A'(A \cap B) = B \cap A'(A \cap B). \quad (2.38)$$

Un élément de $B \cap A'(A \cap B)$ est un élément de B qui s'écrit sous la forme $s = ax$ avec $a \in A'$ et $x \in A \cap B$. Nous avons alors $a = sx^{-1}$ avec $s \in B$ et $x^{-1} \in A \cap B$. Par conséquent $a \in B$ et donc $a \in A' \cap B$. Donc un élément de $B \cap A'(A \cap B)$ s'écrit sous la forme ax avec $a \in A' \cap B$ et $x \in A \cap B$. Autrement dit

$$B \cap A'(A \cap B) \subset (A' \cap B)(A \cap B) \quad (2.39)$$

et nous avons

$$(A \cap B) \cap A'(A \cap B) = B \cap A'(A \cap B) \subset (A' \cap B)(A \cap B'), \quad (2.40)$$

et donc l'égalité (2.37). Toujours dans l'idée de simplifier (2.36) nous remarquons que $A \cap B'$ est un sous-ensemble de $A \cap B$, donc $A'(A \cap B')(A \cap B) = A'(A \cap B)$. Il reste donc

$$\frac{A'(A \cap B)}{A'(A \cap B')} = \frac{A \cap B}{(A' \cap B)(A \cap B')}. \quad (2.41)$$

Étant donné que les hypothèses sur A et B sont symétriques, le membre de droite peut aussi s'écrire en inversant A et B . Nous en sommes à

$$\frac{B'(A \cap B)}{B'(A' \cap B)} = \frac{A'(A \cap B)}{A'(A \cap B')}. \quad (2.42)$$

Nous devons encore justifier $B'(A \cap B) = (A \cap B)B'$ et $B'(A' \cap B) = (A' \cap B)B'$. Vérifions la première égalité, et laissons la seconde à la lectrice. Si $b \in B'$ et $x \in A \cap B$, alors

$$bx = x \underbrace{x^{-1}bx}_{\in B'} \in (A \cap B)B'. \quad (2.43)$$

□

PROPooUIXNooJdKuAs

Proposition 2.18.

Si G est un groupe fini et si (G_i) est une suite de composition pour G , alors l'ordre de G est le produit des ordres de ses quotients.

Démonstration. Étant donné que G_{i+1} est toujours normal dans G_i , le théorème de Lagrange 2.14 s'applique et, à chaque pas de la suite de composition, nous avons :

$$\left| \frac{G_i}{G_{i+1}} \right| = \frac{|G_i|}{|G_{i+1}|}. \quad (2.44)$$

Il suffit maintenant d'écrire $|G|$ de façon télescopique :

$$|G| = \prod_{0 \leq i \leq n-1} \frac{|G_i|}{|G_{i+1}|} \quad (2.45)$$

□

DEFooSZZSooCrgDyo

Définition 2.19.

Nous disons que les deux suites de composition $(G_i)_{0 \leq i \leq r}$ et $(H_j)_{0 \leq j \leq s}$ sont **équivalentes** si $r = s$ et si il existe une permutation $\sigma \in S_{r-1}$ telle que

$$\frac{G_i}{G_{i+1}} \simeq \frac{H_{\sigma(i)}}{H_{\sigma(i)+1}}. \quad (2.46)$$

Proposition 2.20 (Schreider).

Deux suites de composition d'un même groupe admettent des raffinements équivalents.

Démonstration. Soient les suites de composition

$$\{e\} = G_m \subseteq \dots \subseteq G_1 \subseteq G_0 = G \quad (2.47a)$$

$$\{e\} = H_n \subseteq \dots \subseteq H_1 \subseteq H_0 = G \quad (2.47b)$$

Nous raffinons la suite (G_i) en ajoutant, entre G_{i+1} et G_i , les sous-groupes

$$G_{i+1} = G_{i+1}(G_i \cap H_n) \subset G_{i+1}(G_i \cap H_{n-1}) \subseteq \dots \subseteq G_{i+1}(G_i \cap H_0) = G_i, \quad (2.48)$$

et de même pour (H_j) . Le groupe $G_{i+1}(G_i \cap H_k)$ est normal dans $G_{i+1}(G_i \cap H_{k-1})$ parce que G_{i+1} étant normal dans G_i , et H_k dans H_{k-1} , le lemme 2.17 s'applique. Nous avons donc bien défini un raffinement.

Nous devons maintenant prouver que les deux raffinements ainsi construits sont des suites de composition équivalentes. D'abord elles ont la même longueur mn parce que chacun des m éléments de la suite (G_i) a été remplacé par n éléments et inversement, chacun des n éléments de la suite (H_j) a été remplacé par m éléments.

Par ailleurs, les quotients du raffinement de (G_i) sont de la forme

$$\frac{G_{i+1}(G_i \cap H_k)}{G_{i+1}(G_i \cap H_{k+1})} \simeq \frac{H_{k+1}(H_k \cap G_i)}{H_{k+1}(H_k \cap G_{i+1})} \quad (2.49) \quad \text{EqPAYTCR}$$

en vertu du lemme du papillon (2.17). Le membre de droite de (2.49) est un des quotients du raffinement de (H_j) . □

LemBSicRJ

Lemme 2.21 (Schreider strictement décroissant).

Soient Σ_1 et Σ_2 , deux suites de composition strictement décroissantes du groupe G . Alors elles admettent des raffinements équivalents strictement décroissants.

Démonstration. Par hypothèse, Σ_1 et Σ_2 n'ont pas de répétitions. Soient Σ_1'' et Σ_2'' , des raffinements équivalents donnés par le lemme de Schreider. Étant donné que ce sont des suites de composition équivalentes, elles ont le même nombre de quotients réduits à $\{e\}$, c'est-à-dire le même nombre de répétitions.

Les suites Σ_1' et Σ_2' obtenues en retirant les répétitions de Σ_1'' et Σ_2'' sont des raffinements équivalents de Σ_1 et Σ_2 et strictement décroissants. □

ThoLgxWIC

Théorème 2.22 (Jordan-Hölder).

À propos de suites de Jordan-Hölder dans un groupe fini.

ITEMooRSDDooNHkFYO

(1) Tout groupe fini admet une suite de Jordan-Hölder.

ITEMooGBOCooBAgnyt

(2) Toutes les suites de Jordan-Hölder dans un groupe fini sont équivalentes.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)**

(2) **Pour (2)**

Par définition, une suite de Jordan-Hölder n'a pas de raffinement strictement décroissant (à part elle-même) parce que G_{i+1} est normal maximum dans G_i . Si Σ_1 et Σ_2 sont des suites de Jordan-Hölder nous pouvons considérer les raffinements équivalents strictement décroissants Σ_1' et Σ_2' du lemme de Schreider 2.21. Nous avons $\Sigma_1' \sim \Sigma_2'$, mais par ce que nous venons de dire à propos de la maximalité, $\Sigma_1' = \Sigma_1$ et $\Sigma_2' = \Sigma_2$. D'où le résultat. □

2.5 Groupes résolubles

Définition 2.23 (Groupe résoluble^[109, 110]).

DefOSYNooTROIKs

Le groupe G est **résoluble** si il existe une suite finie de sous-groupes G_i

$$\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{n-1} \subset G_n = G \quad (2.50)$$

avec G_i normal dans G_{i+1} et G_{i+1}/G_i abélien.

Il s'agit d'un groupe qui admet une suite de composition⁸ dont les quotients sont abéliens.

LemOARMooYhYmbH

Lemme 2.24 ([111]).

Soit G un groupe et H un sous-groupe normal. Le groupe G/H est abélien si et seulement si⁹ $D(G) \subset H$.

Démonstration. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- Le groupe G/H est abélien
- pour tout $x, y \in G$, $[x][y] = [y][x]$
- $[x][y][x^{-1}][y^{-1}] = [e]$
- $[xyx^{-1}y^{-1}] = [e]$
- $[x, y] \in H$, voir la définition 2.2.
- $D(G) \subset H$.

□

PropRWYZooTarnmm

Proposition 2.25 ([111]).

Un groupe est résoluble si et seulement si sa suite dérivée termine sur $\{e\}$.

Démonstration. Grâce au lemme 2.4 et à la proposition 2.5, si la suite dérivée termine sur $\{e\}$ alors la suite dérivée est une suite qui répond aux conditions de la définition 2.23 de groupe résoluble.

Il faut donc encore montrer le sens direct. Nous supposons que G est un groupe résoluble et nous étudions sa suite dérivée. Nous avons une suite

$$\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{n-1} \subset G_n = G \quad (2.51)$$

avec G_i normal dans G_{i+1} et G_{i+1}/G_i abélien. Nous allons prouver par récurrence que $D^i(G) \subset G_{n-i}$.

Pour $i = 0$ nous avons bien $G \subset G_n$.

Notre hypothèse de récurrence est :

$$D^i(G) \subset G_{n-i}. \quad (2.52)$$

EqEAQEooEaeIEo

Vu que G_{n-i}/G_{n-i-1} est abélien, le lemme 2.24 dit que

$$D(G_{n-i}) \subset G_{n-i-1}. \quad (2.53)$$

EqEDJXooLOLOqr

En dérivant (2.52) et en tenant compte de (2.53),

$$D^{i+1}(G) \subset D(G_{n-i}) \subset G_{n-i-1}. \quad (2.54)$$

Nous avons donc bien $D^i(G) \subset G_{n-i}$ pour tout i . En particulier pour $i = n$, nous trouvons $D^n(G) \subset G_0 = \{e\}$. □

PropBNEZooJMDfIB

Proposition 2.26.

Soient des groupes G et H . Nous supposons que G est résoluble¹⁰ et nous considérons un morphisme $\psi: G \rightarrow H$. Alors $\psi(G)$ est résoluble.

8. Voir définition 2.16.

9. Ici $D(G)$ est le groupe dérivé de G , voir 2.3.

10. Définition 2.23.

Démonstration. Puisque G est résoluble, il existe une suite de sous-groupes G_i tels que

$$\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{n-1} \subset G_n = G \quad (2.55)$$

avec G_i normal dans G_{i+1} et G_{i+1}/G_i abélien. Nous posons $\psi(G)_i = \psi(G_i)$ et nous avons $\psi(G)_0 = \psi(\{e\}) = \{e\}$ ainsi que $\psi(G)_0 = \psi(G)$; donc

$$\{e\} = \psi(G)_0 \subset \psi(G)_1 \subset \dots \subset \psi(G)_{n-1} \subset \psi(G)_n = \psi(G). \quad (2.56)$$

La proposition 1.415 nous indique que $\psi(G)_i$ est normal dans $\psi(G)_{i+1}$, et que $\psi(G)_{i+1}/\psi(G)_i$ est abélien. $\square$

2.6 Action de groupes

Le concept d'action d'un groupe est donné par la définition 1.469

Lemme 2.27.

Pour tout $g \in G$,

- (1) L'application $\phi_g: E \rightarrow E$ est injective,
- (2) Pour l'inverse : $(\phi_g)^{-1} = \phi_{g^{-1}}$.

Démonstration. Si $x, y \in E$ sont tels que $\phi_g(x) = \phi_g(y)$ alors en appliquant $\phi_{g^{-1}}$ aux deux membres nous trouvons

$$(\phi_{g^{-1}}\phi_g)(x) = (\phi_{g^{-1}}\phi_g)(y), \quad (2.57)$$

ce qui donne $x = y$ parce que $\phi_{g^{-1}}\phi_g = \phi_{g^{-1}g} = \phi_e = \text{Id}$.

Les trois dernières égalités écrites disent que $\phi_{g^{-1}}$ est l'inverse¹¹ de ϕ_g . $\square$

Pour alléger les notations, on convient d'écrire $g \cdot x$, voire plus simplement gx au lieu de $\phi_g(x)$. Le deuxième axiome d'action de groupe dit que la notation ghx ne souffre d'aucune ambiguïté.

DEFooMZXFooXbwGjj

Définition 2.28 (Orbite).

Si G agit sur un ensemble E , nous notons $G \cdot x$ l'**orbite** de $x \in E$ sous l'action de G :

$$\text{Orb}(x) = G \cdot x = \{gx \text{ tel que } g \in G\}.$$

DEFooMDYGooLrOERP

Définition 2.29 (Stabilisateur).

Si G est un groupe agissant sur l'ensemble E , et si $x \in E$, nous notons G_x ou $\text{Stab}(x)$ le **stabilisateur** de x :

$$\text{Stab}(x) = G_x = \{g \in G \text{ tel que } g \cdot x = x\}. \quad (2.58)$$

Définition 2.30 (Fixateur).

Si G est un groupe agissant sur l'ensemble E , et si $g \in G$, nous notons enfin $\text{Fix}(g)$ le **fixateur** de g :

$$\text{Fix}(g) = \{x \in E \text{ tel que } g \cdot x = x\}. \quad (2.59)$$

DefuyYJRh

Définition 2.31.

L'action de G sur E est **fidèle** si l'élément neutre est le seul élément de G à fixer tous les points de E , c'est-à-dire si

$$(gx = x \quad \forall x \in E) \Rightarrow g = e. \quad (2.60)$$

Un exemple d'action fidèle tout à fait non trivial sera donné avec l'action du groupe modulaire sur le plan de Poincaré dans le théorème 23.96.

Le groupe G agit toujours sur lui même à gauche et à droite. L'action à gauche est $g \cdot h = gh$; celle à droite est $g \cdot h = hg^{-1}$.

11. Si vous décidez de dire ça à un jury dans un concours, soyez prêts à préciser les domaines.

DEFooCORTooEeOLPT

Définition 2.32.

L'action **adjointe** définie par $g \cdot h = ghg^{-1}$ est une manière pour un groupe d'agir sur lui-même par automorphismes. Cela est souvent noté $\mathbf{Ad}(g)h = ghg^{-1}$.

En effet pour tout $g \in G$, l'application $\mathbf{Ad}(g): G \rightarrow G$ est un automorphisme de G .

Si H est un sous-groupe de G , nous notons G/H le quotient de G par la relation $g \sim gh$ pour tout $h \in H$. Lorsque la distinction est importante, nous noterons $(G/H)_g$ pour les classes à gauche et $(G/H)_d$ pour les classes à droite.

Nous avons une relation d'équivalence à gauche et une à droite. D'abord

$$x \sim_g y \Leftrightarrow xh = y \quad (2.61)$$

pour un certain $h \in H$. Ensuite

$$x \sim_d y \Leftrightarrow hx = y \quad (2.62)$$

pour un certain $h \in H$.

Le lemme suivant est une généralisation du théorème de Lagrange 2.14.

Lemme 2.33.

L'ensemble $(G/H)_g$ est fini si et seulement si l'ensemble $(G/H)_d$ est fini. Si il en est ainsi, alors $(G/H)_g$ et $(G/H)_d$ ont même cardinal, qui vaut l'indice de H dans G .

Démonstration. L'application

$$\begin{aligned} f: (G/H)_g &\rightarrow (G/H)_d \\ [x]_g &\mapsto [x^{-1}]_d \end{aligned} \quad (2.63)$$

est une bijection bien définie. En effet si $x \sim_g y$, nous avons $h \in H$ tel que $y^{-1}h = x^{-1}$, c'est-à-dire que $x^{-1} \sim_d y^{-1}$ et f est bien définie. Le fait que f soit surjective est évident. Pour l'injectivité, soient $x, y \in G$ tels que

$$f([x]_g) = f([y]_g). \quad (2.64)$$

Alors $x^{-1} \sim_d y^{-1}$, ce qui implique l'existence de $h \in H$ tel que $hx^{-1} = y^{-1}$, ou encore que $xh^{-1} = y$, ce qui signifie que $x \sim_g y$.

Pour l'énoncé à propos de l'indice, nous procédons en plusieurs étapes simples.

- (1) Les classes (les éléments de $(G/H)_g$) forment une partition de G .
- (2) Toutes les classes ont le même nombre d'éléments par la bijection

$$\begin{aligned} f: [x]_g &\rightarrow [y]_g \\ xh &\mapsto yh. \end{aligned} \quad (2.65)$$

- (3) Le nombre d'éléments dans une classe est égal à $|H|$ par la bijection

$$\begin{aligned} g: [x]_g &\rightarrow H \\ xh &\mapsto h. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Par conséquent

$$|G| = |H| \cdot \text{nombre de classes} = |H| \cdot \text{Card}((G/H)_g), \quad (2.67)$$

et nous avons bien

$$\text{Card}((G/H)_g) = \frac{|G|}{|H|} = |G : H|. \quad (2.68)$$

□

Propozymlr

Proposition 2.34 (Orbite-stabilisateur[53]).

Soient G un groupe agissant sur un ensemble E et $x \in E$.

- (1) Les ensembles $G \cdot x$ et G/G_x sont équipotents.

(2) L'orbite de x est finie si et seulement si $\text{Stab}(x)$ est d'indice fini dans G . Dans ce cas nous avons

$$\text{Card}(G \cdot x) = |G : \text{Stab}(x)|, \quad \text{EqnLCHCE} \quad (2.69)$$

et

$$|G| = |\text{Stab}(x)| |\mathcal{O}_x|. \quad \text{EqCgwSXT} \quad (2.70)$$

La formule (2.69) est nommée **formule des classes**[112].

Démonstration. En deux points.

(1) Soit l'application

$$\begin{aligned} \psi: G \cdot x &\rightarrow G/G_x \\ a \cdot x &\mapsto [a]. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Cette application est bien définie parce que si $a \cdot x = b \cdot x$, alors il existe $h \in G_x$ tel que $b = ah$, et par conséquent $[a] = [b]$. Cette application est une bijection et par conséquent $G \cdot x$ est équipotent à G/G_x .

(2) Soit $y \in \mathcal{O}_x$ et $A_y = \{g \in G \text{ tel que } g \cdot x = y\}$. Nous avons

$$A_y = s \text{Stab}(x). \quad (2.72)$$

En effet, si $a \in A_y$, alors $a \cdot x = y$ et $s^{-1}a \cdot x = s^{-1} \cdot y = x$. Par conséquent $s^{-1}a \in \text{Stab}(x)$. Dans l'autre sens, supposons $a \in s \text{Stab}(x)$. Soit $g \in \text{Stab}(x)$ tel que $a = sg$. Alors nous avons $a \cdot x = sg \cdot x = s \cdot x = y$. Donc $a \in A_y$.

Nous venons de prouver que la partie A_y est une classe à gauche de $\text{Stab}(x)$, par conséquent $|A_y| = |\text{Stab}(x)|$ pour tout $y \in \mathcal{O}_x$. Les A_y pour différents y sont disjoints et nous avons de plus

$$\bigcup_{y \in \mathcal{O}_x} A_y = G. \quad (2.73)$$

Les ensembles A_y divisent donc G en $|\mathcal{O}_x|$ paquets de $|\text{Stab}(x)|$ éléments. D'où la formule (2.70).

□

CORooRRVHooTyCjZZ

Corolaire 2.35.

Soit C_g la classe de conjugaison d'un élément g du groupe fini G . Alors

$$\text{Card}(C_g) = |G : Z_G(g)| \quad (2.74)$$

où $Z_G(g)$ est le centralisateur de g dans G ¹² de G .

Démonstration. C'est une application de la proposition 2.34 (formule (2.69)) dans le cas de l'action adjointe de G sur lui-même.

En effet, si nous considérons l'action adjointe, l'orbite est la classe de conjugaison : $C_g = G \cdot g$. Et le stabilisateur de g pour l'action adjointe n'est autre que le centralisateur de g :

$$\text{Fix}(g) = \{h \in G \text{ tel que } h \cdot g = g\} \quad (2.75a)$$

$$= \{h \in G \text{ tel que } hgh^{-1} = g\} \quad (2.75b)$$

$$= \{h \in G \text{ tel que } gh = hg\} \quad (2.75c)$$

$$= Z_G(g). \quad (2.75d)$$

Donc la formule $\text{Card}(G \cdot g) = |G : G_g|$ devient, dans le cas de l'action adjointe de G sur lui-même : $\text{Card}(C_g) = |G : Z_G(g)|$. □

12. Définition 1.255.

Lemme 2.36.

Soit G un groupe agissant sur l'ensemble E . On définit $x \sim x'$ si et seulement si il existe $g \in G$ tel que $g \cdot x = x'$. Alors

- (1) la relation $\sim$ est une relation d'équivalence.
- (2) la classe $[x]$ est l'orbite $\mathcal{O}_x$ de x sous G .

CorARFVMP

Corolaire 2.37 (Équation des orbites).

Soient G un groupe agissant sur l'ensemble E et $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_k$ la liste des orbites (distinctes). Alors

- (1) $E = \bigcup_i \mathcal{O}_i$, l'union est disjointe,
- (2) $\text{Card}(E) = \sum_i \text{Card}(\mathcal{O}_i)$.

DefcSuYxz

Définition 2.38.

Soit G un groupe agissant sur l'ensemble E . Un **domaine fondamental** ou une **transversale** est une partie de E contenant un et un seul élément de chaque orbite.

Autrement dit, les images des éléments d'un domaine fondamental F forment une partition de l'ensemble :

$$E = \bigsqcup_{g \in G} g(F) \quad (2.76)$$

où $g(F) = \phi_g(F) = \{\phi_g(x) \text{ tel que } x \in F\}$. L'union est disjointe, c'est-à-dire que si $g \neq g'$, alors $g(F) \cap g'(F) = \emptyset$.

PropUyLPdp

Proposition 2.39 (Équation des classes[113]).

Soit G , un groupe fini opérant sur un ensemble E . Si E'' est un ensemble contenant exactement un élément de chaque orbite dans $E \setminus \text{Fix}_G(E)$, alors

$$|G| = |\text{Fix}_G(E)| + \sum_{x \in E''} \frac{|G|}{|\text{Fix}_G(x)|}. \quad (2.77)$$

EqbzufK

Si de plus G est un p -groupe, alors

$$|E| = |\text{Fix}_G(E)| \pmod{p}. \quad (2.78)$$

EqbzLEVJ

Démonstration. Par le corolaire 2.37, nous avons $|G| = \sum_{x \in E'} |\mathcal{O}_x|$ où E' est une transversale. En séparant la somme entre les orbites à un élément et les autres,

$$|G| = \text{Card}(\text{Fix}_G(E)) + \sum_{x \in E''} \frac{|G|}{|\text{Fix}_G(x)|} \quad (2.79)$$

EqggkBs

où nous avons utilisé le fait que $|G| = |\text{Fix}_G(x)| |\mathcal{O}_x|$.

Si G est un p -groupe alors si $x \in E''$, $\text{Fix}_G(x)$ est un sous-groupe propre de G et donc $|\text{Fix}_G(x)|$ est un diviseur propre de $|G|$. Du coup la fraction $|G|/|\text{Fix}_G(x)|$ est une puissance non nulle de p et l'équation (2.77) devient immédiatement (2.78). $\square$

Corolaire 2.40 (Équation des classes).

Soient G un groupe, et $C_1, \dots, C_l$ la liste de ses classes de conjugaison contenant plus d'un élément. Alors

$$\text{Card}(G) = \text{Card}(Z(G)) + \sum_i |G : Z_{g_i}| = \text{Card}(Z(G)) + \sum_i \frac{\text{Card}(G)}{\text{Card}(\text{Fix}(g_i))} \quad (2.80)$$

EqkgGmoq

si $g_i \in C_i$.

Démonstration. Étant donné que les classes de conjugaison sont disjointes, le cardinal de G est bien la somme des cardinaux de ses classes. Les classes ne contenant qu'un seul élément sont celles des éléments de $Z(G)$. En ce qui concerne les autres orbites, $\text{Card}(C_{g_i}) = |G : Z_{g_i}|$ par le théorème orbite-stabilisateur (proposition 2.34). $\square$

THOooEFD MooDfosOw

Théorème 2.41 (Formule de Burnside).

Si G est un groupe fini agissant sur l'ensemble fini E et si Ω est l'ensemble des orbites, alors

$$\text{Card}(\Omega) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{Card}(\text{Fix}(g)). \quad (2.81)$$

Démonstration. Nous considérons l'ensemble

$$A = \{(g, x) \in G \times E \text{ tel que } gx = x\}, \quad (2.82)$$

et nous en calculons le cardinal de deux façons. D'abord

$$\text{Card}(A) = \sum_{x \in E} \text{Card}\{g \in G \text{ tel que } gx = x\} \quad (2.83a)$$

$$= \sum_{x \in E} \text{Card}(\text{Fix}(x)) \quad (2.83b)$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{x \in \omega} \text{Card}(\text{Fix}(x)) \quad (2.83c)$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} \frac{|G|}{\text{Card}(\omega)} \quad (2.83d)$$

$$= |G|. \quad (2.83e)$$

Pour obtenir (2.83d) nous avons utilisé l'équation des classes (2.70). L'autre façon de calculer $\text{Card}(A)$ est de regrouper ainsi :

$$\text{Card}(A) = \sum_{g \in G} \text{Card}\{x \in E \text{ tel que } gx = x\} = \sum_{g \in G} \text{Card}(\text{Fix}(g)). \quad (2.84)$$

En égalisant les deux expressions de $\text{Card}(A)$ nous trouvons

$$|G| \text{Card}(\Omega) = \sum_{g \in G} \text{Card}(\text{Fix}(g)). \quad (2.85)$$

□

PROPooMYKKooLetZWl

Proposition 2.42 ([114]).

Soient G un groupe, et H , un sous-groupe du centre de G .

- (1) H est normal dans G .
- (2) Si G/H est monogène, alors G est abélien.

Démonstration. En deux parties.

- (1) **Normal** Si $g \in G$ et si $h \in H$, alors $ghg^{-1} = gg^{-1}h = h \in H$.
- (2) **Abélien** Soit $g_0 \in G$ tel que $[g_0]$ engendre G/H . Soient $g \in G$ et $s \in [g]$. Il existe $h \in H$ tel que $s = gh^{-1}$, et donc tel que $g = sh$. Il existe aussi $n \in \mathbb{N}$ tel que $[s] = [g_0^n]$, et donc un $h_2 \in H$ tel que $s = g_0^n h_2$.

Nous avons prouvé que pour tout $g \in G$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $h \in H$ tel que $g = g_0^n h$.

Soient $g_1, g_2 \in G$. Nous avons $n, m \in \mathbb{N}$ et $h_1, h_2 \in H$ tels que $g_1 = g_0^n h_1$ et $g_2 = g_0^m h_2$. Nous avons alors

$$g_1 g_2 a = g_0^n h_1 g_0^m h_2 \quad (2.86a)$$

$$= g_0^n g_0^m h_1 h_2 \quad \text{pcq. } h_1 \in H \subset Z(G) \quad (2.86b)$$

$$= g_0^m g_0^n h_1 h_2 \quad (2.86c)$$

$$= g_0^m h_2 g_0^n h_1 \quad (2.86d)$$

$$= g_2 g_1, \quad (2.86e)$$

et donc G est bien abélien.

□

PROPooWPQTooECUPLK

Proposition 2.43 ([115]).

L'indice du centre d'un groupe n'est jamais un nombre premier.

LEMooZJGVooRYrujB

Lemme 2.44 ([116]).

Soient un groupe cyclique G et un sous groupe H .

ITEMooUNOEooZoElyL

(1) *Il existe $r, n \in \mathbb{N}$ tels que $r \mid n$ et $H \simeq r\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

ITEMooMUSSooBmNXEd

(2) $\text{Card}(H) = n/r$

ITEMooVPEKooKdPiBk

(3) *H est cyclique.*

En particulier, tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1)** Soit un générateur a de G . L'application

$$\begin{aligned} f: \mathbb{Z} &\rightarrow G \\ k &\mapsto a^k \end{aligned} \quad (2.87)$$

est un morphisme de groupe surjectif.

La partie $f^{-1}(H)$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. La proposition 1.348(2) dit qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $f^{-1}(H) = r\mathbb{Z}$. De même $\ker(f)$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, de telle sorte qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\ker(f) = n\mathbb{Z}$.

Nous avons

$$n\mathbb{Z} = \ker(f) = f^{-1}(e) \subset f^{-1}(H) = r\mathbb{Z}. \quad (2.88)$$

Étant donné que $n\mathbb{Z} \subset r\mathbb{Z}$, il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $n = dr$.

Nous considérons maintenant

$$\begin{aligned} g: r\mathbb{Z} &\rightarrow H \\ k &\mapsto a^k, \end{aligned} \quad (2.89)$$

qui est encore un morphisme de groupes. En utilisant le premier théorème d'isomorphismes 2.7(3), nous avons

$$\frac{r\mathbb{Z}}{\ker(g)} \simeq \text{Image}(g). \quad (2.90)$$

Mais $\ker(g) = n\mathbb{Z}$ et $\text{Image}(g) = H$. Donc nous avons bien $H \simeq r\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(2) **Pour (2)** En ce qui concerne le cardinal, vu que nous avons un isomorphisme,

$$\text{Card}(H) = \text{Card}(r\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = n/r \quad (2.91)$$

par le lemme 1.431(3).

(3) **Pour (3)** Le fait que H soit cyclique est le lemme 1.431(2).

□

THOooRGSTooIWYhqt

Théorème 2.45 (Sous-groupe d'un groupe cyclique[116]).

Soit G un groupe cyclique¹³ d'ordre n . Pour chaque $d \in \mathbb{N}$ nous posons

$$H_d = \{x \in G \text{ tel que } x^d = e\}. \quad (2.92)$$

(1) *Ces H_d sont des sous-groupes de G .*

(2) $\text{Card}(H_d) = d$.

ITEMooMJCXooCIWSmK

(3) *L'ensemble des sous-groupes de G est $\{H_d \text{ tel que } d \mid n\}$.*

13. Définition 1.428.

ITEMooIEGUooPQWEep

(4) Si g est un générateur de G , alors H_d peut être décrit des façons suivantes :

$$H_d = \{x \in G \text{ tel que } x^d = e\} = \text{gr}(g^{n/d}). \quad (2.93)$$

Démonstration. Point par point.

(1) H_d est un sous-groupe Si $g, h \in H_d$, alors $(gh)^d = g^d h^d = ee = e$. De plus $(g^{-1})^d = (g^d)^{-1} = e^{-1} = e$. ITEMooYAMooVtbCrS

(2) Tout sous-groupe est un H_d avec $d \mid n$ Soit un sous-groupe H de G . Nous notons $\text{Card}(H) = d$. Le lemme 2.44(3) nous indique que H est cyclique. Soit un générateur $a \in H$; son ordre est le cardinal de H : $\text{ord}(a) = \text{Card}(H) = d$. ITEMooXEXFooIrFOTi

Tout élément de H vérifie $x^{\text{ord}(a)} = (a^k)^{\text{ord}(a)} = (a^{\text{ord}(a)})^k = e$. Donc $H \subset H_d$. En particulier $\text{Card}(H) \leq \text{Card}(H_d)$.

Tout sous-groupe de G est cyclique. En particulier H_d est cyclique, et nous pouvons considérer un générateur : il existe $a \in H_d$ tel que $\text{ord}(a) = \text{Card}(H_d)$. Étant donné que $a \in H_d$, il vérifie $a^d = e$, et donc

$$\text{ord}(a) \mid d. \quad (2.94)$$

Vu que $\text{ord}(a) = \text{Card}(H_d)$ et que $d = \text{Card}(H)$, nous avons $\text{Card}(H_d) \mid \text{Card}(H)$ et en particulier $\text{Card}(H_d) \leq \text{Card}(H)$. Donc $\text{Card}(H) = \text{Card}(H_d)$ et au final $H = H_d$.

Nous avons prouvé au passage que $\text{Card}(H_d) = d$. Vu que le cardinal d'un sous-groupe divise le cardinal du groupe¹⁴, nous avons $d \mid n$.

(3) $\text{Card}(H_d) = d$ C'est contenu dans ce que nous avons fait dans la partie (2).

(4) Si $d \mid n$ alors H_d est un sous-groupe de G C'est un cas particulier de la partie (1).

(5) Note Le point (3) est prouvé. Cela ne contredit pas le fait que H_d soit un sous-groupe de G pour tout d , et pas seulement pour les d qui divisent n . En effet si d ne divise pas n , il existe d' divisant n tel que $H_d = H_{d'}$. Pas besoin de chercher une preuve de ce fait : la preuve est déjà faite. Il s'agit de dire que H_d est un sous-groupe de G pour tout d (partie (1)), et que tous les sous-groupes de G sont de la forme H_d avec $d \mid n$.

(6) Pour (4) Soit un générateur g de G . Nous avons d'une part $g^{n/d} \in H_d$ parce que $(g^{n/d})^d = g^n = e$. D'autre part, les éléments

$$g^{n/d}, g^{2n/d}, \dots, g^{(d-1)n/d}, g^n = e \quad (2.95)$$

sont distincts. En effet si $g^{kn/d} = g^{ln/d}$ avec $0 < l < k < d$, alors $g^{(k-l)n/d} = e$. Comme $k-l < d$, nous avons $(k-l)n/d < n$ et donc $g^{(k-l)n/d} \neq e$ parce que g est générateur.

Bref, les $g^{kn/d}$ avec $k = 1, \dots, d$ sont d éléments distincts, tous dans H_d dont le cardinal est d . Donc

$$H_d = \{g^{kn/d}\}_{1, \dots, d}. \quad (2.96)$$

□

DEFooQDHPooCfDEuL

Définition 2.46.

Soit G un groupe agissant sur un ensemble E . Nous disons que l'action est **transitive** si elle possède une seule orbite. L'action est **libre** si $g \cdot x = g' \cdot x$ implique $g = g'$.

2.7 Produit semi-direct de groupes

Définition 2.47.

Une **suite exacte** est une suite d'applications comme suit :

$$\dots \xrightarrow{f_i} A_i \xrightarrow{f_{i+1}} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+2}} \dots \quad (2.97)$$

où pour chaque i , les applications f_i et f_{i+1} vérifient $\ker(f_{i+1}) = \text{Image}(f_i)$. Lorsque les ensembles A_i sont des groupes, alors nous demandons de plus que les f_i soient des morphismes.

14. Théorème de Lagrange 2.14(1).

Très souvent nous sommes confrontés à des suites exactes de la forme

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} B \longrightarrow 1 \quad (2.98)$$

où G , A et B sont des groupes, 1 est l'identité. La première flèche est l'application $\{1\} \rightarrow A$ qui à 1 fait correspondre 1 . La dernière est l'application $B \rightarrow 1$ qui à tous les éléments de B fait correspondre 1 . Le noyau de f étant l'image de la première flèche (c'est-à-dire $\{1\}$), l'application f est injective. L'image de g étant le noyau de la dernière flèche (c'est-à-dire B en entier), l'application g est surjective.

DEFooKWEHooISNQzi

Définition 2.48.

Soient N et H deux groupes et un morphisme de groupes $\phi: H \rightarrow \text{Aut}(N)$. Le **produit semi-direct** de N et H relativement à ϕ , noté $N \rtimes_{\phi} H$ est l'ensemble $N \times H$ muni de la loi (que l'on vérifiera être de groupe)

$$(n, h) \cdot (n', h') = (n\phi_h(n'), hh'). \quad (2.99)$$

EqDRgbBI

Attention à l'ordre quelque peu contre-intuitif. Lorsque nous notons $N \rtimes_{\phi} H$, c'est bien $\phi: H \rightarrow \text{Aut}(N)$, c'est-à-dire H qui agit sur N et non le contraire.

Lorsque N et H sont des sous-groupes d'un même groupe, le plus souvent ϕ est l'action adjointe définie en 2.32.

Le théorème suivant permet de reconnaître un produit semi-direct lorsqu'on en voit un.

THOooZNYTooPhnIdE

Théorème 2.49 ([13]).

Soit une suite exacte de groupes

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{s} H \longrightarrow 1 \quad (2.100)$$

Si il existe un sous-groupe $\tilde{H}$ de G à partir duquel s est un isomorphisme, alors

$$G \simeq i(N) \rtimes_{\sigma} \tilde{H} \quad (2.101)$$

où σ est l'action adjointe¹⁵ de $\tilde{H}$ sur $i(N)$.

Démonstration. Nous posons $\tilde{N} = i(N)$ et nous allons subdiviser la preuve en petits pas.

- (1) $\tilde{N}$ est normal dans G . En effet étant donné que la suite est exacte nous avons $\tilde{N} = \ker(s)$. Le noyau d'un morphisme est toujours un sous-groupe normal.
- (2) $\tilde{N} \cap \tilde{H} = \{e\}$. L'application s étant un isomorphisme depuis $\tilde{H}$, il n'y a pas d'éléments de $\tilde{H}$ dans $\ker(s)$ autre que e .
- (3) $G = \tilde{N}\tilde{H}$. Nous considérons $g \in G$ et $h \in \tilde{H}$ tel que $s(g) = s(h)$. L'existence d'un tel h est assurée par le fait que s est surjective depuis $\tilde{H}$. Du coup nous avons $e = s(gh^{-1})$, c'est-à-dire $gh^{-1} \in \ker(s) = \tilde{N}$. Nous avons donc bien la décomposition $g = (gh^{-1})h$, et donc $G = \tilde{N}\tilde{H}$.
- (4) L'écriture $g = nh$ avec $n \in \tilde{N}$ et $h \in \tilde{H}$ est unique. Si $nh = n'h'$, alors $n = n'h'h^{-1}$, ce qui signifierait que $h'h^{-1} \in \tilde{N}$. Mais étant donné que $\tilde{H} \cap \tilde{N} = \{e\}$, nous obtenons $h = h'$ et par suite $n = n'$.
- (5) L'application

$$\begin{aligned} \phi: G &\rightarrow \tilde{N} \times \tilde{H} \\ nh &\mapsto (n, h) \end{aligned} \quad (2.102)$$

est une bijection. C'est une conséquence des points (3) et (4).

- (6) Si sur $\tilde{N} \times \tilde{H}$ nous mettons le produit

$$(n, h) \cdot (n', h') = (n\sigma_h n', hh') \quad (2.103)$$

15. Le fait que H agisse sur $i(N)$ fait partie du théorème.

où σ est l'action adjointe du groupe sur lui-même, c'est-à-dire $\sigma_x(y) = xyx^{-1}$, alors ϕ est un isomorphisme. Si $g, g' \in G$ s'écrivent (de façon unique par le point (5)) $g = nh$ et $g' = n'h'$ alors

$$\phi(nhn'h') = \phi(n \underbrace{hn'h^{-1}}_{\in \tilde{N}} hh') \quad (2.104a)$$

$$= \phi((nhn'h^{-1})(hh')) \quad (2.104b)$$

$$= (nhn'h^{-1}, hh') \quad (2.104c)$$

$$= (n, h) \cdot (n', h') \quad (2.104d)$$

$$= \phi(nh)\phi(n'h'). \quad (2.104e)$$

□

CoroGohOZ

Corolaire 2.50.

Soit G un groupe, et N, H des sous-groupes de G tels que

- (1) H normalise N (c'est-à-dire que $\sigma_h(n) = hnh^{-1} \in N$ pour tout $h \in H$ et $n \in N$ ¹⁶),
- (2) $H \cap N = \{e\}$,
- (3) $HN = G$.

Alors l'application

$$\begin{aligned} \psi: N \times_{\sigma} H &\rightarrow G \\ (n, h) &\mapsto nh \end{aligned} \quad (2.105)$$

est un isomorphisme de groupes.

Démonstration. En plusieurs parties.

- (1) ψ est un morphisme Simple calcul en utilisant la formule (2.99) du produit dans $N \times_{\sigma} H$:

$$\psi((n, h)(n', h')) = \psi(n\sigma_h(n'), hh') \quad (2.106a)$$

$$= nhn'h^{-1}hh' \quad (2.106b)$$

$$= nhn'h' \quad (2.106c)$$

$$= \psi(n, h)\psi(n', h'). \quad (2.106d)$$

- (2) ψ est injective Supposons que $\psi(n, h) = \psi(n', h')$. Alors $nh = n'h'$ et

$$n = n'h'h^{-1}. \quad (2.107)$$

En multipliant par $(n')^{-1}$ nous trouvons

$$h'h^{-1} = (n')^{-1}n \in N. \quad (2.108)$$

Donc $h'h^{-1} \in H \cap N = \{e\}$. Nous en déduisons que $h = h'$ et donc que $n = n'$.

- (3) ψ est surjective Nous savons que $HN = G$. Soit $g \in G$. Il existe $h \in H$ et $n \in N$ tel que $g^{-1} = h^{-1}n^{-1}$. Avec ces éléments nous avons

$$g = nh = \psi(n, h). \quad (2.109)$$

□

Dans les hypothèses, l'ordre entre N et H est important lorsqu'on dit que c'est N qui agit sur H ; mais l'hypothèse $NH = G$ est équivalente à $HN = G$ (passer à l'inverse pour s'en assurer).

Insistons encore un peu sur la notation : dans $N \times_{\sigma} H$, c'est H qui agit sur N par σ .

16. Ou encore que H agit sur N par automorphismes internes.

2.8 Groupe de torsion

Soit G un groupe. Un élément $g \in G$ est un **élément de torsion** si il est d'ordre fini. La **torsion** de G est l'ensemble de ses éléments de torsion. Nous disons qu'un groupe est un **groupe de torsion** si tous ses éléments sont de torsion.

Exemple 2.51.

Le groupe additif $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est un groupe de torsion parce que si $[x] = [p/q]$, alors $q[x] = [p] = [0]$. $\triangle$

2.9 Famille presque nulle

Soit $(G, +)$ un groupe abélien et $\mathcal{F} = \{g_i\}_{i \in I}$ une famille d'éléments de G indicés par un ensemble I . Le **support** de $\mathcal{F}$ est l'ensemble $\{i \in I \text{ tel que } g_i \neq 0\}$. La famille est dite **presque nulle** si le support est fini.

Nous disons que $\mathcal{F}$ est une **suite** si $I = \mathbb{N}$.

Chapitre 3

Anneaux

Attention aux conventions. Dans le Frido, un corps peut être réduit à $\{0\}$ et un idéal premier ne peut pas être $\{0\}$. Ces conventions ont une série de conséquences un peu partout, par exemple dans la proposition 1.393 où nous parlons d'idéal maximum propre. Comparez par exemple avec [83]. Soyez attentif.

En cas de doutes, nous suivons les conventions de Wikipédia.

3.1 Inversibles et nilpotents

Le concept d'anneau est la définition 1.90.

LEMooOYZEooLivKWI

Lemme 3.1.

Si a et b commutent, nous avons, pour tout $r \in \mathbb{N}$ et $r > 0$, la formule

$$a^{r+1} - b^{r+1} = (a - b) \left(\sum_{k=0}^r a^{r-k} b^k \right). \quad (3.1)$$

Eqarpurmkbk

Démonstration. Démontrons cela par récurrence. Le cas $r = 0$ est évident. Pour un r donné, si (3.1) est vraie, alors

$$\begin{aligned} a^{r+2} - b^{r+2} &= a^{r+1}a - a^{r+1}b + a^{r+1}b - b^{r+1}b \\ &= a^{r+1}(a - b) + (a^{r+1} - b^{r+1})b \\ &= a^{r+1}(a - b) + (a - b) \left(\sum_{k=0}^r a^{r-k} b^k \right) b \\ &= (a - b) \left(a^{r+1} + \left(\sum_{k=0}^r a^{r-k} b^k \right) b \right) \\ &= (a - b) \left(a^{r+1} + \sum_{k=0}^r a^{r-k} b^{k+1} \right) \\ &= (a - b) \left(a^{r+1} + \sum_{k'=1}^{r+1} a^{(r+1)-k'} b^{k'} \right) \\ &= (a - b) \left(\sum_{k'=0}^{r+1} a^{(r+1)-k'} b^{k'} \right). \end{aligned}$$

□

Proposition 3.2.

Si a est un élément nilpotent de l'anneau A , alors $1 - a$ est inversible. Si a est nilpotent non nul, alors il est diviseur de zéro.

Démonstration. Soit n le minimum tel que $a^n = 0$. En vertu de la formule (3.1) nous avons

$$1 = 1 - a^n = (1 - a)(1 + a + \cdots + a^{n-1}) = (1 + a + \cdots + a^{n-1})(1 - a). \quad (3.2)$$

La somme $1 + a + \cdots + a^{n-1}$ est donc un inverse de $(1 - a)$. □

PROPooQMZMooBrQhhr

Proposition 3.3 ([1]).

Soit un anneau (pas spécialement commutatif) A . Si $a_i \in A$, alors

$$\sum_i \sum_j a_i a_j = \sum_i a_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_i a_j = \left(\sum_i a_i \right)^2 + \sum_{i < j} [a_i a_j] \quad (3.3)$$

où $[x, y]$ signifie $xy - yx$.

3.2 PGCD, PPCM et éléments inversibles

La définition de pgcd et ppcm dans un anneau commutatif est la définition 1.103. Dans la plus grande tradition, elle a été introduite sans motivation, et utilisée par-ci par-là. Nous revenons maintenant dessus.

Commençons par donner une autre vision de la divisibilité dans les anneaux intègres.

PropDiviseurIdeaux

Proposition 3.4.

Dans un anneau intègre¹ A , on a l'équivalence suivante concernant deux éléments $a, b \in A$:

$$a \mid b \Leftrightarrow (b) \subset (a). \quad (3.4)$$

Donc la divisibilité devient en réalité une relation d'ordre dont nous pouvons chercher un maximum et un minimum. Si S est une partie de A , nous notons $a \mid S$ pour exprimer que $a \mid x$ pour tout $x \in S$; de la même façon, $S \mid b$ signifie que $x \mid b$ pour tout $x \in S$.

Nous rappelons également la définition 1.96 de morphisme d'anneaux. Remarquons que si f est un morphisme, nous avons $f(0) = 0$ et $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$.

Lemme 3.5 ([117]).

Les éléments inversibles d'un anneau sont diviseurs de tous les éléments.

Démonstration. Soit k inversible d'inverse $k' : kk' = 1$; soit aussi $a \in A$. Alors $a = k(k'a)$, ce qui montre que k divise a . □

Lemme 3.6 ([117]).

Dans un anneau, 1 est un pgcd de a et b si et seulement si les seuls diviseurs communs sont les inversibles.

Démonstration. Supposons pour commencer que 1 est un pgcd de a et b . Un diviseur commun de a et b doit donc diviser 1. Or un diviseur de 1 est forcément inversible.

Dans l'autre sens, les diviseurs communs de a et b sont tous inversibles et donc diviseurs de 1. Donc 1 est un pgcd de a et b . □

3.2.1 Calcul effectif du PGCD et théorème de Bézout

subSecIpmnhO

Soient a et b , deux entiers que nous allons prendre positifs. Nous allons voir maintenant l'algorithme de **Euclide étendu** qui est capable, pour a et b donnés, de calculer le PGCD de a et b , et un couple de Bézout (u, v) tel que $ua + vb = \text{pgcd}(a, b)$. Ce calcul est indispensable si on veut implémenter RSA (19.2).

Cela se base sur le lemme suivant.

LemiVqita

Lemme 3.7.

Soient $a, b \in \mathbb{N}$ et des nombres q et r tels que $a = qb + r$. Alors $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(r, b)$.

1. Définition 1.326.

Démonstration. Il suffit de voir que les diviseurs communs de a et b sont diviseurs de r et que les diviseurs communs de r et b divisent a .

Si s divise a et b , alors dans l'équation

$$\frac{a}{s} = \frac{qb}{s} + \frac{r}{s}$$

les termes a/s et qb/s sont entiers, donc r/s est aussi entier, et s divise r .

Inversement, si s divise r et b , alors il divise $qb + r$ et donc a . □

Remarque 3.8.

Ce lemme est surtout intéressant lorsque $a = qb + r$ est la division euclidienne de a par b : en effet, dans ce cas $r < b$, et le calcul du PGCD de deux nombres (a et b) est ramené à un calcul de PGCD de deux nombres plus petits (b et r).

L'algorithme pour calculer $\text{pgcd}(a, b)$ consiste à écrire des divisions euclidiennes successives de la manière suivante :

$$a = q_2b + r_2 \quad r_2 < b \quad (3.5a)$$

$$b = q_3r_2 + r_3 \quad r_3 < r_2 \quad (3.5b)$$

$$\vdots \quad (3.5c)$$

en remarquant que $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r_2) = \text{pgcd}(r_2, r_3)$. Étant donné que les inégalités $r_2 < b$ et $r_3 < r_2$ sont strictes, en continuant ainsi nous finissons sur zéro, c'est-à-dire qu'il existera un n pour lequel $r_{n+1} = 0$; et donc

$$r_{n-1} = q_{n+1}r_n,$$

et à ce moment nous avons $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(r_{n-1}, r_n) = r_n$.

3.2.1.1 Algorithme d'Euclide pour le PGCD

Écrivons l'algorithme[118] en détail (parce que Bézout, ça va être la même chose en cinq fois plus compliqué). On pose

$$r_0 = a \quad (3.6a)$$

$$r_1 = b \quad (3.6b)$$

(ce qui explique que nous n'ayons pas utilisé r_0 et r_1 précédemment). Ensuite on écrit la division euclidienne $a = q_2b + r_2$, c'est-à-dire $r_0 = q_2r_1 + r_2$. Cela donne r_2 et q_2 en termes de r_0 et r_1 :

$$r_2 = r_0 - q_2r_1. \quad (3.7)$$

Ensuite, sachant r_2 nous pouvons continuer :

$$r_1 = q_3r_2 + r_3 \quad (3.8)$$

donne q_3 et $r_3 = r_1 - q_3r_2$. On continue avec $r_2 = q_4r_3 + r_4$. Tout cela pour poser la suite

$$\begin{aligned} r_0 &= a \\ r_1 &= b \\ r_k &= q_{k+2}r_{k+1} + r_{k+2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

où la troisième équation définit r_{k+2} et q_{k+2} en fonction de r_k et r_{k+1} , à l'aide du théorème de la division euclidienne. La suite (r_k) ainsi construite est strictement décroissante et à chaque étape le lemme 3.7 et le principe de l'algorithme d'Euclide nous donnent

$$\begin{cases} \text{pgcd}(r_k, r_{k+1}) = \text{pgcd}(r_{k+1}, r_{k+2}) = \text{pgcd}(a, b) \\ 0 \leq r_{k+1} < r_k. \end{cases} \quad \begin{matrix} (3.10a) \\ (3.10b) \end{matrix}$$

La suite étant strictement décroissante, nous prenons r_n , le dernier non nul : $r_{n+1} = 0$. Dans ce cas, en prenant $k = n - 1$ dans la dernière équation (3.9) devient :

$$r_{n-1} = q_{n+1}r_n \quad (3.11)$$

avec $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(r_n, r_{n-1}) = r_n$.

Exemple 3.9.

Calculons le PGCD de 18 et 231. Pour cela nous écrivons les divisions euclidiennes en chaîne :

$$231 = 18 \cdot 12 + 15 \quad (3.12a)$$

$$18 = 1 \cdot 15 + 3 \quad (3.12b)$$

$$15 = 5 \cdot 3 + 0. \quad (3.12c)$$

Donc le PGCD est 3 (le dernier reste non nul). $\triangle$

3.2.1.2 Algorithme étendu : calcul effectif des coefficients de Bézout

La difficulté est de construire la suite qui donne des coefficients de Bézout. Elle va être construite à l'envers. Nous supposons déjà connaître la liste complète des r_k jusqu'à $r_n = \text{pgcd}(a, b)$, ainsi que la liste complète des divisions euclidiennes

$$r_k = q_{k+2}r_{k+1} + r_{k+2}. \quad (3.13)$$

Nous voulons trouver les couples (u_k, v_k) de telle façon à avoir à chaque étape

$$r_n = u_k r_k + v_k r_{k-1}. \quad (3.14)$$

Notons que c'est à chaque fois r_n que nous construisons. La première équation de type Bézout à résoudre est

$$r_n = u_n r_n + v_n r_{n-1}, \quad (3.15)$$

sachant que $r_{n-1} = q_{n+1}r_n$. On pose $v_n = 0$ et $u_n = 1$ et c'est bon. Pour la récurrence, supposons les coefficients u_k et v_k connus, et déterminons les coefficients u_{k-1} et v_{k-1} . Pour ce faire, nous égalons les deux expressions pour r_n :

$$r_n = u_k r_k + v_k r_{k-1} = u_{k-1} r_{k-1} + v_{k-1} r_{k-2}; \quad (3.16)$$

dans laquelle nous substituons $r_{k-2} = q_k r_{k-1} + r_k$:

$$u_k r_k + v_k r_{k-1} = u_{k-1} r_{k-1} + v_{k-1} (q_k r_{k-1} + r_k) \quad (3.17)$$

$$= (u_{k-1} + q_k v_{k-1}) r_{k-1} + v_{k-1} r_k \quad (3.18)$$

et nous égalons les coefficients de r_k et r_{k-1} pour obtenir

$$\begin{cases} v_{k-1} = u_k \\ u_{k-1} = v_k - v_{k-1} q_k. \end{cases} \quad (3.19a)$$

$$(3.19b)$$

Dès que u_k et v_k ainsi que q_k sont connus, on peut calculer u_{k-1} et v_{k-1} .

La dernière équation, celle avec $k = 1$, est

$$r_n = u_1 r_1 + v_1 r_0, \quad (3.20)$$

c'est-à-dire

$$\text{pgcd}(a, b) = u_1 b + v_1 a. \quad (3.21)$$

Nous avons ainsi trouvé des coefficients de Bézout pour a et b .

3.2.2 Générateurs

3.10.

Les éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ne sont pas des éléments de $\mathbb{Z}$; ce sont des parties de $\mathbb{Z}$. Pour rappel :

$$[a]_n = \{a + kn \text{ tel que } k \in \mathbb{Z}\}. \quad (3.22)$$

Pour écrire les éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, nous pouvons écrire

$$\{[i]_n\}_{i=1,\dots,n} \quad (3.23)$$

ou

$$\{[i]_n \text{ tel que } 1 \leq i \leq n\}. \quad (3.24)$$

Mais attention : l'ensemble

$$\bigcup_{i=1}^n [i]_n \quad (3.25)$$

est très différent. Ce dernier ensemble est $\mathbb{Z}$.

PROP00EWRE00UOSMsE

Proposition 3.11 ([119]).

Soit $n \geq 2$.

(1) L'ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ contient n éléments

ITEM00HTRH00DWgXlk

(2) Nous avons $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[k]_n\}_{k=0,\dots,n-1}$.

Démonstration. Nous montrons que

$$\begin{aligned} \varphi: \{1, \dots, n\} &\rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ k &\mapsto [k]_n \end{aligned} \quad (3.26)$$

est une bijection.

(1) **Injective** Supposons que $\varphi(k) = \varphi(l)$ pour $k, l \in \{1, \dots, n\}$. Il existe $t \in \mathbb{Z}$ tel que $l = k + tn$. Si $t > 0$, alors nous avons

$$l + tn \geq 1 + n > n, \quad (3.27)$$

ce qui est impossible parce que $k \in \{0, \dots, n\}$. Nous montrons de même que $t < 0$ est impossible. Nous en déduisons que $t = 0$ et donc que $k = l$.

(2) **Surjective** Soit $l \in \mathbb{Z}$. Nous allons montrer que $[l]_n$ est dans l'image de φ . Par la division euclidienne 1.343, il existe $q \in \mathbb{Z}$ et $r < n$ (dans $\mathbb{N}$) tels que $l = qn + r$. Nous venons de prouver que $[l]_n = [r]_n = \varphi(r)$.

Pour le point (2), c'est juste l'image de φ . □

PROP00MTWG00EMbvDi

Proposition 3.12 ([119]).

Soit $n \geq 2$ et $m \in \mathbb{Z}$. Nous avons équivalence entre

ITEM00MCIJ00ItgSHc

(1) $\text{pgcd}(n, m) = 1$,

ITEM00MNKC00Pnpyye

(2) $[m]_n$ engendre le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$

ITEM00BPWL00FLdJfr

(3) $[m]_n$ est inversible dans $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \cdot)$.

Démonstration. En trois parties.

(1) **(1) implique (2)**

Si $\text{pgcd}(m, n) = 1$, le théorème de Bézout 1.349 donne des $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $um + vn = 1$, autrement dit $u[m]_n = [1]_n$. Si k est quelconque, nous avons

$$[k]_n = uk[m]_n, \quad (3.28)$$

ce qui signifie que $[k]_n$ est bien un multiple de $[m]_n$ qui est donc générateur.

(2) **(2) implique (3)**

Si $[m]_n$ engendre $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, il existe en particulier un multiple de $[m]_n$ qui vaut $[1]_n$: il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k[m]_n = [1]_n$.

Nous voyons que $[k]_n$ est un inverse de $[m]_n$ dans $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \cdot)$.

(3) **(3) implique (1)**

Nous supposons que $[m]_n$ est inversible dans $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \cdot)$. C'est à dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $[k]_n[m]_n = [1]_n$. Cela signifie qu'il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que

$$km = 1 + ln. \quad (3.29)$$

Par le théorème de Bézout (pris dans l'autre sens), cela signifie que $\text{pgcd}(m, n) = 1$.

□

3.2.3 pgcd, ppcm dans $\mathbb{N}$

LEMooBJVJooFyuFeN

Lemme 3.13 ([1]).

Dans $\mathbb{N}$, le pgcd² et le ppcm sont uniques.

Démonstration. Supposons que δ_1 et δ_2 soient des pgcd de la partie S . Puisque $\delta_1 \mid S$, nous avons $\delta_1 \mid \delta_2$ parce que δ_2 est un pgcd. Le même raisonnement, inversant δ_1 et δ_2 montre que $\delta_2 \mid \delta_1$. Si (a_p) sont les éléments de la décomposition de δ_1 et (b_p) ceux de δ_2 , alors le lemme 1.366 nous indique que $a_p \leq b_p$ et $b_p \leq a_p$, ce qui implique que $a_p = b_p$.

La démonstration pour le ppcm s'effectue selon le même principe.

□

LEMooWMZWooCmkOoD

Lemme 3.14.

Si $d \mid \delta$ dans $\mathbb{N}$ alors $d \leq \delta$.

Démonstration. Nous avons $k \in \mathbb{N}$ tel que $kd = \delta$. Le lemme 1.190 dit qu'alors $\delta \geq d$.

□

NORMooNAMKooCKKZMc

3.15.

Rappel de ce que nous disions dans 1.104. Dans $\mathbb{Z}$, le pgcd n'est pas à proprement parler unique, mais nous faisons une exception en disant qu'on ne prend que les pgcd positifs.

LEMooJIGRooARiPC

Lemme 3.16.

Soit une partie S de $\mathbb{N}$.

(1) Le pgcd de S est le plus grand élément de $\mathbb{N}$ divisant tous les éléments de S .

(2) Le ppcm de S est le plus petit élément de $\mathbb{N}$ que tous les éléments de S divisent.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour le pgcd** Soit δ , le pgcd de S . Si d divise également tous les éléments de S , nous avons $d \mid \delta$ par définition du pgcd. Le lemme 3.14 dit qu'alors $d \leq \delta$.

(2) **Pour le ppcm** Soit le ppcm μ de S . Si m est également divisé par tous les éléments de S nous avons $\mu \mid m$ et donc $\mu \leq m$.

□

LEMooEVIZooPAkQZW

Lemme 3.17 ([1]).

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $ab = q^k$ et $\text{pgcd}(a, b) = 1$. Alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tels que $a = \alpha^k$ et $b = \beta^k$.

2. Le pgcd et ppcm sont définis dans 1.103.

Démonstration. Nous décomposons a , b et q en facteurs premiers suivant le théorème 1.365 :

$$a = \prod_i p_i^{a_i} \quad (3.30a)$$

$$b = \prod_i p_i^{b_i} \quad (3.30b)$$

$$q = \prod_i p_i^{q_i}. \quad (3.30c)$$

D'un part, en utilisant la commutativité et l'associativité du produit,

$$ab = \prod_i p_i^{a_i+b_i}. \quad (3.31)$$

D'autre part, puisque $ab = q^k$, nous avons

$$ab = \left(\prod_i p_i^{q_i} \right)^k = \prod_i p_i^{kq_i}. \quad (3.32)$$

En vertu de l'unicité de la décomposition en facteurs premiers, pour chaque i nous avons

$$a_i + b_i = kq_i. \quad (3.33)$$

Comme a et b sont premiers entre eux, si $a_i \neq 0$ alors $b_i = 0$ et inversement. Prenons un i tel que $a_i \neq 0$. Alors $b_i = 0$ et nous avons $a_i = kq_i$. Idem pour les b_i .

Donc tous les a_i et les b_i qui sont non nuls sont des multiples de k . Nous posons $a_i = ks_i$ et nous reportons dans (3.30a) :

$$a = \prod_i p_i^{ks_i} = \left(\prod_i p_i^{s_i} \right)^k, \quad (3.34)$$

de telle sorte que a soit une puissance k^e . La même chose tient pour b . □

Proposition 3.18.

Soient $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ décomposés en $a = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{a_p}$ et $b = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{b_p}$. En posant

$$m_p = \min\{a_p, b_p\} \quad (3.35a)$$

$$M_p = \max\{a_p, b_p\}, \quad (3.35b)$$

nous avons

$$\text{pgcd}(a, b) = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{m_p} \quad (3.36a)$$

$$\text{ppcm}(a, b) = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{M_p}. \quad (3.36b)$$

Pour rappel, la définition de pgcd et ppcm sont dans 1.103.

Démonstration. Nous commençons par le pgcd . Nous notons $\delta = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{m_p}$ et nous prouvons que δ est un pgcd de $\{a, b\}$. Il y a deux propriétés à vérifier.

- (1) **δ divise a et b** Puisque $m_p = \min\{a_p, b_p\}$, nous avons $m_p \leq a_p$ et $m_p \leq b_p$. Le lemme 1.366 nous dit alors que $\delta \mid a$ et $\delta \mid b$.
- (2) **Si s divise a et b** De même, si $s \mid a$ et $s \mid b$, nous avons $s_p \leq a_p$ et $s_p \leq b_p$, ce qui montre que $s_p \leq m_p$ et donc que $s \mid \delta$.

Pour le ppcm , nous posons $\mu = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{M_p}$, et nous prouvons que μ est un ppcm de $\{a, b\}$.

- (1) **a et b divisent μ** Pour tout p , nous avons $M_p \geq a_p$. Le lemme 1.366 implique que $a \mid \mu$. Idem pour b , donc tous les éléments de $\{a, b\}$ divisent μ .
- (2) **Si a et b divisent r** Supposons que a et b divisent un certain nombre r . Alors $a_p \leq r_p$ et $b_p \leq r_p$. Donc $r_p \geq \max\{a_p, b_p\} = M_p$. Nous en déduisons que $\mu \mid r$.

Puisque les pgcd et ppcm sont uniques (lemme 3.13 et remarque 3.15), nous avons prouvé que δ et μ sont les nombres recherchés. $\square$

COR00QIMH00UzLUJY

Corolaire 3.19.

Soit un nombre premier p . Un élément $m \in \mathbb{Z}^*$ vérifie $\text{pgcd}(m, p^n) \neq 1$ si et seulement si $m = qp$ pour un certain q .

Démonstration. Nous considérons les décompositions en facteurs premiers $m = \prod_{s \in \mathcal{P}} s^{a_s}$ et $p^n = \prod_{s \in \mathcal{P}} s^{b_s}$. Par la partie unicité du théorème 1.365, nous savons que $b_s = 0$ pour $s \neq p$ et $b_p = n$.

Nous prenons ensuite l'expression du pgcd donné par la proposition 3.18 :

$$\text{pgcd}(m, p^n) = \prod_{s \in \mathcal{P}} s^{\min\{a_s, b_s\}}. \quad (3.37)$$

Le minimum est toujours zéro lorsque $s \neq p$, donc $\text{pgcd}(m, p^n) = p^{\min\{a_p, n\}}$.

Nous avons donc $\text{pgcd}(m, p^n) \neq 1$ si et seulement si $a_p \neq 0$. Mais $a_p \neq 0$ si et seulement si m est un multiple de p . $\square$

LemheKdsa

Lemme 3.20.

Un entier $n \geq 1$ se décompose de façon unique en produit de la forme $n = qm^2$ où q est un entier sans facteurs carrés et m , un entier.

Démonstration. Pour $n = 1$, c'est évident. Nous supposons $n \geq 2$.

En ce qui concerne l'existence, nous décomposons n en facteurs premiers³ et nous séparons les puissances paires des puissances impaires :

$$n = \prod_{i=1}^r p_i^{2\alpha_i} \prod_{j=1}^s q_j^{2\beta_j+1} \quad (3.38a)$$

$$= \underbrace{\left(\prod_{i=1}^r p_i^{2\alpha_i} \prod_{j=1}^s q_j^{2\beta_j} \right)}_{m^2} \underbrace{\prod_{j=1}^s q_j}_{q}. \quad (3.38b)$$

Nous passons à l'unicité. Supposons que $n = q_1 m_1^2 = q_2 m_2^2$ avec q_1 et q_2 sans facteurs carrés (dans leur décomposition en facteurs premiers). Soit $d = \text{pgcd}(m_1, m_2)$ et k_1, k_2 définis par $m_1 = dk_1$, $m_2 = dk_2$. Par construction, $\text{pgcd}(k_1, k_2) = 1$. Étant donné que

$$n = q_1 d^2 k_1^2 = q_2 d^2 k_2^2, \quad (3.39) \quad \text{EqWPQtto}$$

nous avons $q_1 k_1^2 = q_2 k_2^2$ et donc k_1^2 divise $q_2 k_2^2$. Mais k_1 et k_2 n'ont pas de facteurs premiers en commun, donc k_1^2 divise q_2 , ce qui n'est possible que si $k_1 = 1$ (parce que k_1^2 n'a que des facteurs premiers alors que q_2 n'en a pas). Dans ce cas, $d = m_1$ et m_1 divise m_2 . Si $m_2 = lm_1$ alors l'équation (3.39) se réduit à $n = q_1 m_1^2 = q_2 l^2 m_1^2$ et donc

$$q_1 = q_2 l^2, \quad (3.40)$$

ce qui signifie $l = 1$ et donc $m_1 = m_2$. $\square$

Les nombres premiers ne sont pas si rares que ça dans $\mathbb{N}$. Nous allons voir dans 15.129 que la somme des inverses des nombres premiers diverge. Pour comparaison, la somme des inverses des carrés converge par la proposition 15.136. Il y a donc, dans un certains sens, plus de nombres premiers que de carrés ; dans un autre sens, il y en a autant : une infinité dénombrable.

3. Théorème 1.365.

3.2.4 Ordre d'un élément dans un groupe fini

Voir plus d'informations dans la partie 5.2 sur les groupes monogènes.

LEMooRfKQooWTdYcr

Lemme 3.21 ([1]).

Si g est un élément d'ordre s , et si $g^r = e$, alors $s \mid r$.

THOooSUWKooICbzqM

Théorème 3.22 (Théorème de Cauchy[120, 121]).

Soit G , un groupe cyclique d'ordre n . Si d divise n , alors G possède un unique sous-groupe d'ordre d .

En particulier, G possède des éléments de tous les ordres divisant n .

Démonstration. En plusieurs parties.

- (1) **Existence** L'hypothèse est que G est un groupe cyclique. Donc nous pouvons considérer une générateur g de G . Nous considérons $H_d = \text{gr}(g^{n/d})$, et nous prouvons que H_d est un sous-groupe d'ordre d .

D'abord nous avons $(g^{n/d})^d = g^n = e$. Donc $|H_d| \leq d$. Pour prouver que $|H_d| \geq d$, nous supposons par l'absurde qu'il existe $k < d$ tel que $(g^{n/d})^k = e$. Nous aurions alors $g^{nk/d} = e$ avec $nk/d < n$, ce qui contredirait que g est générateur d'un groupe d'ordre n .

- (2) **Unicité** Soit H , un sous-groupe de G d'ordre d . Nous allons prouver que $H = \text{gr}(g^{n/d})$. Vu que H et H_d ont le même cardinal, il suffira de montrer que $H \subset H_d$ pour avoir $H = H_d$.

Vu que $\{e\}$ est l'unique sous-groupe d'ordre 1, nous supposons que $d > 1$. Soit $h \neq e$ dans H . Vu que g est générateur de G , il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^k = h$. Vu que H est d'ordre d , nous avons $h^d = e$ (corolaire 2.15). Donc

$$g^{kd} = e. \quad (3.41)$$

Le lemme 3.21 dit alors que $n \mid kd$. Soit $t \in \mathbb{N}^*$ tel que $nt = kd$; nous pouvons écrire $k = tn/d$ et récrire $g^k = h$ avec cette valeur de k :

$$h = g^{tn/d} = (g^{n/d})^t \in \text{gr}(g^{n/d}). \quad (3.42)$$

Vu que h a été pris arbitrairement dans H , nous en déduisons que $H \subset \text{gr}(g^{n/d})$.

□

Le lemme suivant indique que sous hypothèse de commutativité, l'ordre d'un élément est une notion multiplicative.

LemyETtdy

Lemme 3.23 ([122]).

Soit G un groupe et $a, b \in G$ tels que $ab = ba$ d'ordres respectivement r et s , deux nombres premiers entre eux. Alors l'élément ab est d'ordre rs .

Démonstration. Étant donné que $(ab)^{rs} = a^{rs}b^{rs} = 1$, l'ordre de ab divise rs . Et comme r et s sont premiers entre eux, l'ordre de ab s'écrit sous la forme r_1s_1 avec $r_1 \mid r$ et $s_1 \mid s$. Nous avons

$$a^{r_1s_1}b^{r_1s_1} = (ab)^{r_1s_1} = 1, \quad (3.43)$$

que nous élevons à la puissance r_2 où r_2 est défini en posant $r = r_1r_2$:

$$a^{rs_1}b^{rs_1} = 1. \quad (3.44)$$

Et comme $a^{rs_1} = 1$, nous concluons que $b^{rs_1} = 1$. Donc $s \mid rs_1$. Par le lemme de Gauss 1.361, nous avons en fait $s \mid s_1$. Puisqu'on a aussi $s_1 \mid s$, nous avons $s = s_1$.

Le même type d'argument donne $r = r_1$, et finalement l'ordre de ab est $r_1s_1 = rs$.

□

LemSkIOOG

Lemme 3.24 ([53]).

Un sous-groupe d'indice 2 est un sous-groupe normal.

Démonstration. Si H est un tel sous-groupe d'un groupe G , alors G possède exactement deux classes à gauche par rapport à H (théorème de Lagrange 2.14) et se partitionne donc en deux parties : $G = H \cup xH$ avec $x \notin H$. De même pour les classes à droite : $G = H \cup Hx$. Puisque la classe à droite Hx n'est pas H , on a $xH = Hx$, et H est normal dans G par la proposition 1.410. $\square$

PropubeiGX

Lemme 3.25 ([123]).

Soit H , un sous-groupe normal d'indice m de G . Alors pour tout $a \in G$ nous avons $a^m \in H$.

Démonstration. Par définition de l'indice, le groupe G/H est d'ordre m . Donc si $[a] \in G/H$, nous avons $[a]^m = [e]$, ce qui signifie $[a^m] = [e]$, ou encore $a^m \in H$. $\square$

PROPooVWVTooQzuAlA

Proposition 3.26 ([123]).

Soit un groupe fini G et H , un sous-groupe normal d'ordre n et d'indice m avec m et n premiers entre eux. Alors H est l'unique sous-groupe de G à être d'ordre n .

Démonstration. Soit H' un sous-groupe d'ordre n . Si $h \in H'$ alors $h^n = 1$ et $h^m \in H$ par le lemme 3.25. Étant donné que m et n sont premiers entre eux, par le théorème de Bézout 1.349, il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que

$$am + bn = 1. \quad (3.45)$$

Et donc, $h = h^1 = (h^m)^a (h^n)^b$. En tenant compte du fait que $h^n = 1$ et $h^m \in H$, nous avons $h \in H$. Ce que nous venons de prouver est que $H' \subset H$ et donc que $H = H'$ parce que $|H'| = |H| = |G|/m$. $\square$

3.27.

Notons que cette proposition ne dit pas qu'il existe un sous-groupe d'ordre n et d'indice m . Il dit juste que si il y en a un et si il est normal, alors il n'y en a pas d'autre.

LemqAUBYn

Lemme 3.28.

L'ensemble des ordres d'un groupe commutatif est stable par PPCM⁴.

Autrement dit, si $x \in G$ est d'ordre r et si $y \in G$ est d'ordre s , alors il existe un élément d'ordre $\text{ppcm}(r, s)$.

Démonstration. Soit $m = \text{ppcm}(r, s)$. Afin d'écrire m sous une forme pratique, nous considérons les décompositions en facteurs premiers de r et s :

$$r = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i} \quad (3.46a)$$

$$s = \prod_{i=1}^k p_i^{\beta_i} \quad (3.46b)$$

où $\{p_i\}_{i=1, \dots, k}$ est l'ensemble des nombres premiers arrivant dans les décompositions de r et de s . Si nous posons

$$r' = \prod_{\substack{i=1 \\ \alpha_i > \beta_i}}^k p_i^{\alpha_i} \quad (3.47a)$$

$$s' = \prod_{\substack{i=1 \\ \alpha_i \leq \beta_i}}^k p_i^{\beta_i}, \quad (3.47b)$$

alors $\text{ppcm}(r, s) = r's'$ et r' et s' sont premiers entre eux. L'élément $x^{r/r'}$ est d'ordre r' et l'élément $y^{s/s'}$ est d'ordre s' . Maintenant nous utilisons le fait que G soit commutatif et le lemme 3.23 pour conclure que l'ordre de $x^{r/r'} y^{s/s'}$ est $r's' = m$. $\square$

4. Définition 1.103.

3.2.5 Écriture des fractions

THOooWYQVooRBaAAM

Théorème 3.29 ([124]).*Tout élément de $\mathbb{Q}^+$ s'écrit de façon unique comme quotient de deux entiers premiers entre eux.**Démonstration.* En deux parties⁵

- (1)
- Unicité**
- Supposons avoir
- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
- avec
- $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(c, d) = 1$
- . Nous avons

$$ad = bc \quad (3.48)$$

donc

(1a) a divise bc mais est premier avec b donc a divise c par le lemme de Gauss 1.361.(1b) c divise ad mais est premier avec d donc c divise a par le lemme de Gauss 1.361.En conclusion a divise c et c divise a , ergo⁶ $a = c$. L'égalité $b = d$ est alors immédiate.

- (2)
- Existence**
- Soit le quotient
- $\frac{a}{b}$
- . Nous avons

$$\frac{a}{b} = \frac{a/\text{pgcd}(a, b)}{b/\text{pgcd}(a, b)}, \quad (3.49)$$

qui est encore un quotient d'entiers parce que $\text{pgcd}(a, b)$ divise aussi bien a que b . Il faut montrer que les nombres $a/\text{pgcd}(a, b)$ et $b/\text{pgcd}(a, b)$ sont premiers entre eux. Pour cela nous supposons que k est un diviseur commun. En particulier, les nombres $a/k \text{pgcd}(a, b)$ et $b/k \text{pgcd}(a, b)$ sont des entiers, ce qui fait que $k \text{pgcd}(a, b)$ est un diviseur commun de a et b . Étant donné que $\text{pgcd}(a, b)$ est le plus grand tel diviseur, nous devons avoir $k \text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a, b)$ c'est-à-dire que $k = 1$. Donc les nombres $a/\text{pgcd}(a, b)$ et $b/\text{pgcd}(a, b)$ sont premiers entre eux.

□

PROPooWBFJooWisSZX

Proposition 3.30 ([1]).*Soient $l, l, d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ tels que*

$$\frac{k}{d_1} = \frac{l}{d_2} \quad (3.50)$$

*avec $\text{pgcd}(k, d_1) = 1$.**Alors*

- (1) $d_1 \leq d_2$
 (2) $d_1 = \frac{d_2}{\text{pgcd}(l, d_2)}.$

Proposition 3.31.

PROPooRZDDooLJabov

*Les entiers p et q sont premiers entre eux⁷ si et seulement si p^2 et q^2 sont premiers entre eux.**Démonstration.* En deux parties.

- (1) $\Rightarrow$ Nous supposons que p^2 et q^2 ne sont pas premiers entre eux. Donc il existe δ divisant p^2 et q^2 . Si δ' est un facteur premier de δ , alors δ' divise δ et donc aussi p^2 et q^2 . Le lemme 1.367 implique que δ divise p et q . Donc p et q ne sont pas premiers entre eux.
 (2) $\Leftarrow$ Si p^2 et q^2 sont premiers entre eux, par le théorème de Bézout 1.349 il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que

$$ap^2 + bq^2 = 1 \quad (3.51)$$

Dans ce cas, $(ap)p + (bq)q = 1$, ce qui montre (par encore Bézout, mais l'autre sens) que p et q sont premiers entre eux.

□

5. Définitions des pgcd et ppcm en 1.103.

6. Lemme 1.363.

7. Premiers entre eux, définition 1.355.

Une des conséquences de ces résultats sera le fait que $\sqrt{n}$ est irrationnelle dès que n n'est pas un carré parfait, théorème 3.32.

Nous avons déjà vu dans la proposition 1.511 que $\sqrt{2}$ était irrationnel. En fait le théorème suivant va nous montrer que le nombre $\sqrt{n}$ est soit entier, soit irrationnel.

THOooYXJIooWcbnbnm

Théorème 3.32.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le nombre $\sqrt{n}$ est rationnel si et seulement si n est un carré parfait.

Démonstration. Supposons que $\sqrt{n}$ soit rationnel. Le théorème 3.29 nous donne $p, q \in \mathbb{N}$ premiers entre eux tels que $\sqrt{n} = p/q$. La proposition 3.31 nous enseigne de plus que p^2 et q^2 sont premiers entre eux. Nous avons

$$p^2 = nq^2. \quad (3.52)$$

Le nombre q est alors un diviseur commun de q^2 et de p . Donc $q = 1$ et $n = p^2$ est un carré parfait. $\square$

3.2.6 Équation diophantienne linéaire à deux inconnues

subsecZVKNooXNjPSf

Soient a, b et c des entiers naturels donnés. Nous considérons l'équation

$$ax + by = c \quad (3.53)$$

EqTOVSooJlxJlq

à résoudre [125] pour $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.

Si a ou b est nul, c'est facile ; nous supposons donc que a et b sont tous deux non nuls. Nous commençons par simplifier l'équation en cherchant les diviseurs communs. Soit $d = \text{pgcd}(a, b)$ et notons $a = da'$, $b = db'$. Nous avons déjà l'équation

$$d(a'x + b'y) = c, \quad (3.54)$$

et donc si c n'est pas un multiple de d , il n'y a pas de solution⁸. Si par contre c est un multiple de d alors nous écrivons $c = c'd$ et l'équation devient

$$a'x + b'y = c' \quad (3.55)$$

C'est maintenant que nous utilisons le théorème de Bézout 1.349 : puisque a' et b' sont premiers entre eux, nous avons la relation $a'u + b'v = 1$ pour certains⁹ nombres entiers u et v . Nous récrivons notre équation sous la forme $a'x + b'y = c'(a'u + b'v)$ et rassemblons les termes :

$$a'(x - c'u) = b'(c'v - y). \quad (3.56)$$

C'est-à-dire que si (x, y) est une solution, alors a' divise $b'(c'v - y)$. Mais comme a' et b' sont premiers entre eux, le nombre a' doit forcément¹⁰ diviser $c'v - y$. Disons $c'v - y = ka'$. Alors $a'(x - c'u) = b'ka'$ et donc

$$x = b'k + c'u. \quad (3.57)$$

Nous trouvons alors une expression pour y en injectant ce résultat dans $a'x + b'y = c'$ et en utilisant le théorème de Bézout : $a'c'u = (1 - b'v)c'$. Au final nous avons prouvé que toutes les solutions sont de la forme

EqYCCQVooZzHuRq

$$\begin{cases} x = b'k + c'u \\ y = v c' - a'k \end{cases} \quad (3.58a)$$

$$(3.58b)$$

avec $k \in \mathbb{Z}$. Si nous ne voulons réellement que les solutions dans $\mathbb{N}$ et non dans $\mathbb{Z}$, il faut seulement un peu restreindre les valeurs de k . Il en reste un nombre fini parce que l'équation pour x borne k vers le bas tandis que celle pour y borne k vers le haut.

Par ailleurs, il est très vite vérifié que tous les couples (x, y) de la forme (3.58) sont solutions.

8. Exemple : $8x + 2y = 9$. Le membre de gauche est certainement un nombre pair et il n'y a donc pas de solution.

9. Nous avons décrit un algorithme pour les trouver en démontrant l'équation 3.21.

10. C'est Gauss 1.361 qui le dit, et vous savez que lorsque Gauss dit, c'est *forcément* vrai.

Exemple 3.33.

Résoudre l'équation $2x + 6y = 52$.

Nous pouvons factoriser 2 dans le membre de gauche et simplifier alors toute l'équation par 2 :

$$x + 3y = 26. \quad (3.59)$$

Nous cherchons une relation de Bézout pour $u + 3v = 1$. Ce n'est heureusement pas très compliqué : $u = -5$, $v = 2$. Nous pouvons alors écrire

$$x + 3y = 26 \times (-5 + 3 \times 2), \quad (3.60)$$

et donc $x + 5 \times 26 = -3(y - 26 \times 2)$, et en posant $k = y - 26 \times 2$ nous avons

$$x = -3k - 130. \quad (3.61)$$

En injectant nous trouvons l'équation $3y - 3k - 130 = 26$ et donc

$$y = 52 + k. \quad (3.62)$$

△

3.2.7 Quotients

Nous écrivons $a = b \pmod p$ essentiellement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b + kp = a$. Plus généralement nous notons $[a]_p = \{a + kp \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et l'écriture « $a = n \pmod p$ » peut tout autant signifier $a = [b]_p$ que $a \in [b]_p$. La différence entre les deux est subtile mais peut de temps en temps valoir son pesant d'or.

Proposition 3.34.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est monogène. Si $n \neq 0$, il est cyclique d'ordre n .

Démonstration. Nous considérons la surjection canonique $\mu: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Si $a \in \mathbb{Z}$, alors $\mu(a) = a\mu(1)$. Par conséquent $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \text{gr}(\mu(1))$ parce que tout groupe contenant $\mu(1)$ contient tous les multiples de $\mu(1)$, et par conséquent contient $\mu(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Soit $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et considérons x_0 , le plus petit naturel représentant x . Nous notons $x = [x_0]$. Le théorème de la division euclidienne 1.343 donne l'existence de q et r avec $0 \leq r < n$ et $q \geq 0$ tels que

$$x_0 = nq + r. \quad (3.63)$$

Nous avons $[x_0] = [r] = \mu(r)$ parce que $x_0 - r$ est un multiple de n . Nous avons donc $[x_0] \in \mu(\mathbb{N}_{n-1})$. Par conséquent

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mu(\mathbb{Z}) = \mu(\mathbb{N}_{n-1}). \quad (3.64)$$

La restriction $\mu: \mathbb{N}_{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est donc surjective. Montrons qu'elle est également injective. Si $\mu(x_0) = \mu(x_1)$, alors $x_1 = x_0 + kn$. Si nous supposons que $x_1 > x_0$, alors $k > 0$ et si $x_0 \in \mathbb{N}_{n-1}$, alors $x_1 > n - 1$.

L'ordre de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est donc le même que le cardinal de $\mathbb{N}_{n-1}$, c'est-à-dire n . Le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est donc fini, d'ordre n et monogène parce que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \text{gr}(\mu(1))$. Il est donc cyclique. □

Lemme 3.35 ([126]).

Soit $q \in \mathbb{N}$ avec $q \geq 2$. Soient $n, d \in \mathbb{N}$ tels que $q^d - 1 \mid q^n - 1$. Alors $d \mid n$.

Démonstration. Par le théorème de division euclidienne 1.343, il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $n = ad + b$ avec $0 \leq b < d$. En remarquant que $q^d \in [1]_{q^d-1}$ nous avons

$$q^n = (q^d)^a q^b \in [1]_{q^d-1} q^b = [q^b]_{q^d-1}. \quad (3.65)$$

Pour cela nous avons utilisé d'abord le fait que si $a \in [z]_k$, alors $a^n \in [z^n]_k$ et ensuite le fait que $[1]_k x = [x]_k$. D'autre part l'hypothèse $q^d - 1 \mid q^n - 1$ implique

$$q^n \in [1]_{q^d-1}. \quad (3.66)$$

Par conséquent le nombre q^n est à la fois dans $[q^b]_{q^d-1}$ et dans $[1]_{q^d-1}$. Cela implique que

$$[1]_{q^d-1} = [q^b]_{q^d-1}, \quad (3.67)$$

ou encore que $q^b \in [1]_{q^d-1}$ ou encore que $q^d - 1 \mid q^b - 1$.

Étant donné que $b < d$ et que $q \geq 2$, nous avons que $q^b - 1 < q^d - 1$; donc pour que $q^d - 1$ divise $q^b - 1$, il faut que $q^b - 1$ soit zéro, c'est-à-dire $b = 0$.

Mais dire $b = 0$ revient à dire que $d \mid n$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

3.3 Coefficients multinomiaux

3.3.1 Théorème multinomial

DEFooCQPRooFeWeOS

Définition 3.36 (multiindices[127]).

Un **multiindice** pour $\mathbb{R}^n$ est un élément de $\mathbb{N}^n$. Sa taille est définie par

$$|\alpha| = \sum_i \alpha_i. \quad (3.68)$$

Nous disons que $\beta \leq \alpha$ lorsque $\beta_i \leq \alpha_i$ pour tout i .

Nous définissons sa factorielle par

$$\alpha! = \prod_{k=1}^n (\alpha_k!) = \alpha_1! \times \dots \times \alpha_n!. \quad (3.69)$$

En ce qui concerne les coefficients binomiaux, nous posons

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{(\alpha - \beta)! \beta!} = \prod_{i=1}^n \binom{\alpha_i}{\beta_i}. \quad (3.70)$$

EQooKBURooKFBxnt

Si $x \in \mathbb{R}^n$ et si $\alpha \in \mathbb{N}^n$, nous notons

$$x^\alpha = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}. \quad (3.71)$$

THOooNHAUooQvuytn

Théorème 3.37 (Théorème multinomial[127]).

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, et $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Nous avons

$$(x_1 + \dots + x_n)^k = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha|=k}} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha. \quad (3.72)$$

Démonstration. Le cas $n = 2$ est la formule binomiale 1.375 :

$$(x_1 + x_2)^k = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} x_1^l x_2^{k-l} \quad (3.73a)$$

$$= \sum_{l=0}^k \frac{k!}{l!(k-l)!} x_1^l x_2^{k-l} \quad (3.73b)$$

$$= \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = k} \frac{k!}{\alpha_1! \alpha_2!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \quad (3.73c)$$

$$= \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^2 \\ |\alpha|=k}} \frac{k!}{\alpha!} x^\alpha. \quad (3.73d)$$

Et maintenant, nous faisons une récurrence sur n , en tenant k fixé. Nous supposons que la formule est démontrée pour tout $n \leq N$, et nous allons avec $N + 1$. Soit $x = (x_1, \dots, x_{N+1})$, et posons $y = (x_1, \dots, x_N)$. Nous avons

$$(x_1 + \dots + x_{N+1})^k = ((x_1 + \dots + x_N) + x_{N+1})^k \quad (3.74a)$$

$$= \sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!j!} (x_1 + \dots + x_N)^i x_{N+1}^j \quad (3.74b)$$

$$= \sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!j!} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^N \\ |\alpha|=i}} x_{N+1}^j \frac{i!}{\alpha!} y^\alpha \quad (3.74c)$$

$$= \sum_{j=0}^k \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^N \\ |\alpha|=k-j}} x_{N+1}^j \frac{k!}{j!} \frac{1}{\alpha!} y^\alpha \quad (3.74d)$$

$$= \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^{N+1} \\ |\beta|=k}} \frac{k!}{\beta_{N+1}! \alpha!} x_{N+1}^{\beta_{N+1}} x_1^{\alpha_1} \dots x_N^{\alpha_N} \quad \text{cf. justif.} \quad (3.74e)$$

$$= \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^{N+1} \\ |\beta|=k}} x^\beta \frac{k!}{\beta!}. \quad (3.74f)$$

Justification pour (3.74e). Les deux sommes ensemble font une somme sur tous $\beta = (\alpha, j) \in \mathbb{N}^{N+1}$ avec $|\beta| = |\alpha| + j = (k - j) + j = k$. $\square$

Lemme 3.38 ([1]).

Soit une application $f: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Nous avons

$$\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha|=2}} \frac{1}{\alpha!} f(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{k,l} f(e_k + e_l). \quad (3.75)$$

Démonstration. Nous avons

$$\{\alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tel que } |\alpha| = 2\} = \{e_k + e_l \text{ tel que } k, l = 1, \dots, n\}, \quad (3.76)$$

mais nous ne pouvons pas sommer en faisant $\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^2 \\ |\alpha|=2}} = \sum_{k,l}$ parce que à droite, les termes (k, l) et (l, k) sont identiques.

Au lieu de ça, remarquons que nous avons une bijection

$$\begin{aligned} \varphi: \{(k, l) \in \{1, \dots, n\}^2 \text{ tel que } k \leq n\} &\rightarrow \{e_k + e_l\}_{k,l=1,\dots,n} \\ (k, l) &\mapsto e_k + e_l. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Prouvons que cette application est injective. Si $\varphi(k, l) = \varphi(s, t)$, alors $e_k + e_l = e_s + e_t$. Le produit scalaire avec e_k donne

$$1 + \delta_{kl} = \delta_{st} + \delta_{tk}. \quad (3.78)$$

(1) **Si $k < l$** Alors $1 = \delta_{sk} + \delta_{tk}$. Nous avons donc forcément $k = s$ ou $k = t$, mais pas les deux en même temps.

(1a) **Si $s = k$** Dans ce cas $t \neq k$, et nous avons $e_k + e_l = e_k + e_t$, donc $e_l = e_t$ et donc $l = t$. Nous avons donc $(k, l) = (s, t)$, ce qu'il fallait.

(1b) **Si $t = k$** Alors $e_l = e_s$ et donc $l = s$, ce qui donnerait $(k, l) = (l, k)$, ce qui est impossible parce que $k < l$.

(2) **Si $k = l$** Alors $2e_k = e_s + e_t$. Le produit scalaire avec e_k donne $2 = \delta_{sk} + \delta_{tk}$ et donc $s = t = k$.

Nous pouvons donc sommer de la façon suivante :

$$\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha|=2}} \frac{1}{\alpha!} f(\alpha) = \sum_{k \leq l} \frac{1}{(e_k + e_l)!} f(e_k + e_l) \quad (3.79a)$$

$$= \sum_{k < l} f(e_k + e_l) + \sum_k \frac{1}{2} f(2e_k) \quad (3.79b)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k \neq l} f(e_k + e_l) + \sum_k \frac{1}{2} f(2e_k) \quad \text{cf. justif.} \quad (3.79c)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k,l} f(e_k + e_l). \quad (3.79d)$$

Justification pour (3.79c). Nous avons $f(e_l + e_l) = f(e_l + e_k)$. Donc $\sum_{k < l} f(e_k + e_l) = \sum_{k > l} f(e_k + e_l)$. $\square$

3.4 Polynômes de plusieurs variables

Définition 3.39.

L'ensemble des **polynôme de n variables** sur l'anneau A est $A^{(\mathbb{N}^n)}$, c'est-à-dire l'ensemble des suites indexées par $\mathbb{N}^n$ et dont seulement une quantité finie de coefficients sont non nuls.

Le produit sur $A[X_1, \dots, X_n]$ est défini par

$$(PQ)(k_1, \dots, k_n) = \sum_{\substack{(l_1, \dots, l_n), (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n \\ l_i + m_i = k_i}} P_{l_1, \dots, l_n} Q_{m_1, \dots, m_n}. \quad (3.80)$$

3.40.

Dans $A[X_1, \dots, X_n]$, la multiplication n'est pas la multiplication de fonctions $\mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{K}$, parce que le but est d'obtenir la multiplication usuelle au niveau des évaluations.

Définition 3.41.

Si P est un polynôme de n variables sur A , et si $(x_1, \dots, x_n) \in A^n$, **l'évaluation** de P sur $(x_1, \dots, x_n)$ est

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n} P_{k_1, \dots, k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}. \quad (3.81)$$

Notez que la somme, bien que sur $\mathbb{N}^n$, est une somme finie.

3.42.

Comme dans le cas des polynômes d'une seule variable, les X_i dans la notation $A[X_1, \dots, X_n]$ sont à prendre à la légère. L'anneau des polynômes de n variables sur A aurait mieux fait d'être noté par exemple par $\mathcal{P}_n(A)$.

Le fait est que nous avons les polynômes élémentaires définis par

$$X_i(k_1, \dots, k_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } (k_1, \dots, k_n) = (1, 0, \dots, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.82)$$

et que l'anneau des polynômes peut être vu comme A (les polynômes constants) étendus par les X_i .

Quoi qu'il en soit, les X_i dans la notation $A[X_1, \dots, X_n]$ sont des indices muets. L'anneau $A[X_1, \dots, X_n]$ est exactement le même que $A[T_1, \dots, T_n]$.

3.4.1 Divisibilité et classes d'association

Définition 3.43.

On dit de deux éléments $a, b \in A$ qu'ils sont **associés** si il existe un inversible $u \in A$ tel que $a = ub$.

La **classe d'association** d'un élément $a \in A$ est l'ensemble des éléments qui lui sont associés.

LemRmVTRq

Lemme 3.44.

Si A est un anneau intègre et si $a, b \in A$ sont deux éléments vérifiant $a \mid b$ et $b \mid a$, alors ils sont associés, c'est-à-dire qu'il existe un inversible $u \in A$ tel que $a = ub$.

Démonstration. Les hypothèses à propos de la divisibilité nous indiquent que $a = xb$ et $b = ya$ pour certains $x, y \in A$. Alors,

$$b(1 - yx) = 0. \quad (3.83)$$

Étant donné que A est intègre, cela montre que $b = 0$ ou $1 - yx = 0$. Si $b = 0$ nous avons immédiatement $a = 0$ et le lemme est prouvé. Si au contraire $yx = 1$, c'est que y et x sont inversibles et inverses l'un de l'autre. $\square$

Exemple 3.45.

Dans $\mathbb{Z}[i]$, les inversibles sont ± 1 et $\pm i$. Donc les éléments associés à z sont $z, -z, iz$ et $-iz$.

Notons au passage que la notion de divisibilité dans $\mathbb{Z}[i]$ n'est pas immédiatement intuitive. En effet bien que 7 ne soit pas divisible par 2 (ni dans $\mathbb{Z}$ ni dans $\mathbb{Z}[i]$), le nombre $7 + 6i$ est divisible par $2 + i$ dans $\mathbb{Z}[i]$. En effet :

$$(2 + i)(4 + i) = 7 + 6i. \quad (3.84)$$

 $\triangle$ **Exemple 3.46.**

Si $\mathbb{K}$ est un corps, l'élément XY de $\mathbb{K}[X, Y]$ n'est pas premier parce que $XY \mid X^2Y^2$ alors que XY ne divise ni X^2 ni Y^2 . $\triangle$

LEMooLXPSooyJULCJ

Lemme 3.47 ([1]).

Si a et b sont associés, alors $(a) = (b)$.

Démonstration. Vu que a et b sont associés, il existe un inversible u tel que $a = ub$ et $b = va$ (en posant $v = u^{-1}$). Si $x \in (a)$, alors il existe $\alpha, \beta \in A$ tels que $x = \alpha a \beta = \alpha ub \beta \in AbA = (b)$. Donc $(a) \subset (b)$. L'inclusion dans l'autre sens se fait de la même manière. $\square$

3.4.2 PGCD et PPCM

Pour le théorème de Bézout et autres opérations avec des modulo, voir le thème 3. Le pgcd et le ppcm sont définis en 1.103.

LEMooGWKMooLEepxz

Lemme 3.48.

Soient A un anneau intègre et $S \subset A$. Si δ est un PGCD de S , alors l'ensemble des PGCD de S est la classe d'association¹¹ de δ .

De la même façon si μ est un PPCM de S , alors l'ensemble des PPCM de S est la classe d'association de μ .

Démonstration. Soient δ un PGCD de S et u un inversible dans A . Si $x \in S$ nous avons $\delta \mid x$ et donc $x = a\delta$. Par conséquent $x = au^{-1}u\delta$ et donc $u\delta$ divise x . De la même manière, si d divise x pour tout $x \in S$, alors d divise δ et donc $\delta = ad$ et $u\delta = aud$, ce qui signifie que d divise $u\delta$.

Dans l'autre sens nous devons prouver que si δ' est un autre PGCD de S , alors il existe un inversible $u \in A$ tel que $\delta' = u\delta$. Comme δ' divise x pour tout $x \in S$, nous avons $\delta' \mid \delta$, et symétriquement nous trouvons $\delta \mid \delta'$. Par conséquent (lemme 3.44), il existe un inversible u tel que $\delta = u\delta'$.

Le même type de raisonnement tient pour le PPCM. $\square$

Si δ est un PGCD de S , nous dirons *par abus de langage* que δ est le PGCD de S , gardant en tête qu'en réalité toute sa classe d'association est PGCD. Nous noterons aussi, toujours par abus que $\delta = \text{pgcd}(S)$.

11. Éléments associés, définition 3.43.

Remarque 3.49.

La classe d'association d'un élément n'est pas toujours très grande. Les inversibles dans $\mathbb{Z}$ étant seulement ± 1 , nous pouvons obtenir l'unicité du PGCD et du PPCM en imposant qu'ils soient positifs.

Pour les polynômes, nous obtenons l'unicité en demandant que le PGCD soit unitaire.

Dans les cas pratiques, il y a donc en réalité peu d'ambiguïté à parler du PGCD ou du PPCM d'un ensemble.

3.4.3 pgcd, ppcm dans un anneau principal

Juste pour ne pas l'oublier, un anneau principal est toujours commutatif.

Proposition 3.50 ([61, 1]).

Soit un anneau principal¹² A . Soit une partie $S \subset A$ d'éléments non nuls. Alors :

(1) S admet un pgcd,

(2) S admet un ppcm,

(3) L'élément $\delta \in A$ est un pgcd de S si et seulement si il engendre

$$J = \bigcup_{\alpha \text{ fini dans } S} \sum_{s \in \alpha} sA. \quad (3.85)$$

Démonstration. En ce qui concerne l'existence, nous savons que tout idéal est principal et admet donc un générateur. Les parties I et J de la proposition 1.315 sont des idéaux principaux et admettent donc des générateurs qui sont respectivement ppcm et pgcd de S . Les parties (1) et (2) sont prouvées.

Il reste à prouver (3). Le sens réciproque est déjà dans 1.315. Nous supposons donc que $\delta \in \text{pgcd}(S)$ et nous prouvons que $(\delta) = J$.

Vu que J est un idéal, il admet un générateur d , qui est également un pgcd de S . Les éléments d et δ sont donc associés par le lemme 3.48. Donc $(d) = (\delta)$ par 3.47. Et au final, $(\delta) = (d) = J$. $\square$

Pour rappel, la notation (a) représente l'idéal engendré par a , c'est-à-dire

$$(a) = \{ax \text{ tel que } x \in A\} = aA. \quad (3.86)$$

3.4.4 Anneaux intègres et corps

Le fait d'être intègre pour un anneau n'assure pas le fait d'être un corps. Nous avons cependant ce résultat pour les anneaux finis.

Proposition 3.51.

Un anneau fini intègre est un corps.

Démonstration. Soit A un tel anneau. Soit $a \neq 0$. Les applications

$$l_a: x \mapsto ax \quad (3.87a)$$

$$r_a: x \mapsto xa \quad (3.87b)$$

sont injectives. En tant que applications injectives entre ensembles finis, elles sont surjectives. Il existe donc b et c tels que $1 = ba = ac$. Nous trouvons que b et c sont égaux parce que¹³

$$b = b(ac) = (ba)c = c. \quad (3.88)$$

Par conséquent b est un inverse de a . $\square$

12. Définition 1.340.

13. Il faut être un peu souple avec les notations communément employées dans les ouvrages mathématiques, et que nous reprenons telles quelles. Dans l'équation qui suit, $b(ac)$ est le produit de b par l'élément ac , et non quelque chose comme le produit de b avec l'idéal (ac) par exemple.

PropzhFgNj

Proposition 3.52.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) n est premier.
- (2) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un anneau intègre.
- (3) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps.

Démonstration. L'équivalence entre les deux premiers points est le contenu du corolaire 1.399. Le fait que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit un corps lorsque $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre est la proposition 3.51. Le fait que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit intègre lorsque $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps est une propriété générale des corps : ce sont en particulier des anneaux intègres (lemme 1.327). $\square$

3.5 Anneau factoriel

DEFooVCATooPJGWKq

Définition 3.53 (Anneau factoriel).

Un anneau commutatif A est **factoriel** si il vérifie les propriétés suivantes.

- (1) L'anneau A est intègre¹⁴.
- (2) Si $a \in A$ est non nul et non inversible, alors il admet une décomposition en facteurs irréductibles : $a = p_1 \dots p_k$ où les p_i sont irréductibles¹⁵.
- (3) Si $a = q_1 \dots q_m$ est une autre décomposition de a en irréductibles, alors $m = k$ et il existe une permutation¹⁶ $\sigma \in S_k$ telle que p_i et $q_{\sigma(i)}$ soient associés¹⁷.

ITEMooKVDBooTASwVO

Un anneau factoriel permet de caractériser le pgcd et le ppcm de nombres.

LEMooLVKMooSLuzao

Lemme 3.54 ([128]).

Soit un anneau factoriel A et un élément irréductible $p \in A$. Si $p \mid xy$, alors p divise x ou y ou les deux.

Démonstration. Comme nous sommes dans un anneau factoriel, nous pouvons écrire q , x et y comme produits d'irréductibles, et profiter de la plus ou moins unicité de ces décompositions (la propriété 3.53(3)). Nous notons $q = q_1 \dots q_k$, $x = x_1 \dots x_m$ et $y = y_1 \dots y_l$. L'égalité $pq = xy$ devient :

$$pq_1 \dots q_k = x_1 \dots x_m y_1 \dots y_l. \quad (3.89)$$

Il existe un des x_j ou y_j qui est associé à p . Fixons un i et disons que c'est x_i (si c'est un des y_j , adaptez) : il existe un inversible u tel que $x_i = pu$. Nous avons alors¹⁸

$$x = pux_1 \dots x_{i-1}x_{i+1} \dots x_m. \quad (3.90)$$

Donc p divise x et fin de l'histoire. $\square$

PROPooOQSXooYidPQv

Proposition 3.55 ([128]).

Dans un anneau factoriel, tout élément irréductible est premier¹⁹.

Démonstration. Soit un anneau factoriel A et un élément irréductible p dans A . Nous devons prouver qu'il est premier.

- (1) **p est non nul** Si $p = 0$, nous avons $p = 0 \times 0$. Comme 0 n'est pas inversible (un anneau factoriel est par définition intègre), p serait un produit de deux non inversibles.

14. Anneau intègre, définition 1.326.

15. Élément irréductible, définition 1.318.

16. Définition 1.261.

17. Définition 3.43.

18. Le fait que A soit commutatif est utilisé partout.

19. Élément premier, définition 1.317.

- (2) **Non inversible** L'élément p est non inversible parce que c'est dans la définition d'un élément irréductible.
- (3) **Si $p \mid xy$** Si p divise xy , alors il divise x ou y ; c'est le lemme 3.54.

□

LEMooGKOSooRKtFDJ

Lemme 3.56 ([1]).

Si A est un anneau factoriel, et si p est irréductible dans A , alors :

- (1) L'idéal pA est premier.
- (2) L'anneau A/pA est intègre.

Démonstration. En deux parties.

- (1) **pA est premier** D'abord pA est strictement inclus dans A parce que p n'étant pas inversible, l'élément 1 n'est pas dans pA .
Soient $a, b \in A$ tels que $ab \in pA$. Cela signifie qu'il existe $x \in A$ tel que $px = ab$, ou encore que p divise ab . Le lemme 3.54 dit alors que p divise a ou b . Supposons pour fixer les idées que $p \mid a$. Il existe y tel que $a = py \in pA$.
- (2) **L'anneau A/pA est intègre** C'est la proposition 1.393.

□

PROPooOXQMooVEzlyG

Proposition 3.57.

Soit une famille $\{a_n\}$ d'éléments de A qui se décomposent en irréductibles comme

$$a_i = \prod_k p_k^{\alpha_{k,i}}. \quad (3.91)$$

Alors

$$\text{pgcd}\{a_n\} = \prod_k p_k^{\min_i \{\alpha_{k,i}\}}. \quad (3.92)$$

De plus le PGCD est :

- (1) Un multiple de tous les diviseurs communs des a_i .
- (2) Unique pour cette propriété à multiple près par un inversible²⁰.

De la même manière,

$$\text{ppcm}\{a_n\} = \prod_k p_k^{\max_i \{\alpha_{k,i}\}}. \quad (3.93)$$

Un anneau factoriel a une relation de préordre partiel donnée par $a < b$ si a divise b . En termes d'idéaux, cela donne l'ordre inverse de celui de l'inclusion²¹ : $a < b$ si et seulement si $(b) \subset (a)$.

EXooCWJUooCDJqkr

Exemple 3.58.

L'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ n'est pas factoriel parce que 4 a au moins deux décompositions distinctes en irréductibles :

$$4 = 2 \cdot 2, \quad (3.94)$$

et

$$4 = (1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3}). \quad (3.95)$$

△

Nous allons voir dans l'exemple 3.76 que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est factoriel parce qu'il sera euclidien.

20. Soyez prudent avec cette affirmation : je n'en n'ai pas de démonstrations sous la main et ne suis pas certain que ce soit vrai.

21. Voir proposition 3.4.

3.5.1 Autour du théorème de Bézout

Rappel de notations : si A est un anneau et si $p \in A$, nous notons (p) l'idéal engendré²² par p .

PROPooXQKMooWJIEFq

Proposition 3.59 (Bézout dans un anneau principal[1, 129]).

Soit un anneau principal A . Soient $a_1, \dots, a_n \in A$ et $\delta \in \text{pgcd}(a_1, \dots, a_n)$. Alors il existe $u_1, \dots, u_n \in A$ tels que

$$a_1 u_1 + \dots + a_n u_n = \delta \quad (3.96)$$

Démonstration. Soit $\delta \in \text{pgcd}(a_1, \dots, a_n)$. Nous utilisons la proposition 3.50 pour la partie $S = \{a_1, \dots, a_n\}$. Dans notre cas, nous savons que δ engendre $J = a_1 A + \dots + a_n A$. En particulier $\delta \in a_1 A + \dots + a_n A$ et donc il existe $u_1, \dots, u_n \in A$ tels que $\delta = u_1 a_1 + \dots + u_n a_n$ ²³. $\square$

Le lemme de Gauss est une application immédiate du théorème de Bézout. Il y aura aussi un lemme de Gauss à propos de polynômes (lemme 6.51), et une généralisation directe au théorème de Gauss, théorème 6.50.

LemSdnZNX

Lemme 3.60 (Lemme de Gauss dans un anneau principal[130]).

Soit A un anneau principal et $a, b, c \in A$ tels que a divise bc . Si a est premier avec c , alors a divise b .

Démonstration. Comme a est premier avec c , nous avons $\text{pgcd}(a, c) = 1$ et Bézout (1.349) nous donne donc $s, t \in A$ tels que $sa + tc = 1$. En multipliant par b ,

$$sab + tbc = b. \quad (3.97)$$

Mais les deux termes du membre de gauche sont multiples de a parce que a divise bc . Par conséquent b est somme de deux multiples de a et donc est multiple de a . $\square$

LEMooQJGIooEtVnyj

Lemme 3.61 ([65]).

Soit un anneau principal A . Soient $a, b, c \in A$ tels que

$$(1) \text{pgcd}(a, b) = 1$$

$$(2) \text{pgcd}(a, c) = 1.$$

Alors $\text{pgcd}(a, bc) = 1$.

Démonstration. Le théorème de Bézout 3.59 donne des éléments $u, v, x, y \in A$ tels que $ua + vb = 1$ et $xa + yc = 1$. En multipliant ces équations l'une avec l'autre,

$$(ua + vb)(xa + yc) = 1. \quad (3.98)$$

En développant, nous trouvons

$$(uax + uc + vbx)a + (vy)bc = 1. \quad (3.99)$$

Donc le théorème de Bézout (dans l'autre sens) nous indique que $\text{pgcd}(a, bc) = 1$. $\square$

PROPooYTMYYooEYxuQc

Proposition 3.62 ([131, 132]).

Soient un anneau principal²⁴ A ainsi que $a, b \in A$.

$$(1) \text{ Nous avons } \delta \in \text{pgcd}(a, b) \text{ si et seulement si } (a) + (b) = (\delta).$$

$$(2) \text{ Nous avons } \mu \in \text{ppcm}(a, b) \text{ si et seulement si } (a) \cap (b) = (\mu).$$

Démonstration. En plusieurs parties. On commence par le pgcd.

22. Définition 1.310 et caractérisation 1.311.

23. Je rappelle que A est commutatif.

24. Définition 1.340.

- (1) **Si** $\sigma \in \text{pgcd}(a, b)$ Vu que $\delta \in \text{pgcd}(a, b)$, il existe $a_1, b_1 \in A$ tels que $a = \delta a_1$ et $b = \delta b_1$. Un élément général de $(a) + (b)$ s'écrit $ax + by$, c'est-à-dire

$$ax + by = \delta a_1 x + \delta b_1 y = \delta(a_1 x + b_1 y) \in (\delta). \quad (3.100)$$

Cela prouve que $(a) + (b) \subset (\delta)$.

Pour l'autre inclusion, nous faisons appel à 3.59 disant qu'il existe $u, v \in A$ tels que $au_1 + bu_2 = \delta$. Cela montre que $\delta \in (a) + (b)$ et donc que $(\delta) \subset (a) + (b)$.

- (2) **Si** $(a) + (b) = (\delta)$ Nous supposons que $(a) + (b) = (\delta)$. Nous devons montrer qu'alors $\delta \in \text{pgcd}(a, b)$. Vu que a et b sont dans $(a) + (b) = (\delta)$ il existe x, y tels que $a = \delta x$ et $b = \delta y$. Donc δ divise a et b .

Supposons que d divise également a et b . Nous avons $a = da_1$ et $b = db_1$. Tout élément de $(a) + (b)$ s'écrit $ra + sb$, c'est-à-dire, en utilisant le fait que A est commutatif :

$$ra + sb = rda_1 + rdb_1 = d(ra_1 + rb_1). \quad (3.101)$$

Donc d divise tout élément de $(a) + (b)$. En particulier $d \mid \delta$.

Et on continue avec le ppcm.

- (1) **Si** $(a) \cap (b) = (\mu)$ Vu que μ est dans (a) , l'élément μ est multiple de a . Et idem pour b . Donc μ est un multiple commun de a et b .

Supposons que μ soit également un multiple commun de a et b . Nous avons alors $m \in (a) \cap (b) = (\mu)$, c'est-à-dire que $m \mid \mu$. Donc on a bien $\mu \in \text{ppcm}(a, b)$.

- (2) **Si** $\mu \in \text{ppcm}(a, b)$ Nous prouvons que $(a) \cap (b) = (\mu)$. Soit $x \in (a) \cap (b)$. Nous avons $x = aa_1$ et $x = bb_1$; donc x est multiple de a et de b . Vu que μ est un ppcm, nous avons $\mu \mid x$ et donc $x \in (\mu)$, ce qui signifie $(a) \cap (b) \subset (\mu)$.

Dans l'autre sens, vu que μ divise a et b nous avons $\mu \in (a) \cap (b)$ et donc $(\mu) \subset (a) \cap (b)$. □

3.5.2 Théorème chinois

ThofPXwiM

Théorème 3.63 (Théorème des restes chinois[133]).

Soit un anneau principal A ainsi que des éléments $a_1, \dots, a_r \in A \setminus \{0\}$ deux à deux premiers entre eux. Nous notons a le produit $a = a_1 \dots a_r$.

ITEMooWBSWooGWjnNx

- (1) Il existe une unique application

$$f: A/(a) \rightarrow A/(a_1) \times \dots \times A/(a_r) \quad (3.102)$$

telle que

$$f([x]_a) = ([x]_{a_1}, \dots, [x]_{a_r}) \quad (3.103)$$

pour tout $x \in A$.

ITEMooANYPooGPgEQc

- (2) Cette application f est un isomorphisme d'anneaux.

ITEMooTUOKooHcSwTD

- (3) Il existe $u_1, \dots, u_r \in A$ tels que

$$\sum_{i=1}^r u_i \frac{a}{a_i} = 1. \quad (3.104)$$

Notez ici que a_i n'est pas spécialement inversible, mais a étant le produit de tous les a_i , ça va.

ITEMooGXOEooUdKmzU

- (4) Si des $u_i \in A$ vérifient $\sum_{i=1}^r u_i a/a_i = 1$ alors la réciproque

$$f^{-1}: A/(a_1) \times \dots \times A/(a_r) \rightarrow A/(a) \quad (3.105)$$

vérifie

$$f^{-1}([x_1]_{a_1}, \dots, [x_r]_{a_r}) = \sum_{i=1}^r [x_i u_i \frac{a}{a_i}] \quad (3.106)$$

pour tout $x_1, \dots, x_r \in A$.

Démonstration. En plusieurs points.

- (1) **Pour (1) et (2)** Vu que les a_i sont premiers entre eux, nous avons $a = a_1 \dots a_r \in \text{ppcm}(a_1, \dots, a_r)$ et donc $(a) = \bigcap_{i=1}^r (a_i)$ par 3.62. Pour l'existence, l'unicité et fait que ce soit un isomorphisme d'anneaux, le théorème 1.408 fait tout le boulot.
- (2) **Pour (3)** Les a_i sont premiers entre eux. Montrons que les a/a_i aussi. Supposons pour cela que p divise tous les a/a_i . En particulier $p \mid a/a_1 = a_2 \dots a_r$. Vu que les $a_2, \dots, a_r$ sont premiers entre eux, le lemme de Gauss 3.60 dit qu'il existe un $k = 2, \dots, r$ tel que $p \mid a_k$. Mais p divise aussi a/a_k . Donc il existe $l \neq k$ tel que $p \mid a_l$. L'élément p est un diviseur commun de a_k et a_l . Pas possible parce que les a_i sont premiers deux à deux.
- Nous avons $1 \in \text{pgcd}(a_1, \dots, a_r)$ et donc Bézout 3.59 dit qu'il existe des u_i tels que

$$\sum_{i=1}^n u_i \frac{a}{a_i} = 1. \quad \text{EQooMBGBooKoGKwJ} \quad (3.107)$$

- (3) **Pour (4)** Lorsque nous caculons

$$f\left(\sum_{i=1}^r [x_i u_i a/a_i]\right), \quad (3.108)$$

nous avons un vecteur d'éléments de la forme $[\sum_{i=1}^r x_i u_i \frac{a}{a_i}]_{a_k}$. En vertu de (1.546), tous les termes avec $i \neq k$ sont nuls et donc

$$f\left(\sum_{i=1}^r [x_i u_i a/a_i]\right) = ([x_1 u_1 \frac{a}{a_1}]_{a_1}, \dots, [x_r u_r \frac{a}{a_r}]_{a_r}). \quad \text{EQooZBYVooAoJnFM} \quad (3.109)$$

Par ailleurs nous prenons la classe par rapport à (a_k) des deux côtés de (3.107). Comme précédemment tous les termes $i \neq k$ sont nuls et il reste

$$[u_k a/a_k]_{a_k} = [1]_{a_k}. \quad (3.110)$$

Nous avons donc

$$[x_k u_k \frac{a}{a_k}] = [x_k]_{a_k} \underbrace{[u_k \frac{a}{a_k}]_{a_k}}_{=[1]_{a_k}} = [x_k]_{a_k}. \quad (3.111)$$

En remettant dans (3.109) nous trouvons ce qu'il faut :

$$f\left(\sum_{i=1}^r [x_i u_i a/a_i]\right) = ([x_1]_{a_1}, \dots, [x_k]_{a_k}). \quad (3.112)$$

□

3.5.3 Idéal premier

Proposition 3.64 ([134, 1], thème 6).

Soit un anneau principal A et un élément $p \neq 0$ dans A . Nous avons équivalence de :

- (1) (p) est un idéal premier,
- (2) p est un élément premier,
- (3) p est un élément irréductible,
- (4) (p) est un idéal maximum propre²⁵.

Démonstration. En plusieurs implications.

25. Ce « propre » n'est pas dans l'énoncé sur Wikipédia. Je ne comprends pas pourquoi, et j'ai posé la question sur la page de discussion.

https://fr.wikipedia.org/wiki/Discussion:Idéal_premier

- (1) **(1) implique (2)** En plusieurs points.
- La condition $p \neq 0$ est dans les hypothèses de la proposition.
 - Si p était inversible, nous aurions $(p) = A$ et donc pas que (p) est un idéal premier.
 - Soient $a, b \in A$ tels que $p \mid ab$. En particulier, $(ab) \in (p)$. Mais comme (p) est un idéal premier, cela implique soit $a \in (p)$ soit $b \in (p)$. Donc soit p divise a soit p divise b .
- (2) **(2) implique (3)** Un anneau principal est intègre ; c'est dans la définition 1.340. Dans un anneau intègre, tout élément premier est irréductible, c'est la proposition 1.345.
- (3) **(3) implique (4)** Soit un idéal I contenant (p) . Puisque A est principal, I est engendré par un seul élément ; soit $I = (a)$. Vu que $p \in I$, l'élément a divise p . Mais comme p est un élément premier, $a \mid p$ implique $a = p$ ou $a = 1$. Dans le premier cas, $I = (a) = (p)$, et dans le second cas, $I = (a) = (1) = A$. Donc (p) est bien un idéal maximum.
- De plus l'idéal (p) est propre. En effet avoir $(p) = A$ dirait en particulier que $1 \in (p)$, c'est-à-dire qu'il existe $x \in A$ tel que $xp = 1$. Or p étant irréductible, il est non inversible.
- (4) **(4) implique (1)** C'est la proposition 1.393(3).

□

Un exemple d'élément premier non irréductible est $[4]_6$ dans l'anneau non principal $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Voir 3.74 et le lemme 3.75.

3.5.4 Anneau noethérien

DEFooPWMHooCnrQuJ

Définition 3.65.

Un anneau est dit **noethérien** si toute suite croissante d'idéaux est stationnaire (à partir d'un certain rang).

Montrer que tout anneau principal est noethérien est le premier pas pour montrer que tout anneau principal est factoriel.

LEMooHQPVoOTfkhRV

Lemme 3.66.

Tout anneau principal²⁶ est noethérien.

Démonstration. Soit (J_n) une suite croissante d'idéaux et J la réunion. L'ensemble J est encore un idéal parce que les J_i sont emboîtés. Étant donné que l'idéal est principal nous pouvons prendre $a \in J$ tel que $J = (a)$. Il existe N tel que $a \in J_N$. Alors pour tout $n \geq N$ nous avons

$$J \subset J_N \subset J_n \subset J. \quad (3.113)$$

La première inclusion est le fait que $J = (a)$ et $a \in J_N$. La seconde est la croissance des idéaux et la troisième est le fait que J est une union. Par conséquent pour tout $n \geq N$ nous avons $J_N = J_n = J$. La suite est par conséquent stationnaire. □

Exemple 3.67.

Il y a moyen d'avoir un anneau noetherien non principal. C'est le cas de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ dont nous parlerons dans 3.75. △

THOooANCAooBChmwP

Théorème 3.68 ([135, 65]).

Tout anneau principal est factoriel.

Démonstration. Soit un anneau principal A . Nous devons prouver les trois points de la définition 3.53. D'abord A est intègre parce que ça fait partie de la définition 1.340 d'un anneau principal. Le gros morceau est l'existence et l'unicité d'une décomposition en irréductibles.

_____ mini lemme _____

26. Définition 1.340.

Nous prouvons que si a est ni nul ni inversible, il est divisible par un irréductible.

Soit $a \in A$ que nous supposons être ni nul ni inversible. L'idéal aA ne contient pas tout A parce que a n'est pas inversible ; par le théorème de Krull 1.390 il existe un idéal maximal M contenant aA . Tous les idéaux étant principaux dans A , l'idéal M est principal.

Par définition d'idéal principal, il existe $p \in A$ tel que $M = pA$. Résumé :

$$a \in aA \subsetneq M = pA. \quad (3.114)$$

Comme l'idéal pA est maximal, la proposition 1.328 dit que p est irréductible. Et donc $p \mid a$ avec p est irréductible.

————— Existence —————

Nous définissons des suites (a_n) et (p_n) par récurrence. D'abord $a_0 = a$, et en suite, si a_n est défini nous définissons a_{n+1} et p_{n+1} de la façon suivante.

- (1) Si a_n est inversible, nous nous arrêtons et la suite est finie.
- (2) Si a_n n'est pas inversible, nous définissons a_{n+1} et p_{n+1} par la relation donnée par le mini-lemme :

$$a_n = p_{n+1}a_{n+1} \quad (3.115)$$

avec p_{n+1} irréductible.

Pour tout n assez petit pour que la suite ne soit pas finie, nous avons

$$a = a_0 = p_1a_1 = p_1p_2a_2 = \dots = p_1 \dots p_na_n \quad (3.116)$$

où les p_i sont irréductibles.

Nous montrons à présent que la suite des (a_n) est finie. Considérons les idéaux $I_n = a_nA$, et montrons qu'ils sont croissants en montrant que a_{n+1} n'est pas dans I_n .

En effet supposons que $a_{n+1} \in I_n = a_nA$. Il existerait $k \in A$ tel que $a_nk = a_{n+1}$, c'est-à-dire $p_{n+1}a_{n+1}k = a_{n+1}$. Vu que l'anneau est intègre et que les a_i sont non nums, nous simplifions par $a_{n+1} : p_{n+1}k = 1$. Cela n'est pas possible parce que p_{n+1} n'est pas inversible. Bref, nous avons une suite strictement croissante d'idéaux.

L'anneau A est principal et donc noetherien (lemme 3.66). Donc toute suite croissante d'idéaux est stationnaire. Oh mais ça c'est pas possible si la suite des (a_n) est infinie parce que nous venons de prouver qu'elle est toujours strictement croissante.

Bon. Ben c'est que la suite des (a_n) est finie. Il existe donc un N tel que a_N est inversible. Pour ce N nous avons

$$a = a_0 = p_1a_1 = p_1p_2a_2 = \dots = p_1 \dots p_Na_N. \quad (3.117)$$

Il nous reste à prouver que p_Na_N est irréductible.

D'abord p_Na_N est non inversible parce que p_N n'est pas inversible et a_N est inversible. Ensuite supposons que $p_Na_N = st$ avec $s, t \in A$. Nous allons prouver qu'au moins s ou t est inversible. Nous avons

$$p_N = s(ta_N^{-1}). \quad (3.118)$$

Vu que p_N est irréductible, il n'est pas le produit de deux non-inversibles. Soit s est inversible (alors on a gagné), soit ta_N^{-1} est inversible, et alors t est inversible parce que a_N^{-1} est inversible.

————— Unicité —————

Soient des irréductibles $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_m$ tels que $a = p_1 \dots p_k = q_1 \dots q_m$. Nous utilisons le lemme 3.61 : si p_1 était premier avec tous chacun des q_j , il serait premier avec le produit, ce qui serait absurde parce que le produit est a et p_1 divise a . Bref, il y a un des q_j qui n'est pas premier avec p_1 .

Nous considérons $\sigma_1 \in S_1$ tel que p_1 n'est pas premier avec $q_{\sigma_1(1)}$. Au passage, nous notons $q_k^{(1)} = q_{\sigma_1(k)}$. Soit un diviseur commun d non inversible entre p_1 et $q_1^{(1)}$. Nous avons des éléments u, v tels que

$$p_1 = du \quad q_1^{(1)} = dv. \quad (3.119)$$

Vu que p_1 et $q_1^{(1)}$ sont irréductibles, ils ne peuvent pas être produit de deux non inversibles. Donc u et v sont inversibles. Nous pouvons écrire $d = q_1^{(1)}v^{-1}$, et donc

$$p_1 = q_1^{(1)}uv^{-1}. \quad (3.120)$$

Nous récrivons $p_1 \dots p_k = q_1 \dots q_m$ avec ces valeurs :

$$dup_2 \dots p_k = dvq_2^{(1)} \dots q_m^{(1)}. \quad (3.121)$$

Nous simplifions par d et nous avons

$$(up_2)p_3 \dots p_k = (vq_2^{(1)})q_3^{(1)} \dots q_m^{(1)}. \quad (3.122)$$

Par récurrence nous construisons les σ_i et les $q_j^{(i)}$. □

Proposition 3.69.

Un corps est un anneau principal et un anneau factoriel.

Démonstration. Un anneau est principal quant :

- Commutatif
- intègre
- tous les idéaux sont principaux.

Un corps est toujours commutatif. Un corps est un anneau intègre par le lemme 1.327. Donc un corps, les seuls idéaux sont $\{0\}$ et $\mathbb{K}$. Le premier est principal parce que $0A = \{0\}$. Et le second est également principal parce que $\mathbb{K} = 1\mathbb{K}$.

Donc un corps est un anneau principal.

Le fait qu'un corps soit un anneau factoriel est maintenant le théorème 3.68. □

Exemple 3.70 ($\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ n'est ni factoriel ni principal).

Puisque $(i\sqrt{5})^2 = -5$, les éléments de $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ sont les éléments de $\mathbb{C}$ de la forme $a + bi\sqrt{5}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$. Nous définissons la **norme** sur $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ par ²⁷

$$\begin{aligned} N: \mathbb{Z}[i\sqrt{5}] &\rightarrow \mathbb{N} \\ z &\mapsto z\bar{z}. \end{aligned} \quad (3.123)$$

Le fait que ce soit à valeurs dans $\mathbb{N}$ est un simple calcul :

$$N(x + iy\sqrt{5}) = (x + iy\sqrt{5})(x - iy\sqrt{5}) = x^2 + 5y^2. \quad (3.124)$$

De plus N est multiplicative : $N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2)$.

Nous pouvons maintenant déterminer les inversibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$. Si α est inversible, alors il existe β tel que $\alpha\beta = 1$. Au niveau de la norme,

$$N(\alpha)N(\beta) = 1, \quad (3.125)$$

ce qui implique que $N(\alpha) = 1$. Or l'équation $x^2 + 5y^2 = 1$ dans $\mathbb{N}$ donne $y = 0$, $x = \pm 1$.

Au final, les inversibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ sont ± 1 .

L'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ n'est alors pas factoriel (définition 3.53) parce que

$$2 \times 3 = (1 + i\sqrt{5})(1 - i\sqrt{5}). \quad (3.126)$$

Cela donne deux décompositions du nombre 6 en produit d'éléments non associés ²⁸ (2 n'est associé qu'à 2 et -2) parce que les inversibles sont 1 et -1 .

Le fait que $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ ne soit pas factoriel implique qu'il ne soit pas principal, théorème 3.68. △

27. C'est le carré de la norme usuelle, mais c'est l'usage dans le milieu.

28. Définition 3.43.

3.6 Anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

Nous allons donner quelques propriétés de cet anneau, et en particulier voir que dans cet anneau non intègre, la notion d'élément irréductible n'est pas très intéressante. SECooSWGKooEeOZTO

Voici pour commencer un calcul de la table de multiplication de $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Pour les multiples de (par exemple) $[4]_6$ nous écrivons

$$1 \times [4]_6 = [4]_6 \quad (3.127)$$

et ensuite

$$2 \times [4]_6 = [8]_6 = [2]_6, \quad (3.128)$$

puis

$$3 \times [4]_6 = [2 + 4]_6 = [6]_6 = [0]_6, \quad (3.129)$$

et caetera. Le résultat est :

$\times$	$[0]_6$	$[1]_6$	$[2]_6$	$[3]_6$	$[4]_6$	$[5]_6$
$[0]_6$	0	0	0	0	0	0
$[1]_6$	0	1	2	3	4	5
$[2]_6$	0	2	4	0	2	4
$[3]_6$	0	3	0	3	0	3
$[4]_6$	0	4	2	0	4	2
$[5]_6$	0	5	4	3	2	1

(3.130)

Pour ne pas alourdir, nous n'avons pas écrit $[x]_6$ partout au lieu de x .

3.71 (Inversibles).

Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ sont ceux qui ont un $[1]_6$ dans leur table de multiplication. Ce sont donc

$$U(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) = \{[1]_6, [5]_6\}. \quad (3.131)$$

3.72 (Diviseurs de zéro).

Les diviseurs de zéro sont ceux qui ont un $[0]_6$ dans leur table de multiplication, c'est-à-dire

$$\{[2]_6, [3]_6, [4]_6\}. \quad (3.132)$$

3.73 (Irréductibles).

Les irréductibles sont ceux qui ne sont ni inversibles ni produit de deux éléments non inversibles. Les non inversibles sont :

$$\{[0]_6, [2]_6, [3]_6, [4]_6\}. \quad (3.133)$$

Ils sont candidats à être irréductibles. Les produits de ces éléments (on oublie les crochets) sont :

$$2 \times 2 = 4 \quad (3.134a)$$

$$2 \times 3 = 0 \quad (3.134b)$$

$$2 \times 4 = 2 \quad (3.134c)$$

$$3 \times 3 = 3 \quad (3.134d)$$

$$3 \times 4 = 0 \quad (3.134e)$$

$$4 \times 4 = 4. \quad (3.134f)$$

Donc $[0]_6$, $[2]_6$, $[3]_6$ et $[4]_6$ ne sont plus candidats à être irréductible. Bref, il ne reste aucun candidats.

L'anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ n'a aucun élément irréductible.

3.74 (Éléments premiers).

Les éléments non nuls et non inversibles sont 2, 3 et 4.

(1) **Pour 2** L'élément $[2]_6$ divise 2, 4 et 0.

- Les (a, b) tels que $ab = 2$ sont : $(1, 2)$, $(2, 4)$ et $(5, 4)$. L'élément 2 divise donc toujours a ou b .
- Les (a, b) tels que $ab = 4$ sont : $(1, 4)$, $(2, 5)$ et $(4, 4)$. L'élément 2 divise donc toujours a ou b .
- Les (a, b) tels que $ab = 0$ sont : $(0, x)$, $(3, 2)$ et $(4, 3)$. L'élément 2 divise donc toujours a ou b . En particulier, $[2]_6$ divise $[0]_6$; c'est important.

Donc $[2]_6$ est un élément premier.

(2) **Pour 3** L'élément $[3]_6$ divise 3 et 0.

- Les (a, b) tels que $ab = 3$ sont : $(1, 3)$ et $(3, 5)$. L'élément 3 divise donc toujours a ou b .
- Les (a, b) tels que $ab = 0$ sont : $(0, x)$, $(3, 2)$ et $(4, 3)$. L'élément 3 divise donc toujours a ou b .

Donc $[3]_6$ est un élément premier. L'élément $[4]_6$ divise 4, 2 et 0.

- Les (a, b) tels que $ab = 4$ sont : $(1, 4)$, $(2, 5)$ et $(4, 4)$. L'élément 4 divise donc toujours a ou b .
- Les (a, b) tels que $ab = 2$ sont : $(1, 2)$, $(2, 4)$ et $(5, 4)$. L'élément 4 divise donc toujours a ou b .
- Les (a, b) tels que $ab = 0$ sont : $(0, x)$, $(3, 2)$ et $(4, 3)$. L'élément 4 divise donc toujours a ou b .

Donc $[4]_6$ est un élément premier.

Au final, les éléments premiers dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ sont

$$\{[2]_6, [3]_6, [4]_6\}. \quad (3.135)$$

Vous noterez que $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ a des éléments premiers non irréductibles. Cela est un contre-exemple à la proposition 3.64 dans le cas d'un anneau non-intègre.

LEMooZSELooGOFElz

Lemme 3.75 ([1]).

*L'anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est noetherien, mais ni intègre ni principal*²⁹.

Démonstration. Comme c'est un anneau fini, toute suite croissante de quoi que ce soit devient stationnaire ; donc $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est noetherien.

Puisque $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ a des diviseurs de zéro, il n'est pas intègre. Et s'il n'est pas intègre, il n'est pas factoriel non plus. □

ExeDufyZI

Exemple 3.76.

Prouvons que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est un anneau euclidien. Pour cela nous démontrons que

$$\begin{aligned} N: \mathbb{Z}[i\sqrt{2}] &\rightarrow \mathbb{N} \\ a + bi\sqrt{2} &\mapsto a^2 + 2b^2 \end{aligned} \quad (3.136) \quad \text{EqOZUIooZGmHWl}$$

est un stathme euclidien.

Soient $z = a + bi\sqrt{2}$, $t = a' + b'i\sqrt{2}$. Nous cherchons q et r tels que la division euclidienne s'écrive $z = qt + r$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ tels que

$$\frac{z}{t} = \alpha + \beta i\sqrt{2}. \quad (3.137)$$

Nous désignons par $\alpha + \epsilon_1$ et $\beta + \epsilon_2$ les entiers les plus proches de α et β . Nous avons $|\epsilon_1|, |\epsilon_2| \leq \frac{1}{2}$. Nous posons alors naturellement

$$q = (\alpha + \epsilon_1) + (\beta + \epsilon_2)i\sqrt{2} \quad (3.138)$$

29. Toutes les définitions dans le thème 6.

et nous calculons $r = z - qt$:

$$2b'\epsilon_2 - a'\epsilon_1 + i\sqrt{2}(\epsilon_1b' - a'\epsilon_2). \quad (3.139)$$

Nous trouvons

$$N(r) = a'^2\epsilon_1^2 + 4b'^2\epsilon_2^2 + 2a'^2\epsilon_1^2 + 2b'^2\epsilon_2^2 \leq \frac{3}{4}a'^2 + \frac{3}{2}b'^2. \quad (3.140)$$

D'autre part $N(t) = a'^2 + 2b'^2$, et nous avons donc bien $N(r) < N(t)$.

En ce qui concerne la seconde propriété du stathme, un petit calcul montre que

$$N(z) = (a^2 + 2b^2)(a'^2 + 2b'^2), \quad (3.141)$$

et tant que $t \neq 0$ nous avons bien $N(z) > N(z')$. $\triangle$

Notons en particulier que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est factoriel et principal.

ExluqIkE

Exemple 3.77 (Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$).

Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ sont ± 1 , donc deux éléments a et b sont associés (définition 3.43) si et seulement si $a = \pm b$.

De plus si p est irréductible³⁰, alors $-p$ est irréductible. Les éléments irréductibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ arrivent donc par paires d'éléments associés. Soit $\{p_i\}$ une sélection de un élément irréductible parmi chaque paire. Tout élément x de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ peut alors être écrit $x = \pm p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$. Cette écriture va être pratique pour comparer des décompositions en facteurs irréductibles d'éléments. $\triangle$

Le lemme suivant fait en pratique partie de l'exemple 3.80, mais nous l'isolons pour plus de clarté³¹.

LemTScClv

Lemme 3.78.

Si a et b sont deux éléments premiers entre eux de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$, et si il existe $y \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ tel que $ab = y^3$, alors a et b sont des cubes (dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$).

Démonstration. D'après l'exemple 3.77 nous pouvons écrire

$$y = \pm p_1^{\sigma_1} \dots p_n^{\sigma_n} \quad (3.142a)$$

$$a = \pm p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n} \quad (3.142b)$$

$$b = \pm p_1^{\beta_1} \dots p_n^{\beta_n} \quad (3.142c)$$

où les p_i sont les irréductibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ « modulo ± 1 » au sens où la liste des irréductibles est $\{p_i\} \cup \{-p_i\}$ (union disjointe). Étant donné que a et b sont premiers entre eux, α_i et β_i ne peuvent pas être non nuls en même temps alors que leur somme doit faire $3\sigma_i$. Nous avons donc pour chaque i soit $\alpha_i = 3\sigma_i$ soit $\beta_i = 3\sigma_i$ (et bien entendu si $\sigma_i = 0$ alors $\alpha_i = \beta_i = 0$).

Étant donné que ± 1 sont également deux cubes, a et b sont bien des cubes.

Notons que nous avons utilisé de façon capitale le fait que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ était factoriel. $\square$

3.6.1 Équations diophantiennes

ExZPVFooPpdKJc

Exemple 3.79.

L'équation diophantienne

$$x^2 = 3y^2 + 8 \quad (3.143)$$

n'a pas de solution. En effet si nous prenons l'équation modulo 3 nous obtenons

$$[x^2]_3 = [3y^2 + 8]_3 = [8]_3 = [2]_3. \quad (3.144)$$

Or dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, aucun carré n'est égal à deux : $0^2 = 0 \neq 2$, $1^2 = 1 \neq 2$ et $2^2 = 4 = 1 \neq 2$. $\triangle$

30. Définition 1.318

31. Merci à Marvoir pour m'avoir souligné le manque.

Exemple 3.80.

Réolvons l'équation diophantienne

$$x^2 + 2 = y^3. \quad (3.145)$$

Une première remarque est que x doit être impair. En effet si $x = 2k$, nous devons avoir y^3 pair. Mais un cube pair est divisible par 8. Donc $y^3 = 8l$ pour un certain l . L'équation devient $4k^2 + 2 = 8l$, c'est-à-dire $2k^2 + 1 = 4l$. Le membre de gauche est impair tandis que celui de droite est pair. Impossible.

Nous pouvons écrire l'équation sous la forme $x^2 + 2 = (x + i\sqrt{2})(x - i\sqrt{2})$. Et nous considérons $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ muni de son stathme N donné par (3.136).

L'élément $i\sqrt{2}$ est irréductible parce que $N(i\sqrt{2}) = 2$, et si nous avons $i\sqrt{2} = pq$, alors nous aurions $N(p)N(q) = 2$, ce qui n'est possible que si $N(p)$ ou $N(q)$ vaut 1.

Nous prouvons maintenant que les éléments $x + i\sqrt{2}$ et $x - i\sqrt{2}$ sont premiers entre eux. Supposons que d soit un diviseur commun ; alors il divise aussi la somme et la différence. Donc d divise à la fois $2x$ et $2i\sqrt{2}$.

Étant donné que $i\sqrt{2}$ est irréductible et que $2i\sqrt{2} = (-i\sqrt{2})^3$, les diviseurs de $2i\sqrt{2}$ sont les puissances de $(-i\sqrt{2})$. Alors nous devrions avoir $d = (i\sqrt{2})^\beta$ et donc

$$x = (i\sqrt{2})^\beta q \quad (3.146)$$

pour un certain $q \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$. Dans ce cas nous avons $N(x) = 2^\beta N(q)$, mais nous avons déjà précisé que x ne pouvait pas être pair, donc $\beta = 0$ et nous avons $d = 1$.

Comme les nombres $x \pm i\sqrt{2}$ sont premiers entre eux et que leur produit doit être un cube, ils doivent être séparément des cubes (lemme 3.78). Nous devons donc résoudre séparément $x \pm i\sqrt{2} = y^3$.

Cherchons les x et y entiers tels que $x + i\sqrt{2} = y^3$. Si nous posons $z = a + bi\sqrt{2}$, il suffit de calculer z^3 :

```
-----
| Sage Version 4.8, Release Date: 2012-01-20                               |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.               |
|-----|
sage: var('a,b')
(a, b)
sage: z=a+I*sqrt(2)*b
sage: (z**3).expand()
3*I*sqrt(2)*a^2*b - 2*I*sqrt(2)*b^3 + a^3 - 6*a*b^2
```

En identifiant cela à $x + i\sqrt{2}$ nous trouvons le système

$$\begin{cases} x = a^3 - 6ab^2 \\ 1 = 3a^2b - 2b^3 \end{cases} \quad (3.147a)$$

$$(3.147b)$$

où, nous le rappelons, x , a et b sont des entiers. La seconde équation montre que b doit être inversible : $b(3a^2 - 2b^2) = 1$. Il y a donc les possibilités $b = \pm 1$. Pour $b = 1$ l'équation devient $3a^2 - 2 = 1$, c'est-à-dire $a = \pm 1$. Pour $b = -1$ l'équation devient $3a^2 - 2 = -1$, impossible. En conclusion les possibilités sont

$$(x, z) = (-5, 1 + i\sqrt{2}) \quad (3.148a)$$

$$(x, z) = (5, -1 + i\sqrt{2}) \quad (3.148b)$$

$$(3.148c)$$

Le travail avec $x - i\sqrt{2}$ donne les mêmes résultats.

Les deux solutions de l'équation $x^2 + 2 = y^3$ sont alors $(5, 3)$ et $(-5, 3)$. $\triangle$

3.6.2 Triplets pythagoriciens et équation de Fermat pour $n = 4$

Définition 3.81.

Les solutions entières (positives) de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ sont appelés **triplets pythagoriciens**.

Ils donnent toutes les possibilités de triangles rectangles dont les côtés ont des longueurs entières.

Définition 3.82.

On dit qu'un triplet pythagoricien est **primitif** si les trois nombres sont premiers dans leur ensemble³².

Remarquons que c'est équivalent à montrer que les trois nombres sont premiers deux à deux : en effet, si deux parmi x , y et z sont divisibles par un nombre, alors tous les trois sont divisibles par ce nombre³³, donc les nombres x , y et z sont premiers deux à deux.

LemTripletsPythagoriciensPrimitifs

Lemme 3.83.

Dans un triplet pythagoricien primitif (x, y, z) , on a toujours z impair et :

- soit x impair et y pair ;
- soit x pair et y impair.

Démonstration. Remarquons que le fait d'imposer que le triplet soit primitif, interdit aux nombres x et y d'être pairs en même temps. En effet, si c'était le cas, alors x^2 et y^2 seraient aussi pairs, donc leur somme z^2 aussi, d'où z serait pair et les trois nombres ne seraient pas premiers entre eux.

Nous montrons à présent que les nombres x et y ne sont pas tous les deux impairs. Par l'absurde, si $x = 2a + 1$, nous avons $x^2 = 4a^2 + 4a + 1 \in [1]_4$; de la même manière, $y^2 \in [1]_4$. On en déduit alors que $z^2 = x^2 + y^2 \in [2]_4$. Le nombre z^2 est donc pair, donc z est pair : disons $z = 2c$. Alors, $z^2 = 4c^2 \in [0]_4$. Comme les classes modulo 4 sont disjointes, nous aboutissons à une contradiction. $\square$

PropXHMLooRnJKRi

Proposition 3.84 (Triplets pythagoriciens[136, 137]).

Un triplet $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ est solution de $x^2 + y^2 = z^2$ si et seulement si il existe $d \in \mathbb{N}$ et $u, v \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que $\uparrow$

subeqLVHFooVgWsFx

$$\begin{cases} x = d(u^2 - v^2) & (3.149a) \\ y = 2duv & (3.149b) \\ z = d(u^2 + v^2) & (3.149c) \end{cases}$$

ou $\uparrow$ SUBEQSooRQKBooCSqYA

$$\begin{cases} x = 2duv & (3.150a) \\ y = d(u^2 - v^2) & (3.150b) \\ z = d(u^2 + v^2) & (3.150c) \end{cases}$$

La différence entre les deux est seulement d'inverser les rôles de x et y .

Démonstration. Montrons d'abord que les formules proposées sont bien des solutions ; nous vérifions (3.149) :

$$x^2 + y^2 = d^2(u^2 - v^2)^2 + 4d^2u^2v^2 = d^2(u^2 + v^2)^2, \quad (3.151)$$

qui correspond bien au z^2 proposé.

Une vérification du même style fonctionne pour (3.150).

Nous allons maintenant prouver la réciproque : toute solution est d'une des deux formes proposées. Déterminer les triplets primitifs suffira parce que si (x, y, z) n'est pas une solution primitive,

32. Définition 1.357.

33. Parce que k et k^2 ont les mêmes facteurs premiers.

alors en posant $k = \text{pgcd}(x, y, z)$, le triplet $(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}, \frac{z}{k})$ est primitif. Connaissant les triplets primitifs, nous obtenons tous les autres par simple multiplication.

Soit donc (x, y, z) un triplet pythagoricien primitif. Sans perte de généralité³⁴, grâce au lemme 3.83, nous pouvons supposer x pair tandis que y et z seront impairs. Comme $x^2 = (z + y)(z - y)$, nous avons

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(z + y)(z - y). \quad (3.152)$$

Puisque z et y sont premiers entre eux, les nombres $z + y$ et $z - y$ sont également premiers entre eux³⁵. Vu que $(z + y)(z - y)$ est divisible par 4, soit $z + y$ soit $(z - y)$ est divisible par 4. Pour fixer les idées nous supposons que c'est $z + y$, et nous écrivons

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{z + y}{4}\right)(z - y). \quad (3.153)$$

Les facteurs premiers (qui arrivent au moins au carré) de $(x/2)$ sont chacun soit dans $(z + y)/4$ soit dans $(z - y)$. Tout deux sont donc des carrés parfaits. Nous posons

$$\frac{z + y}{4} = u^2, \quad z - y = v^2. \quad (3.154)$$

Bien entendu u et v sont non nuls parce que nous avons exclu la possibilité de triplets dont un élément serait nul. Avec tout cela nous avons $(x/2)^2 = u^2v^2$ et donc $x = 2uv$ puis par somme et différence :

$$\begin{cases} x = 2uv & (3.155a) \\ y = v^2 - u^2 & (3.155b) \\ z = u^2 + v^2, & (3.155c) \end{cases}$$

ce qu'il fallait. □

Remarque 3.85.

Les solutions dans lesquelles x , y ou z sont nuls sont faciles à classer. La solution $(1, 0, 1)$ n'est pas dans les formes proposées. En effet elle ne peut pas être de la première forme : avoir $y = 0$ demanderait qu'un nombre parmi d , u et v soit nul, ce qui est interdit. La solution $(1, 0, 1)$ ne peut pas non plus être de la seconde forme parce que x y est pair.

propFKKKKooFYQcxE

Proposition 3.86 ([136]).

Les équations $x^4 + y^4 = z^2$ et $x^2 + y^4 = z^4$ n'ont pas de solution dans $(\mathbb{N}^*)^3$.

Démonstration. Si la première équation n'a pas de solution, alors la seconde n'en a pas non plus parce que z^4 est un carré. Nous nous concentrons donc sur l'équation $x^4 + y^4 = z^2$ et nous supposons qu'il existe au moins une solution dans $(\mathbb{N}^*)^3$. Nous en choisissons une (x, y, z) avec z minimum (les z dans différentes solutions étant dans $\mathbb{N}$, il en existe forcément un minimum³⁶). Du coup, les trois nombres x , y et z sont premiers dans leur ensemble parce qu'une division par leur pgcd donnerait une nouvelle solution qui contredirait la minimalité de z .

Nous posons $x^4 = \bar{x}^2$ et $y^4 = \bar{y}^2$. Ils vérifient l'équation $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = z^2$ et par la proposition 3.84, il existe $u, v \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que, sans perte de généralité³⁷, on ait

$$\begin{cases} \bar{x} = 2uv & (3.156a) \\ \bar{y} = u^2 - v^2 & (3.156b) \\ z = u^2 + v^2. & (3.156c) \end{cases}$$

$$\bar{y} = u^2 - v^2 \quad \text{eqnFKKKKooFYQcxE1} \quad (3.156b)$$

$$z = u^2 + v^2 \quad \text{eqnFKKKKooFYQcxE2} \quad (3.156c)$$

34. En échangeant les rôles de x et y ici, nous obtenons à la fin la seconde forme des solutions.

35. Si $z - y = kn$ et $z + y = km$, faisant la somme et la différence on voit que y et z sont divisibles par k .

36. Voir quelque chose comme le lemme 1.228.

37. En inversant les rôles de x et y au besoin.

Si u est pair, alors v est impair (et inversement) parce que $\text{pgcd}(u, v) = 1$. Si u est pair, alors $u = 2a$ et $v = 2b + 1$, ce qui donne $\bar{y} = 4a^2 - 4b^2 - 4b - 1 \in [-1]_4$. Or nous avons déjà vu qu'un carré est dans $[0]_4$ ou dans $[1]_4$. Il faut donc que u soit impair. Le lemme 3.83 implique alors que v soit pair.

De l'équation 3.156b, nous en déduisons que $v^2 + \bar{y} = u^2$; de plus u^2 , v^2 et $\bar{y}$ sont premiers dans leur ensemble : en effet, u et v sont premiers entre eux, et si l'un parmi u^2 et v^2 a un facteur commun avec $\bar{y}$, alors l'autre doit l'avoir aussi (dans une égalité $a + b = c$, si deux des nombres ont un diviseur commun, le troisième l'a aussi). Comme $\bar{y} = y^2$, le triplet (v, y, u) est un triplet pythagoricien primitif. Nous appliquons de nouveau la proposition 3.84, en se souvenant que v est pair : il existe donc deux nombres r et s premiers entre eux tels que l'

$$\begin{cases} v = 2rs & (3.157a) \\ y = r^2 - s^2 & (3.157b) \\ u = r^2 + s^2. & (3.157c) \end{cases}$$

Avec cela, $\bar{x} = 2uv = 4rs(r^2 + s^2)$. Remarquons que les trois nombres r , s et $r^2 + s^2$ sont premiers entre eux dans leur ensemble ; or, comme $\bar{x}$ est un carré ces nombres doivent séparément être des carrés :

$$\begin{cases} r = \alpha^2 & (3.158a) \\ s = \beta^2 & (3.158b) \\ r^2 + s^2 = \gamma^2. & (3.158c) \end{cases}$$

En mettant les deux premiers dans la troisième équation, nous avons $\alpha^4 + \beta^4 = \gamma^2$. Donc $(\alpha^2, \beta^2, \gamma)$ est une solution. Nous allons montrer que $\gamma < z$, ce qui terminera la preuve, puisque z était supposé minimal. Nous avons :

$$\begin{aligned} z &= u^2 + v^2 && \text{par 3.156c} \\ &= r^2 + s^2 + 4r^2s^2 && \text{par 3.157} \\ &= \gamma^2 + 4r^2s^2 \\ &> \gamma^2, \end{aligned}$$

et a fortiori $\gamma < z$. □

3.7 Polynômes à coefficients dans un anneau commutatif

Lemme 3.87.

Nous considérons un polynôme $P \in A[X]$, et le quotient $A[X]/(P)$. Pour tout polynôme $Q \in A[X]$ nous avons les égalités

$$Q(\bar{X}) = \overline{Q(X)} = \bar{Q}. \quad (3.159)$$

Démonstration. Si $Q = \sum_k a_k X^k$, alors par la linéarité de la prise de classes,

$$\bar{Q} = \sum_k a_k \bar{X}^k. \quad (3.160)$$

Nous insistons sur le fait que cette égalité n'est rien d'autre que l'itération de la définition de la somme dans l'espace quotient : $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$ ainsi que du produit $k\bar{x} = \overline{kx}$ (définition 1.316). Toujours par définition du produit appliqué à l'élément $\bar{X}$ nous avons $(\bar{X})^2 = \overline{X^2}$; par récurrence $\bar{X}^k = \overline{X^k}$, et

$$\bar{Q} = \sum_k a_k \bar{X}^k = Q(\bar{X}). \quad (3.161)$$

Le fait que $\bar{Q} = \overline{Q(X)}$ n'est rien d'autre que le fait que dans $A[X]$ nous avons $Q = Q(X)$, comme expliqué dans le lemme 1.468. □

3.7.1 Monômes

3.88.

Les éléments de la forme λX^k avec $\lambda \in A$ et $k \in \mathbb{N}$ sont des **monômes**.

Nous allons aussi considérer

$$A_n[X] = \{P \in A[X] \text{ tel que } \deg(P) \leq n\}. \quad (3.162)$$

Cet ensemble est un sous-module libre.

3.7.2 Évaluation

Soit $P \in A[X]$. À priori, P n'est qu'une suite dans A indexée par $\mathbb{N}$.

Nous avons déjà défini son évaluation sur un élément $\alpha \in A$ dans la définition 1.464 :

$$P(\alpha) = \sum_k a_k \alpha^k. \quad (3.163)$$

Cette somme est toujours finie.

NORMooQFTJooLBcPxI

3.89.

L'ensemble $A[X]$ est une algèbre et donc un espace vectoriel. Il possède un unique élément nul qui est celui dont tous les coefficients sont nuls ; cela est immédiat par la construction en tant que suites presque nulles.

Il n'y a à priori pas équivalence entre le fait d'être un polynôme nul et le fait de s'évaluer à zéro sur tous les éléments de A . Cela sera discuté dans le théorème 6.110 et l'exemple 19.36.

DEFooRFBFooKCXQsv

Définition 3.90.

Soient un anneau A et un anneau B qui contient A (comme sous-anneau). Pour $\alpha \in B$ nous définissons $A[\alpha]_B$ comme étant l'intersection de tous les sous-anneaux de B contenant A .

Comme dit plus haut, nous nous permettons d'écrire $A[\alpha]$ sans préciser B lorsque ce dernier sera clair dans le contexte.

PROPOoPMNSooOkHOxJ

Proposition 3.91.

Soient un anneau A et un anneau B qui contient A (comme sous-anneau). Pour tout $\alpha \in B$ nous avons

$$A[\alpha] = \{P(\alpha) \text{ tel que } P \in A[X]\} \quad (3.164)$$

où encore une fois, $P(\alpha)$ est calculé dans B ; le contexte est clair là-dessus.

Démonstration. Si A' est un sous-anneau de B contenant A et α , alors A' contient tous les $P(\alpha)$ avec $P \in A[X]$. Nous avons donc

$$\{P(\alpha) \text{ tel que } P \in A[X]\} \subset A[\alpha]. \quad (3.165)$$

Par ailleurs, $\{P(\alpha) \text{ tel que } P \in A[X]\}$ est un sous-anneau de B contenant A et α . Donc $A[\alpha]$ y est inclus. $\square$

3.7.3 Polynômes sur un anneau intègre

ThoBUEDrJ

Théorème 3.92.

L'anneau A est intègre si et seulement si $A[X]$ est intègre.

Démonstration. Soient P et Q des éléments non nuls de $A[X]$. Puisque l'anneau A est intègre, nous avons

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q) \quad (3.166)$$

et le produit ne peut pas être nul. L'anneau $A[X]$ est donc intègre.

Si $A[X]$ est intègre, A est intègre parce qu'il peut être considéré comme sous-anneau de $A[X]$. $\square$

3.93.

Si A n'est pas intègre, soient $\alpha, \beta \in A$ non nuls tels que $\alpha\beta = 0$. Le produit des polynômes $X \mapsto \alpha X$ et $X \mapsto \beta$ est $(\alpha X) \cdot (\beta) = 0$; le degré du produit n'est pas la somme des degrés.

Les personnes qui ont tout compris jusqu'ici remarqueront que la notation « $X \mapsto P(X)$ » n'est pas correcte parce que du point de vue que nous adoptons ici, un polynôme n'est pas une application.

Corolaire 3.94.

Si A est intègre, les inversibles de $A[X]$ sont les éléments inversibles de A .

Démonstration. Pour que Q soit inversible, il faut un P tel que $PQ = 1$. Mais l'anneau A étant intègre, les degrés s'additionnent. Par conséquent ils doivent être de degré zéro et il faut que $P, Q \in A$. Donc Q est un inversible de A . $\square$

3.7.4 Division euclidienne

Le théorème suivant établit la **division euclidienne** dans $A[X]$ du polynôme P par un polynôme D .

ThodivEuclPsFexf

Théorème 3.95.

Soit $D \neq 0$ dans $A[X]$ de coefficient dominant inversible dans A . Pour tout $P \in A[X]$, il existe $Q, R \in A[X]$ tels que

$$P = QD + R \quad (3.167)$$

avec $\deg(R) < \deg(D)$.

Les polynômes Q et R sont déterminés de façon univoque par cette condition.

DefMPZooMmMymG

Définition 3.96.

Le polynôme Q est le **quotient** et R est le **reste** de la division euclidienne de P par D . Si le reste de la division de P par D est nul on dit que D **divise** P et on note $D \mid P$. Autrement dit D divise P si il existe Q tel que $P = QD$.³⁸

3.97.

Le théorème 3.95 nous incite à utiliser le degré comme stathme euclidien sur $A[X]$ dès que A est un anneau intègre. Or cela ne fonctionne pas en général, parce que très peu de polynômes ont à priori un coefficient dominant inversible.

LEMooIDSKooQfkeKp

Lemme 3.98 (Thème 18).

Si $\mathbb{K}$ est un corps³⁹, alors l'anneau $\mathbb{K}[X]$ est euclidien et principal.

Démonstration. Puisque $\mathbb{K}$ est un corps, tous les éléments sont inversibles et le degré donne un stathme par le théorème 3.95. L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est donc euclidien et par conséquent principal (proposition 1.341). $\square$

Dans le théorème 6.43 nous donnerons une preuve directe du fait que $\mathbb{K}[X]$ est principal en montrant que tous ses idéaux sont principaux. Nous y démontrerons donc un peu moins pour un peu plus cher, mais avec le plaisir de ne pas devoir passer par un stathme.

DefDSFooZVbNAX

Définition 3.99 ([138]).

Soit un anneau A . Deux polynômes P et Q dans $A[X]$ sont dits **étrangers** entre eux si 1 est un pgcd⁴⁰ de P et Q . Un ensemble de polynômes $(P_i)_{i \in I}$ est étranger **dans leur ensemble** si 1 est un pgcd des P_i .

Les polynômes P et Q sont **premiers entre eux** si les seuls diviseurs communs de P et Q sont les inversibles.

38. Ceci se rapproche tout naturellement des notions générales de divisibilité dans un anneau intègre, vues en sous-section 3.4.1.

39. Définition 1.378.

40. Définition 1.103.

Les notions de polynômes étrangers entre eux ou de polynômes premiers entre eux ne sont pas identiques, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3.100 ([1]).

Soient dans $\mathbb{Z}[X]$ les polynômes $P(X) = 2X + 2$ et $Q(X) = 2X^2 + 2$. Le nombre 2 est diviseur commun et n'est pas un diviseur de 1. Donc 1 n'est pas un pgcd de P et Q . Ils ne sont pas étrangers.

Mais ils sont premiers entre eux parce qu'ils n'ont pas d'autres diviseurs communs que les inversibles (1 et -1). $\triangle$

3.7.5 Polynôme primitif

DefContenuPolynome

Définition 3.101.

Un **contenu** du polynôme $P = \sum_i a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$ est un pgcd de ses coefficients : $c(P) = \text{pgcd}(\{a_i\})$.

NORooQITDooKsTMKm

3.102.

Quand il y a unicité du pgcd d'un ensemble, on peut parler du contenu au singulier.

Le contenu d'un polynôme sera surtout utilisé juste pour savoir si il est inversible ou non. Dans un anneau intègre, ça demande un peu d'abus de langage, mais comme le lemme 1.329 dit que si un pgcd est inversible, ils le sont tous, au moins discuter de l'inversibilité du contenu dans un anneau intègre a un sens et est bien défini.

DEFooDVOOooKaPZQC

Définition 3.103 (Polynôme primitif[139]).

Il existe deux notions de polynômes primitifs. Vu qu'il existe des anneaux unitaires qui sont des corps finis⁴¹, il faut faire attention au contexte.

ITEMooCNHAooVHYEW

- (1) Si A est un anneau unitaire, P est un **polynôme primitif** $c(P)$ est inversible⁴².
- (2) Si $\mathbb{K}$ est un corps fini, un polynôme dans $\mathbb{K}[X]$ est primitif si il est le polynôme minimal d'un générateur du groupe commutatif du corps.

3.104.

Pour rappel, il y a plusieurs façons de périphraser le fait que les coefficients soient premiers entre eux. Nous pouvons dire ...

- (1) Le pgcd de ses coefficients est 1 parce que c'est la définition 1.355 pour avoir des nombres premiers entre eux.
- (2) Le contenu de ses coefficients est 1. Parce que le contenu est précisément le pgcd, définition 3.101.

La notion de polynôme primitif au sens du pgcd est particulière aux polynômes à coefficients dans un anneau comme le montre le lemme suivant.

Lemme 3.105.

Si $\mathbb{K}$ est un corps, tout polynôme unitaire dans $\mathbb{K}[X]$ non nul est primitif au sens du pgcd.

Démonstration. Un polynôme unitaire a un 1 parmi ses coefficients, donc le pgcd est forcément 1. $\square$

Lemme 3.106 ([140]).

Soit un anneau factoriel⁴³ A . Soient des polynômes primitifs P_1 et P_2 dans $A[X]$. Soient $a_1, a_2 \in A^*$ tels que

$$a_1 P_1 = a_2 P_2. \quad (3.168)$$

Alors

- (1) Les éléments a_1 et a_2 sont associés dans A .

41. Je pense à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, mais faites attention, j'ai pas vérifié. Écrivez-moi pour me dire si c'est un bon exemple.

42. Pas mal d'auteurs disent que $c(P)$ soit être égal à 1. Mais en général ces auteurs se rétractent bien vite en disant que $c(P)$ n'est défini qu'à inversible près. Voir aussi 3.102.

43. Définition 3.53. Je rappelle qu'un anneau factoriel est toujours commutatif.

(2) Les polynômes P_1 et P_2 sont associés dans $A[X]$.

Démonstration. Vu que les P_i sont primitifs, nous avons $c(a_i P_i) = u_i a_i$ où u_i est un inversible ($u_i = c(P_i)$). Les éléments $u_1 a_1$ et $u_2 a_2$ sont donc deux pgcd du même ensemble : les coefficients de $a_1 P_1$ (qui sont les mêmes que ceux de $a_2 P_2$). Le lemme 3.48 entre en jeu pour dire que $u_1 a_1$ et $u_2 a_2$ sont associés : il existe un inversible v tel que $u_1 a_1 = v u_2 a_2$. Au final, $a_1 = u_1^{-1} v u_2 a_2$ et nous voyons que a_1 et a_2 sont associés.

Nous écrivons l'égalité $a_1 P_1 = a_2 P_2$ avec la valeur trouvée de a_1 : $u_1^{-1} v u_2 a_2 P_1 = a_2 P_2$. On voudrait simplifier par a_2 (surtout que A est commutatif), mais comme a_2 n'est pas spécialement inversible, il faut le justifier. L'anneau A est intègre ; donc l'anneau $A[X]$ l'est aussi (théorème 3.92). Et comme $A[X]$ est intègre, on peut faire la simplification.

Au final nous avons $u_1^{-1} v u_2 P_1 = P_2$, et comme $u_1^{-1} v u_2$ est inversible, P_1 et P_2 sont associés. $\square$

LEMooHJECooTeELgN

Lemme 3.107 (de Gauss[140]).

Soit un anneau factoriel A . Soient $P, Q \in A[X]$.

ITEMooISPDoOXdRyWE

(1) Les polynômes P et Q sont primitifs si et seulement si le polynôme PQ est primitif.

ITEMooLWEEooLcDlfp

(2) Il existe un inversible $u \in A$ tel que $c(PQ) = uc(P)c(Q)$.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) $(1) \Rightarrow$ Nous supposons que P et Q sont primitifs. Et, par l'absurde, nous supposons que PQ n'est pas primitif. Donc $c(PQ)$ n'est pas inversible dans A . Vu que A est factoriel, tout élément non inversible est un produit d'irréductibles ; c'est le cas de $c(PQ)$. Soit p un irréductible entrant dans la décomposition de $c(PQ)$.

Le lemme 3.56 dit que l'anneau $B = A/pA$ est intègre⁴⁴.

Considérons la surjection canonique $\pi: A \rightarrow B$ que nous prolongeons en un morphisme d'anneaux

$$\begin{aligned} \phi: A[X] &\rightarrow B[X] \\ \sum_i a_i X^i &\mapsto \sum_i \pi(a_i) X^i. \end{aligned} \quad (3.169)$$

Notons que p ne divise pas tous les coefficients de P . En effet, sinon $c(P)$ serait un multiple de p (proposition 3.57) et ne pourrait pas être inversible. Donc $\phi(P) \neq 0$ dans $B[X]$. De même nous savons que $\phi(Q) \neq 0$.

L'anneau B est intègre parce que A est intègre (proposition 3.92). Donc $\phi(P)\phi(Q) \neq 0$, et comme ϕ est un morphisme, $\phi(PQ) \neq 0$, ce qui signifie que p ne divise pas tous les coefficients de PQ , ce qui est contraire à l'hypothèse de l'absurde.

Nous en déduisons que $c(PQ)$ n'est pas inversible, et donc que PQ est primitif.

(2) $(1) \Leftarrow$

Nous supposons que PQ est primitif, et nous montrons que P et Q le sont. En factorisant un pgcd des coefficients de P nous pouvons écrire $P = c(P)P_1$ avec P_1 primitif (lemme 1.331). Par la partie précédente nous savons que $P_1 Q_1$ est primitif. Nous avons donc l'égalité

$$PQ = c(P)c(Q)P_1 Q_1 \quad (3.170)$$

où à la fois PQ et $P_1 Q_1$ sont primitifs. Vu que PQ est primitif, $c(P)c(Q)P_1 Q_1$ est primitif, de telle sorte que⁴⁵

$$c(c(P)c(Q)P_1 Q_1) = c(P)c(Q)c(P_1 Q_1) \quad (3.171)$$

est inversible. Vu que $c(P_1 Q_1)$ est également inversible, nous en déduisons que $c(P)c(Q)$ est inversible. Si $u \in A$ vérifie $c(P)c(Q)u = 1$, alors $c(Q)u$ est un inverse de $c(P)$. De même $uc(P)$ est un inverse de $c(Q)$. Bref, ils sont inversibles et les polynômes P et Q sont primitifs.

44. Ici, ma source [140] précise que p est premier. C'est vrai par la proposition 3.55, mais ça me semble inutile. Écrivez-moi pour me dire si le fait que p soit premier est important.

45. Utilisation du lemme 1.330.

(3) **Pour (2)**

Soient $P, Q \in A[X]$. Nous considérons les polynômes primitifs P_1, Q_1 et R_1 définis par $P = c(P)P_1$, $Q = c(Q)Q_1$ et $PQ = c(PQ)R_1$. Nous avons

$$c(P)c(Q)P_1Q_1 = PQ = c(PQ)R_1. \quad (3.172)$$

En prenant le contenu des deux côtés nous avons

$$c\left(c(P)c(Q)P_1Q_1\right) = c\left(c(PQ)R_1\right), \quad (3.173)$$

et en tenant compte du lemme 1.330, cela devient

$$c(P)c(Q)c(P_1Q_1) = c(PQ)c(R_1) \quad (3.174)$$

où les éléments $c(P_1Q_1)$ et $c(R_1)$ sont inversibles. En posant $u = c(P_1Q_1)^{-1}c(R_1)$, nous avons bien

$$c(P)c(Q) = uc(PQ). \quad (3.175)$$

□

3.108.

Dans toute la démonstration, il y a une ambiguïté entre $c(P)$ qui serait le pgcd des coefficients de P , c'est-à-dire un ensemble et $c(P)$ qui serait un représentant de cet ensemble.

Grâce au lemme 1.332, nous savons que si δ est un pgcd et si u est inversible, alors $u\delta$ est un pgcd. Donc à partir de l'équation

$$c(P)c(Q) = uc(PQ), \quad (3.176)$$

en fait nous savons qu'il existe des représentants de $c(P)$, $c(Q)$ et $c(PQ)$ tels que

$$c(P)c(Q) = c(PQ). \quad (3.177)$$

3.7.6 Racines des polynômes

Définition 3.109 (Ordre d'un polynôme).

Soit P un polynôme irréductible⁴⁶ de degré n sur $\mathbb{F}_p[X]$. L'ordre de P est

$$\min\{k \text{ tel que } P \mid X^k - 1\}. \quad (3.178)$$

Définition 3.110.

Soient A un anneau et $P \in A[X]$. On appelle **racine** un élément $\alpha \in A$ tel que $P(\alpha) = 0$; c'est-à-dire que, en remplaçant toutes les occurrences de X par α dans l'expression de P , on obtient 0.

PropHSQooASRbeA

Proposition 3.111.

Soient A un anneau et P un polynôme non nul dans $A[X]$. Si $\alpha \in A$ est une racine de P alors $X - \alpha$ divise P , et réciproquement.

Démonstration. Nous notons le polynôme $\mu = X - \alpha$ par analogie avec le polynôme minimal dont il sera question dans la très semblable proposition 6.101. Le sens réciproque est clair : si μ divise P , alors α est racine de P .

Pour le sens direct, remarquons que si α est racine de P , alors P est de degré au moins égal à 1, et nous pouvons donc effectuer la division euclidienne⁴⁷ de P par μ : il existe des polynômes Q et R tels que

$$P = Q\mu + R \quad (3.179)$$

PropHSQooASRbeA1

avec $\deg(R) < \deg(\mu)$. Donc R est une constante, élément de A : appelons-le a . En évaluant (3.179) en α , il vient

$$0 = P(\alpha) = Q(\alpha)\mu(\alpha) + a, \quad (3.180)$$

et nous en déduisons que $a = 0$, ce qui montre que $P = Q\mu$ et que μ divise P . □

46. Définition 1.318.

47. Théorème 3.95.

DEFooTGZYooCYiKQa

Définition 3.112 (Racine simple et multiple d'un polynôme).

Soit A un anneau ainsi qu'un polynôme $P \in A[X]$ et $\alpha \in A$ racine de P . La **multiplicité** de α par rapport à P est l'entier h tel que P est divisible par $(X - \alpha)^h$ mais pas divisible par $(X - \alpha)^{h+1}$. Nous noterons $\theta_\alpha(P)$ la multiplicité de α par rapport à P .

Si la multiplicité d'une racine est égale à 1, nous disons que c'est une **racine simple**. Sinon, c'est une **racine multiple**.

3.113.

Pour une définition générale d'une racine simple de l'équation $f(x) = 0$, voir la définition 34.50. La proposition 3.111 nous indique que toute racine est de multiplicité au moins égale à 1.

LEMooZUUVooQgsdXs

Lemme 3.114.

Soient un anneau A ainsi que $x, r \in A$. Nous avons

$$x^n - r^n = (x - r) \sum_{k=0}^{n-1} x^k r^{n-k-1}. \quad (3.181)$$

Démonstration. Nous effectuons la distribution, et nous calculons un peu :

$$(x - r) \sum_{k=0}^{n-1} x^k r^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} r^{n-k-1} - \sum_{k=0}^{n-1} x^k r^{n-k} \quad (3.182a)$$

$$= \sum_{k=1}^n x^k r^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x^k r^{n-k} \quad (3.182b)$$

$$= -r^n + \sum_{k=1}^{n-1} (x^k r^{n-k} - x^k r^{n-k}) + x^n \quad (3.182c)$$

$$= x^n - r^n. \quad (3.182d)$$

□

PROPOoQCZSooVokxXQ

Proposition 3.115 ([141]).

Soient un anneau A , un polynôme $P \in A[X]$ de degré n , ainsi qu'une racine $\alpha \in A$ de P . Alors il existe un polynôme $Q \in A[X]$ de degré $n - 1$ tel que $P = (X - \alpha)Q$.

Démonstration. D'après le lemme 3.114, pour chaque k , nous avons $x^k - r^k = (x - r)S_k(x)$ où S_k est un polynôme de degré $k - 1$ (ou moins).

Soit un polynôme P tel que $P(\alpha) = 0$. Nous pouvons écrire

$$P(x) = P(x) - P(\alpha) \quad (3.183a)$$

$$= \sum_{k=0}^n a_k x^k - \sum_{k=0}^n a_k \alpha^k \quad (3.183b)$$

$$= \sum_{k=1}^n a_k (x^k - \alpha^k) \quad (3.183c)$$

$$= \sum_{k=1}^n a_k (x - \alpha) S_k(x) \quad (3.183d)$$

$$= (x - \alpha) \sum_{k=1}^n a_k S_k(x) \quad (3.183e)$$

$$= (x - \alpha) Q(x) \quad (3.183f)$$

où Q est le polynôme de degré $n - 1$ donné par $Q = \sum_{k=1}^n a_k S_k$. □

PropahQQpA

Proposition 3.116.

L'élément $\alpha \in A$ est une racine de multiplicité⁴⁸ h du polynôme P si et seulement si il existe $Q \in A[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^h Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$.

Démonstration. Par définition de la multiplicité de α , le polynôme P est divisible par $(X - \alpha)^h$ mais pas par $(X - \alpha)^{h+1}$. Il existe donc un polynôme Q tel que

$$P = (X - \alpha)^h Q. \quad (3.184)$$

Si $Q(\alpha)$ était nul, la proposition 3.115 nous dirait que $Q = (X - \alpha)S$ pour un certain polynôme S . Cela ferait $P = (X - \alpha)^{h+1}S$, ce qui est contraire à l'hypothèse sur la multiplicité. $\square$

LemleLhpc

Lemme 3.117.

Soient P et Q des polynômes non nuls de $A[X]$ et $\alpha \in A$. Alors

- (1) $\theta_\alpha(P + Q) \leq \min\{\theta_\alpha(P), \theta_\alpha(Q)\}$, et l'égalité a lieu si $\theta_\alpha(P) \neq \theta_\alpha(Q)$;
- (2) $\theta_\alpha(PQ) \geq \theta_\alpha(P) + \theta_\alpha(Q)$, et l'égalité a lieu si A est intègre.

ItemleLhpciv

Dans le théorème suivant, la partie importante en pratique est le point (2) parce qu'il dit que, lorsque nous cherchons les racines d'un polynôme, nous pouvons nous arrêter lorsque nous en avons trouvé autant que le degré, multiplicité comprise.

ThoSVZooMpNANi

Théorème 3.118.

Soit A un anneau intègre et $P \in A[X] \setminus \{0\}$, un polynôme de degré n .

- (1) Si $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in A$ sont des racines deux à deux distinctes de multiplicités $k_1, \dots, k_p$, alors il existe $Q \in A[X]$, de degré $n - \sum_{i=1}^p k_i$, tel que

$$P = Q \prod_{i=1}^p (X - \alpha_i)^{k_i} \quad (3.185)$$

et $Q(\alpha_i) \neq 0$ pour tout i .

ITEMooWGOBooGApPOo

- (2) La somme des multiplicités des racines de P est au plus $\deg(P)$.

Démonstration. Si $p = 1$, soit α une racine de multiplicité k de P . La définition de la multiplicité d'une racine nous dit que P est divisible par $(X - \alpha)^k$ mais pas par $(X - \alpha)^{k+1}$. Donc il existe $Q \in A[X]$ tel que $P = Q(X - \alpha)^k$. Il reste à voir que $Q(\alpha) \neq 0$. Cela est une conséquence de la proposition 3.111 : si $Q(\alpha)$ était nul, on pourrait lui factoriser $(X - \alpha)$ et donc avoir $(X - \alpha)^{k+1}$ qui se factorise dans P , ce qui n'est pas possible.

Nous supposons que $p \geq 2$ et nous effectuons une récurrence sur p . Nous considérons donc les $p-1$ premières racines $\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$ et un polynôme $R \in A[X]$ tel que $R(\alpha_i) \neq 0$ pour $i = 1, \dots, p-1$ et

$$P = \underbrace{(X - \alpha_1)^{k_1} \dots (X - \alpha_{p-1})^{k_{p-1}}}_S R. \quad (3.186)$$

Par hypothèse $P(\alpha_p) = S(\alpha_p)R(\alpha_p) = 0$. L'anneau A étant intègre, $S(\alpha_p) \neq 0$ parce que $\alpha_i \neq \alpha_p$ pour $i \neq p$. Par conséquent, $R(\alpha_p) = 0$.

Nous devons encore vérifier que la multiplicité α_p est k_p par rapport à R . Pour cela nous utilisons le point (2) du lemme 3.117 afin de dire que le degré de α_p pour $P = SR$ est k_p . Par conséquent

$$R = (X - \alpha_p)^{k_p} T \quad (3.187)$$

avec $T(\alpha_p) \neq 0$ et enfin

$$P = \prod_{i=1}^p (X - \alpha_i)^{k_i} T. \quad (3.188)$$

De plus $T(\alpha_i) \neq 0$, sinon $R(\alpha_i)$ serait nul. $\square$

48. Multiplicité d'une racine, définition 3.112.

CORooUGJGooBofWLR

Corolaire 3.119.

Un polynôme de degré n sur un anneau intègre possède au maximum n racines distinctes.

Démonstration. Le théorème 3.118(2) dit que la somme des multiplicités des racines de P est au maximum n . Mais la proposition 3.111 dit que toutes les racines ont une multiplicité au moins égale à un. Donc il ne peut pas y en avoir plus de n . $\square$

Proposition 3.120 ([142, 143]).

Soit un anneau intègre et $n > 0$. Les racines n^e de l'unité forment un groupe cyclique dont l'ordre divise n .

LEMooHDJIooPTpUCJ

Lemme 3.121.

Soit le polynôme $P = X^2 - 1$ sur l'anneau intègre⁴⁹ A . Si $1 \neq -1$ ⁵⁰, alors les racines de P sont ± 1 .

Démonstration. Le fait que ± 1 sont racines est le lemme 1.93(2)(5). Puisque par hypothèse $1 \neq -1$, le corolaire 3.119 termine la preuve. $\square$

CORooZCSOooHQVAOV

Corolaire 3.122 (Conséquence du lemme de Gauss[144]).

Soient A un anneau factoriel et $\text{Frac}(A)$ son corps des fractions. Un polynôme non constant $P \in A[X]$ est irréductible (sur A) si et seulement si il est irréductible et primitif au sens du pgcd⁵¹ sur $\text{Frac}(A)[X]$.

Exemple 3.123.

Il ne faudrait pas croire qu'être irréductible dans un anneau A implique d'être irréductible dans le corps des fractions. En effet soit $A = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ et $P = X^2 - X - 1$. Nous savons que sa factorisation est

$$P = \left(X - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \left(X - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right). \quad (3.189)$$

Si vous ne le saviez pas, faites juste le calcul pour vous en assurer.

Ce polynôme est irréductible sur $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ mais pas irréductible sur $\text{Frac}(\mathbb{Z}[\sqrt{5}])$. $\triangle$

3.7.7 Quelques identités

LemISPooHIKJBU

Lemme 3.124 ([1, 145]).

Quelques identités de polynômes.

ItemLTBooAcyMtN

(1) Si n est impair, alors $1 + X$ divise $1 + X^n$.

ItemLTBooAcyMtNii

(2) Pour tout n nous avons $X^n - 1 = (X - 1)(1 + X + \cdots + X^{n-1})$.

ITEMooILIVooHtmWLM

(3) $X^n - a^n = (X - a) \sum_{i=0}^{n-1} a^i X^{n-1-i}$.

Démonstration. Plusieurs points.

- (1) **Pour (1)** Nous allons utiliser le lemme 3.1 avec $a = 1$, $b = -X$ et $r = n - 1$. Notez que n étant impair, $r = n - 1$ est encore positif. En ce qui concerne le membre de gauche de (3.1), nous remarquons que $(-X)^n = (-1)^n X^n = -X^n$. Nous avons donc :

$$1 + X^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k = (1 + X)(\cdots). \quad (3.190)$$

Cela prouve que $1 + X$ divise $1 + X^n$.

49. Définition 1.326.

50. À mon avis cette hypothèse n'est pas nécessaire. Et d'ailleurs j'ai un peu du mal à voir des exemples exotiques d'anneaux intègres dans lesquels $1 = -1$. Il y aurait $[0, 1]$ modulo 2, certaines de ses parties, comme $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Et quoi d'autre ?

51. Définition 3.103.

(2) **Pour (2)** Posons $P = X + \dots + X^{n-1}$. Nous avons $XP = P - X + X^n$ et donc

$$(X - 1)(1 + P) = X + XP - 1 - P = X + (P - X + X^n) - 1 - P = X^n - 1. \quad (3.191)$$

(3) **Pour (3)** Déjà fait dans (3.1).

□

3.7.8 Générateurs pour le groupe multiplicatif

PROPooKSCRooPyInSv

Proposition 3.125 ([146]).

Si p est un nombre premier, tout sous-groupe de $((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*, \cdot)$ est cyclique⁵².

Démonstration. Soit un sous-groupe H d'ordre $|H| = n$ de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. Nous prouvons par récurrence sur n que H est cyclique.

(1) $n = 1$ Si H est un sous-groupe d'ordre 1, alors $H = \{[1]_p\}$ et c'est cyclique, pas de problèmes.

(2) **Récurrence** Nous supposons que tous les sous-groupes de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ d'ordre plus petit que n sont cycliques, et nous prouvons que H est également cyclique.

Nous allons faire deux cas suivant que n est la puissance d'un nombre premier ou non.

(2a) **Si $n = q^k$** Nous supposons que $n = q^k$ pour un certain nombre premier q . Nous supposons aussi, par l'absurde que H n'est pas cyclique. Les éléments de H ont un ordre qui divise q^k (corolaire 2.15), mais pas d'ordre q^k . Donc pour tout x dans H nous avons $x^{q^{k-1}} = 1$. En particulier le polynôme $P = X^{q^{k-1}} - 1$ a au moins q^k racines dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: les éléments de H .

Hélas le degré de P étant q^{k-1} , il ne peut pas avoir plus de q^{k-1} racines distinctes par 3.118. Contradiction. Donc H est cyclique.

(2b) **Cas général**

Nous supposons que $|H|$ n'est pas la puissance d'un nombre premier.

(2b.i) **Un morphisme** Le corolaire 1.368 nous indique que $n = ab$ pour deux nombres a, b tels que $\text{pgcd}(a, b) = 1$. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} f: H &\rightarrow H \\ x &\mapsto x^a. \end{aligned} \quad (3.192)$$

Étant donné que H est abélien, f est un morphisme de groupes. Tout élément $x \in H$ vérifie $f(x)^b = x^{ab} = 1$. Donc

$$\text{Image}(f) \subset \{y \in H \text{ tel que } y^b = 1\}. \quad (3.193)$$

(2b.ii) **Ordre du noyau et de l'image** Par le coup des racines distinctes de polynôme $X^b - 1$, nous avons $|\text{Image}(f)| \leq b$. De même nous avons

$$\ker(f) = \{x \in H \text{ tel que } x^a = 1\}, \quad (3.194)$$

et donc $|\ker(f)| \leq a$.

Le premier théorème d'isomorphisme 2.7 nous indique que

$$\frac{H}{\ker(f)} \simeq \text{Image}(f), \quad (3.195)$$

et comme tout est abélien, tous les sous groupes sont normaux⁵³, et nous avons, par le théorème de Lagrange 2.14 que

$$ab = |H| = \underbrace{|\ker(f)|}_{\leq a} \underbrace{|\text{Image}(f)|}_{\leq b} \leq ab. \quad (3.196)$$

52. Définition 1.428.

53. « distingué » et « normal » sont synonymes.

Le premier membre est égal au dernier. Donc toutes les inégalités sont des égalités. Nous avons donc $|\ker(f)| = a$ et $|\text{Image}(f)| = b$.

- (2b.iii) **Hypothèse de récurrence** C'est le moment d'utiliser l'hypothèse de récurrence : les groupes $\ker(f)$ et $\text{Image}(f)$ sont cycliques. Soient des générateurs h et h' . Quel est l'ordre de hh' ? Le lemme 3.23 nous indique que hh' est d'ordre $ab = n$. Donc hh' est générateur de H qui est donc cyclique.

□

Chapitre 4

Espaces vectoriels (début)

4.1 Parties libres, génératrices, bases et dimension

Nous avons déjà défini (dans 1.434) un espace vectoriel comme étant un module sur un corps commutatif. En explicitant un peu, cela donne ceci[147].

Un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ est un ensemble E muni de deux opérations :

- une loi de composition interne $+: E \times E \rightarrow E$,
- une loi de composition externe $\cdot: \mathbb{K} \times E \rightarrow E$

telles que

- (1) $(E, +)$ soit un groupe abélien,
- (2) pour tout $u, v \in E$ et pour tout $k, k' \in \mathbb{K}$,
 - (2a) $k(u + v) = (ku) + (kv)$
 - (2b) $(kk')u = k(k'u)$
 - (2c) $(k + k')u = (ku) + (k'u)$
 - (2d) $1u = u$

où 1 est le neutre de $\mathbb{K}$ et où nous avons directement adopté la notation ku pour $k \cdot u$.

Si $u \in E$, nous notons $-u$ l'inverse de u dans le groupe $(E, +)$.

DEFooDLHWooAvfhgc

Définition 4.1 (Partie libre).

Si E est un espace vectoriel, une partie A de E est **libre** si pour tout choix d'un nombre fini d'éléments $\{u_i\}_{i=1,\dots,n}$ de A , l'égalité

$$a_1u_1 + \dots + a_nu_n = 0 \tag{4.1}$$

implique $a_i = 0$ pour tout i (ici les a_i sont dans le corps de base).

Remarque 4.2.

Notons que le vecteur nul n'est dans aucune partie libre, ne fût-ce que parce que $a0 = 0$ n'implique pas $a = 0$.

Si A est une partie de l'espace vectoriel E , nous notons $\text{Span}(A)$ l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de A . Les coefficients de ces combinaisons linéaires sont dans le corps de base $\mathbb{K}$.

Définition 4.3 (Partie génératrice).

Une partie B d'un espace vectoriel E est **génératrice** si $\text{Span}(B) = E$.

Remarque 4.4.

Ces définitions demandent des commentaires en dimension infinie¹.

1. Nous n'avons pas encore défini le concept de dimension, mais nous nous adressons au lecteur trop pressé.

- (1) Tout élément peut être écrit comme combinaison linéaire finie d'une partie génératrice. Cela ne signifie pas que nous pouvons extraire une partie finie qui convient pour tous les éléments à la fois. Lorsque l'espace est de dimension infinie, ceci est particulièrement important.
- (2) La définition séparée de liberté dans le cas des parties infinies a son importance lorsqu'on parle d'espaces vectoriels de dimension infinie (en dimension finie, aucune partie infinie n'est libre) parce que cela fera une différence entre une base algébrique et une base hilbertienne par exemple.

DEFooNGDSooEDAwTh

Définition 4.5 (Base).

Une **base** de l'espace vectoriel E est une partie à la fois génératrice et libre.

NORMooJGRNooAKtvWt

4.6.

Supposons que la partie $\{u_1, u_2, u_2\}$ soit une base d'un espace vectoriel E . Un ensemble étant quelque chose de non ordonné, la partie $\{u_3, u_2, u_1\}$ est la même, et $\{u_1, u_1, u_2, u_2, u_3, u_4\}$ est encore la même.

Lorsque l'ordre dans lequel nous numérotions les vecteurs d'une base est important (par exemple pour écrire explicitement la matrice d'une application linéaire), nous devrions écrire (u_1, u_2, u_3) . Nous pourrions définir le concept de *base ordonnée* en disant qu'une base ordonnée de E est une application $u: I \rightarrow E$ où I est un ensemble totalement ordonné et telle que $u(I)$ soit une base de E .

À partir de là, il ne serait plus autorisé de dire « la matrice de f dans une base ». Il faudrait dire « la matrice de f dans une base ordonnée ». Dans ce contexte, une matrice pour une application linéaire d'un espace réel serait une application $I \times I \rightarrow \mathbb{R}$.

Bref, tout ça pour dire qu'il y a clairement des incohérences de notations à ce niveau dans le Frido. Il sera souvent écrit $\{u_1, u_2\}$ au lieu de (u_1, u_2) ou, mieux, $u: I \rightarrow \mathbb{R}$, et il sera souvent dit « base » au lieu de « base ordonnée ».

Nous prouvons à présent que tout élément non nul d'un espace vectoriel possédant une base² se décompose de façon unique en combinaison linéaire finie d'éléments d'une base.

PROFoooEQIooXfWDDV

Proposition 4.7 ([1]).

Soient un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ muni d'une base $\{e_i\}_{i \in I}$. Si $v \in E$, alors il existe un unique couple (J, c) où

- (1) J est une partie finie de I ;
- (2) $c: J \rightarrow \mathbb{K}$ est une application
- (3) $v = \sum_{j \in J} c(j)e_j$.

Les éléments $c(i)$ seront notés v_i et sont les composantes de v dans la base. Sous-entendu, on prolonge c de J vers I par zéro sur $I \setminus J$.

Démonstration. Soit un espace vectoriel E et une base $\{e_i\}_{i \in I}$ où I est un ensemble à priori quelconque. Soit $v \in E$. Puisque $E = \text{Span}\{e_i\}_{i \in I}$, il existe une partie finie J de I et des coefficients $\{v_j\}_{j \in J}$ dans $\mathbb{K}$ tels que

$$v = \sum_{j \in J} v_j e_j. \quad (4.2)$$

Cela donne l'existence.

En ce qui concerne l'unicité, soient J et K des parties finies de I et des coefficients $\{v_j\}_{j \in J}$ et $\{w_k\}_{k \in K}$ tels que

$$v = \sum_{j \in J} v_j e_j = \sum_{k \in K} w_k e_k. \quad (4.3)$$

EQooFKNEooICnVPP

2. Nous n'avons pas démontré que tout espace vectoriel possède une base. Donc à notre niveau, il est possible que ce théorème soit sans objet pour beaucoup d'espaces.

Nous posons $L = J \cup K$. Remarquez que les unions suivantes sont des unions disjointes :

$$L = (J \setminus K) \cup (J \cap K) \cup (K \setminus J) \quad (4.4a)$$

$$J = (J \setminus K) \cup (J \cap K) \quad (4.4b)$$

$$K = (K \cap J) \cup (K \setminus J). \quad (4.4c)$$

Écrivons $0 = v - v$ en utilisant les expressions de v de (4.3) et en décomposant les sommes :

$$0 = \sum_{j \in J} v_j e_j - \sum_{k \in K} w_k e_k \quad (4.5a)$$

$$= \sum_{j \in J \setminus K} v_j e_j + \sum_{j \in J \cap K} v_j e_j - \sum_{k \in K \cap J} w_k e_k - \sum_{k \in K \setminus J} w_k e_k \quad (4.5b)$$

$$= \sum_{j \in J \setminus K} v_j e_j + \sum_{j \in J \cap K} (v_j - w_j) e_j - \sum_{k \in K \setminus J} w_k e_k. \quad (4.5c)$$

Là-dessus, nous posons

$$\alpha_l = \begin{cases} v_l & \text{si } l \in J \setminus K \\ v_l - w_l & \text{si } l \in J \cap K \\ -w_l & \text{si } l \in K \setminus J. \end{cases} \quad (4.6)$$

Nous avons alors

$$\sum_{l \in L} \alpha_l e_l = 0. \quad (4.7)$$

Vu que $\{e_i\}_{i \in I}$ est libre, la partie $\{e_l\}_{l \in L}$ est également libre. Donc l'équation (4.7) implique que $\alpha_l = 0$ pour tout $l \in L$.

Nous devons prouver que

$$\{j \in J \text{ tel que } v_j \neq 0\} = \{k \in K \text{ tel que } w_k \neq 0\} \quad (4.8)$$

et que pour l dans cet ensemble, $v_l = w_l$.

Soit $j \in J$; il y a deux possibilités : soit $j \in J \setminus K$, soit $j \in J \cap K$. Dans le premier cas nous avons déjà vu que $\alpha_j = v_j = 0$. Dans le second cas, $\alpha_j = v_j - w_j = 0$, c'est-à-dire $v_j = w_j$.

Donc $j \in J$ vérifiant $v_j \neq 0$ implique $j \in J \cap K$ et l'égalité des coefficients. Idem avec $k \in K$ tel que $w_k \neq 0$ implique $k \in J \cap K$. $\square$

Lemme 4.8 ([1]).

Soit un espace vectoriel admettant des bases. Un endomorphisme est une bijection si et seulement si il change toute base en une base.

Démonstration. En deux parties. Soit un espace vectoriel E possédant des bases et un endomorphisme $f: E \rightarrow E$.

(1) **Si f est bijective** Soit une base $\{v_i\}_{i \in I}$; nous devons voir que $\{f(v_i)\}_{i \in I}$ est une base.

(1a) **Libre** Si J est une partie finie de I et si les λ_j sont des scalaires tels que $\sum_{j \in J} \lambda_j f(v_j) = 0$, alors

$$0 = \sum_{j \in J} \lambda_j f(v_j) = f\left(\sum_{j \in J} \lambda_j v_j\right). \quad (4.9)$$

Mais comme f est bijective, cela implique que $\sum_{j \in J} \lambda_j v_j = 0$. En retour, parce que $\{v_i\}$ est une base, cela implique que $\lambda_j = 0$ pour tout j .

(1b) **Générateur** Soit $x \in E$. Puisque f est bijective, il existe un unique $y \in E$ tel que $x = f(y)$. Comme $\{v_i\}_{i \in I}$ est une base, il existe une partie finie $J \subset I$ et des scalaires $\{\lambda_j\}_{j \in J}$ tels que

$$y = \sum_{j \in J} \lambda_j v_j. \quad (4.10)$$

Nous avons alors

$$x = f(y) = \sum_{j \in J} \lambda_j f(v_j), \quad (4.11)$$

qui montre que $\{f(v_i)\}_{i \in I}$ est bien génératrice de E

(2) **Si f change les bases en bases** Soit un endomorphisme changeant toute base en une base. Nous devons prouver qu'il est bijectif.

(2a) **Injective** Nous considérons une base $\{v_i\}_{i \in I}$. La partie $\{f(v_i)\}_{i \in I}$ est par hypothèse également une base.

Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Il existe J et K finis dans I qui permettent de décomposer x et y respectivement dans la base $\{f(v_i)\}_{i \in I}$. Quitte à poser $J' = J \cup K$, nous supposons que J suffit³. Il existe donc des scalaires $\{\lambda_j\}_{j \in J}$ et $\{\mu_j\}_{j \in J}$ tels que $x = \sum_{j \in J} \lambda_j f(v_j)$ et $y = \sum_{j \in J} \mu_j f(v_j)$.

La relation $f(x) = f(y)$ donne immédiatement, par la linéarité de f ,

$$\sum_{j \in J} (\lambda_j - \mu_j) f(v_j) = 0. \quad (4.12)$$

Du fait que $\{f(v_i)\}_{i \in I}$ soit une base, nous déduisons que $\lambda_j - \mu_j = 0$ pour tout j . Donc $x = y$, et f est injective.

(2b) **Surjective** Soit $x \in E$. Puisque $\{f(v_i)\}_{i \in I}$ est une base, il existe des scalaires λ_j tels que

$$x = \sum_{j \in J} \lambda_j f(v_j) = f\left(\sum_{j \in J} \lambda_j v_j\right). \quad (4.13)$$

Donc f est surjective. □

PROPOOVJFNooSbkzTF

Proposition 4.9 ([1]).

Soit un espace vectoriel E . Soit une partie $B \subset E$ telle que tout élément de E puisse être écrit de façon unique comme combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de B . Alors B est une base.

LEMooRWQHooIxrQek

Lemme 4.10 ([1]).

Bases dans $\mathbb{R}^n$.

ITEMooKWULooCTmOqM

(1) Si v et w ne sont pas colinéaire dans $\mathbb{R}^2$, alors $\{v, w\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

(2) Toute partie libre de $\mathbb{R}^n$ contenant n élément est une base.

Définition 4.11.

Un espace vectoriel est **de type fini** si il contient une partie génératrice finie.

Nous verrons dans les résultats qui suivent que cette définition est en réalité inutile parce qu'un espace vectoriel sera de type fini si et seulement si il est de dimension finie.

LemytHnID

Lemme 4.12.

Si E a une famille génératrice de cardinal n , alors toute famille de $n + 1$ éléments est liée.

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur n . Pour $n = 1$, nous avons $E = \text{Span}(e)$ et donc si $v_1, v_2 \in E$ nous avons $v_1 = \lambda_1 e$, $v_2 = \lambda_2 e$ pour certains éléments non nuls λ_1, λ_2 du corps de base. Nous avons donc $\lambda_2 v_1 - \lambda_1 v_2 = 0$. Cela prouve que $\{v_1, v_2\}$ est liée.

Supposons maintenant que le résultat soit vrai pour $k < n$, c'est-à-dire que pour tout espace vectoriel contenant une partie génératrice de cardinal $k < n$, les parties de $k + 1$ éléments sont liées. Soit maintenant un espace vectoriel muni d'une partie génératrice $G = \{e_1, \dots, e_n\}$ de n éléments, et montrons que toute partie $V = \{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ contenant $n + 1$ éléments est liée. Dans nos notations nous supposons que les e_i sont des vecteurs distincts et les v_i également. Nous les

3. Nous utilisons le fait que l'union de deux parties finies d'un ensemble est finie (lemme 1.207(2)).

supposons également tous non nuls. Étant donné que $\{e_i\}$ est génératrice nous pouvons définir les nombres $\lambda_{i,k}$ par

$$v_i = \sum_{k=1}^n \lambda_{i,k} e_k \quad (4.14)$$

Puisque

$$v_{n+1} = \sum_{k=1}^n \lambda_{n+1,k} e_k \neq 0, \quad (4.15)$$

quitte à changer la numérotation des e_i , nous pouvons supposer que $\lambda_{n+1,n} \neq 0$. Nous considérons les vecteurs

$$w_i = \lambda_{n+1,n} v_i - \lambda_{i,n} v_{n+1}. \quad (4.16)$$

En calculant un peu,

$$w_i = \lambda_{n+1,n} \sum_{k=1}^n \lambda_{i,k} e_k - \lambda_{i,n} \sum_{k=1}^n \lambda_{n+1,k} e_k \quad (4.17a)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_{n+1,n} \lambda_{i,k} - \lambda_{i,n} \lambda_{n+1,k}) e_k \quad (4.17b)$$

parce que les termes en e_n se sont simplifiés. Donc la famille $\{w_1, \dots, w_n\}$ est une famille de n vecteurs dans l'espace vectoriel $\text{Span}\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$; elle est donc liée par l'hypothèse de récurrence. Il existe donc des nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls, tels que

$$0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_{n+1,n} v_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_{i,n} v_{n+1}. \quad (4.18)$$

Vu que $\lambda_{n+1,n} \neq 0$ et que, parmi les α_i , au moins un est non nul, nous avons au moins un des produits $\alpha_i \lambda_{n+1,n}$ qui est non nul. Par conséquent (4.18) est une combinaison linéaire nulle non triviale des vecteurs de $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$. Cette partie est donc liée. $\square$

Lemme 4.13.

Soient L une partie libre et G une partie génératrice d'un espace vectoriel E . Si l'ensemble des parties libres L' telles que $L \subset L' \subset G$ possède un élément maximum⁴, alors cet élément est une base.

Qu'entend-on par « maximale » ? La partie B candidate, doit être libre, contenir L , être contenue dans G et de plus avoir la propriété que $\forall x \in G \setminus B$, la partie $B \cup \{x\}$ est liée.

Démonstration. D'abord si G est une base, alors toutes les parties de G sont libres et le maximum est $B = G$. Dans ce cas le résultat est évident. Nous supposons donc que G est liée.

La partie $B = \{b_1, \dots, b_l\}$ est libre parce qu'on l'a prise parmi les libres. Montrons que B est génératrice. Soit $x \in G \setminus B$; par hypothèse de maximalité, $B \cup \{x\}$ est liée, c'est-à-dire qu'il existe des nombres λ_i, λ_x non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^l \lambda_i b_i + \lambda_x x = 0. \quad (4.19)$$

Si $\lambda_x = 0$ alors un de λ_i doit être non nul et l'équation (4.19) devient une combinaison linéaire nulle non triviale des b_i , ce qui est impossible parce que B est libre. Donc $\lambda_x \neq 0$ et

$$x = -\frac{1}{\lambda_x} \sum_{i=1}^l \lambda_i b_i. \quad (4.20)$$

Donc tous les éléments de $G \setminus B$ sont des combinaisons linéaires des éléments de B , et par conséquent, G étant génératrice, tous les éléments de E sont combinaisons linéaires d'éléments de B . $\square$

4. Encore une fois, à part quelques cas triviaux, il n'est pas clair à ce point que ce maximum existe.

ThonmnWKs

Théorème 4.14 (Théorème de la base incomplète).

Soit E un espace vectoriel de type fini sur le corps $\mathbb{K}$.

ItemBazxTZ

- (1) Si L est une partie libre et si G est une partie génératrice contenant L , alors il existe une base B telle que $L \subset B \subset G$. ITEMooFVJXooGzpzOu
- (2) Toute partie libre peut être étendue en une base. ITEMooFBUAooSSZxgx
- (3) Toutes les bases sont finies et ont même cardinal. ITEMooJIJSooGuJMdt
- (4) Si V est un sous-espace vectoriel de E , et si L est une base de V , alors il existe une base de E qui contient L .

Démonstration. Point par point.

- (1) Comme E est de type fini, il admet une partie génératrice G de cardinal fini n . Donc une partie libre est de cardinal au plus n par le lemme 4.12. Soit L , une partie libre contenue dans G (ça existe : par exemple $L = \emptyset$). La partie B maximale libre contenue dans G et contenant L est une base par le lemme 4.13.
- (2) Notons que puisque E lui-même est générateur, le point (1) implique que toute partie libre peut être étendue en une base.
- (3) Soient B et B' , deux bases. En particulier B est génératrice et B' est libre, donc le lemme 4.12 indique que $\text{Card}(B') \leq \text{Card}(B)$. Par symétrie on a l'inégalité inverse. Donc $\text{Card}(B) = \text{Card}(B')$.
- (4) La partie L étant une base de V , elle est en particulier libre dans E . Par le point (2), L peut être étendue en une base.

□

REMooYGJEooEcZQKa

Remarque 4.15.

Le théorème de la base incomplète 4.14(2) est ce qui permet de construire une base d'un espace vectoriel en « commençant par » une base d'un sous-espace. En effet si H est un sous-espace de E , alors une base de H est une partie libre de E et donc, peut être étendue en une base de E .

DEFooWRLKooArTpgH

Définition 4.16.

La **dimension** d'un espace vectoriel de type fini est le cardinal⁵ d'une⁶ de ses bases.

Il existe une infinité de bases de $\mathbb{R}^m$. On peut démontrer que le cardinal de toute base de $\mathbb{R}^m$ est m , c'est-à-dire que toute base de $\mathbb{R}^m$ possède exactement m éléments.

Exemple 4.17.

La base de **canonique** de $\mathbb{R}^m$ est la partie $\{e_1, \dots, e_m\}$, où le vecteur e_j est

$$e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j\text{-ème} \quad .$$

La composante numéro j de e_i est 1 si $i = j$ et 0 si $i \neq j$. Cela s'écrit $(e_i)_j = \delta_{i,j}$ où δ est le **symbole de Kronecker** défini par

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (4.21)$$

5. Définition 1.204.

6. Le théorème de la base incomplète 4.14(3) montre que cette définition ne souffre d'aucune ambiguïté.

Les éléments de la base canonique de $\mathbb{R}^m$ peuvent donc être écrits $e_i = \sum_{k=1}^m \delta_{i,k} e_k$. $\triangle$

Le théorème suivant est essentiellement une reformulation du théorème 4.14.

ThoMGQZooIgrXjy

Théorème 4.18.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\{e_i\}_{i \in I}$ une partie génératrice de E .

ITEMooTZUDooFEgymQ

- (1) Il existe $J \subset I$ tel que $\{e_i\}_{i \in J}$ est une base. Autrement dit : de toute partie génératrice nous pouvons extraire une base.
- (2) Soit $\{f_1, \dots, f_l\}$ une partie libre. Alors nous pouvons la compléter en utilisant des éléments e_i . C'est-à-dire qu'il existe $J \subset I$ tel que $\{f_k\} \cup \{e_i\}_{i \in J}$ soit une base.

ITEMooCJQGooXwjsfm

Démonstration. En deux parties.

- (1) **Pour (1)** C'est le théorème 4.14(1). La partie $\{e_{i_0}\}$ est libre et la partie $\{e_i\}_{i \in I}$ est génératrice. Donc il existe une base B telle que $\{e_{i_0}\} \subset B \subset \{e_i\}_{i \in I}$. Si $B = \{e_i\}_{i \in J}$, alors J est fini⁷ parce que toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont le même nombre d'éléments.
- (2) **Pour (2)** Utiliser le théorème 4.14(4) avec $V = \text{Span}\{f_1, \dots, f_l\}$.

□

PROPooVEVCooHkrlaw

Proposition 4.19.

Si E est un espace vectoriel de dimension finie n , alors

ITEMooZNLDOoBISKJyBS

- (1) toute partie contenant $n + 1$ éléments est liée.
- (2) toute partie libre contenant n éléments est une base,
- (3) toute partie génératrice contenant n éléments est une base.

ITEMooSGGCooOUUsBs

Démonstration. Soit une partie M contenant $n + 1$ éléments. L'espace E possède une partie génératrice contenant n éléments (n'importe quelle base). Donc M est liée par le lemme 4.12.

Une partie libre contenant n éléments peut être étendue en une base ; si ladite extension est non triviale (c'est-à-dire qu'on ajoute vraiment au moins un élément) une telle base contiendra une partie de $n + 1$ éléments qui serait liée par le lemme 4.12.

Pour la dernière assertion, soit une partie génératrice $\{v_i\}_{i \in I}$ où I contient n éléments. Par le théorème 4.18(1) nous pouvons en extraire une base : il existe $J \subset I$ tel que $\{v_j\}_{j \in J}$ soit une base. Si l'inclusion $J \subset I$ était stricte, alors la base $\{v_j\}_{j \in J}$ contiendrait moins de n éléments, ce qui serait en contradiction avec le théorème 4.14(3). $\square$

DefCodimension

Définition 4.20.

Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E . La **codimension** de F dans E est

$$\text{codim}_E(F) = \dim(E/F). \quad (4.22)$$

LEMooGNDPooAhvIek

Lemme 4.21.

L'ensemble $\mathbb{Q}^n$ est un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension n .

PROPooRKOVooBFRCKq

Proposition-Définition 4.22 (Supplémentaire vectoriel[1]).

Soit un espace vectoriel V et un sous-espace vectoriel V_1 dans V . Il existe un sous-espace vectoriel V_2 de V tel que

- (1) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$,
- (2) pour tout $x \in V$, il existe un unique $(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2$ satisfaisant $x = x_1 + x_2$.

Une telle partie V_2 est dite **supplémentaire** de V_1 et on écrit parfois $V = V_1 \oplus V_2$ ⁸.

7. Sauf si I est choisi de façon trahissante. Il se peut que $e_{i_1} = e_{i_2}$ avec $i_1 \neq i_2$.

8. Mais c'est un léger abus parce que $V_1 \oplus V_2$ est formellement $V_1 \times V_2$ (définition 4.148).

Démonstration. La partie V_1 est un sous-espace vectoriel. Il possède donc une base $\mathcal{B}_1 = \{u_1, \dots, u_l\}$. Le théorème de la base incomplète 4.14(3) dit qu'il existe $\{v_1, \dots, v_k\}$ tels que $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_l, v_1, \dots, v_k\}$ soit une base de V .

Nous posons alors $V_2 = \text{Span}\{v_1, \dots, v_k\}$.

- (1) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ Soit $x \in V_1 \cap V_2$. Étant donné que $x \in V_1$, il existe des a_i tels que $x = \sum_i a_i u_i$, et étant donné que $x \in V_2$ il existe des b_j tels que $x = \sum_j b_j v_j$. Nous avons donc $\sum_i a_i u_i - \sum_j b_j v_j = 0$ en tant que combinaison linéaire nulle d'éléments d'une base, les coefficients sont nuls⁹ : $a_i = 0$ et $b_j = 0$ pour tout i et j . Donc $x = 0$.
- (2) **Décomposition : existence** Si $x \in V$, il y a une décomposition dans la base $\mathcal{B}$: $x = \sum_{i=1}^l a_i u_i + \sum_{j=1}^k b_j v_j$. En posant $x_1 = \sum_i a_i u_i$ et $x_2 = \sum_j b_j v_j$, nous avons bien $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in V_1$ et $x_2 \in V_2$.
- (3) **Décomposition : unicité** Supposons $x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ avec $x_1, y_1 \in V_1$ et $x_2, y_2 \in V_2$. Nous avons les décompositions $x_1 = \sum_i a_i u_i$, $x_2 = \sum_j b_j v_j$, $y_1 = \sum_i a'_i u_i$ et $y_2 = \sum_j b'_j v_j$. L'égalité $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ donne

$$\sum_i (a_i - a'_i) u_i + \sum_j (b_j - b'_j) v_j = 0. \quad (4.23)$$

Combinaison linéaire nulle d'éléments d'une base. Les coefficients sont nuls, et donc $a_i - a'_i = 0$ et $b_j - b'_j = 0$. Nous en déduisons $x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$.

□

4.1.1 Et en dimension infinie

Dans ZFC, en dimension infinie, il existe aussi une base pour tout espace vectoriel ainsi qu'un théorème de la base incomplète. Nous ne parlerons pas de ce qu'il se passe lorsque nous ne considérons que ZF¹⁰.

LEMOOSSRXoolyfgNz

Lemme 4.23 ([148]).

Soient un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E et un sous-espace vectoriel V de E . Soient encore deux sous-espaces vectoriels W_1 et W_2 tels que

- (1) $V \cap W_1 = \{0\}$;
 (2) $V + W_2 = E$.

Alors il existe un supplémentaire¹¹ W de V tel que $W_1 \subset W \subset W_2$.

Juste une remarque : dans le Frido le symbole « $\subset$ » ne signifie pas une inclusion stricte.

Démonstration. Nous utilisons le lemme de Zorn.

- (1) **Un gros ensemble** Soit

$$\mathcal{A} = \left\{ S \subset E \text{ tel que } \begin{cases} S \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \\ W_1 \subset S \subset W_2 \\ S \cap V = \{0\} \end{cases} \right\} \quad (4.24)$$

- (2) **Non vide** Puisque $W_1 \in \mathcal{A}$, cet ensemble n'est pas vide.

- (3) **Ordre** L'ensemble $\mathcal{A}$ est partiellement ordonné pour l'inclusion.

9. C'est la définition 4.1 d'une partie libre.

10. Si vous ne savez pas ce que signifient les sigles « ZF » et « ZFC » vous ne devriez pas être en train de lire ceci, et encore moins penser à le resservir à un jury d'agrégation.

11. Définition 4.22.

- (4) **$\mathcal{A}$ est inductif** Nous prouvons maintenant que $\mathcal{A}$ est inductif¹². Pour cela, soit une partie $\mathcal{A}'$ totalement ordonnée et $U = \bigcup_{A \in \mathcal{A}'} A$.

Alors, la partie U est un sous-espace vectoriel de E . En effet si $x, y \in U$, alors il existe $A_1, A_2 \in \mathcal{A}'$ tels que $x \in A_1$ et $y \in A_2$. Comme $\mathcal{A}'$ est totalement ordonné, l'un des ensembles parmi A_1 et A_2 est inclus dans l'autre. Sans perdre de généralité, disons $A_1 \subset A_2$. Alors les opérations s'effectuent dans A_2 : nous avons $x, y \in A_2$, et donc $\lambda x \in A_2 \subset U$ ainsi que $x + y \in A_2 \subset U$.

De plus, U contient W_1 , et est contenu dans W_2 . Ainsi, $U \in \mathcal{A}$ et majore $\mathcal{A}'$ pour l'inclusion. En bref, $\mathcal{A}$ est bien inductif.

- (5) **Utilisation de Zorn** Le lemme de Zorn 1.37 nous donne alors un élément maximal W de $\mathcal{A}$. Cet élément vérifie

$$(5a) \quad W \cap V = \{0\},$$

$$(5b) \quad W_1 \subset W \subset W_2,$$

$$(5c) \quad \text{pour tout } W' \in \mathcal{A}, \text{ nous avons } W' \subset W \text{ par maximalité de } W.$$

- (6) **Supplémentaire** Montrons que ce W est un supplémentaire de V . Soit $x \in E$. Le but est de trouver une décomposition de x en somme d'un élément de W et un de V . Comme $V + W_2 = E$, nous avons $v \in V$ et $w_2 \in W_2$ tels que

$$x = v + w_2. \quad (4.25)$$

Si $w_2 \in W$ alors c'est fini. Sinon ...

Soit $X = \text{Span}\{W, w_2\}$. Vu que X contient strictement W et que W est maximum dans $\mathcal{A}$, la partie X n'est pas un élément de $\mathcal{A}$. Comme X est un sous-espace vectoriel de E tel que $W_1 \subset X \subset W_2$, la seule possibilité pour que X ne soit pas dans $\mathcal{A}$ est que $X \cap V \neq \{0\}$. Soit donc $y \neq 0$ dans $X \cap V$. Par définition de X ,

$$y = w' + \lambda w_2 \quad \text{EqDecompo55:296} \quad (4.26)$$

pour $w' \in W$, $w_2 \in W_2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Nous avons $\lambda \neq 0$, sinon nous aurions $y \in W \cap V$ et donc $y = 0$ puisque W est dans $\mathcal{A}$. La décomposition (4.26) permet alors d'écrire $w_2 = (y - w')/\lambda$ et finalement

$$x = v + \frac{1}{\lambda}(y - w') = \underbrace{v + \frac{1}{\lambda}y}_{\in V} - \underbrace{\frac{1}{\lambda}w'}_{\in W}. \quad (4.27)$$

La somme d'espaces vectoriels $E = V + W$ est donc établie.

□

Corolaire 4.24.

Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel possède un supplémentaire.

Démonstration. Soit un espace vectoriel E ainsi qu'un sous-espace vectoriel V . Si $V = E$ nous sommes O.K. Sinon nous considérons $v \in E \setminus V$ et nous posons $W_1 = \mathbb{K}v$ et $W_2 = E$.

Vu que V et W_1 sont des espaces vectoriels, nous avons $V \cap W_1 = \{0\}$, et puisque $W_2 = E$, nous avons $V + W_2 = E$. Le lemme 4.23 nous donne alors un supplémentaire de V . □

PROF00HDCE00MhDjPi

Proposition 4.25 (Base incomplète).

Tout espace vectoriel (non réduit à $\{0\}$) possède une base.

Démonstration. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des familles libres de E . Il n'est pas vide parce que $\{v\}$ en est une dès que v est non nul dans E . Rapidement :

- l'ensemble $\mathcal{A}$ est ordonné pour l'inclusion,
- si $\mathcal{A}'$ est une partie totalement ordonnée, l'union est un majorant,

12. Définition 1.36.

- donc $\mathcal{A}$ est inductif,
- soit un maximum F de $\mathcal{A}$.

La partie F est libre parce qu'elle est dans $\mathcal{A}$. Elle est génératrice parce que si v n'est pas dans $\text{Span}(F)$ alors la partie $F \cup \{v\}$ est encore libre, et majore strictement F pour l'inclusion, ce qui n'est pas possible.

Donc F est une base de E . □

THOooOQLQooHqEeDK

Théorème 4.26 (Base incomplète, dimension quelconque).

Soit une partie $\{e_i\}_{i \in I}$ génératrice de l'espace vectoriel E (ici, I est un ensemble quelconque¹³).

Soit $I_0 \subset I$ tel que $\{e_i\}_{i \in I_0}$ soit libre.

Alors il existe I_1 tel que $I_0 \subset I_1 \subset I$ tel que $\{e_i\}_{i \in I_1}$ soit une base de E .

Note : une telle partie I_0 existe en prenant un singleton. Mais l'existence n'est pas le sujet ici.

Démonstration. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties J de I telles que $I_0 \subset J \subset I$ et telles que $\{e_i\}_{i \in J}$ soit libre.

Encore une fois, $\mathcal{A}$ est inductif pour l'ordre partiel donné par l'inclusion. Soit J un élément maximum par le lemme de Zorn 1.37. Puisque $J \in \mathcal{A}$, la partie $\{e_i\}_{i \in J}$ est libre. Mais elle est également génératrice parce que si e_k n'est pas dedans, J ne serait pas maximum, étant majorée par $J \cup \{k\}$.

Donc $\{e_i\}_{i \in J}$ engendre tous les e_i avec $i \in I$ et donc, tous les éléments de E . □

PROooTSRCooOfTEmO

Proposition 4.27 ([1]).

L'ensemble des parties libres d'un espace vectoriel, muni de l'ordre de l'inclusion, est inductif¹⁴.

Démonstration. Soit un espace vectoriel V . Soit un ensemble totalement ordonné $\mathcal{L} = \{L_i\}_{i \in I}$ de parties libres de V . Nous posons $L = \bigcup_{i \in I} L_i$. Nous prouvons que L est libre, de telle sorte que ce soit un maximum de $\mathcal{L}$.

Soient $x_1, \dots, x_n \in L$. Il existe une partie finie $I_0 \subset I$ telle que $x_1, \dots, x_n \in \bigcup_{i \in I_0} L_i$. Mais toute partie finie d'un ensemble totalement ordonné a un maximum (lemme 1.208). Donc il existe $i_0 \in I_0$ tel que $x_1, \dots, x_n \in L_{i_0}$. Vu que L_0 est libre et que $\{x_1, \dots, x_n\} \subset L_{i_0}$, la partie $\{x_1, \dots, x_n\}$ est libre. □

NORMooREVQooEFJWta

4.28 ([15]).

Une preuve alternative du théorème de la base incomplète serait de dire que l'ensemble des parties libres est inductif (proposition 4.27). De ce fait, la proposition 1.38 permet de dire que toute partie libre peut être complétée en une base.

4.1.2 Espace librement engendré

DEFooCPNIooNxsYMY

Définition 4.29 ([149]).

Soient un ensemble S et un corps $\mathbb{K}$. L'espace vectoriel **librement engendré** sur S , noté $F_{\mathbb{K}}(S)$ est l'ensemble des applications $S \rightarrow \mathbb{K}$ qui sont non-nulles en un nombre fini de points de S .

Autrement dit, $\sigma: S \rightarrow \mathbb{K}$ est dans $F_{\mathbb{K}}(S)$ si $\{x \in S \text{ tel que } \sigma(x) \neq 0\}$ est fini¹⁵.

Le lemme suivant donne tout son sens à l'expression « librement » engendré. Il dit que $F_{\mathbb{K}}(S)$ possède une base indexée par S lui-même.

LEMooLOPAooUNQVku

Lemme 4.30.

L'ensemble des applications δ_s données par

$$\begin{aligned} \delta_s: S &\rightarrow \mathbb{K} \\ t &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t = s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.28)$$

13. Un cas d'utilisation intéressant est de poser $I = E$ et $e_i = i$. Pensez-y.

14. Définition 1.36.

15. Parce que nous l'aimons bien, nous ne résistons pas à faire un renvoi vers la définition 1.68.

avec $s \in S$ forment une base¹⁶ de $F_{\mathbb{K}}(S)$.

Démonstration. Pour prouver que les δ_s sont générateurs, nous considérons $g: S \rightarrow \mathbb{K}$ non nul sur la partie finie $\{s_i\}_{i \in I}$ de S . Alors nous avons

$$g = \sum_{i \in I} g(s_i) \delta_{s_i}. \quad (4.29)$$

Pour prouver que les δ_s forment une partie libre, nous supposons avoir $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tels que

$$g = \sum_{i \in I} \lambda_i \delta_{s_i} = 0 \quad (4.30)$$

Soit $j \in I$. Nous avons

$$0 = f(s_j) = \sum_{i \in I} \lambda_i \underbrace{\delta_{s_i}(s_j)}_{=\delta_{i,j}} = \lambda_j. \quad (4.31)$$

Donc les coefficients λ_i sont tous nuls, et nous avons prouvé que la partie est libre. $\square$

Il est parfois pratique d'écrire les éléments de $F_{\mathbb{K}}(S)$ comme sommes « formelles » d'éléments de S . Cela va encore lorsque S est un ensemble n'ayant aucune somme bien définie.

Mais attention : si $S = \mathbb{R}$, l'élément $4 + 7$ de $F_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ n'est pas 11. L'élément 11 de $F_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ est un élément complètement différent. Bref, il n'est pas judicieux d'écrire les éléments de $F_{\mathbb{K}}(S)$ comme des combinaisons linéaires d'éléments de S . Pour $x \in S$ il vaut mieux écrire explicitement δ_x que x . La somme $\delta_x + \delta_y$ est parfaitement bien définie dans l'ensemble des applications de S vers $\mathbb{K}$.

4.2 Applications linéaires

Le lien entre matrice et applications linéaires est la définition 4.72 et toutes les propriétés qui s'en suivent.

4.2.1 Définition

DEFooULVAooXJuRmr

Définition 4.31.

Soient des espaces vectoriels E et F sur le corps $\mathbb{K}$. Soit un sous-corps $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$. Une application $T: E \rightarrow F$ est dite $\mathbb{L}$ -**linéaire** si

- $T(x + y) = T(x) + T(y)$ pour tout x et y dans E ,
- $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ pour tout λ dans $\mathbb{K}$ et x dans E .

Nous noterons $\mathcal{L}_{\mathbb{L}}(E, F)$ l'espace des applications $\mathbb{L}$ -linéaires de E vers F .

Si vous avez bien suivi, les égalités dans la définition 4.31 sont des égalités dans F .

4.32.

Le plus souvent, si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, alors nous ne considérerons que les applications $\mathbb{K}$ -linéaires. Autrement dit, nous écrirons le plus souvent simplement $\mathcal{L}(E, F)$ sans préciser le corps.

Il pourra pourtant arriver que, pour un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, nous considérons les applications seulement $\mathbb{R}$ -linéaires. Ce sera le cas dans le lemme 27.159.

DefDQRooVGbzSm

Lemme-Définition 4.33.

L'ensemble de toutes les applications linéaires de E vers F est noté $\mathcal{L}(E, F)$ et devient un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ avec les définitions suivantes :

- (1) $(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x)$,
- (2) $(\lambda T)(x) = \lambda T(x)$.

16. Définition 4.5.

EXooMAWMooEaNWpl

Exemple 4.34.

Pour tout b dans $\mathbb{R}$ la fonction $T_b(x) = bx$ est une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En effet,

- $T_b(x + y) = b(x + y) = bx + by = T_b(x) + T_b(y)$,
- $T_b(ax) = b(ax) = abx = aT_b(x)$.

De la même façon on peut montrer que la fonction T_λ définie par $T_\lambda(x) = \lambda x$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$ pour tout λ dans $\mathbb{R}$ et m dans $\mathbb{N}$. $\triangle$

ex_affine

Exemple 4.35.

Soit $m \in \mathbb{N}$. On fixe λ dans $\mathbb{R}$ et v dans $\mathbb{R}^m$. L'application U_λ de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$ définie par $U_\lambda(x) = \lambda x + v$ n'est pas une application linéaire lorsque $v \neq 0$, parce que si a est un réel différent de 0 et 1, alors $av \neq v$, d'où

$$U_\lambda(ax) = \lambda(ax) + v \neq a(\lambda x + v) = aU_\lambda(x).$$

 $\triangle$

exampleT_A

Exemple 4.36.

Soit A une matrice fixée de $\mathbb{M}(m \times n, \mathbb{R})$. La fonction $T_A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $T_A(x) = Ax$ est une application linéaire. En effet,

- $T_A(x + y) = A(x + y) = Ax + Ay = T_A(x) + T_A(y)$,
- $T_A(ax) = A(ax) = a(Ax) = aT_A(x)$.

 $\triangle$

LEMooLGEHooVEEoiU

Lemme 4.37.

Si une application linéaire est inversible, alors son inverse est linéaire.

Démonstration. Soient une application linéaire inversible $f: E \rightarrow F$, ainsi que $x, y \in E$. Nous avons

$$f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(x)) + f(f^{-1}(y)) = x + y = f(f^{-1}(x + y)). \quad (4.32)$$

En prenant f^{-1} des deux côtés, nous trouvons

$$f^{-1}(x) + f^{-1}(y) = f^{-1}(x + y). \quad (4.33)$$

De même :

$$f(\lambda f^{-1}(x)) = \lambda f(f^{-1}(x)) = \lambda x = f(f^{-1}(\lambda x)), \quad (4.34)$$

ce qui nous donne $\lambda f^{-1}(x) = f^{-1}(\lambda x)$. $\square$

DEFooOAOGooKuJSup

Définition 4.38 (Quelques ensembles d'applications linéaires).

Soient E et F des espaces vectoriels.

- *L'ensemble des applications linéaires de E vers F est noté $\mathcal{L}(E, F)$, comme déjà dit en 4.33.*
- *Une application linéaire $E \rightarrow E$ est un **endomorphisme** de E . L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\text{End}(E)$.*
- *Un endomorphisme bijectif est un **automorphisme**. L'ensemble des automorphismes de E est noté $\text{Aut}(E)$.*
- *Une application linéaire bijective $E \rightarrow F$ est un **isomorphisme** d'espace vectoriel. L'ensemble des isomorphismes de $E \rightarrow F$ est noté¹⁷ $\text{GL}(E, F)$. C'est un groupe par le lemme 4.37.*

17. Le fait d'utiliser une notation similaire à celle des matrices inversibles n'est pas anodine : le lecteur en est sans doute conscient.

Remarque 4.39.

Les ensembles définis en 4.38 concernent la structure d'espace vectoriel seulement. Lorsque nous verrons la notion d'espace vectoriel normé, nous demanderons de plus, la continuité, laquelle n'est pas automatique en dimension infinie. Voir aussi les définitions 10.299.

Définition 4.40.

Si E est un espace vectoriel, si X est un espace vectoriel, et si $f: X \rightarrow E$ est une application, le **noyau** de f est le noyau de f lorsque E est vu comme un groupe pour l'addition¹⁸, c'est-à-dire la partie

$$\ker(f) = \{x \in X \text{ tel que } f(x) = 0\}. \quad (4.35)$$

PROPooRLLPooKYzsJp

Proposition 4.41.

Le noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel.

Démonstration. Soit une application linéaire $f: E \rightarrow F$. Si $x, y \in \ker(f)$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$ alors

$$f(x + y) = f(x) + f(y) = 0 + 0 = 0, \quad (4.36)$$

donc $x + y \in \ker(f)$, et

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) = 0, \quad (4.37)$$

donc $\lambda x \in \ker(f)$. □

LEMooIQJMooJWRbub

Lemme 4.42 ([1]).

Soit une application linéaire $f: V \rightarrow W$. Si $b \in W$ et si $m \in f^{-1}(b)$, alors

$$f^{-1}(b) - m = \ker(f). \quad (4.38)$$

Démonstration. Si $x \in f^{-1}(b) - m$, il existe $\alpha \in f^{-1}(b)$ tel que $x = \alpha - m$. Alors

$$f(x) = f(\alpha) - f(m) = b - b = 0. \quad (4.39)$$

Pour l'inclusion dans l'autre sens, si $z \in \ker(f)$, alors $z = (z + m) - m$ avec $z + m \in f^{-1}(b)$ parce que

$$f(z + m) = f(z) + f(m) = 0 + b = b. \quad (4.40)$$

□

Proposition 4.43.

Si E et F sont des espaces vectoriels de dimension n et si $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ et $\{f_i\}_{i=1,\dots,n}$ sont des bases respectivement de E et F , alors il existe une unique application linéaire $T: E \rightarrow F$ telle que $T(e_i) = f_i$ pour tout i .

Démonstration. En deux parties.

- (1) **Existence** Soit $v \in E$. Vu que $\{e_i\}$ est une base, v se décompose de façon unique en $v = \sum_i v_i e_i$. Alors la définition

$$T(v) = \sum_i v_i f_i \quad (4.41)$$

est une bonne définition et satisfait aux exigences.

- (2) **Unicité** Soient T et U satisfaisant aux exigences. Alors pour tout i nous avons $T(e_i) = U(e_i)$. Si $v \in E$ s'écrit de la forme $v = \sum_i v_i e_i$ alors la linéarité impose $T(v) = \sum_i v_i T(e_i) = \sum_i v_i U(e_i) = U(v)$. Donc $T = U$. □

18. Définition 2.6.

LEMooJXFlooKDzRWR

Lemme 4.44 ([1]).

Soient des espaces vectoriels V et W de dimension finie. Soient des bases $\{e_i\}$ de V et $\{f_\alpha\}$ de W . Nous posons

$$\begin{aligned}\varphi_{i\alpha}: V &\rightarrow W \\ v &\mapsto v_i f_\alpha\end{aligned}\tag{4.42}$$

où v_i est défini par la décomposition (unique) $v = \sum_i v_i e_i$.

Alors :

- (1) La partie $\{\varphi_{i\alpha}\}$ est une base de $\mathcal{L}(V, W)$.
- (2) Au niveau des dimensions : $\dim(\mathcal{L}(V, W)) = \dim(V) \dim(W)$.

ITEMooPMLWooNbTyJI

Démonstration. Il faut prouver que $\{\varphi_{i\alpha}\}$ est libre et générateur.

- (1) **Générateur** Soit une application linéaire $b: V \rightarrow W$. En décomposant $b(v)$ dans la base $\{f_\alpha\}$, nous définissons $b_\alpha: V \rightarrow \mathbb{K}$ par

$$b(v) = \sum_{\alpha} b_{\alpha}(v) f_{\alpha}.\tag{4.43}$$

Nous posons $b_{\alpha i} = b_{\alpha}(e_i)$. Ainsi,

$$b(v) = \sum_{\alpha} v_i b_{\alpha i} f_{\alpha} = \sum_{\alpha i} b_{\alpha i} \varphi_{i\alpha}(v).\tag{4.44}$$

Donc b peut être écrit comme combinaison linéaire des $\varphi_{i\alpha}$.

- (2) **Libre** Supposons que $\sum_{i\alpha} a_{i\alpha} \varphi_{i\alpha} = 0$ pour certains coefficients $a_{i\alpha} \in \mathbb{K}$. Nous avons, pour tout $v \in V$:

$$0 = \sum_{i\alpha} a_{i\alpha} \varphi_{i\alpha}(v) = \sum_{i\alpha} a_{i\alpha} v_i f_{\alpha},\tag{4.45}$$

mais comme les f_{α} forment une base, chaque terme de la somme sur α est nul :

$$\sum_i a_{i\alpha} v_i = 0.\tag{4.46}$$

Et comme cela est valable pour tout v et donc, pour tout choix de v_i , nous avons $a_{i\alpha} = 0$ pour tout i et pour tout α .

La formule de dimension est simplement la cardinalité de la base trouvée ; c'est la définition 4.16. $\square$

4.2.2 Linéarité et bases

Proposition 4.45 ([150]).

Soient deux espaces vectoriels E et F . Une application linéaire¹⁹ $f: E \rightarrow F$ est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0\}$.

Démonstration. Nous supposons que f est injective. Si $x \in \ker(f)$, alors $f(x) = 0$. Or f est linéaire, donc $f(0) = 0$. Nous avons donc $f(x) = f(0)$ et donc $x = 0$ parce que f est injective.

Dans l'autre sens, soient x, y tels que $f(x) = f(y)$. Par linéarité de f nous avons $f(x - y) = 0$, et donc $x - y = 0$ parce que $\ker(f) = \{0\}$. Donc $x = y$ et f est injective. $\square$

PROPooZFKZooBGLSex

Proposition 4.46 ([150]).

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux espaces vectoriels.

ITEMooPPMEooIaZqtm

- (1) Si f est injective et si $\{v_i\}_{i \in I}$ est libre, alors $\{f(v_i)\}_{i \in I}$ est libre.
- (2) Si f est surjective et si $\{v_i\}_{i \in I}$ est génératrice, alors $\{f(v_i)\}_{i \in I}$ est génératrice.

ITEMooOZSPooQBrDGi

19. Définition 4.31.

ITEMooOIEYooIfdFmv

(3) Si f est une bijection, alors l'image d'une base par f est une base.

Démonstration. En trois parties.

- (1) **(1)** Nous devons montrer que $\{f(v_j)\}_{j \in J}$ est libre pour tout J fini dans I . Soit donc une partie finie $J \subset I$ et des scalaires²⁰ tels que $\sum_{j \in J} \lambda_j f(v_j) = 0$. La linéarité de f donne²¹

$$f\left(\sum_{j \in J} \lambda_j v_j\right) = 0. \quad (4.47)$$

Par injectivité de f nous avons alors $\sum_{j \in J} \lambda_j v_j = 0$. Comme les v_j eux-même forment une partie libre, nous avons $\lambda_j = 0$ pour tout $j \in J$.

- (2) **(2)** Soit $y \in F$. Puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Étant donné que $\{v_i\}_{i \in I}$ est générateur, il existe une partie finie $J \subset I$ et des scalaires $\lambda_j \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = \sum_{j \in J} \lambda_j v_j. \quad (4.48)$$

En appliquant f aux deux côtés, et en tenant compte de la linéarité de f ,

$$y = f(x) = \sum_{j \in J} \lambda_j f(v_j), \quad (4.49)$$

ce qui prouve que y est une combinaison linéaire des $f(v_j)$.

- (3) **(3)** Une base est à la fois libre et génératrice et une bijection est à la fois injective et surjective. Les deux premiers points permettent de conclure.

□

CORooXIPKooWThOsr

Corolaire 4.47 ([1]).

Si E et F sont des espaces vectoriels isomorphes de dimensions finies. Alors leurs dimensions sont égales.

Démonstration. Puisque E et F sont isomorphes, il existe une bijection $f: E \rightarrow F$. Par la proposition 4.46(3), l'image d'une base de E est une base de F . Donc les espaces E et F ont des bases contenant le même nombre d'éléments. □

4.2.3 Rang

La proposition 4.48 et le théorème 4.49 sont valables également en dimension infinie ; ce sera une des rares incursions en dimension infinie de ce chapitre.

DefALUAooSPcmyK

Proposition-Définition 4.48.

L'image d'une application linéaire est un espace vectoriel. La dimension de cet espace est le **rang** de ladite application linéaire.

Démonstration. Soit une application linéaire $f: E \rightarrow F$. Nous considérons v, w dans l'image de f ainsi que λ dans le corps de base commun à E et F .

Soient $v_0 \in E$ et $w_0 \in E$ tels que $v = f(v_0)$ et $w = f(w_0)$. Alors $v + w = f(v_0 + w_0)$ et $\lambda v = f(\lambda v_0)$. Donc l'image est bien un espace vectoriel. □

ThoGkKffA

Théorème 4.49 (Théorème du rang).

Soient E et F deux espaces vectoriels (de dimensions finies ou non) et soit $f: E \rightarrow F$ une application linéaire.

20. Des éléments du corps de base $\mathbb{K}$.

21. Voir les propriétés de la définition 4.31.

Si $(u_s)_{s \in S}$ est une base de $\ker(f)$ et si $(f(v_t))_{t \in T}$ est une base de $\text{Image}(f)$ alors

$$(u_s)_{s \in S} \cup (v_t)_{t \in T} \quad (4.50)$$

est une base de E .

En dimension finie, nous avons en plus la formule suivante :

$$\text{rk}(f) + \dim(\ker f) = \dim E, \quad (4.51)$$

c'est-à-dire que le rang²² de f est égal à la codimension²³ du noyau.

Démonstration. Nous devons montrer que

$$(u_s)_{s \in S} \cup (v_t)_{t \in T} \quad (4.52)$$

est libre et générateur.

Soit $x \in E$. Nous définissons les nombres x_t par la décomposition de $f(x)$ dans la base $(f(v_t))$:

$$f(x) = \sum_{t \in T} x_t f(v_t). \quad (4.53)$$

Ensuite le vecteur $x - \sum_t x_t v_t$ est dans le noyau de f , par conséquent nous le décomposons dans la base (u_s) :

$$x - \sum_t x_t v_t = \sum_{s \in S} x_s u_s. \quad (4.54)$$

Par conséquent

$$x = \sum_s x_s u_s + \sum_t x_t v_t. \quad (4.55)$$

En ce qui concerne la liberté nous écrivons

$$\sum_t x_t v_t + \sum_s x_s u_s = 0. \quad (4.56)$$

En appliquant f nous trouvons que

$$\sum_t x_t f(v_t) = 0 \quad (4.57)$$

et donc que les x_t doivent être nuls. Nous restons avec $\sum_s x_s u_s = 0$ qui à son tour implique que $x_s = 0$. $\square$

Un exemple d'utilisation de ce théorème en dimension infinie sera donné dans le cadre du théorème de Fréchet-Riesz, théorème 25.18.

Proposition 4.50 ([151]).

Soit E , un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{K}$. Soient V et W des sous-espaces vectoriels de E . Alors

$$\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W). \quad (4.58)$$

Démonstration. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi: V \times W &\rightarrow E \\ (x, y) &\mapsto x + y. \end{aligned} \quad (4.59)$$

C'est une application linéaire dont l'image est $V + W$. Nous avons donc, pour commencer

$$\dim(V + W) = \dim(\text{Image}(\varphi)). \quad (4.60)$$

22. Définition 4.48.

23. Définition 4.20.

Nous appliquons à présent le théorème du rang 4.49 à l'application φ :

$$\dim(V + W) = \dim(\text{Image}(\varphi)) \quad (4.61a)$$

$$= \dim(V \times W) - \dim(\ker(\varphi)) \quad (4.61b)$$

$$= \dim(V) + \dim(W) - \dim(\ker(\varphi)). \quad (4.61c)$$

Nous devons maintenant étudier $\ker(\varphi)$. D'abord, $(v, w) \in V \times W$ appartient à $\ker(\varphi)$ si et seulement si $v + w = 0$. Nous avons donc

$$\ker(\varphi) = \{(x, -x) \text{ tel que } x \in V \cap W\}. \quad (4.62)$$

Nous montrons à partir de cela que $\dim(\ker(\varphi)) = \dim(V \cap W)$ en montrant que l'application

$$\begin{aligned} \psi: V \cap W &\rightarrow \ker(\varphi) \\ x &\mapsto (x, -x) \end{aligned} \quad (4.63)$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. D'abord ψ est injective parce que si $\psi(x) = \psi(y)$, alors $(x, -x) = (y, -y)$ et donc $x = y$. Ensuite, ψ est surjective parce qu'un élément générique de $\ker(\varphi)$ est $(x, -x) = \psi(x)$ avec $x \in V \cap W$. L'application ψ étant un isomorphisme d'espaces vectoriels, nous avons bien $\dim(\ker(\varphi)) = \dim(V \cap W)$. $\square$

CORooCCXHooALmxKk

Corolaire 4.51.

Soient deux espaces vectoriels E et F de même dimension finie²⁴. Pour une application linéaire $f: E \rightarrow F$, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) f est injective ;
- (2) f est surjective ;
- (3) f est bijective.

Démonstration. Si $f: E \rightarrow E$ est surjective, alors $\text{rk}(f) = \dim(E)$, ce qui donne, par le théorème du rang 4.49, $\dim(\ker(f)) = 0$, c'est-à-dire que f est injectif.

De la même façon, si f est injective, alors $\dim(\ker(f)) = 0$, ce qui donne $\text{rk}(f) = \dim(E)$ ou encore que f est surjective. $\square$

Exemple 4.52.

Le corolaire 4.51 n'est pas correct en dimension infinie. Par exemple en prenant $f(e_1) = f(e_2) = e_1$ et ensuite $f(e_k) = e_{k-1}$ pour tout $k \geq 2$. Cette application est surjective mais pas injective. $\triangle$

LEMooNNDDooKXdqud

Lemme 4.53 ([1]).

Soit un espace vectoriel E . Si $p: E \rightarrow E$ est un projecteur²⁵ vérifiant $p(E) = E$, alors $p = \text{Id}$.

Démonstration. L'hypothèse est que p est surjective. Le corolaire 4.51 dit que p est alors bijective et donc inversible. En partant de $p^2(x) = p(x)$ et en appliquant p^{-1} est deux côtés nous trouvons $p(x) = x$. Donc $p = \text{Id}$. $\square$

PROPOoKUAVooCbJDeR

Proposition 4.54 ([1]).

Soient des espaces vectoriels de dimension finie V et W vérifiant $\dim(V) > \dim(W)$. Si $f: V \rightarrow W$ est une application linéaire, alors $\dim(\ker(f)) \geq \dim(V) - \dim(W)$.

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence du théorème du rang (4.51). Vu que $\text{rk}(f) \leq \dim(W)$, nous avons

$$\dim(\ker(f)) = \dim(V) - \text{rk}(f) \geq \dim(V) - \dim(W). \quad (4.64)$$

 $\square$

24. Les deux mots sont importants : les dimensions doivent être égales et finies.

25. Définition 1.445.

Une conséquence du théorème du rang est que les endomorphismes ont un inverse à gauche et à droite égaux (lorsqu'ils existent). En résumé, ce que le corolaire 4.55 dit est que si $AB = \mathbb{1}$, alors $BA = \mathbb{1}$.

CORoNFJLooJtzFwN

Corolaire 4.55.

Soit un endomorphisme f d'un espace vectoriel de dimension finie. Si f admet un inverse à gauche, alors

- (1) f est bijective,
- (2) f admet également un inverse à droite,
- (3) les inverses à gauche et à droite sont égaux.

Tout cela tient également en remplaçant « gauche » par « droite ».

Démonstration. Soit g , un inverse à gauche de f : $gf = \text{Id}$. Cela implique que f est injective et que g est surjective, et donc qu'elles sont toutes deux bijectives par le corolaire 4.51. Puisque f est bijective, elle admet également un inverse à droite, soit h . Nous avons : $gf = \text{Id}$ et $fh = \text{Id}$.

Alors $gfh = h$ parce que $gf = \text{Id}$, mais également $gfh = g$ parce que $fh = \text{Id}$. Donc $g = h$.²⁶ $\square$

C'est ce corolaire qui nous permet d'écrire f^{-1} sans plus de précisions dès que f est une bijection.

Exemple 4.56 (Pas en dimension infinie).

Tout cela ne fonctionne pas en dimension infinie. Par exemple avec une base $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ nous pouvons considérer l'opérateur

$$f(e_k) = e_{k+1}. \quad (4.65)$$

Il est injectif, mais pas surjectif. Si on pose

$$g(e_k) = \begin{cases} e_{k-1} & \text{si } k \geq 1 \\ 0 & \text{si } k = 0 \end{cases} \quad (4.66)$$

alors nous avons $gf = \text{Id}$, mais pas $fg = \text{Id}$ parce que ce $(fg)(e_0) = 0$. $\triangle$

LEMooRZDTooEuLTrO

Lemme 4.57.

Si E et F sont des espaces vectoriels et si $f : E \rightarrow F$ est une application linéaire inversible, alors son inverse est également linéaire.

Démonstration. Nous avons $f^{-1}(x + y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$. En effet,

$$f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(x)) + f(f^{-1}(y)) = x + y. \quad (4.67)$$

De la même façon,

$$f(\lambda f^{-1}(x)) = \lambda x, \quad (4.68)$$

donc $f^{-1}(\lambda x) = \lambda f^{-1}(x)$. $\square$

PROPooHLUYooNsDgbn

Proposition 4.58.

Soient un espace vectoriel E de dimension finie, un endomorphisme $f : E \rightarrow E$ et une partie $\{v_i\}_{i \in I}$ tel que $\{f(v_i)\}_{i \in I}$ soit une base.

Alors $\{v_i\}_{i \in I}$ est une base.

Démonstration. Soit $x \in E$. Il existe une partie finie $J \subset I$ et des scalaires λ_j tels que

$$x = \sum_j \lambda_j f(v_j) = f\left(\sum_j \lambda_j v_j\right), \quad (4.69)$$

26. C'est le même argument que celui employé pour la preuve du lemme 1.246 (2), à ceci près que nous devons montrer l'existence de l'inverse à droite.

ce qui prouve que f est surjective. Le corolaire 4.51 nous dit alors que f est une bijection. L'application inverse est également linéaire par le lemme 4.57.

Une application linéaire bijective (comme f^{-1}) transforme une base en une base par la proposition 4.46. Donc

$$f^{-1}(\{f(v_i)\}) \quad (4.70)$$

est une base. □

PROP00ADES00ATJSrH

Proposition 4.59.

Soit un espace vectoriel E de dimension finie et deux applications linéaires $f, g: E \rightarrow E$ telles que $g \circ f = \text{Id}$. Alors f et g sont bijectives.

Démonstration. En plusieurs étapes

- (1) f est injective Si $f(x) = f(y)$, alors en appliquant g nous avons

$$g(f(x)) = g(f(y)), \quad (4.71)$$

ce qui donne $x = y$.

- (2) f est surjective C'est maintenant le corolaire 4.51.

- (3) g est surjective Pour tout $x \in E$ nous avons $g(f(x)) = x$. Donc l'image de $f(E)$ par g est E .

- (4) g est injective C'est maintenant le corolaire 4.51. □

LEM00DAAC00EIDsYb

Lemme 4.60 ([152]).

Soit une application linéaire $f: E \rightarrow F$.

ITEM00EZEW00ZGoqsZ

- (1) L'application f est injective si et seulement si il existe $g: F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{Id}|_E$.
 (2) L'application f est surjective si et seulement si il existe $g: F \rightarrow E$ telle que $f \circ g = \text{Id}|_F$.

Démonstration. Nous démontrons séparément les deux affirmations.

- (1) Si f est injective, alors $f: E \rightarrow \text{Image}(f)$ est un isomorphisme. Si V est un supplémentaire de $\text{Image}(f)$ dans F (c'est-à-dire $F = \text{Image}(f) \oplus V$) alors nous pouvons poser $g(x+v) = f^{-1}(x)$ où $x+v$ est la décomposition (unique) d'un élément de F en $x \in \text{Image}(f)$ et $v \in V$. Avec cela nous avons bien $g \circ f = \text{Id}$.

Réciproquement, si il existe $g: F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{Id}$ alors $f: E \rightarrow E$ doit être injective. Parce que si $f(x) = 0$ avec $x \neq 0$ alors $(g \circ f)(x) = 0 \neq x$.

- (2) Si f est surjective nous pouvons choisir des éléments $x_1, \dots, x_p$ dans E tels que $\{f(x_i)\}$ soit une base de F . Ensuite nous définissons

$$\begin{aligned} g: F &\rightarrow E \\ \sum_k a_k f(x_k) &\mapsto \sum_k a_k x_k. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Cela donne $f \circ g = \text{Id}|_F$ parce que si $v \in F$ alors $v = \sum_k v_k f(x_k)$ avec $v_k \in \mathbb{K}$, et nous avons

$$(f \circ g)(v) = \sum_k v_k (f \circ g)(f(x_k)) = f\left(\sum_k v_k x_k\right) = \sum_k v_k f(x_k) = v. \quad (4.73)$$

Réciproquement, si il existe $g: F \rightarrow E$ tel que $f \circ g = \text{Id}$ alors f doit être surjective, parce que

$$F = \text{Image}(f \circ g) = f(\text{Image}(g)) \subset \text{Image}(f). \quad (4.74)$$

□

4.3 Matrices

Les matrices et les applications linéaires sont deux choses différentes. Une application linéaire²⁷ est une application d'un espace vectoriel vers un autre, et une matrice est un simple tableau de nombres sur lesquels nous définissons des opérations, de telle sorte à fournir une structure d'espace vectoriel. Le lien entre ces opérations et les opérations correspondantes sur les applications linéaires sera fait plus tard. Voir la définition 4.72 et ce qui s'en suit.

4.3.1 Définitions

Les notions topologiques sur les espaces de matrices sont pour plus tard, à commencer par la définition 9.34.

Définition 4.61.

Soit un anneau $\mathbb{A}$ ainsi que des entiers m, n strictement positifs. L'ensemble $\mathbb{M}(n \times m, \mathbb{A})$ est l'ensemble des applications

$$\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \rightarrow \mathbb{A}, \quad (4.75)$$

et est appelé ensemble des **matrices** $n \times m$ sur $\mathbb{A}$.

Si A est une matrice, nous notons $A_{i,j}$ au lieu de $A(i, j)$ l'image de (i, j) par l'application A .

Définition 4.62.

Quelques ensembles de matrices particuliers.

(1) Si $n = m$, alors :

- nous disons que la matrice est **carrée**,
- nous notons $\mathbb{M}(n, \mathbb{A})$ pour $\mathbb{M}(n \times n, \mathbb{A})$,
- n est appelée **ordre** de la matrice.

(2) Si $n = 1$, alors la matrice est appelée **matrice-ligne**.

(3) Si $m = 1$, alors la matrice est appelée **matrice-colonne**.

4.63.

On note les isomorphismes naturels $\mathbb{M}(1 \times m, \mathbb{A}) \simeq \mathbb{A}^m$ et $\mathbb{M}(n \times 1, \mathbb{A}) \simeq \mathbb{A}^n$.

LEMooYWTeeoQyLxKv

Lemme-Définition 4.64.

Nous considérons les opérations suivantes sur $\mathbb{M}(n \times m, \mathbb{A})$:

Somme $(A + B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$,

Produit par un scalaire $(\lambda \cdot A)_{i,j} = \lambda A_{i,j}$ pour tout $A, B \in \mathbb{M}(n \times m, \mathbb{A})$ et $\lambda \in \mathbb{A}$.

Alors $(\mathbb{M}(n \times m, \mathbb{A}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{A}$ -module²⁸.

Démonstration. Plusieurs parties. Il faut vérifier les conditions de la définition 1.432.

(1) **Groupe** Le neutre est la matrice nulle $N_{ij} = 0$. Nous avons $((A + B) + C)_{ij} = (A + B)_{ij} + C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} + C_{ij}$. Et l'inverse de A est $B_{ij} = -A_{ij}$.

(2) **Autres propriétés** Nous n'allons pas toutes les faire. Par exemple

$$\lambda(\lambda(A + B))_{ij} = \lambda(A + B)_{ij} \quad (4.76a)$$

$$= \lambda(A_{ij} + B_{ij}) \quad (4.76b)$$

$$= \lambda A_{ij} + \lambda B_{ij} \quad (4.76c)$$

$$= (\lambda A)_{ij} + (\lambda B)_{ij}. \quad (4.76d)$$

Notez l'utilisation de $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ lorsque $x, y \in \mathbb{A}$.

27. Définition 4.31.

28. Définition 1.432

□

LEMooMBZTooKdGvON

Lemme-Définition 4.65.*Avec la multiplication*

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(n \times p, \mathbb{A}) \times \mathbb{M}(p \times m, \mathbb{A}) &\rightarrow \mathbb{M}(n \times m, \mathbb{A}) \\ (A, B) &\mapsto (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^p A_{i,k} B_{k,j}, \end{aligned} \quad (4.77)$$

*l'espace $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre²⁹.**Démonstration.* Il faut vérifier les trois formules de la définition 1.449.(1) **Distribution (1)** Nous avons

$$((x + y) \times z)_{ij} = \sum_k (x + y)_{ik} z_{kj} = \sum_k (x_{ik} z_{kj} + y_{ik} z_{kj}) = (xz)_{ij} + (yz)_{ij}. \quad (4.78)$$

(2) **Distribution (2)** Même calcul.(3) **Multiplication par un scalaire** Encore le même genre de calculs, en partant de

$$((\alpha x) \times (\beta y))_{ij} = \sum_k (\alpha x)_{ik} (\beta y)_{kj}. \quad (4.79)$$

□

Définition 4.66.*Pour un élément $A \in \mathbb{M}(n \times m, \mathbb{A})$ nous définissons encore***La transposée** $A_{i,j}^t = A_{j,i}$,**La trace** $\text{Tr}(A) = \sum_i A_{i,i}$.**Remarque 4.67.**

Quelques remarques directes sur les définitions.

- (1) La motivation de cette définition pour le produit apparaîtra plus loin, mais le Frido n'étant pas un livre d'introduction, j'imagine que le lecteur a déjà une idée.
- (2) Nous verrons plus loin en 8.11.3 que la définition de transposée d'une application linéaire n'est pas tout à fait évidente; elle sera la définition 8.185.
Ici nous avons bien défini la transposée d'une matrice, pas d'une application linéaire.

Remarque 4.68.

Quelques remarques à propos de structures supplémentaires.

- (1) Nous utiliserons (presque) tout le temps des matrices à coefficients dans un corps. Il est clair que, si $\mathbb{K}$ est un corps (commutatif), alors $\mathbb{M}(n \times m, \mathbb{K})$ a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
- (2) Par ailleurs, sur les matrices carrées d'ordre n fixé, le produit de deux matrices est bien défini. Ainsi, $\mathbb{M}(n, \mathbb{A})$ se voit conférer une structure d'anneau, dont le neutre pour la multiplication est la matrice carrée $\mathbb{1}_n$ (notée aussi $\mathbb{1}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la taille), donnée par

$$\mathbb{1}_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.80)$$

Il est vite vu que si A est une matrice carrée d'ordre n , alors $A\mathbb{1} = \mathbb{1}A = A$.

LEMooUXDRooWZbMVN

Lemme 4.69 ([1]).*Si A, B et C sont des matrices, nous avons*

29. Définition 1.449.

$$(1) (AB)^t = B^t A^t,$$

$$(2) \operatorname{Tr}(ABC) = \operatorname{Tr}(CAB).$$

ITEMooXDYQooAlnArd

Démonstration. La première est un simple calcul :

$$(AB)_{i,j}^t = (AB)_{j,i} = \sum_k A_{j,k} B_{k,i} = \sum_k A_{k,j}^t B_{i,k}^t = (B^t A^t)_{i,j}. \quad (4.81)$$

Pour la seconde :

$$\operatorname{Tr}(ABC) = \sum_{ikl} A_{i,k} B_{k,l} C_{l,i} = \sum_{ikl} C_{l,i} A_{i,k} B_{k,l} = \sum_l (CAB)_{l,l} = \operatorname{Tr}(CAB). \quad (4.82)$$

□

4.70.

La seconde égalité est importante et est nommée **invariance cyclique** de la trace. Elle sert, entre autres nombreuses choses, à prouver que la trace d'une matrice d'une application linéaire ne dépend pas de la base choisie. Ce sera la proposition 8.203.

LEMooLXAHooPRyHaF

Lemme 4.71.

Soient des matrices $A, B \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$. Si pour tout $x, y \in \mathbb{K}^n$ nous avons

$$\sum_{ij} A_{i,j} x_i y_j = \sum_{ij} B_{i,j} x_i y_j \quad (4.83)$$

alors $A = B$.

Démonstration. Il suffit de choisir $x_i = \delta_{i,k}$ et $y_j = \delta_{j,l}$ et d'effectuer les sommes ; par exemple

$$\sum_{ij} A_{i,j} \delta_{i,k} \delta_{j,l} = \sum_j A_{k,j} \delta_{j,l}. \quad (4.84)$$

Après avoir effectué toutes les sommes, nous nous retrouvons avec $A_{k,l} = B_{k,l}$, ce qui signifie $A = B$. □

4.3.2 Identifier matrices et applications linéaires

Voir dans l'index thématique, -1.1.1.

Soient deux espaces vectoriels de dimension finie E, F sur le corps $\mathbb{K}$. Nous considérons les bases³⁰ $\{e_i\}$ pour E et $\{f_\alpha\}$ pour F .

DEFooJVOAooUgGKme

Définition 4.72.

Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{M}(n \times m, \mathbb{K}) &\rightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ A &\mapsto f_A \end{aligned} \quad (4.85)$$

EQooVZQWooMyFFeQ

où f_A est définie par

$$f_A(x) = \sum_{i\alpha} A_{\alpha,i} x_i f_\alpha \quad (4.86)$$

EQooBVGHooJhFbMs

si x_i sont les coordonnées de $x \in E$ dans la base $\{e_i\}$.

4.73.

Nous allons prouver un certain nombre de résultats montrant que cette application a toutes les propriétés imaginables permettant d'identifier les matrices aux applications linéaires : elle est un isomorphisme pour toutes les structures que vous pouvez raisonnablement imaginer.

³⁰. C'est le théorème 4.14 qui nous permet de considérer des bases. Et ce théorème ne fonctionne que parce que nous avons supposé une dimension finie.

À cette application ψ il manque cependant une propriété importante : elle n'est pas canonique. Elle dépend des bases choisies. Autrement dit : nous avons à priori autant d'applications ψ différentes qu'il y a de choix de bases sur E et F ³¹.

Nous allons prouver maintenant quelques résultats montrant que les matrices et les applications linéaires, dans le cas des espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$ sont deux présentations de la même chose.

Le fait que ψ est continue sera la proposition 12.119.

4.74.

Lorsque $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ est une matrice et $x \in \mathbb{K}^n$ un vecteur, nous notons Ax l'élément de $\mathbb{K}^n$ donné par

$$(Ax)_i = \sum_j A_{i,j} x_j. \quad (4.87)$$

Autrement dit, $Ax = f_A(x)$.

Cette convention et de nombreuses autres à propos de matrice sera rappelée dans -1.1.

Proposition-Définition 4.75.

Soient deux espaces vectoriels de dimension finie E, F sur le corps $\mathbb{K}$. Nous considérons les bases $\{e_i\}$ pour E et $\{f_\alpha\}$ pour F .

Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{M}(n \times m, \mathbb{K}) &\rightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ A &\mapsto f_A \end{aligned} \quad (4.88)$$

où f_A est définie par

$$f_A(x) = \sum_{i\alpha} A_{\alpha,i} x_i f_\alpha \quad (4.89)$$

si x_i sont les coordonnées de $x \in E$ dans la base $\{e_i\}$.

Alors

(1) Nous avons

$$f_A(e_i)_\alpha = A_{\alpha,i}. \quad (4.90)$$

(2) Nous avons

$$f_A(e_i) = \sum_\alpha A_{\alpha,i} f_\alpha. \quad (4.91)$$

(3) Nous avons

$$(f_A(x))_\alpha = \sum_i A_{\alpha,i} x_i. \quad (4.92)$$

(4) L'application ψ est une bijection.

Si f est une application linéaire, alors la matrice $\psi^{-1}(f)$ est la **matrice associée** à f dans les bases choisies.

Remarque : les bases ne sont supposées être canoniques en aucun sens du terme. Les dimensions de E et F ne sont pas non plus supposées identiques.

Démonstration. En nous rappelant que $(e_j)_i = \delta_{i,j}$ nous avons

$$f_A(e_j) = \sum_{i\alpha} A_{\alpha,i} (e_j)_i f_\alpha = \sum_\alpha A_{\alpha,j} f_\alpha, \quad (4.93)$$

donc $f_A(e_i)_\alpha = A_{\alpha,i}$. Cela prouve la formule du point (1).

Le point (2) est une simple somme sur α de (1).

La formule du point (3) est simplement la composante f_α de la définition 4.89.

31. Bonne question. Est-ce qu'il y a moyen de construire deux choix de bases donnant la même application ψ ? Écrivez-moi si vous savez la réponse.

Prouvons que ψ est injective. Si $f_A = f_B$, nous avons en particulier $f_A(e_i)_\alpha = f_B(e_i)_\alpha$ et donc $A_{\alpha,i} = B_{\alpha,i}$.

Prouvons que ψ est surjective. Pour cela nous considérons $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et nous posons $A_{\alpha,i} = f(e_i)_\alpha$. Nous avons alors $f = f_A$ parce que

$$f_A(x) = \sum_{i\alpha} A_{\alpha,i} x_i f_\alpha = \sum_{i\alpha} f(e_i)_\alpha x_i f_\alpha = \sum_{\alpha} f\left(\sum_i x_i e_i\right)_\alpha f_\alpha = \sum_{\alpha} f(x)_\alpha f_\alpha = f(x). \quad (4.94)$$

□

La proposition suivante montre que le produit matriciel correspond à la composition d'applications linéaires, pourvu que l'on travaille avec les bases canoniques sur $\mathbb{K}^n$.

PROPooIYVQooOiuRhX

Proposition 4.76 ([1]).

Soit un corps commutatif $\mathbb{K}$. Nous considérons des espaces vectoriels E et F munis de bases $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ et $\{f_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,m}$.

L'application déjà définie³²

$$\psi: \mathbb{M}(m \times n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{L}(E, F) \quad (4.95)$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration. Le fait que ψ soit une bijection est la proposition 4.75. Nous devons montrer que c'est une application linéaire.

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ nous avons le calcul

$$\psi(\lambda A)(e_k) = f_{\lambda A}(e_k) = \sum_{\alpha i} (\lambda A)_{\alpha,i} \underbrace{(e_k)_i}_{=\delta_{k,i}} f_\alpha = \lambda \sum_{\alpha} A_{\alpha,k} f_\alpha = \lambda f_A(e_k). \quad (4.96)$$

Donc $\psi(\lambda A) = \lambda \psi(A)$.

Si $A, B \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ nous avons de la même façon, $f_{A+B} = f_A + f_B$.

□

PROPooCSJNooEqcmFm

Proposition 4.77.

Soient des espaces vectoriels E, F et G de dimensions n, m et p munis de bases³³ $\{e_i\}$, $\{f_i\}$ et $\{g_i\}$. Nous considérons les applications

$$\psi: \mathbb{M}(m \times n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{L}(E, F) \quad (4.97a)$$

$$\psi: \mathbb{M}(p \times m, \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{L}(F, G) \quad (4.97b)$$

$$\psi: \mathbb{M}(p \times n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{L}(E, G). \quad (4.97c)$$

Nous avons

$$\psi(A) \circ \psi(B) = \psi(AB) \quad (4.98)$$

pour toutes matrices $A \in \mathbb{M}(p \times m, \mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{M}(m \times n, \mathbb{K})$.

Démonstration. Nous considérons les applications linéaires associées à A et B : $f_A: F \rightarrow G$ et

32. Notez la position du n et du m . Sachez noter les bornes des sommes écrites dans la démonstration.

33. Avec trois ensembles, nous renonçons à utiliser des alphabets différents pour numéroter les éléments des bases.

$f_B: E \rightarrow F$ et la composée $f_A \circ f_B: E \rightarrow G$. Et puis c'est le calcul :

$$(f_A \circ f_B)(e_k) = f_A\left(\sum_{ij} B_{i,j}(e_k)_j f_i\right) \quad (4.99a)$$

$$= \sum_i B_{i,k} f_A(f_i) \quad (4.99b)$$

$$= \sum_i B_{i,k} \sum_{rs} A_{r,s}(f_i)_s g_r \quad (4.99c)$$

$$= \sum_{ir} B_{i,k} A_{r,i} g_r \quad (4.99d)$$

$$= \sum_r (AB)_{r,k} g_r \quad (4.99e)$$

$$= f_{AB}(e_k). \quad (4.99f)$$

Donc $f_A \circ f_B = f_{AB}$ comme il se doit. $\square$

Nous pouvons particulariser au cas où $E = F = G$.

PROPOOFMBFOOEVCLKA

Proposition 4.78.

Si E est un espace vectoriel muni d'une base $\{e_i\}$, alors l'application

$$\psi: M(n, \mathbb{K}) \rightarrow \text{End}(E) \quad (4.100)$$

est un isomorphisme d'algèbre³⁴ et d'anneaux³⁵.

Démonstration. Le fait que ψ soit un isomorphisme d'algèbre est juste la combinaison entre les propositions 4.76 et 4.77.

En ce qui concerne l'isomorphisme d'anneaux, il faut en plus identifier les neutres. Le neutre pour la composition d'applications linéaires est l'application identité et le neutre pour la multiplication de matrices est la matrice identité. Nous devons donc montrer que $\psi(\delta) = f_\delta = \text{Id}$. Juste un calcul :

$$f_\delta(x) = \sum_{ij} \delta_{i,j} x_j e_i = \sum_i x_i e_i = x. \quad (4.101)$$

Donc oui, f_δ est l'identité. $\square$

Le fait que ψ est continue sera la proposition 12.119.

Voilà. Soyez bien conscient que l'application ψ dont nous avons beaucoup parlé est surtout intéressante dans le cas des espaces de la forme $\mathbb{K}^n$. Dans ce cas, nous avons une identification canonique entre $M(n, \mathbb{K})$ et $\text{End}(\mathbb{K}^n)$ qui est un isomorphisme d'anneaux et d'algèbres.

Nous verrons que ce ψ respecte encore les inverses³⁶ et les déterminants³⁷.

4.79.

Il convient de ne pas confondre matrice et application linéaire (bien que nous le ferons sans vergogne). Une matrice est un bête tableau de nombres, tandis qu'une application linéaire est une application entre deux espaces vectoriels vérifiant certaines propriétés.

Cependant si les espaces vectoriels E et F sont munis de bases, alors il y a une application

$$\psi: M(m \times n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{L}(E, F) \quad (4.102)$$

qui a toutes les propriétés imaginables³⁸.

34. Définition 1.449.

35. Définition 1.96

36. Proposition 4.101.

37. Proposition 8.17.

38. Et elle en aura encore plus lorsque nous aurons vu les déterminants.

Cette application dépend des bases choisies. Il n'y a donc pas de trucs comme « la matrice de telle application linéaire » ou comme « voici une matrice, nous considérons l'application linéaire associée ».

Cependant, sur des espaces comme $\mathbb{R}^n$ ou plus généralement sur $\mathbb{K}^n$, nous avons une base canonique et toute personne raisonnable utilise toujours la base canonique (sauf mention du contraire). Dans ces cas il est sans danger de dire « la matrice associée à telle application linéaire » sans préciser les bases.

Mais si un jour vous utilisez une base autre que la base canonique sur $\mathbb{R}^n$, précisez-le et plutôt deux fois qu'une³⁹.

4.80.

Tant que nous sommes à parler de matrice et d'applications linéaires, les plus acharnés anti-abus de langage⁴⁰ remarqueront qu'il n'est pas vrai que « étant donné une base, une application linéaire a une matrice ».

En effet, une base est une partie libre et génératrice (définition 4.5). Or une partie d'un ensemble n'est pas muni d'un ordre. Toutes les permutations de colonnes de la matrice sont encore possible d'après l'ordre que l'on met sur les vecteurs de la base.

Encore une fois, la base canonique n'a pas de problème parce que les $\{e_i\}$ de $\mathbb{R}^n$ viennent avec un ordre indiscutable. Plus généralement, très souvent, lorsqu'on construit une base, la construction suggère un ordre.

4.3.3 Ensemble des applications linéaires

PROPooRIFBooGOvsfb

Proposition 4.81 ([1]).

Soient deux espaces vectoriels de dimension finie V et W . Soit des bases $\{e_i\}_{i \in I}$ de V et $\{e'_j\}_{j \in J}$ de W . Nous considérons les applications

$$f_{ij}: V \rightarrow W$$

$$\sum_k x_k e_k \mapsto x_i e'_j. \quad (4.103)$$

EQooBMKQooCCypzP

Nous avons :

- (1) Ces applications sont linéaires.
- (2) Elles forment une base de $\mathcal{L}(V, W)$.
- (3) $\dim(V, W) = \dim(V) \dim(W)$.

ITEMooSEMLooXuxrpk

Démonstration. Pas de preuve pour le moment. Vous pouvez aider en m'envoyant une preuve. □

PROPooPNQNooAZpojnm

Proposition 4.82 ([1]).

Soient des bases $\{e_i\}$ et $\{e'_j\}$ des espaces vectoriels V et W . Soit une application linéaire $A \in \text{End}(V, W)$. Alors

$$A = \sum_{ij} A_{ji} f_{ij} \quad (4.104)$$

où les f_{ij} sont les éléments de bases définis en (4.103) et A_{ji} sont les éléments de matrices définis par la proposition 4.75.

Démonstration. Il s'agit d'un calcul. En appliquant à e_k , nous avons

$$\sum_{ij} A_{ji} f_{ij}(e_k) = \sum_{ij} A_{ji} \delta_{ik} e'_j = \sum_j A_{jk} e'_j. \quad (4.105)$$

En comparant avec la formule de la proposition 4.75(1), nous avons le résultat. □

39. Au passage, non, les coordonnées polaires ne sont pas une base de $\mathbb{R}^2$. C'est un système de coordonnées, et ce n'est pas la même chose.

40. Dont l'auteur de ces lignes fait partie.

4.3.4 Déterminant

DEFooYCKRooTrajdP

Définition 4.83.

Si $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ nous définissons le **déterminant** de A par la formule

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \prod_{i=1}^n A_{i, \sigma(i)} \quad (4.106)$$

où la somme est effectuée sur tous les éléments du groupe symétrique⁴¹ S_n et où $(-1)^\sigma$ représente la parité de la permutation σ .

En se souvenant que $|S_n| = n!$, nous sommes frappés de stupeur devant le fait que le nombre de termes dans la somme croît de façon factorielle (c'est plus qu'exponentiel, pour info) en la taille de la matrice. Cette formule est donc sans espoir pour une matrice plus grande que 3×3 ou à la rigueur 4×4 à la main. À l'ordinateur, il est possible de monter plus haut, mais pas tellement.

4.3.5 Déterminant en petite dimension

En dimension deux, le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est le nombre

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb. \quad (4.107)$$

EQooQQRGVooChwRMd

Ce nombre détermine entre autres le nombre de solutions que va avoir le système d'équations linéaires associé à la matrice.

Pour une matrice 3×3 , nous avons le même concept, mais un peu plus compliqué ; nous avons la formule

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \quad (4.108)$$

4.3.6 Manipulations de lignes et de colonnes

Nous voudrions savoir ce qu'il se passe avec le déterminant d'une matrice lorsque nous substituons à une ligne ou une colonne, une combinaison des autres lignes et colonnes. Lorsqu'une matrice est donnée, nous notons C_j sa j^e colonne.

LEMooRSJTTooQEoOtN

Lemme 4.84 ([1]).

Si A et B sont des matrices, alors

$$(AB)^t = B^t A^t. \quad (4.109)$$

Démonstration. Il suffit de calculer les éléments de matrice :

$$(AB)_{i,j}^t = (AB)_{j,i} = \sum_k A_{j,k} B_{k,i} = \sum_k B_{i,k}^t A_{k,j}^t = (B^t A^t)_{i,j}. \quad (4.110)$$

□

LEMooCEQYooYAbctZ

Lemme 4.85 ([1, 153]).

Si A est une matrice, alors $\det(A) = \det(A^t)$.

Démonstration. Nous commençons par écrire la définition du déterminant :

$$\det(A^t) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (A^t)_{i, \sigma(i)} = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) \prod_i A_{\sigma(i), i}. \quad (4.111)$$

41. Pour le groupe symétrique, c'est la définition 1.261, le fait que ce soit un groupe fini est le lemme 1.264, et pour la somme sur un groupe fini c'est la définition 1.296.

Pour chaque σ séparément, en utilisant la proposition 1.304 pour ré-indexer le produit :

$$\prod_i A_{\sigma(i),i} = \prod_i A_{i,\sigma^{-1}(i)}. \quad (4.112)$$

Nous profitons du fait que l'application $\varphi: S_n \rightarrow S_n$ donnée par $\varphi(\sigma) = \sigma^{-1}$ soit une permutation de S_n pour appliquer la définition 1.296 et faire la somme sur σ^{-1} :

$$\det(A^t) = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) \prod_i A_{i,\sigma^{-1}(i)} = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma^{-1}) \prod_i A_{i,\sigma(i)} = \det(A) \quad (4.113)$$

où nous avons utilisé le fait que $\epsilon(\sigma^{-1}) = \epsilon(\sigma)$ (corolaire 1.292). $\square$

Le fait que $\det(A) = \det(A^t)$ permet, dans toutes les propositions du type « ce qui arrive au déterminant si on change telle ligne ou colonne » de ne donner qu'une preuve pour la partie « ligne » et déduire automatiquement le cas « colonne ». Le lemme suivant donne un exemple d'utilisation.

LEMooWMQWooGWFlmC

Lemme 4.86 ([1]).

Soit une matrice A . Nous considérons la matrice B obtenue à partir de A par la permutation de lignes $L_k \leftrightarrow L_l$ ainsi que la matrice C obtenue à partir de A^t par la permutation de colonnes $C_k \leftrightarrow C_l$.

Alors $C^t = B$.

Démonstration. Calculons les éléments de matrice de C :

$$C_{i,j} = \begin{cases} (A^t)_{i,j} & \text{si } j \neq k, j \neq l \\ (A^t)_{i,k} & \text{si } j = l \\ (A^t)_{i,l} & \text{si } j = k \end{cases} = \begin{cases} A_{j,i} & \text{si } j \neq k, j \neq l \\ A_{k,i} & \text{si } j = l \\ A_{l,i} & \text{si } j = k. \end{cases} \quad (4.114)$$

Ensuite nous prouvons que $C^t = B$ en écrivant les éléments de C^t :

$$(C^t)_{i,j} = C_{j,i} = \begin{cases} A_{i,j} & \text{si } i \neq k, i \neq l \\ A_{k,j} & \text{si } i = l \\ A_{l,j} & \text{si } i = k. \end{cases} \quad (4.115)$$

Cette dernière expression est la matrice A après permutation des lignes $L_k \leftrightarrow L_l$, c'est-à-dire la matrice B . $\square$

Pour la suite nous écrivons δ la matrice « identité », c'est-à-dire celle dont les entrées sont précisément les $\delta_{i,k}$. Nous écrivons également $E_{i,j}$ la matrice contenant des zéros partout sauf en (i,j) où elle a un 1, c'est-à-dire

$$(E_{i,j})_{k,l} = \delta_{i,k} \delta_{j,l}. \quad (4.116)$$

PROPooFQRDooRPFuxk

Proposition 4.87 (Permuter des lignes ou des colonnes $L_k \leftrightarrow L_l$ [154, 1]).

Soient une matrice $A \in M(n, \mathbb{K})$, deux entiers $k \neq l$ inférieurs ou égaux à n .

ITEMooAIHWooHXzeys

(1) Si B est la matrice obtenue à partir de A en permutant deux lignes ou deux colonnes, alors

$$\det(A) = -\det(B). \quad (4.117)$$

ITEMooDNHWooOMgmxa

(2) Si B est la matrice obtenue à partir de A par la permutation de lignes $L_k \leftrightarrow L_l$. Alors

$$B = SA \quad (4.118)$$

avec $S = \delta + E_{k,l} + E_{l,k} - E_{k,k} - E_{l,l}$.

Autrement dit : la matrice S est une matrice de permutations de lignes.

ITEMooSHRQooQrqVdO

(3) La matrice S vérifie $\det(S) = -1$

(4) Nous avons

$$\det(SA) = \det(S) \det(A). \quad (4.119)$$

Démonstration. Point par point

(1) **(1) pour les colonnes**

Soient k et l fixés, et considérons la permutation des colonnes C_k et C_l . Nous notons α la permutation (k, l) dans S_n (groupe symétrique, définition 1.261). Nous avons

$$B_{i,j} = A_{i,\alpha(j)}, \quad (4.120)$$

ou encore : $A_{i,j} = B_{i,\alpha(j)}$. Par définition,

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n A_{i,\sigma(i)} \quad (4.121)$$

C'est le moment d'utiliser la proposition 1.300 à propos de somme sur des groupes avec $G = S_n$, $h = \alpha$ et

$$f(\sigma) = \epsilon(\sigma) \prod_i A_{i,\sigma(i)}. \quad (4.122)$$

Nous savons que $\epsilon(\alpha) = -1$ et que ϵ est un morphisme par la proposition 1.291(1), donc

$$f(\alpha\sigma) = \epsilon(\alpha\sigma) \prod_i A_{i,(\alpha\sigma)(i)} = -\epsilon(\sigma) \prod_i B_{i,\sigma(i)}. \quad (4.123)$$

Avec ça, nous concluons :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma) = \sum_{\sigma} f(\alpha\sigma) = - \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n B_{i,\sigma(i)} = -\det(B). \quad (4.124)$$

- (2) **(1) pour les lignes** Que se passe-t-il si nous permutons les lignes L_k et L_l ? Si nous notons B' la matrice obtenue à partir de A par la permutation de lignes $L_k \leftrightarrow L_l$, et C celle obtenue de A^t après permutation de colonnes $C_k \leftrightarrow C_l$ alors nous avons $C^t = B'$. Le lemme 4.86 nous dit que $C^t = B'$. En utilisant le lemme 4.85 sur le déterminant de la transposée,

$$\det(B') = \det(C^t) = \det(C) = -\det(A^t) = -\det(A). \quad (4.125)$$

Voilà qui prouve le résultat pour les permutation de lignes.

- (3) **(2)** Si $k = l$, il n'y a pas de permutation, et il est vite vu que la matrice S est l'identité parce qu'il y a quatre fois le terme $E_{k,k}$. Nous supposons donc que $k \neq l$; en particulier $\delta_{k,l} = 0$.

Il s'agit surtout d'un beau calcul :

$$(SA)_{i,j} = \sum_m S_{i,m} A_{m,j} = A_{i,j} + \sum_m (\delta_{k,i} \delta_{l,m} + \delta_{l,i} \delta_{k,m} - \delta_{k,i} \delta_{k,m} - \delta_{l,i} \delta_{l,m}) A_{m,j} \quad (4.126a)$$

$$= A_{i,j} + \delta_{k,i} A_{l,j} + \delta_{l,i} A_{k,j} - \delta_{k,i} A_{k,j} - \delta_{l,i} A_{l,j}. \quad (4.126b)$$

Si $i \neq j$ et $i \neq l$, alors $(SA)_{i,j} = A_{i,j}$. Si $i = k$, alors

$$(SA)_{k,j} = A_{k,j} + A_{l,j} - A_{k,j} = A_{l,j}, \quad (4.127)$$

c'est-à-dire que la k^e ligne de SA est la l^e ligne de A .

Avec $i = l$ nous obtenons la k^e ligne de A .

Tout cela montre que SA est la matrice A dans laquelle les lignes k et l ont été échangées, c'est-à-dire $SA = B$.

(4) **(3)** En utilisant la définition du déterminant,

$$\det(S) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n S_{i,\sigma(i)} \quad (4.128a)$$

$$= \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) \prod_i (\delta_{i,\sigma(i)} + \delta_{k,i} \delta_{l,\sigma(i)} + \delta_{l,i} \delta_{k,\sigma(i)} - \delta_{k,i} \delta_{k,\sigma(i)} - \delta_{l,i} \delta_{l,\sigma(i)}). \quad (4.128b)$$

Nous utilisons l'associativité et la commutativité du produit pour séparer les facteurs $i = k$ et $i = l$ des autres :

$$\det(S) = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) \prod_{\substack{i \neq k \\ i \neq l}} \delta_{i,\sigma(i)} (\delta_{k,\sigma(k)} + \delta_{l,\sigma(k)} - \delta_{k,\sigma(k)}) (\delta_{l,\sigma(l)} + \delta_{k,\sigma(l)} - \delta_{l,\sigma(l)}). \quad (4.129)$$

À cause des facteurs $i \neq k$ et $i \neq l$, les σ pour lesquels le tout n'est pas nul doivent vérifier $\delta_{i,\sigma(i)} = 1$ pour tout i différent de k et l . Les deux seuls sont donc $\sigma = \text{Id}$ et la permutation $\sigma = (k, l)$. Pour $\sigma = \text{Id}$, nous avons

$$\prod_{\substack{i \neq k \\ i \neq l}} \delta_{i,i} (\delta_{k,k} + \delta_{l,k} - \delta_{k,k}) (\delta_{l,l} + \delta_{k,l} - \delta_{l,l}) = 0. \quad (4.130)$$

Dernier espoir : $\sigma = (k, l)$. Pour ce terme nous avons $\epsilon(\sigma) = -1$ et

$$\prod_{\substack{i \neq k \\ i \neq l}} \delta_{i,i} (\delta_{k,l} + \delta_{l,l} - \delta_{k,l}) (\delta_{l,k} + \delta_{k,k} - \delta_{l,k}) = 1. \quad (4.131)$$

Au final dans $\det(S)$, il n'y a que le terme $\sigma = (k, l)$ qui est non nul, et il vaut -1 . Donc

$$\det(S) = -1. \quad (4.132)$$

(5) **(4)** Il s'agit de mettre bout à bout les points déjà prouvés :

$$\det(SA) = -\det(A) = \det(S) \det(A). \quad (4.133)$$

□

COR00AZFC00SYINvBI

Corolaire 4.88 ([154]).

Soit une matrice $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$. Si deux lignes ou deux colonnes de A sont égales, alors $\det(A) = 0$.

Démonstration. Si deux colonnes sont égales, la matrice ne change pas lorsqu'on les permute, alors que le déterminant change de signe. La seule possibilité est que $\det(A) = -\det(A)$, ce qui signifie que $\det(A) = 0$. □

Notons que si pour $k \neq l$ nous avons $C_k = \lambda C_l$, alors nous avons aussi $\det(A) = 0$.

La réciproque n'est pas vraie : il existe des matrices dont le déterminant est nul et dont aucune entrée n'est nulle. Par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (4.134)$$

PROP00NGZJ00HjtMyn

Proposition 4.89 ([154]).

Soient $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$, et $v \in \mathbb{K}^n$. Si B est la matrice A avec la substitution $L_j \rightarrow L_j + v$ et C est la matrice A avec la substitution $L_j \rightarrow v$, alors

$$\det(B) = \det(A) + \det(C). \quad (4.135)$$

Démonstration. En utilisant l'associativité de la multiplication,

$$\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n B_{i,\sigma(i)} \quad (4.136a)$$

$$= \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) \left(\prod_{i \neq j} B_{i,\sigma(i)} \right) B_{j,\sigma(j)} \quad (4.136b)$$

$$= \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) \left(\prod_{i \neq j} A_{i,\sigma(i)} \right) (A_{j,\sigma(j)} + v_{\sigma(j)}) \quad (4.136c)$$

$$= \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) \prod_i A_{i,\sigma(i)} + \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) \prod_{i \neq j} C_{i,\sigma(i)} v_{\sigma(j)} \quad (4.136d)$$

$$= \det(A) + \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) \prod_{i \neq j} C_{i,\sigma(i)} C_{j,\sigma(j)} \quad (4.136e)$$

$$= \det(A) + \det(C). \quad (4.136f)$$

Justifications :

- 4.136d parce que pour $i \neq j$ nous avons $A_{i,\sigma(i)} = C_{i,\sigma(i)}$
- 4.136e parce que $v_{\sigma(j)} = C_{j,\sigma(j)}$.

□

Proposition 4.90 (Combinaison de lignes ou colonnes $L_k \rightarrow L_k + \lambda L_l$ [154]).

Soient une matrice $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$, deux entiers $k \neq l$ inférieurs ou égaux à n .

- (1) Si B est la matrice obtenue à partir de A par la substitution $L_k \rightarrow L_k + \lambda L_l$ ou $C_k \rightarrow C_k + \lambda C_l$, alors

$$\det(A) = \det(B). \quad (4.137)$$

- (2) Si B est la matrice A dans laquelle nous avons opéré la substitution $L_k \rightarrow L_k + \lambda L_l$, alors

$$B = UA \quad (4.138)$$

avec $U = \delta + \lambda E_{k,l}$, c'est-à-dire que U est une matrice de combinaison de lignes.

- (3) La matrice U vérifie $\det(U) = 1$.

- (4) Nous avons

$$\det(UA) = \det(U) \det(A). \quad (4.139)$$

Démonstration. Point par point.

- (1) (1) Soit la matrice C obtenue à partir de A par $L_k \rightarrow L_k + \lambda L_l$. En considérant le vecteur $v = \lambda L_l$, nous sommes dans la situation de la proposition 4.89. Donc

$$\det(B) = \det(A) + \det(C). \quad (4.140)$$

Mais dans la matrice C , nous avons $L_k = \lambda L_l$, ce qui implique $\det(C) = 0$ par le corolaire 4.88. Donc $\det(A) = \det(B)$ comme il se devait.

- (2) (2) Encore un calcul :

$$(UA)_{i,j} = \sum_m (\delta_{i,m} + \lambda (E_{k,l})_{i,m}) A_{m,j} = A_{i,j} + \lambda \sum_m \delta_{k,i} \delta_{l,m} A_{m,j} = A_{i,j} + \lambda \delta_{l,i} A_{k,j}. \quad (4.141)$$

Cela donne, pour $i = k$ la ligne

$$(UA)_{k,j} = A_{k,j} + \lambda A_{l,j}, \quad (4.142)$$

ce qui correspond bien à $L_k \rightarrow L_k + \lambda L_l$.

- (3) **(3)** Nous calculons le déterminant de $U = \delta + \lambda E_{k,l}$ avec $k \neq l$. Nous avons dans un premier temps :

$$\det(U) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (\delta_{i,\sigma(i)} + \lambda \delta_{k,i} \delta_{l,\sigma(i)}). \quad (4.143)$$

Puisque nous avons toujours $\delta_{k,i} \delta_{l,i} = 0$, le terme $\sigma = \text{Id}$ donne 1.

Pour les $\sigma \neq \text{Id}$, le facteur $\lambda \delta_{k,i} \delta_{l,\sigma(i)}$ ne s'annule pas, uniquement si $i = k$ et $\sigma(i) = l$. Donc le seul terme non nul autre que $\sigma = \text{Id}$ peut provenir de $\sigma = (k, l)$. Pour ce terme, nous isolons les termes $i = l$ et $i = k$:

$$(\delta_{k,\sigma(k)} + \lambda \delta_{k,k} \delta_{k,\sigma(k)}) (\delta_{l,\sigma(l)} + \lambda \delta_{k,l} \delta_{k,\sigma(l)}). \quad (4.144)$$

Le dernier facteur est nul.

- (4) **(4)** En mettant bout à bout les résultats prouvés,

$$\det(UA) = \det(A) = \det(U) \det(A). \quad (4.145)$$

□

PROPooXUFKooOaPnna

Proposition 4.91 (Multiplication par un scalaire d'une ligne ou colonne $L_k \rightarrow \lambda L_k$ [154]).

Soient une matrice $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$, un entier $k \leq n$. Soit la matrice B obtenue à partir de A en multipliant la ligne L_k par $\lambda \in \mathbb{K}$.

ITEMooBKIGooCDQEDt

- (1) $\det(B) = \lambda \det(A)$

ITEMooWRRCoofXkRNW

- (2) En considérant la matrice $T = \delta + (\lambda - 1)E_{k,k}$, nous avons

$$B = TA, \quad (4.146)$$

c'est-à-dire que la matrice T est une matrice de multiplication de ligne par un scalaire.

ITEMooOGGDooPvVRzk

- (3) Nous avons $\det(T) = \lambda$.

ITEMooIFRVooWQYgkK

- (4) Et aussi : $\det(TA) = \det(T) \det(A)$

Démonstration. Point par point.

- (1) **(1)** La matrice B est donnée par les éléments

$$B_{i,j} = \begin{cases} A_{i,j} & \text{si } i \neq k \\ \lambda A_{i,j} & \text{si } i = k \end{cases} \quad (4.147)$$

c'est-à-dire $B_{i,j} = (1 + (\lambda - 1)\delta_{i,k})A_{i,j}$. Nous mettons cela dans la définition du déterminant de B :

$$\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n B_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma} \prod_i (1 + (\lambda - 1)\delta_{\sigma(i),k} A_{i,\sigma(i)}). \quad (4.148)$$

EQooGVMTooPntKew

L'associativité du produit dans $\mathbb{K}$ nous permet de séparer le produit de la façon suivante :

$$\prod_{i=1}^n (1 + (\lambda - 1)\delta_{\sigma(i),k}) A_{i,\sigma(i)} = \prod_i (1 + (\lambda - 1)\delta_{\sigma(i),k}) \prod_i A_{i,\sigma(i)} = \lambda \prod_i A_{i,\sigma(i)}. \quad (4.149)$$

En remettant dans (4.148), nous trouvons $\det(B) = \det(A)$.

- (2) **(2)** C'est un cas particulier de la proposition 4.90(2) en prenant $k = l$ et en adaptant le λ .
 (3) **(3)** Nous calculons le déterminant de la matrice $T = \delta + (\lambda - 1)E_{k,k}$. La formule du déterminant donne

$$\det(T) = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (\delta_{i,\sigma(i)} + (\lambda - 1)\delta_{k,i} \delta_{k,\sigma(i)}). \quad (4.150)$$

Si $i \neq \sigma(i)$, alors non seulement $\delta_{i,\sigma(i)} = 0$, mais en plus $\delta_{k,i}\delta_{k,\sigma(i)} = 0$. Donc seul $\sigma = \text{Id}$ reste dans la somme sur $\sigma \in S_n$. Il reste donc

$$\det(T) = \prod_{i=1}^n (1 + (\lambda - 1)\delta_{k,i}) = \left(\prod_{i \neq k} 1 \right) (1 + (\lambda - 1)) = \lambda \quad (4.151)$$

où nous avons utilisé encore l'associativité pour isoler le facteur $i = k$.

(4) **(4)** Il faut mettre bout à bout les résultats déjà établis :

$$\det(TA) = \lambda \det(A) = \det(T) \det(A). \quad (4.152)$$

□

4.3.7 Réduction de Gauss

DEFooKJNNooOclJuu

Définition 4.92.

Nous avons vu les matrices d'opérations élémentaire sur les lignes :

- Permutation de lignes $L_k \leftrightarrow L_l : S(n; k, l) = \delta + E_{k,l} + E_{l,k} - E_{k,k} - E_{l,l}$, proposition 4.87.
- Combinaisons de lignes $L_k \rightarrow L_k + \lambda L_l : U(n; k, l, \lambda) = \delta + \lambda E_{k,l}$, proposition 4.90.
- Multiplication d'une ligne par un scalaire $L_k \rightarrow \lambda L_k : T(n; k, \lambda) = \delta + (\lambda - 1)E_{k,k}$, proposition 4.91.

Les matrices $S(n; k, l)$, $U(n; k, l)$ et $T(n; k, \lambda)$ sont les **matrices de manipulation de lignes**.

NORMooDXYZooEdnztA

4.93.

Il existe également des matrices pour faire les mêmes opérations, mais sur les colonnes. Ces matrices doivent toutefois multiplier à droite et non à gauche. Par exemple il existe une matrice $C(n, k, l)$ telle que $AC(n, k, l)$ soit la matrice A , avec les colonnes k et l inversées.

LEMooDXSZooVpbCRj

Lemme 4.94.

Si G est une matrice de manipulation de lignes, alors

$$\det(GA) = \det(G) \det(A) \quad (4.153)$$

EQooLQTVooBYiVYl

pour toute matrice A .

Si H est une matrice de manipulation de colonnes, alors

$$\det(AH) = \det(A) \det(H) \quad (4.154)$$

pour toute matrice A .

Démonstration. En ce qui concerne les manipulations de ligne, nous avons déjà tout fait dans les propositions 4.87(4), 4.90(4) et 4.91(4).

□

PROPooJBZooNLobpf

Proposition 4.95 (Réduction de Gauss[1]).

Soit une matrice $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ de déterminant non nul : $\det(A) \neq 0$. Alors il existe des matrices $G_1, \dots, G_N$ toutes de type S , U ou T telles que

$$G_1 \dots G_N A = \delta. \quad (4.155)$$

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur n . D'abord pour $n = 1$, la matrice A contient un seul élément $A_{1,1}$ qui est non nul par hypothèse. Nous pouvons multiplier sa ligne par $1/A_{1,1}$ pour obtenir le résultat. Plus précisément, nous avons l'égalité

$$T(1; 1, \frac{1}{A_{1,1}})A = \delta \quad (4.156)$$

dans $\mathbb{M}(1, \mathbb{K})$. Notons que $\mathbb{K}$ est un corps (donc $A_{1,1}$ est inversible) commutatif, ce qui permet d'écrire $1/A_{1,1}$ sans ambiguïté.

Supposons le résultat prouvé pour n , et voyons ce qu'il se passe pour $n+1$. Puisque $\det(A) \neq 0$, aucune de ses colonnes n'est nulle (corolaire 4.88). Il existe donc un k tel que $A_{k,1} \neq 0$.

Par la proposition 4.87, la matrice

$$B^{(1)} = S(n+1; k, 1)A \quad (4.157)$$

est une matrice telle que $B_{1,1}^{(1)} = A_{k,1} \neq 0$. Ensuite, par la proposition 4.91 la matrice

$$B^{(2)} = T(n+1; 1, \frac{1}{A_{k,1}})B^{(1)} \quad (4.158)$$

vérifie $B_{1,1}^{(2)} = 1$.

Puisque la multiplication par la matrice $U(n+1; k; l; \lambda)$ réalise, par la proposition 4.90, la substitution $L_k \rightarrow L_k + \lambda L_l$, la matrice

$$B^{(3)} = \prod_{k=2}^{n+1} U(n+1; k, 1, -B_{k,1}^{(1)})B^{(1)} \quad (4.159)$$

a toute sa première colonne nulle à l'exception de $B_{1,1}^{(3)} = 1$.

Nous n'avons pas donné de nom ni démontré de théorèmes à propos de la substitution $C_k \rightarrow C_k + \lambda C_l$. En passant éventuellement par les transposées et en utilisant les lemmes 4.84 et 4.85 nous obtenons une matrice $U'(n+1; k, l, \lambda)$ ayant la propriété que la matrice

$$B^{(4)} = \prod_{k=2}^{n+1} U'(n+1; k, 1, -B_{1,k}^{(3)})B^{(3)} \quad (4.160)$$

vérifie $B_{1,j}^{(4)} = B_{j,1}^{(4)} = 0$ pour tout j sauf $j = 1$. En d'autres termes, la matrice $B^{(4)}$ est de la forme

$$B^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (4.161)$$

où A' est une matrice de taille n .

Voyons quelques propriétés de A' . Nous savons que

$$B^{(4)} = \prod_i G_i A \quad (4.162)$$

où les G_i sont de type S , T ou U . Puisque $\det(SA) = \det(S)\det(A)$ (et idem pour T et U), nous avons

$$\det(B^{(4)}) = \prod_i \det(G_i) \det(A), \quad (4.163)$$

et comme aucun des $\det(G_i)$ n'est nul, nous avons encore $\det(B^{(4)}) \neq 0$, ce qui implique $\det(A') \neq 0$.

La récurrence peut avoir lieu. Il existe des matrices G'_i telles que

$$G'_1 \dots G'_M A' = \delta \quad (4.164)$$

où les G'_i sont de taille n , ainsi que le δ . En remarquant que

$$S(n+1; k, l) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & S(n; k-1, l-1) & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad (4.165)$$

et pareillement pour les matrices T et U , nous voyons qu'en prenant

$$G_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & G'_i & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad (4.166)$$

nous avons

$$\prod_{i=1}^M G_i B^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \prod_{i=1}^M G'_i A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \delta_{n+1} \quad (4.167)$$

où nous avons mis un indice sur le dernier δ pour être plus explicite. $\square$

4.3.8 Matrices inversibles

PROPooMLWRooRWfZXE

Proposition-Définition 4.96.

Soit une matrice $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$. Si les matrices B_1 et B_2 de $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ vérifient

$$AB_1 = B_1A = \delta \quad (4.168)$$

et

$$AB_2 = B_2A = \delta, \quad (4.169)$$

alors $B_1 = B_2$. Dans ce cas, nous disons que A est inversible et nous notons A^{-1} l'unique matrice telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = \delta$.

Démonstration. La preuve est réalisée dans le cas général par le lemme 1.246. Mais si vous en voulez une preuve avec les notations d'ici, en voici une.

Nous avons $AB_1 = AB_2$. En multipliant à gauche par B_1 , nous trouvons $B_1AB_1 = B_1AB_2$. En remplaçant B_1A par δ des deux côtés, il reste $B_1 = B_2$. $\square$

LEMooGZCTooQigDvC

Lemme 4.97 ([154]).

Si $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$, alors il existe au plus une matrice $B \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ telle que $AB = \delta$.

Démonstration. Soient des matrices $B, C \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ telles que $AB = AC = \delta$. Nous allons montrer que $B = C$.

Pour cela nous considérons les applications linéaires $f_A, f_B, f_C \in \text{End}(\mathbb{K}^n)$ associées par la proposition 4.75. Puisque $AB = \delta$, par la proposition 4.77, nous avons $f_A \circ f_B = f_{AB} = \text{Id}$. La proposition 4.59 nous dit alors que f_A et f_B sont bijectives.

En particulier, comme $\{e_i\}$ est une base, son image par f_B est une base par la proposition 4.46. La proposition 4.58 dit alors que $\{f_B(e_i)\}$ est une base. Nous décomposons $f_B(e_k) - f_C(e_k)$ dans cette base :

$$f_B(e_k) - f_C(e_k) = \sum_j \alpha_j f_B(e_j) \quad (4.170)$$

où les α_j dépendent à priori de k . Puisque $f_A \circ (f_B - f_C) = 0$, nous avons

$$0 = f_A(f_B(e_k) - f_C(e_k)) = \sum_j (f_A \circ f_B)(e_j) = \sum_j \alpha_j e_j. \quad (4.171)$$

Donc les α_j sont tous nuls.

Nous en déduisons que $f_B(e_k) = f_C(e_k)$, et donc $f_B = f_C$. Cela implique que $B = C$ par la proposition 4.75(4). $\square$

PROPooECHooVMCIwz

Proposition 4.98 ([154]).

Si $A, B \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ vérifient $AB = \delta$, alors $BA = \delta$.

Démonstration. L'astuce est de poser $C = BA - \delta + B$ et de montrer que $C = B$. Pour cela, un rapide calcul commence par montrer que

$$AC = ABA - A + AB = AB = \delta. \quad (4.172)$$

Donc C est également un inverse à droite de A . Le lemme 4.97 donne alors $C = B$. $\square$

CORooBQLXooTeVfgb

Corolaire 4.99.

Soit $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$. Si il existe $B \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ tel que $AB = \delta$, alors A est inversible et son inverse est B .

Démonstration. Il s'agit d'une paraphrase de la proposition 4.98 et de la définition 4.96. $\square$

LEMooZDNVooArIXzC

Lemme 4.100.

Si une matrice A n'est pas inversible, alors le produit AB n'est inversible pour aucune matrice B .

Démonstration. Soient une matrice non inversible A , ainsi qu'une matrice quelconque B . Supposons que AB soit inversible. Alors

$$AB(AB)^{-1} = \delta. \quad (4.173)$$

Donc la matrice $B(AB)^{-1}$ est un inverse de A . Contradiction. $\square$

PROPooNPMCoopmaCwu

Proposition 4.101.

Une matrice est inversible si et seulement si son application linéaire associée est inversible. Dans ce cas, nous avons

$$f_A^{-1} = f_{A^{-1}}. \quad (4.174)$$

Démonstration. Dans le sens direct, si A est inversible nous avons $AA^{-1} = \delta$. Donc

$$f_A \circ f_{A^{-1}} = f_{AA^{-1}} = f_\delta = \text{Id} \quad (4.175)$$

EQooQQOSooBKYgXh

où nous avons utilisé la proposition 4.77 pour la composition et la proposition 4.78 pour l'identité. L'égalité (4.175) indique que f_A est inversible et que son inverse est $f_{A^{-1}}$.

Dans l'autre sens, l'application f_A^{-1} existe. Soit $B \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ sa matrice. Alors nous avons

$$f_\delta = \text{Id} = f_A \circ f_B = f_{AB}. \quad (4.176)$$

Le fait que l'application $\psi: A \rightarrow f_A$ soit une bijection⁴² implique que $AB = \delta$, c'est-à-dire que A est inversible et que $B = A^{-1}$. $\square$

LEMooMCIDooYBHrbq

Lemme 4.102 ([1]).

Soient une matrice inversible $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ et $r < n$. Il existe une permutation $\sigma \in S_n$ telle que la matrice $a \in \mathbb{M}(r, \mathbb{R})$ donnée par

$$a_{i,j} = A_{i,\sigma(j)} \quad (4.177)$$

soit inversible.

4.3.9 Inversibilité et déterminant

PROPooAVIXooMtVCet

Proposition 4.103.

Une matrice au déterminant non nul est inversible.

Démonstration. Si A est une matrice telle que $\det(A) \neq 0$, alors la proposition 4.95 nous donne des matrices $G_1, \dots, G_N$ telles que

$$G_1 \dots G_N A = \delta. \quad (4.178)$$

Donc la matrice $G_1 \dots G_N$ est un inverse de A par le corolaire 4.99. $\square$

42. Proposition 4.75(4).

PROPooEOKBooKUOFg

Proposition 4.104.

Si une matrice A a une ligne ou une colonne de zéros, alors

- (1) $\det(A) = 0$,
- (2) A n'est pas inversible.

Démonstration. Par définition, nous avons

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n A_{i,\sigma(i)}. \quad (4.179)$$

Si la k^e ligne est nulle, alors $A_{k,\sigma(k)} = 0$ pour tout σ . Donc tous les produits contiennent un facteur nul. Donc $\det(A) = 0$.

Pour toute matrice B nous avons

$$(AB)_{k,k} = \sum_l A_{k,l} B_{l,k}. \quad (4.180)$$

Si la k^e ligne de A est nulle nous avons $(AB)_{k,k} = 0$ et donc pas $AB = \delta$. Donc A n'est pas inversible. $\square$

4.3.10 Quelques ensembles de matrices particuliers

Certains ensembles de matrices ont une importance particulière, que nous développerons plus tard.

Définition 4.105 (Groupe linéaire de matrices).

On note $\text{GL}(n, \mathbb{A})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{A}$, qui sont inversibles. En d'autres termes, $\text{GL}(n, \mathbb{A}) = U(\mathbb{M}(n, \mathbb{A}))$.

DefMatriceOrthogonale

Définition 4.106 (Groupe orthogonal de matrices).

On dit qu'une matrice A est **orthogonale** si son inverse est sa transposée, c'est-à-dire si $A^{-1} = A^t$. On note $\text{O}(n, \mathbb{A})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{A}$, qui sont orthogonales.

4.3.11 Déterminant et combinaisons de lignes et colonnes

SUBSEQCpKMSZYvibPKlwQj5

Proposition 4.107.

Soient des matrices $A, B \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ telles que $\det(A) \neq 0$ et $\det(B) \neq 0$. Alors

$$\det(AB) = \det(A) \det(B). \quad (4.181)$$

Démonstration. La proposition 4.95 nous donne des matrices de permutations de lignes et de colonnes $G_1, \dots, G_N$ et $G'_1, \dots, G'_N$ telles que ⁴³ $E_{QooDNZUooHBhcZj}$

$$G_1 \dots G_N A = \delta \quad (4.182a)$$

$$G'_1 \dots G'_N B = \delta. \quad (4.182b)$$

Nous avons

$$(G'_1 \dots G'_N) \underbrace{(G_1 \dots G_N) A B}_{=\delta} = \delta. \quad (4.183)$$

En prenant le déterminant des deux côtés et en tenant compte de (4.153),

$$1 = \det(\delta) = \det(G'_1 \dots G'_N G_1 \dots G_N A B) = \det(G'_1 \dots G'_N) \det(G_1 \dots G_N) \det(AB). \quad (4.184)$$

43. Les plus acharnés préciseront que pour avoir le même N des deux côtés, il a fallu compléter avec des matrices δ là où il y en avait le moins.

Mais en même temps, les équations 4.182 donnent

$$\det(G_1 \dots G_N) = \det(A)^{-1} \quad (4.185a)$$

$$\det(G'_1 \dots G'_N) = \det(B)^{-1}. \quad (4.185b)$$

Cela pour dire que

$$1 = \det(A)^{-1} \det(B)^{-1} \det(AB), \quad (4.186)$$

et donc ce qu'il nous fallait. $\square$

PROPOoWVJFooTmqoec

Proposition 4.108.

Soient des matrices $A, B \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ telles que $\det(A) = 0$ et $\det(B) \neq 0$. Alors

$$\det(AB) = \det(BA) = \det(A) \det(B) = 0. \quad (4.187)$$

Démonstration. Il existe des matrices de manipulations de lignes et de colonnes $G_1, \dots, G_N$ telles que $G_1 \dots G_N B = \delta$. Donc

$$0 = \det(A) = \det(G_1 \dots G_N BA) = \det(G_1 \dots G_N) \det(BA). \quad (4.188)$$

Donc $\det(BA) = 0$. $\square$

4.3.12 Transvections

Nous nommons $E_{i,j}$ la matrice remplie de zéros sauf à la case i, j qui vaut 1. Autrement dit

$$(E_{i,j})_{k,l} = \delta_{i,k} \delta_{j,l}. \quad (4.189)$$

Définition 4.109.

Une **matrice de transvection** est une matrice de la forme

$$T_{i,j}(\lambda) = \text{Id} + \lambda E_{i,j} \quad (4.190)$$

avec $i \neq j$.

Une **matrice de dilatation** est une matrice de la forme

$$D_i(\lambda) = \text{Id} + (\lambda - 1) E_{i,i}. \quad (4.191)$$

Ici le $(\lambda - 1)$ sert à avoir λ et non $1 + \lambda$. C'est donc une matrice qui dilate d'un facteur λ la direction i , tout en laissant le reste inchangé.

Si σ est une permutation (un élément du groupe symétrique S_n) alors la **matrice de permutation** associée est la matrice d'entrées

$$(P_\sigma)_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}. \quad (4.192)$$

LemyrAXQs

Lemme 4.110.

La matrice $T_{i,j}(\lambda)A = (\mathbb{1} + \lambda E_{i,j})A$ est la matrice A à qui on a effectué la substitution

$$L_i \rightarrow L_i + \lambda L_j. \quad (4.193)$$

La matrice $AT_{i,j}(\lambda)$ est la substitution

$$C_j \rightarrow C_j + \lambda C_i. \quad (4.194)$$

La matrice AP_σ est la matrice A dans laquelle nous avons permuté les colonnes avec σ .

La matrice $P_\sigma A$ est la matrice A dans laquelle nous avons permuté les lignes avec σ^{-1} .

Démonstration. Calculons la composante k, l de la matrice $E_{i,j}A$:

$$(E_{i,j}A)_{k,l} = \sum_m (E_{i,j})_{k,m} A_{m,l} \quad (4.195a)$$

$$= \sum_m \delta_{i,k} \delta_{j,m} A_{m,l} \quad (4.195b)$$

$$= \delta_{i,k} A_{j,l}. \quad (4.195c)$$

C'est donc la matrice pleine de zéros, sauf la ligne i qui est donnée par la ligne j de A . Donc effectivement la matrice

$$A + \lambda E_{i,j}A \quad (4.196)$$

est la matrice A à laquelle on a substitué la ligne i par la ligne i plus λ fois la ligne j .

En ce qui concerne l'autre assertion sur les transvections, le calcul est le même et nous obtenons

$$(AE_{i,j})_{k,l} = A_{k,i} \delta_{j,l}. \quad (4.197)$$

Pour les matrices de permutation, nous avons

$$(AP_\sigma)_{k,l} = A_{k,\sigma(l)} \quad (4.198)$$

et

$$(P_\sigma A)_{k,l} = \sum_m \delta_{k,\sigma(m)} A_{m,l} = \sum_m \delta_{\sigma^{-1}(k),m} A_{m,l} = A_{\sigma^{-1}(k),l}. \quad (4.199)$$

□

4.3.13 Mineur, rang

Pour la définition du rang d'une matrice, nous en donnons une qui est clairement inspirée de l'application linéaire associée.

DEFooCSGXooFRzLRj

Définition 4.111 ([154]).

Le **rang** d'une matrice de $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ est la dimension de la partie de $\mathbb{K}^n$ engendrée par ses colonnes.

Il est possible d'exprimer le rang d'une matrice de façon plus « intrinsèque » via le concept de mineur.

Définition 4.112 ([155]).

Les mineurs d'une matrice sont les déterminants de ses sous-matrices carrées.

Dans la suite nous désignerons souvent par le mot « mineur » la sous-matrice carrée elle-même au lieu de son déterminant.

Lorsque A est une matrice, nous notons f_A l'application linéaire associée à la matrice A par l'application (4.85).

LEMVecsaRgFixe

Lemme 4.113.

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif⁴⁴. Si A est une matrice carrée d'ordre n et de rang r à coefficients dans $\mathbb{K}$, alors il existe des vecteurs $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ formant une base de $\mathbb{K}^n$ tels que

$$f_A(x_i) \neq 0 \quad (4.200)$$

pour $i \leq r$ et

$$f_A(x_i) = 0 \quad (4.201)$$

pour $i > r$.

44. Comme toujours.

Démonstration. Soit V le sous-espace de $\mathbb{K}^n$ engendré par les colonnes de A . Nous considérons la base canonique $\{e_i\}$ de $\mathbb{K}^n$, ainsi que v_i le vecteur créé par la i^e colonne de A . Nous avons

$$v_i = f_A(e_i). \quad (4.202)$$

Les vecteurs v_i engendrent V , donc nous pouvons en extraire une base par le théorème 4.18(1). Soit donc $\{v_j\}_{j \in J}$ une base de V avec $J \subset \{1, \dots, n\}$.

La base de $\mathbb{K}^n$ que nous cherchons commence par les vecteurs $\{e_j\}_{j \in J}$. Ces vecteurs vérifient $f_A(e_j) = v_j \neq 0$ parce que des vecteurs d'une base ne sont jamais nuls.

Pour la suite de la base, nous pourrions penser au théorème de la base incomplète⁴⁵, mais les vecteurs ainsi complétant la base ne sont pas garantis de s'annuler par f_A . Voir l'exemple 4.114.

L'idée est d'utiliser le noyau de f_A qui est un sous-espace vectoriel par la proposition 4.41. Soit une base⁴⁶ $\{z_k\}$ de $\ker(f)$. Les vecteurs $\{e_j\}_{j \in J}$ forment une base de $\text{Image}(f_A)$. Puisque les z_i forment une base de $\ker(f_A)$, le théorème du rang 4.49 dit alors que $\{e_j\}_{j \in J} \cup \{z_k\}$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

Il y a r éléments dans J parce que l'espace engendré par les colonnes de A est de dimension r par hypothèse. Donc il y a $n - r$ éléments dans les $\{z_k\}$ pour que le tout ait le bon nombre d'éléments. $\square$

EXooRkVQooZOGDEF

Exemple 4.114.

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}. \quad (4.203)$$

Elle est de rang 1. En suivant l'idée de la démonstration, nous commençons la base de $\mathbb{R}^2$ par le vecteur e_1 qui vérifie

$$f_A(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (4.204)$$

L'utilisation du théorème de la base incomplète ne permet pas de trouver un second vecteur de base v tel que $f_A(v) = 0$. En effet ce théorème donne juste l'existence d'une completion de la base, mais pas de propriétés particulières de la base obtenue. Elle pourrait donner $v = e_2$ comme second vecteur de base. Mais alors

$$f_A(v) = f_A(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq 0. \quad (4.205)$$

Au contraire, le noyau de f_A est donné par le sous-espace engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Une base convenable est donc $\{e_1, e_1 - e_2\}$. $\triangle$

PROPooEGNBooIfJXc

Proposition 4.115.

Le rang d'une application linéaire⁴⁷ est égal au rang de sa matrice⁴⁸ dans n'importe quelle base.

Démonstration. Soient deux espaces vectoriels V de dimension n et W de dimension m . Nous considérons les bases $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ de V et $\{f_j\}_{j=1, \dots, m}$ de W . Soit une application linéaire $\alpha: V \rightarrow W$. La matrice de α est donnée par $A_{ji} = \alpha(e_i)_j$. Nous considérons les applications linéaires

$$\begin{aligned} \beta: V &\rightarrow \mathbb{K}^m \\ e_i &\mapsto (\alpha(e_i)_1, \dots, \alpha(e_i)_m). \end{aligned} \quad (4.206)$$

et

$$\begin{aligned} \gamma: \mathbb{K}^m &\rightarrow W \\ (x_1, \dots, x_m) &\mapsto \sum_{k=1}^m x_k f_k. \end{aligned} \quad (4.207)$$

45. Théorème 4.14(2).

46. Cette base contient $n - r$ éléments, mais ce n'est pas très important pour la suite.

47. Définition 4.48.

48. Définition 4.111.

L'espace de $\mathbb{K}^m$ engendré par les colonnes de A est

$$S = \text{Span}\{\beta(e_i)\}_{i=1,\dots,n}. \quad (4.208)$$

Nous allons montrer que γ est un isomorphisme entre S et $\text{Image}(\alpha)$. Pour cela nous commençons par remarquer que

$$\beta(e_i)_k = \alpha(e_i)_k \quad (4.209)$$

et donc que

$$\alpha(e_i) = \sum_k \alpha(e_i)_k f_k \quad (4.210a)$$

$$= \sum_k \beta(e_i)_k f_k \quad (4.210b)$$

$$= \gamma(\beta(e_i)). \quad (4.210c)$$

Cela montre que $\gamma(S) = \text{Image}(\alpha)$. □

LEMooSWDMooRsLOyF

Lemme 4.116 ([1]).

Soit une matrice inversible $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$. Soit $r \leq n$. Il existe une permutation de colonnes de A telle que la sous-matrice $(A_{ij})_{i,j=1,\dots,r}$ soit inversible.

4.3.14 Matrices équivalentes et semblables

DefBLELooTviHoB

Proposition-Définition 4.117.

Deux relations d'équivalence⁴⁹ entre les matrices.

ItemPFXCooOUbSCt

(1) Deux matrices A et B sont **équivalentes** dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ si il existe $P, Q \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$ telles que $A = PBQ^{-1}$.

(2) Deux matrices sont **semblables** si il existe une matrice $P \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

LemZMxxnfM

Lemme 4.118.

Une matrice de rang⁵⁰ r dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ est équivalente à la matrice par blocs

$$J_r = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.211)$$

Démonstration. Nous devons prouver que pour toute matrice $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ de rang r , il existe $P, Q \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$ telles que $QAP = J_r$. Soit $\{e_i\}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, puis $\{f_i\}$ une base telle que $Af_i = 0$ dès que $i > r$, qui existe par le lemme 4.113.

Nous considérons la matrice inversible P telle que $Pe_i = f_i$; ses colonnes sont donc précisément les f_i , si bien que

$$APe_i = Af_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i > r \\ \neq 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.212)$$

La matrice AP se présente donc sous la forme

$$AP = \begin{pmatrix} M & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix} \quad (4.213)$$

où M est une matrice $r \times r$. Nous considérons maintenant une base $\{g_i\}_{i=1,\dots,n}$ dont les r premiers éléments sont les r premières colonnes de AP et une matrice inversible Q telle que $Qg_i = e_i$. Alors

$$QAPe_i = \begin{cases} e_i & \text{si } i < r \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.214)$$

Cela signifie que QAP est la matrice J_r . □

49. Définition 1.50.

50. Définition 4.111.

CorGOUYooErfOIe

Corolaire 4.119 (Équivalence et rang).

Deux matrices sont équivalentes⁵¹ si et seulement si elles sont de même rang.

Démonstration. D'abord il y a des implicites dans l'énoncé. Puisque nous voulons, soit par hypothèse, soit par conclusion, que les matrices A et B soient équivalentes, nous supposons qu'elles ont même dimension. Soient donc A et B deux matrices carrées d'ordre n .

Par le lemme 4.118, deux matrices de même rang r sont équivalentes à J_r . Elles sont donc équivalentes entre elles.

Inversement, supposons que A et B soient deux matrices équivalentes⁵² : $A = PBQ^{-1}$ avec P et Q inversibles. Alors

$$\text{Image}(PBQ^{-1}) = \{PBQ^{-1}v \text{ tel que } v \in \mathbb{K}^n\} \quad (4.215a)$$

$$= PB \underbrace{\{Q^{-1}v \text{ tel que } v \in \mathbb{K}^n\}}_{=\mathbb{K}^n} \quad (4.215b)$$

$$= P(B(\mathbb{K}^n)). \quad (4.215c)$$

L'ensemble $B(\mathbb{K}^n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Comme le rang de P est maximum, la dimension de $P(B(\mathbb{K}^n))$ est la même que celle de $B(\mathbb{K}^n)$. Par conséquent

$$\dim(\text{Image}(PBQ^{-1})) = \dim(B(\mathbb{K}^n)) = \text{rk}(B). \quad (4.216)$$

Le membre de gauche de cela n'est autre que $\text{rk}(A) = \dim(\text{Image}(PBQ^{-1}))$. □

4.3.15 Algorithme des facteurs invariants

PropPDFCqee

Proposition 4.120 (Algorithme des facteurs invariants[126]).

Soit $(\mathbb{A}, \delta)$ un anneau euclidien muni de son stathme et $U \in \mathbb{M}(n \times m, \mathbb{A})$. Alors il existe $d_1, \dots, d_s \in \mathbb{A}^*$ et des matrices $P \in \text{GL}(m, \mathbb{A})$, $Q \in \text{GL}(n, \mathbb{A})$ tels que nous ayons

$$U = P \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & d_s & \\ & 0 & & 0 \end{pmatrix} Q \quad (4.217)$$

avec $d_i \mid d_{i+1}$ pour tout i .

Démonstration. Nous allons donner la preuve plus ou moins sous forme d'algorithme.

D'abord si $U = 0$ c'est bon, on a la réponse. Sinon, nous prenons l'élément (i_0, j_0) dont le stathme est le plus petit et nous l'amenons en $(1, 1)$ par les permutations

$$\begin{aligned} C_1 &\leftrightarrow C_{j_0} \\ L_1 &\leftrightarrow L_{i_0} \end{aligned} \quad (4.218)$$

Ensuite nous traitons la première colonne jusqu'à amener des zéros partout en dessous de $u_{1,1}$ de la façon suivante : pour chaque ligne successivement nous calculons la division euclidienne

$$u_{i,1} = qu_{1,1} + r_i, \quad (4.219)$$

et nous faisons

$$L_i \rightarrow L_i - qL_1, \quad (4.220)$$

c'est-à-dire que nous enlevons le maximum possible et il reste seulement r_i en u_{i1} . Vu que le but est de ne laisser que des zéros dans la première colonne, si le reste n'est pas zéro, nous ne sommes pas

51. Définition 4.117(1).

52. Définition 4.117.

contents⁵³. Dans ce cas nous permutons $L_1 \leftrightarrow L_i$, ce qui aura pour effet de strictement diminuer le stathme de $u_{1,1}$ parce qu'on va mettre en $u_{1,1}$ le nombre r_i dont le stathme est strictement plus petit que celui de $u_{1,1}$.

En faisant ce jeu de division euclidienne puis échange, on diminue toujours le stathme de $u_{1,1}$, donc ça finit par s'arrêter, c'est-à-dire qu'à un certain moment, la division euclidienne de $u_{i,1}$ par $u_{1,1}$ va donner un reste nul et nous serons contents.

Une fois la première colonne ramenée à la forme

$$C_1 = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.221)$$

nous faisons tout le même jeu avec la première ligne, en faisant maintenant des sommes divisions et permutations de colonnes. Notons que ce faisant, nous ne changeons plus la première colonne.

En fin de compte, nous trouvons une matrice⁵⁴

$$U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (4.222)$$

Si l'élément $u_{1,1}$ ne divise pas un des éléments de A , disons $a_{i,j}$, alors nous opérons

$$C_1 \rightarrow C_1 - C_j. \quad (4.223)$$

Cela nous détruit un peu la première colonne, mais ne change pas $u_{1,1}$. Nous avons maintenant

$$U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ * & & & \\ u_{i,j} & & A & \\ * & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (4.224)$$

Et nous refaisons tout le jeu depuis le début. Cependant, lorsque nous allons nous attaquer à la ligne i , $u_{1,1}$ ne divisera pas $u_{i,j}$, ce qui donnera lieu à une division euclidienne et un échange $L_1 \leftrightarrow L_i$. L'échange consistant à mettre r_i à la place de $u_{1,1}$ et réciproquement, diminuera encore strictement le stathme. Encore une fois, nous allons travailler jusqu'à avoir la matrice sous la forme

$$U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad (4.225)$$

sauf que cette fois, le stathme de $u_{1,1}$ est strictement plus petit que la fois précédente. Si $u_{1,1}$ ne divise toujours pas tous les éléments de A , nous recommençons encore et encore. En fin de compte, nous finissons par avoir une matrice de la forme (4.225) avec $u_{1,1}$ qui divise tous les éléments de A .

Une fois que cela est fait, il faut continuer en recommençant tout sur la matrice A . Nous avons maintenant

$$U = \begin{pmatrix} u_{1,1} & & 0 \\ & u_{2,2} & \\ 0 & & B \end{pmatrix}. \quad (4.226)$$

53. Si il est zéro, nous passons à la ligne suivante

54. Nous nommons toujours par la même lettre U la matrice originale et la matrice modifiée, comme il est d'usage en informatique.

Sous cette forme nous avons $u_{1,1} \mid u_{2,2}$ et $u_{1,1}$ divise tous les éléments de B . En effet $u_{1,1}$ divisant tous les éléments de A , il divise toutes les combinaisons de ces éléments. Or tout l'algorithme ne consiste qu'à prendre des combinaisons d'éléments.

Nous finissons donc bien sur une matrice comme annoncée. De plus, n'ayant effectué que des combinaisons de lignes, nous avons seulement multiplié par des matrices inversibles (lemme 4.110). $\square$

4.4 Changement de base

Soit un espace vectoriel E muni de deux bases $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ et $(f_\alpha)_{\alpha=1,\dots,n}$. Les deux bases sont liées entre elles par

$$f_\alpha = \sum_i Q_{i,\alpha} e_i. \quad \text{EQooFRQRooSMsQOR (4.227)}$$

Ici Q n'est pas une application linéaire $E \rightarrow E$: Q est seulement un tableau de nombres, donnant les coordonnées des vecteurs f_α dans la base de e_i . Éventuellement Q peut être vu comme une application linéaire $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$.

Dans la suite nous nommerons Q^{-1} la matrice inverse de Q . Inverse au sens des bêtes tableaux de nombres, sans interprétation en tant qu'application linéaire. De même pour Q^t qui est la transposée de Q .

4.4.1 Changement de base : vecteurs de base

Lemme 4.121.

Soit un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ ainsi que deux bases $(e_i)_{i=1,\dots,n}$, $(f_\alpha)_{\alpha=1,\dots,n}$ de E liées par $f_\alpha = \sum_i Q_{i,\alpha} e_i$. Alors

$$e_i = \sum_\alpha Q_{\alpha,i}^{-1} f_\alpha. \quad \text{EQooZQPAooAbKAdg (4.228)}$$

Démonstration. Nous multiplions l'égalité $f_\alpha = \sum_i Q_{i,\alpha} e_i$ par le nombre⁵⁵ $Q_{\alpha,j}^{-1} \in \mathbb{K}$ et nous sommes sur α :

$$\sum_\alpha Q_{\alpha,j}^{-1} f_\alpha = \sum_{i\alpha} (A_{i,\alpha} Q_{\alpha,j}^{-1}) e_i = e_j. \quad (4.229)$$

$\square$

4.4.2 Changement de base : coordonnées

Proposition 4.122.

Soit un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$. Soient deux bases $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ et $(f_\alpha)_{\alpha=1,\dots,n}$ liées par $f_\alpha = \sum_i Q_{i,\alpha} e_i$. Nous considérons un même vecteur dans les deux bases : $\sum_i x_i e_i = \sum_\alpha y_\alpha f_\alpha$. Alors

$$(1) \quad y_\alpha = \sum_i Q_{\alpha,i}^{-1} x_i$$

$$(2) \quad x_i = \sum_\alpha Q_{i,\alpha} y_\alpha.$$

Démonstration. Soit un vecteur $x \in E$. Il peut être écrit dans les deux bases :

$$x = \sum_i x_i e_i = \sum_\alpha y_\alpha f_\alpha. \quad \text{EQooGSJMooGQstMx (4.230)}$$

En remplaçant e_i par sa valeur (4.228) nous avons l'égalité

$$\sum_{i\alpha} x_i Q_{\alpha,i}^{-1} f_\alpha = \sum_\alpha y_\alpha f_\alpha. \quad (4.231)$$

⁵⁵. Attention à la bonne interprétation de ce nombre : on fait bien référence à l'élément situé en (α, j) de la matrice Q^{-1} , et pas autre chose.

Puisque les f_α sont linéairement indépendants, l'égalité des sommes donne l'égalité de chacun des termes :

$$y_\alpha = \sum_i x_i Q_{\alpha,i}^{-1}. \quad (4.232)$$

En identifiant $x \in E$ au vecteur dans $\mathbb{K}^n$ de ses coordonnées dans la base $\{e_i\}$ nous pouvons écrire

$$y_\alpha = (Q^{-1}x)_\alpha, \quad (4.233)$$

Le point (1) est prouvé.

En ce qui concerne le point (2), nous repartons encore de (4.230), mais nous y substituons la définition des f_α :

$$\sum_i x_i e_i = \sum_{\alpha} y_\alpha Q_{i,\alpha} e_i. \quad (4.234)$$

Vous voulez des détails ? Allez, une étape de plus que le strict nécessaire : nous écrivons

$$\sum_i (x_i - \sum_{\alpha} y_\alpha Q_{i,\alpha}) e_i = 0. \quad (4.235)$$

Par linéaire indépendance des e_i , nous avons annulation de tous les coefficients, c'est-à-dire

$$x_i = \sum_{\alpha} Q_{i,\alpha} y_\alpha, \quad (4.236)$$

comme annoncé. □

4.123.

Attention à l'ordre des indices dans la dernière égalité : la matrice Q vient avec les indices dans l'ordre i, α , tandis que la matrice Q^{-1} vient avec les indices dans l'ordre opposé : α, i . C'est pour cela qu'il est intéressant de noter avec des lettres latines les indices se rapportant à la première base, et avec des lettres grecques ceux se rapportant à la seconde base.

NORMooNWKZooPMwYTO

4.124.

Les formules de changement de coordonnées de la proposition 4.122 s'écrivent souvent de la façon suivante :

$$(1) \quad y_\alpha = (Q^{-1}x)_\alpha$$

ITEMooLHQCoobRvSlp

$$(2) \quad y = Q^{-1}x.$$

ITEMooNXUGooJeoBf

$$(3) \quad x_i = (Qy)_i$$

ITEMooEFILooNENamW

$$(4) \quad x = Qy$$

ITEMooMOKHooFEJvIW

Ces égalités reposent sur un petit paquet d'abus de notations qu'il convient de bien comprendre. Ici, x et y sont les éléments de $\mathbb{K}^n$ donnés par les composantes de x dans les bases $\{e_i\}$ et $\{f_\alpha\}$, et Q est vu comme une matrice, un opérateur linéaire sur $\mathbb{K}^n$. Autrement dit, le choix des bases permet d'identifier E avec $\mathbb{K}^n$ et la matrice Q avec l'application linéaire f_Q de la proposition 4.75.

4.4.3 Changement de base : matrice d'une application linéaire

PROPooNZBEooWyCXTw

Proposition 4.125.

Soit une application linéaire $t: E \rightarrow E$ de matrices A et B dans les bases $\{e_i\}$ et $\{f_\alpha\}$. Si les bases sont liées par

$$f_\alpha = \sum_i Q_{i,\alpha} e_i, \quad (4.237)$$

alors les matrices A et B sont liées par

$$B = Q^{-1}AQ. \quad (4.238)$$

Démonstration. L'hypothèse sur le fait que A et B sont les matrices de t signifie que pour tout $x \in E$,

$$t(x) = \sum_{ij} A_{j,i} x_i e_j = \sum_{\alpha\beta} B_{\alpha,\beta} y_\beta f_\alpha. \quad (4.239)$$

En remplaçant e_j par son expression (4.228) en termes des f_α et x_i par son expression $x_i = (Qy)_i$ (proposition 4.122), nous avons

$$(By)_\alpha = \sum_{ij\alpha} A_{j,i} (Qy)_i Q_{\alpha,j}^{-1} f_\alpha \quad (4.240a)$$

$$= \sum_{i\alpha} (Q^{-1}A)_{\alpha,i} (Qy)_i f_\alpha \quad (4.240b)$$

$$= \sum_{\alpha} (Q^{-1}AQy)_\alpha f_\alpha. \quad (4.240c)$$

Puisque les f_α forment une base, nous en déduisons $Q^{-1}AQy = By$. Et comme y est un élément quelconque de $\mathbb{K}^n$, nous en déduisons l'égalité de matrices

$$B = Q^{-1}AQ. \quad (4.241)$$

□

Il s'agit bien d'une égalité de matrices ou, à la limite, d'applications linéaires sur $\mathbb{K}^n$, et non d'une égalité d'application linéaire sur E .

4.4.4 Déterminant de Vandermonde

PropnuUvtj

Proposition 4.126 ([136]).

Le **déterminant de Vandermonde** est le polynôme en n variables donné par

$$V(T_1, \dots, T_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ T_1 & T_2 & \dots & T_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ T_1^{n-1} & T_2^{n-1} & \dots & T_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (T_j - T_i). \quad (4.242)$$

Notez que l'inégalité du milieu est stricte (sinon d'ailleurs l'expression serait nulle).

Démonstration. Nous considérons le polynôme

$$f(X) = V(T_1, \dots, T_{n-1}, X) \in (\mathbb{K}[T_1, \dots, T_{n-1}])[X]. \quad (4.243)$$

C'est un polynôme de degré au plus $n-1$ en X et il s'annule aux points $T_1, \dots, T_{n-1}$. Par conséquent ⁵⁶ nous pouvons factoriser les $X - T_i$, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}[T_1, \dots, T_{n-1}]$ tel que

$$f = \alpha \prod_{i=1}^{n-1} (X - T_i). \quad (4.244)$$

EgeVxRwQ

Nous trouvons α en écrivant $f(0)$. D'une part la formule (4.244) nous donne

$$f(0) = \alpha(-1)^{n-1} T_1 \dots T_{n-1}. \quad (4.245)$$

EqblwWMj

⁵⁶. Proposition 3.111.

D'autre part la définition donne

$$f(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ T_1 & & T_{n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ T_1^{n-1} & \cdots & T_{n-1}^{n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.246a)$$

$$= (-1)^{n-1} \det \begin{pmatrix} T_1 & \cdots & T_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_1^{n-1} & \cdots & T_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \quad (4.246b)$$

$$= (-1)^{n-1} T_1 \cdots T_{n-1} \det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_1^{n-1} & \cdots & T_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \quad (4.246c)$$

$$= (-1)^{n-1} T_1 \cdots T_{n-1} V(T_1, \dots, T_{n-1}) \quad (4.246d)$$

En égalisant avec (4.245), nous trouvons $\alpha = V(T_1, \dots, T_{n-1})$, et donc

$$f = V(T_1, \dots, T_{n-1}) \prod_{j \leq n-1} (X - T_j) \quad (4.247)$$

Enfin, une récurrence montre que

$$V(T_1, \dots, T_n) = f(T_n) \quad (4.248a)$$

$$= V(T_1, \dots, T_{n-1}) \prod_{j \leq n-1} (T_n - T_j) \quad (4.248b)$$

$$= \prod_{k \leq n} \prod_{j \leq k-1} (T_k - T_j) \quad (4.248c)$$

$$= \prod_{1 \leq j < k \leq n} (T_k - T_j). \quad (4.248d)$$

□

PROPoNVXIoXJKpIZ

Proposition 4.127 ([1]).

Soient des $a_i \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad (4.249)$$

ait $n+1$ racines distinctes dans $\mathbb{R}$. Alors

$$(1) \quad f = 0$$

$$(2) \quad a_k = 0 \text{ pour tout } k.$$

Démonstration. Nous nommons $(r_i)_{i=1, \dots, n+1}$ les racines de f . L'équation $f(x) = 0$ s'écrit

$$(1, x, \dots, x^n) \cdot (a_0, \dots, a_n) = 0. \quad (4.250)$$

Le système $f(r_i) = 0$ (vu comme système d'équation pour les a_i) pour tout i s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & r_1 & \cdots & r_1^n \\ 1 & r_2 & \cdots & r_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & r_n & \cdots & r_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0. \quad (4.251)$$

La proposition 4.126 nous dit que le déterminant de ce système est non nul. Donc il existe une solution unique. Cette unique solution est manifestement $(a_0, \dots, a_n) = (0, \dots, 0)$. □

4.5 Espaces de polynômes

SecEspacePolynomes

Attention : les polynômes en-soi, font l'objet de la définition 1.461.

Pour chaque $k > 0$ donné, nous définissons

$$\mathcal{P}_{\mathbb{R}}^k = \{p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid p : x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k, a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 0, \dots, k\}. \quad (4.252)$$

Il est facile de se convaincre que la somme de deux polynômes de degré inférieur ou égal à k est encore un polynôme de degré inférieur ou égal à k . En outre il est clair que la multiplication par un scalaire ne peut pas augmenter le degré d'un polynôme. L'ensemble $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}^k$ est donc un espace vectoriel muni des opérations héritées de $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}$.

PROPooWOMFooLpTKgG

Proposition 4.128 ([1]).

Les polynômes $x \mapsto x^k$ avec $k = 0, \dots, n$ forment une base de $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}^k$.

Démonstration. Si nous notons $e_i(x) = x^i$, et si P est un polynôme, alors il existe des a_i tels que $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$. Dans ce cas, $P = \sum_i a_i e_i$. Cela prouve que $\{e_i\}_{i=0, \dots, n}$ est générateur.

Pour montrer que c'est libre, nous supposons que $\sum_{i=0}^n a_i e_i = 0$. En particulier le polynôme $P(x) = \sum_i a_i x^i$ a plein de racines distinctes et la proposition 4.127 implique que $a_i = 0$ pour tout i . $\square$

Nous allons maintenant étudier trois applications linéaires de $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}^k$ vers d'autres espaces vectoriels.

L'isomorphisme canonique $\phi : \mathcal{P}_{\mathbb{R}}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ Nous définissons ϕ par les relations suivantes

$$\phi(x^j) = e_{j+1}, \quad \forall j \in \{0, \dots, k\}.$$

Cela veut dire que pour tout p dans $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}^k$, avec $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k$, l'image de p par ϕ est

$$\phi(p) = \phi\left(\sum_{j=0}^k a_j x^j\right) = \sum_{j=0}^k a_j e_{j+1}.$$

Exemple 4.129.

Soit $k = 5$ on a

$$\phi(-8 - 7x - 4x^2 + 4x^3 + 2x^5) = \begin{pmatrix} -8 \\ -7 \\ -4 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (4.253)$$

△

Cette application est clairement bijective et respecte les opérations d'espace vectoriel, donc c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels. L'existence d'un isomorphisme entre $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}^k$ et $\mathbb{R}^{k+1}$ est un cas particulier du théorème qui dit que pour chaque m dans $\mathbb{N}_0$ fixée, tous les espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de dimension m sont isomorphes à $\mathbb{R}^m$. Vous connaissez peut être déjà ce théorème depuis votre cours d'algèbre linéaire.

La dérivation $d : \mathcal{P}_{\mathbb{R}}^k \rightarrow \mathcal{P}_{\mathbb{R}}^{k-1}$ L'application de dérivation d fait exactement ce qu'on attend d'elle

$$d(x^0) = d(1) = 0, \quad d(x^j) = jx^{j-1}, \quad \forall j \in \{1, \dots, k\}.$$

Cette application n'est pas injective, parce que l'image de p ne dépend pas de la valeur de a_0 , donc si deux polynômes sont les mêmes à une constante près ils auront la même image par d .

Exemple 4.130.

Soit $k = 3$ on a

$$d(-8 - 12x + 4x^3) = -12(1) + 4(3x^2) = -12 + 12x^2. \quad (4.254)$$

Noter que $d(-30 - 12x + 4x^3) = d(-8 - 12x + 4x^3)$. Cela confirme, comme mentionné plus haut, que la dérivée n'est pas injective. $\triangle$

L'intégration $I : \mathcal{P}_{\mathbb{R}}^k \rightarrow \mathcal{P}_{\mathbb{R}}^{k+1}$ Nous pouvons définir une application qui est « à une constante près » l'application réciproque de la dérivation. Cette application est définie sur les éléments de base par

$$I(x^j) = \frac{x^{j+1}}{j+1}. \quad (4.255)$$

Bien entendu, la raison d'être et la motivation de cette définition apparaîtront lorsque nous développerons une théorie générale de l'intégration.

Exemple 4.131.

Soit $k = 4$ on a

$$I(6 + 2x + x^2 + x^4) = 6x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}. \quad (4.256)$$

$\triangle$

Remarque : étant donné que dans la définition de I nous avons décidé d'intégrer entre zéro et x , tous les polynômes dans $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}^{k+1}$ qui sont l'image par I d'un polynôme de $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}^k$ ont $a_0 = 0$. Cela veut dire que nous pouvons générer toute l'image de I en utilisant un sous-ensemble de la base canonique de $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}^{k+1}$, en particulier $\mathcal{B}_1 = \{x \mapsto x^j \mid j = 1, \dots, k\} \subset \mathcal{B}$ nous suffira. Cela n'est guère surprenant, parce que l'image par une application linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie ne peut pas être un espace de dimension supérieure.

Les applications de dérivation et intégration correspondent évidemment à des applications linéaires de $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ dans lui-même.

L'espace de tous les polynômes étant de dimension infinie, il peut servir de contre-exemple assez simple. Dans la sous-section 10.3.2, nous verrons que toutes les normes ne sont pas équivalentes sur l'espace des polynômes.

4.6 Projection et orthogonalité

PropProjScal

Proposition 4.132.

Si nous écrivons proj_Y l'opération de projection sur la droite qui sous-tend Y , alors nous avons

$$\|\text{proj}_Y X\| = \frac{X \cdot Y}{\|Y\|}. \quad (4.257)$$

Démonstration. Les vecteurs X et Y sont des flèches dans l'espace. Nous pouvons choisir un système d'axe orthogonal tel que les coordonnées de X et Y soient

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.258)$$

où l est la longueur du vecteur Y . Pour ce faire, il suffit de mettre le premier axe le long de Y , le second dans le plan qui contient X et Y , et enfin le troisième axe dans le plan perpendiculaire aux deux premiers.

Un simple calcul montre que $X \cdot Y = xl + y \cdot 0 + 0 \cdot 0 = xl$. Par ailleurs, nous avons $\|\text{proj}_Y X\| = x$. Par conséquent,

$$\|\text{proj}_Y X\| = \frac{X \cdot Y}{l} = \frac{X \cdot Y}{\|Y\|}. \quad (4.259)$$

$\square$

Corolaire 4.133.

Si la norme de Y est 1, alors le nombre $X \cdot Y$ est la longueur de la projection de X sur Y .

Démonstration. Poser $\|Y\| = 1$ dans la proposition 4.132. □

4.7 Dualité

PropEJBZooTNFPRj

Proposition 4.134.

Si A est la matrice d'une application linéaire, alors le rang de cette application linéaire est égal au rang de A , c'est-à-dire à la taille de la plus grande matrice carrée de déterminant non nul contenue dans A .

DefJPGSHpn

Définition 4.135.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

- (1) Une **forme linéaire** sur E est une application linéaire de E sur son corps de base $\mathbb{K}$.
- (2) Le **dual algébrique** de E , noté E^* , est l'ensemble des formes linéaires sur E . Autrement dit : $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Nous verrons les formes multilinéaires en la définition 8.1.

Nous verrons plus tard qu'en dimension infinie, les applications linéaires ne sont pas toujours continues. Nous définirons donc aussi un concept de dual topologique. Voir la proposition 10.81, la remarque 10.84 et la définition 25.1.

DEFooTMSEooZFtsqa

Lemme-Définition 4.136.

Si E est un espace vectoriel et si $\{b_i\}$ est une base de E , alors nous définissons

$$\begin{aligned} b_i^* : E &\rightarrow \mathbb{K} \\ b_j &\mapsto \delta_{ij}, \end{aligned} \tag{4.260}$$

et sa prolongation par linéarité. Ces éléments du dual E^* forment une base appelée **base duale**.

En particulier nous avons

$$\dim(E) = \dim(E^*). \tag{4.261}$$

Démonstration. Notons pour commencer que $b_i^*(\sum_j x_j b_j) = x_i$.

- (1) **Générateur** Soit $\varphi \in E^*$. Nous avons

$$\varphi(x) = \sum_i x_i \varphi(b_i) = \sum_i \varphi(b_i) b_i^*(x), \tag{4.262}$$

ce qui signifie que $\varphi = \sum_i \varphi(b_i) b_i^*$.

- (2) **Libre** Si $\sum_i a_i b_i^* = 0$, alors en particulier en appliquant à b_k nous avons

$$0 = \left(\sum_i a_i b_i^* \right) (b_k) = \sum_i a_i \delta_{ik} = a_k. \tag{4.263}$$

Donc tous les coefficients sont nuls et $\{b_i^*\}_{i=1,\dots,n}$ est libre. □

Notons que si $v \in E$ est un vecteur, ça n'a aucun sens à priori de parler de v^* . Il s'agit bien de définir toute la base $\{e_i^*\}$ à partir de toute la base $\{e_i\}$.

LEMooSVRIooFbx fue

Lemme 4.137 (Changement de base duale[1]).

Soient un espace vectoriel V de dimension finie, une base $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ et sa base duale $\{\alpha_i\}_{i=1,\dots,n}$. Soit une bijection linéaire $A: V \rightarrow V$. Nous considérons $\{\beta_i\}_{i=1,\dots,n}$ la base duale de la base $\{Ae_i\}$.

Alors

$$\beta_i = \sum_j A_{ij}^{-1} \alpha_j. \tag{4.264}$$

Démonstration. Par définition d'une base duale, il faut $\beta_i(Ae_k) = \delta_{ik}$. Vu que $\{\alpha_i\}$ est une base, nous pouvons décomposer β_i de la façon suivante : $\beta_i = \sum_j B_{ij}\alpha_j$. Il nous reste à prouver que $B = A^{-1}$.

Pour cela nous calculons un peu :

$$\delta_{ik} = \beta_i(Ae_k) = \sum_j B_{ij}\alpha_j(Ae_k) = \sum_{lj} B_{ij}A_{lk} \underbrace{\alpha_j(e_l)}_{=\delta_{jl}} = \sum_l B_{il}A_{lk} = (BA)_{ik}. \quad (4.265)$$

Nous avons donc $\delta_{ik} = (BA)_{ik}$, c'est-à-dire $BA = \mathbb{1}$ ou encore $B = A^{-1}$. □

LEMooQLWNooYUpGdo

Lemme 4.138 ([156]).

Soit un espace vectoriel E de dimension finie.

ITEMooHHTLooNCjgfn

(1) Si α est une forme linéaire non nulle sur E , alors il existe $x \in E$ tel que $\alpha(x) = 1$.

ITEMooBYAAooUWBKDk

(2) Si $x \neq 0$ dans E , alors il existe une forme linéaire α sur E telle que $\alpha(x) = 1$.

Démonstration. En deux parties.

- (1) **Pour (1)** Puisque α est non nulle, nous pouvons considérer $v \in E$ tel que $\alpha(v) \neq 0$. Alors en posant $x = \alpha(v)^{-1}v$, nous avons le résultat.
- (2) **Pour (2)** Soit un vecteur non nul que nous écrivons sous la forme $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ (pour une certaine base $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ de E). Supposons que $x_k \neq 0$. Alors la forme

$$\begin{aligned} \alpha: E &\rightarrow \mathbb{K} \\ y &\mapsto y_k/x_k \end{aligned} \quad (4.266)$$

fait l'affaire. □

LEMooKTREooBrnWVz

Lemme 4.139.

Soit un espace vectoriel de dimension finie E sur le corps $\mathbb{K}$. Si $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ est une base de E^* , alors l'application

$$\begin{aligned} \Phi: E &\rightarrow \mathbb{K}^n \\ x &\mapsto (\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)) \end{aligned} \quad (4.267)$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration. En deux parties.

- (1) **Φ est injective** Soit $z \in \ker(\Phi)$. Nous avons $\alpha_i(z) = 0$ pour tout i . Si $z \neq 0$, alors le lemme 4.138 dit qu'il existe $\beta \in E^*$ tel que $\beta(z) \neq 0$.
Décomposons un tel β dans la base de $\{\alpha_i\}$:

$$\beta = \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i. \quad (4.268)$$

Alors nous avons

$$0 \neq \beta(z) = \sum_{i=1}^n \beta_i \underbrace{\alpha_i(z)}_{=0} = 0. \quad (4.269)$$

Contradiction. Donc $\ker(\Phi) = \{0\}$ et Φ est injective.

- (2) **Φ est surjective** Les espaces vectoriels E , E^* et $\mathbb{K}^n$ ont tout trois, une dimension n . Donc Φ est une application linéaire injective entre deux espaces de même dimension. Elle est donc surjective par le corolaire 4.51. □

PROF00DBPG00PagbEB

Proposition-Définition 4.140 ([156]).

Soit un espace vectoriel E de dimension finie sur le corps $\mathbb{K}$. Toute base du dual E^* est duale d'une unique base de E . Cette base est dite **préduale**.

Démonstration. Nous considérons une base $\mathcal{F} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ de E^* . Nous devons prouver qu'il existe une unique base de E dont la base duale est $\mathcal{F}$.

- (1) **Existence** Le lemme 4.139 nous indique que l'application

$$\begin{aligned}\Phi: E &\rightarrow \mathbb{K}^n \\ x &\mapsto (\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x))\end{aligned}\tag{4.270}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Soit la base canonique de $\mathbb{K}^n : (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$. Puisque Φ est un isomorphisme, $(\Phi^{-1}(\epsilon_i))_{i=1, \dots, n}$ est une base de E . Nous allons montrer qu'elle est préduale de (α_i) . Nous posons $e_i = \Phi^{-1}(\epsilon_i)$ et nous calculons :

$$\begin{aligned}\alpha_i(e_j) &= \alpha_i(\Phi^{-1}(\epsilon_j)) && (4.271a) \\ &= \Phi(\Phi^{-1}(\epsilon_j))_i && (4.271b) \\ &= (\epsilon_i)_j && (4.271c) \\ &= \delta_{i,j} && (4.271d)\end{aligned}$$

SUBEQ00ACVA00VNwzMQ
SUBEQ00OYNH00SV00yz

Justifications :

- Pour 4.271b, nous remarquons que $\alpha_i(x) = \Phi(x)_i$.
 - Pour 4.271d, nous utilisons le fait que les ϵ_j forment la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
- (2) **Unicité** Soit une base préduale (e_i) de (α_i) . Nous avons, par définition, que $\alpha_i(e_j) = \delta_{i,j}$. Donc

$$(\alpha_1(e_j), \dots, \alpha_n(e_j)) = \epsilon_j.\tag{4.272}$$

Nous appliquons Φ^{-1} à cette dernière équation pour obtenir $e_j = \Phi^{-1}(\epsilon_j)$. Donc les e_j sont déterminés de façon unique à partir des α_i .

□

Si u et v sont des vecteurs de $\mathbb{K}^n$, alors nous notons uv^* l'application linéaire

$$\begin{aligned}uv^*: \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathbb{K}^n \\ x &\mapsto uv^*(x).\end{aligned}\tag{4.273}$$

Lemme 4.141 (Lemme des déterminants[157]).

LEM00JVDH00ONXNAh

Soit une application linéaire $A \in \text{End}(\mathbb{K}^n)$ ainsi que $u, v \in \mathbb{K}^n$. Nous avons

- (1) $\det(A + uv^*) = (1 + v \cdot Au) \det(A)$
- (2) $\det(\mathbb{1} + af) = 1 + f(a)$.

ITEM00GJOZ00VLfZcX

4.7.1 Changement de base duale

PROF00DOEY00DpUbnc

Proposition 4.142 ([1]).

Soient deux bases $\{e_i\}$ et $\{e'_j\}$ de l'espace vectoriel V . Nous notons $\{\alpha_i\}$ et $\{\alpha'_i\}$ les bases duales. Si $e'_j = \sum_i A_{ij}e_i$, alors

$$\alpha'_j = \sum_k A_{jk}^{-1} \alpha_k.\tag{4.274}$$

Démonstration. Nous posons $\alpha'_j = \sum_k B_{kj} \alpha_k$ et nous appliquons ça à e'_i . À gauche nous avons $\alpha'_j(e'_i) = \delta_{ij}$, et à droite,

$$\sum_k B_{kj} \alpha_k(e'_i) = \sum_k B_{kj} \alpha_k \left(\sum_l A_{li} e_l \right) \quad (4.275a)$$

$$= \sum_{kl} B_{kj} A_{li} \delta_{kl} \quad (4.275b)$$

$$= \sum_l B_{lj} A_{li} \quad (4.275c)$$

$$= (B^t A)_{ji}. \quad (4.275d)$$

Nous avons donc montré que $B^t A = \mathbb{1}$, ou encore que $B^t = A^{-1}$, ce qu'il fallait. $\square$

4.7.2 Orthogonal

Définition 4.143.

Soit E , un espace vectoriel, et F un sous-espace de E . L'**orthogonal** de F est la partie $F^\perp \subset E^*$ donnée par

$$F^\perp = \{ \alpha \in E^* \text{ tel que } \forall x \in F, \alpha(x) = 0 \}. \quad (4.276)$$

Cette définition d'orthogonal via le dual n'est pas du pur snobisme. En effet, la définition « usuelle » qui ne parle pas de dual,

$$F^\perp = \{ y \in E \text{ tel que } \forall x \in F, y \cdot x = 0 \}, \quad (4.277)$$

demande la donnée d'un produit scalaire. Évidemment dans le cas de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel et de l'identification usuelle entre $\mathbb{R}^n$ et $(\mathbb{R}^n)^*$ via une base, les deux notions d'orthogonal coïncident.

La définition 4.143, au contraire, est intrinsèque : elle ne dépend que de la structure d'espace vectoriel.

Si $B \subset E^*$, on note B^o son orthogonal :

$$B^o = \{ x \in E \text{ tel que } \omega(x) = 0, \forall \omega \in B \}. \quad (4.278)$$

Notons qu'on le note B^o et non $B^\perp$ parce qu'on veut un peu s'abstraire du fait que $(E^*)^* = E$. Du coup on impose que B soit dans un dual, et on prend une notation précise pour dire qu'on remonte au pré-dual, et non qu'on va au dual du dual.

Proposition 4.144.

Soient un espace vectoriel E et F , un sous-espace vectoriel de E . Nous avons

$$\dim F + \dim F^\perp = \dim E. \quad (4.279)$$

Démonstration. Soit $\{e_1, \dots, e_p\}$ une base de F que nous complétons en une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E par le théorème 4.14. Soit $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ la base duale. Alors nous prouvons que $\{e_{p+1}^*, \dots, e_n^*\}$ est une base de $F^\perp$.

D'abord, ce sont des éléments de $F^\perp$, parce que si $i \leq p$ et si $k \geq 1$, nous avons $e_{p+k}^*(e_i) = 0$; donc oui, $e_{p+k}^* \in F^\perp$.

Ensuite, en tant que partie d'une base de F^* , c'est une partie libre. Il reste à montrer que c'est générateur.

Enfin $F^\perp \subset \text{Span}\{e_k^*, k \in \{p+1, \dots, n\}\}$ parce que si $\omega = \sum_{k=1}^n \omega_k e_k^*$, alors $\omega(e_i) = \omega_i$, mais nous savons que si $\omega \in F^\perp$, alors $\omega(e_i) = 0$ pour $i \leq p$. Donc $\omega = \sum_{k=p+1}^n \omega_k e_k^*$. $\square$

La proposition 8.181 donnera une version plus terre à terre de la proposition 4.144 en disant que si nous avons un produit scalaire, alors $E = F \oplus F^\perp$ où $F^\perp$ est cette fois défini comme l'orthogonal pour le produit scalaire.

4.8 Représentation de groupe

Définition 4.145 (Représentation).

Soit un groupe G . Une **représentation** de G est un couple (E, ρ) où E est un espace vectoriel et ρ est une application $\rho: G \rightarrow \text{GL}(E)$ vérifiant

$$\rho(g) \circ \rho(h) = \rho(gh). \quad (4.280)$$

pour tout $g, h \in G$.

Définition 4.146.

Une représentation⁵⁷ $\rho: G \rightarrow \text{GL}(E)$ est **fidèle** si elle est injective

La dimension de E est le **degré** de la représentation (E, ρ) .

Le fait que la représentation $\rho: G \rightarrow \text{GL}(E)$ soit fidèle ne dit pas que chacun des $\rho(g)$ est injectif.

Proposition 4.147.

Soit un corps $\mathbb{K}$. Si G est un groupe dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ (c'est-à-dire un groupe de matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$), alors l'application

$$\begin{aligned} \rho: G &\rightarrow \text{GL}(\mathbb{K}^n) \\ A &\mapsto f_A \end{aligned} \quad (4.281)$$

où f_A est l'application linéaire associée à A , est une représentation de G .

Démonstration. La représentation dont nous parons n'est autre que l'application ψ de la définition 4.72, dont nous connaissons beaucoup de propriétés. La proposition 4.78 dit, entre autres, que $\psi(AB) = \psi(A)\psi(B)$, c'est-à-dire que $\rho(AB) = \rho(A)\rho(B)$, et donc que ρ est une représentation. $\square$

4.9 Somme directe d'espaces vectoriels

Si V et W sont des espaces vectoriels, ce que nous notons $V \oplus W$ n'est rien d'autre que l'espace vectoriel de l'ensemble $V \times W$.

Proposition-Définition 4.148 ([158, 159]).

Si V et W sont des espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$, alors les définitions

- (1) $(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$
- (2) $\lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w)$

donnent une structure d'espace vectoriel sur $V \times W$.

Cet espace sera noté $V \oplus W$ et est appelé **somme directe** de V et W .

Définition 4.149 (Sous-espaces en somme directe[160]).

Soient un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ ainsi que des sous-espaces vectoriels $\{F_i\}_{i \in I}$ (I est un ensemble fini ou infini). Nous disons que les F_i sont **en somme directe** si pour tout élément $u \in \sum_{i \in I} F_i$, il existe un unique ensemble $\{u_i\}_{i \in I}$ de vecteurs tel que

- (1) $u = \sum_{i \in I} u_i$
- (2) $u_i \in F_i$ pour tout i ,
- (3) $\{j \in I \text{ tel que } u_j \neq 0\}$ est fini.

Si l'espace vectoriel E est un espace vectoriel topologique, nous avons la définition 7.227 qui donne des conditions de compatibilité entre les topologies.

⁵⁷. Définition 4.145.

LEMooHWRVooLedAmF

Lemme 4.150 (Décomposition suivant une somme directe).

Soit un espace vectoriel E et deux sous-espaces F_1, F_2 en somme directe : $E = F_1 \oplus F_2$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \psi: F_1 \times F_2 &\rightarrow E \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned} \quad (4.282)$$

est une bijection.

Démonstration. L'application est injective parce que si $\psi(x_1, x_2) = \psi(y_1, y_2)$, alors $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$. Nommons u ce vecteur. Par unicité de l'ensemble $\{u_1, u_2\}$ tel que $u = u_1 + u_2$, nous avons automatiquement $\{x_1, x_2\} = \{y_1, y_2\}$ et donc $x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$.

En ce qui concerne la surjectivité, si $u \in E$, il existe un ensemble $\{u_1, u_2\}$ avec $u_i \in F_i$ tel que $u = u_1 + u_2 = \psi(u_1, u_2)$. $\square$

LEMooDQMQooInVVDY

Lemme 4.151 ([1, 160]).

Soient un espace vectoriel E ainsi que des sous-espaces vectoriels F_i . Nous avons équivalence entre les assertions suivantes.

ITEMooHJXIooQKAfBe

(1) Les F_i sont en somme directe⁵⁸.

ITEMooJFOFooGDIwUz

(2) Si $\sum_{i \in I} u_i = 0$ avec $u_i \in F_i$ et si $\{j \in I \text{ tel que } u_j \neq 0\}$ est fini, alors tous les u_i sont nuls.

ITEMooNFVWooNdhid

(3) Chaque espace F_k est en somme directe avec la somme des précédents, c'est-à-dire que pour tout k ,

$$\left(\sum_{i=1}^{k-1} F_i \right) \cap F_k = \{0\}. \quad (4.283)$$

ITEMooPLXGooCOQgen

(4) Pour tout k ,

$$F_k \cap \left(\sum_{i \neq k} F_i \right) = \{0\}. \quad (4.284)$$

Notez qu'ici $\sum_{i \neq k} F_i$ signifie l'ensemble des $x \in V$ pouvant être écrit comme une combinaison linéaire finie d'éléments des F_i avec $i \neq k$.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **(1) implique (2)** Par définition de la somme directe, le vecteur 0 de E peut être écrit de façon unique sous la forme $\sum_i u_i$, et cette façon est avec $u_i = 0$ pour tout i .

(2) **(2) implique (3)** Supposons que $\sum_{i=1}^{k-1} u_i = u_k$ avec $u_j \in F_j$ pour tout j . Alors en posant $v_i = u_i$ ($i=1, \dots, k-1$) et $v_k = -u_k$ nous avons $\sum_{i=1}^k v_i = 0$, ce qui, en vertu de (2) donne $v_i = 0$ pour tout i .

(3) **(3) implique (4)** Supposons avoir

$$u_k = \sum_{i \in J} u_i \quad (4.285)$$

où J est fini dans $\mathbb{N} \setminus \{k\}$. Donc $J = \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}$ pour un certain n . En réarrangeant la somme nous avons

$$u_n = \sum_{i=1}^{n-1} u_i, \quad (4.286)$$

et donc tous les u_i sont nuls par (3).

(4) **(4) implique (1)** Soit un élément $x \in \sum_{i \in I} F_i$. Nous l'écrivons de deux façons

$$x = \sum_{i \in J_1} u_i = \sum_{i \in J_2} v_i \quad (4.287)$$

58. Définition 4.149.

où J_1 et J_2 sont finis. Nous posons $J = J_1 \cup J_2$ et $u_j = 0$ pour $j \in J \setminus J_1$ et $v_j = 0$ pour $j \in J \setminus J_2$. Ainsi $\sum_{i \in J} u_i = \sum_{i \in J} v_i$ et donc

$$\sum_{i \in J} (u_i - v_i) = 0. \quad (4.288)$$

Soit $k \in J$. Nous avons

$$u_k - v_k = \sum_{i \in J \setminus \{k\}} (u_i - v_i). \quad (4.289)$$

En vertu de (4), tout est nul et en particulier $v_i = u_i$ pour tout i .

□

PROF00CASNo0Eqisqa

Proposition 4.152 ([161]).

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, et deux sous-espaces F_1 et F_2 satisfaisant

- (1) $F_1 \cap F_2 = \{0\}$,
- (2) $\dim(F_1) + \dim(F_2) \geq \dim(E)$.

Alors $E = F_1 \oplus F_2$.

Démonstration. Soient une base $\{e_i\}_{i \in I}$ de F_1 et $\{f_\alpha\}$ de F_2 . Nous commençons par prouver que la partie $B = \{e_i\} \cup \{f_\alpha\}$ est libre.

Supposons en effet, avoir des coefficients a_i et b_α tels que

$$\sum_i a_i e_i + \sum_\alpha b_\alpha f_\alpha = 0. \quad (4.290)$$

Cela implique que $\sum_i a_i e_i = -\sum_\alpha b_\alpha f_\alpha$. Or $\sum_i a_i e_i \in F_1$ et $-\sum_\alpha b_\alpha f_\alpha \in F_2$. Donc les éléments $\sum_i a_i e_i$ et $\sum_\alpha b_\alpha f_\alpha$ sont dans $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. Nous avons alors les égalités

$$\sum_i a_i e_i = 0 \quad (4.291)$$

et

$$\sum_\alpha b_\alpha f_\alpha = 0. \quad (4.292)$$

La première implique $a_i = 0$ pour tout i et la seconde implique $b_\alpha = 0$ pour tout α .

Donc B est une partie libre de E contenant $\dim(F_1) + \dim(F_2) \geq \dim(E)$ éléments. La proposition 4.19(1) nous indique alors qu'en réalité $\dim(F_1) + \dim(F_2) = \dim(E)$. Comme B est une partie libre contenant $\dim(E)$ éléments, c'est une base par la proposition 4.19(2). □

DEF00YQZH00CDuhDU

Définition 4.153 (Projection parallèle).

Si nous avons une somme directe d'espaces vectoriels⁵⁹ $E = \bigoplus_{k=1}^n E_k$ alors le **projecteur sur E_i parallèlement aux autres E_i** est l'application

$$\begin{aligned} p_i: E &\rightarrow E \\ x_1 + \dots + x_n &\mapsto x_i \end{aligned} \quad (4.293)$$

où $(x_1, \dots, x_n)$ est la décomposition⁶⁰ de x selon les espaces E_i .

Cette application est un projecteur au sens de la définition 1.445.

LEM00CFDY00HTroSi

Lemme 4.154 ([1]).

Soit une somme directe d'espaces vectoriels⁶¹ $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$. Si une application linéaire $p: E \rightarrow E$ vérifie

ITEM00CDFX00KZJvON

- (1) Si $i \neq k$, $p(E_i) = \{0\}$,

59. Définition 4.149.

60. Lemme 4.149.

61. Définition 4.149.

ITEMooJKLVooLbSljW

(2) $p(x) = x$ pour tout $x \in E_k$,

alors p est la projection sur E_k parallèle⁶² aux autres E_i .

Démonstration. Soit $x \in E$ et décomposons-le selon le lemme 4.149 : $x = x_1 + \dots + x_n$. Alors

$$p(x) = p(x_1) + \dots + p(x_n) \quad p \text{ est linéaire} \quad (4.294a)$$

$$= p(x_k) \quad \text{hyp. (1)} \quad (4.294b)$$

$$= x_k \quad \text{hyp. (2)} \quad (4.294c)$$

$$(4.294d)$$

□

4.9.1 Structure réelle

DEFooCIFSoovmcNtE

Proposition-Définition 4.155 ([162, 159, 1]).

Soit un espace vectoriel E sur $\mathbb{C}$. Il existe une application $\sigma : E \rightarrow E$ telle que

$$(1) \quad \sigma^2 = \text{Id}_E$$

$$(2) \quad \text{Pour tout } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, f(\alpha x + \beta y) = \bar{\alpha}\sigma(x) + \bar{\beta}\sigma(y).$$

Une telle application est une **structure réelle** sur E .

Démonstration. La proposition 4.25 nous permet de considérer une base $\{e_i\}_{i \in I}$ de E . Alors, nous définissons

$$\sigma\left(\sum_{i \in I} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i e_i. \quad (4.295)$$

Notez que la somme est toujours finie.

□

PROPooPZHPooNdarzg

Proposition 4.156.

Soit un espace vectoriel E sur $\mathbb{C}$ et une structure réelle⁶³ σ sur E . Nous posons

$$E_{\mathbb{R}} = \{v \in E \text{ tel que } \sigma(v) = v\}. \quad (4.296)$$

Alors

(1) La partie $E_{\mathbb{R}}$ est un espace vectoriel réel.

(2) Nous avons la décomposition en somme directe⁶⁴

$$E = E_{\mathbb{R}} \oplus iE_{\mathbb{R}}. \quad (4.297)$$

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Espace vectoriel réel** Si $v, w \in E_{\mathbb{R}}$, alors

$$\sigma(v + w) = \sigma(v) + \sigma(w) = v + w, \quad (4.298)$$

et si $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\sigma(\lambda x) = \lambda \sigma(x) = \lambda x. \quad (4.299)$$

Donc $E_{\mathbb{R}}$ est un espace vectoriel réel.

62. Définition 4.153.

63. Définition 4.155.

64. Définition 4.148.

(2) **Première somme directe** Nous définissons

$$E^+ = \{v \in E \text{ tel que } \sigma(v) = v\}, \quad (4.300a)$$

$$E^- = \{v \in E \text{ tel que } \sigma(v) = -v\} \quad (4.300b)$$

Nous prouvons que

$$\begin{aligned} \psi: E^+ \times E^- &\rightarrow E \\ (a, b) &\mapsto a + b \end{aligned} \quad (4.301)$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Puisque ψ est linéaire, il suffit de prouver qu'elle est bijective.

(2a) **Subjectif** Si $v \in E$, alors en posant $v_+ = \frac{1}{2}(v + \sigma(v))$, $v_- = \frac{1}{2}(v - \sigma(v))$, nous avons

$$v = v_+ + v_-, \quad v_+ \in E^+, \quad v_- \in E^-, \quad (4.302)$$

et donc $v = \psi(v_+, v_-)$.

(2b) **Injectif** Supposons $\psi(a, b) = \psi(\alpha, \beta)$. Alors $a + b = \alpha + \beta$ et donc $a - \alpha = \beta - b$. Comme $a - \alpha \in E^+$ et $\beta - b \in E^-$, nous savons que $a - \alpha = \beta - b \in E^+ \cap E^-$. Étant donné que $E^+ \cap E^- = \{0\}$, nous avons $a - \alpha = \beta - b = 0$.

Nous avons donc la somme directe $E = E^+ \oplus E^-$.

(3) **Conclusion** Par définition, $E^+ = E_{\mathbb{R}}$. Il nous reste à voir que $E^- = iE^+$. Nous prouvons les inclusions dans les deux sens.

(3a) $\underline{E^- \subset iE^+}$ Soit $v \in E^-$. Nous avons $iv \in E^+$; en effet

$$\sigma(iv) = \bar{i}\sigma(v) = -i\sigma(v) = iv. \quad (4.303)$$

Donc $iv \in E^+$ pour $v \in E^-$.

(3b) $\underline{iE^+ \subset E^-}$ Soit $v \in E^+$, et voyons que $iv \in E^-$. En effet,

$$\sigma(iv) = -i\sigma(v) = -iv. \quad (4.304)$$

□

4.157.

Lorsque nous avons une structure réelle σ sur un espace vectoriel complexe E , nous écrivons $E = E_{\mathbb{R}} \oplus iE_{\mathbb{R}}$ sans préciser dans la notation « $E_{\mathbb{R}}$ » que cet ensemble dépend du choix de σ . En particulier si F est un sous-espace vectoriel de E , nous utiliserons la notation $F_{\mathbb{R}}$ relativement à la même involution que celle utilisée pour E .

Lemme 4.158.

Soit un espace vectoriel complexe E muni d'une structure réelle σ . Si F est un sous-espace de E alors $F_{\mathbb{R}} = E_{\mathbb{R}} \cap F$.

Démonstration. Par définition,

$$F_{\mathbb{R}} = \{v \in F \text{ tel que } \sigma(v) = v\}. \quad (4.305)$$

(1) $\underline{F_{\mathbb{R}} \subset F}$ C'est dans la définition de $F_{\mathbb{R}}$ (sous-ensemble de F).

(2) $\underline{F_{\mathbb{R}} \subset E_{\mathbb{R}}}$ Si $v \in F_{\mathbb{R}}$, alors $\sigma(v) = v$. Mais cette égalité est précisément celle qui permet d'être dans $E_{\mathbb{R}}$.

□

Vous remarquerez que ce lemme ne fonctionne que parce que nous avons choisi la même structure réelle sur F que sur E .

Chapitre 5

Classification de certains groupes

5.1 Théorèmes de Sylow

Lemme 5.1.

Soient H et K des sous-groupes finis de G . Alors

$$\text{Card}(HK) = \frac{|H| \cdot |K|}{|H \cap K|}. \quad (5.1)$$

Attention : dans ce lemme, l'ensemble HK n'est pas spécialement un groupe. Ce serait le cas si H normalisait K , c'est-à-dire si nous avions $hkh^{-1} \in K$, $\forall (h, k) \in H \times K$.

ThoCauchyGpFin

Théorème 5.2 (Théorème de Cauchy[163]).

Soit G un groupe fini et p un nombre premier divisant $|G|$. Alors

- (1) G contient un élément d'ordre p .
- (2) Si G est un p -groupe, il existe un élément central d'ordre p dans G .

ThoIfdlEB

Lemme 5.3 (Théorème de Cayley).

Si G est un groupe d'ordre n alors il est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique S_n .

Démonstration. L'action à gauche de G sur lui-même

$$\begin{aligned} \varphi: G &\rightarrow S_n \\ \varphi(x)g &\mapsto xg \end{aligned} \quad (5.2)$$

est une permutation des éléments de G . Cela donne un morphisme injectif parce que si $\varphi(x) = \varphi(y)$ nous avons $xg = yg$ pour tout g et en particulier pour $g = e$ nous trouvons $x = y$. $\square$

Pour rappel, lorsque p est premier, nous notons $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

LemaQxjcm

Lemme 5.4.

Soit p un diviseur premier de n . Alors il existe un morphisme injectif du groupe symétrique S_n dans $\text{GL}(n, \mathbb{F}_p)$.

Démonstration. Soit $\{e_i\}$ la base canonique de $\mathbb{F}_p^n$. Par exemple $e_1 = ([1]_p, [0]_p, \dots, [0]_p)$. Nous avons le morphisme injectif $\varphi: S_n \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{F}_p)$ donné par $\varphi(\sigma)e_i = e_{\sigma(i)}$. $\square$

RemFzxxst

Remarque 5.5.

En mettant bout à bout les lemmes 5.3 et 5.4, nous trouvons que si p est un diviseur premier de $|G|$, alors G peut être vu comme un sous-groupe de $\text{GL}(n, \mathbb{F}_p)$.

DEFooPRCHooVZdwST

Définition 5.6.

Soit p un nombre premier. Un **p -groupe** est un groupe dont tous les éléments sont d'ordre p^m pour un certain m (dépendant de l'élément).

Soit G un groupe fini et p , un diviseur premier de $|G|$. Un p -**Sylow** dans G est un p -sous-groupe d'ordre p^n où p^n est la plus grande puissance de p divisant $|G|$.

Notons que si p est un nombre premier, alors tout groupe d'ordre p^m est un p -groupe.

Lemme 5.7.

Soit G un groupe fini et P, Q des p -sous-groupes. Nous supposons que Q normalise P . Alors PQ est un p -sous-groupe de G .

Si S est un p -Sylow, alors p ne divise pas le nombre $|G : S| = |G|/|S|$.

Propvocmon

Proposition 5.8.

Soit le corps fini $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p premier). Soit T le sous-ensemble de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ formé des matrices triangulaires supérieures de rang¹ n et dont les éléments diagonaux sont 1. Alors T est un p -Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$.

Démonstration. Nous commençons par étudier le cardinal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$. Pour la première colonne, la seule contrainte à vérifier est qu'elle ne soit pas nulle. Il y a donc $p^n - 1$ possibilités. Pour la seconde, il faut ne pas être multiple de la première. Il y a donc $p^n - p$ possibilités (parce qu'il y a p multiples possibles de la première colonne). Pour la k -ième colonne, il faut éviter toutes les combinaisons linéaires des $(k-1)$ premières colonnes. Il y a p^{k-1} telles combinaisons et donc $p^n - p^{k-1}$ possibilités pour la k -ième colonne. Nous avons donc

$$\mathrm{Card}(\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)) = (p^n - 1)(p^n - p) \dots (p^n - p^{n-1}) \quad (5.3a)$$

$$= p \cdot p^2 \dots p^{n-1} (p^n - 1)(p^{n-1} - 1) \dots (p - 1) \quad (5.3b)$$

$$= p^{\frac{n(n-1)}{2}} m \quad (5.3c)$$

où m est un entier qui ne divise pas p .

En ce qui concerne le cardinal de T , le calcul est plus simple : pour la première ligne nous avons p^{n-1} choix (parce qu'il y a un 1 qui est imposé sur la diagonale), pour la seconde p^{n-2} , etc. En tout nous avons alors

$$|T| = p^{\frac{n(n-1)}{2}}, \quad (5.4)$$

et T est un p -Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$. □

Proposition 5.9.

Soit p un nombre premier. Un groupe fini G est un p -groupe si et seulement l'ordre de G est p^n pour un certain n .

Démonstration. Supposons que G est un p -groupe. Soit q un nombre premier divisant $|G|$. Par le théorème de Cauchy (5.2), le groupe G contient un élément d'ordre q , soit g un tel élément. Étant donné que G est un p -groupe, $g^{p^n} = g^q = e$ pour un certain n . Donc $q = p^n$ et $q = p$ parce que q est premier. Nous venons de prouver que p est le seul nombre premier qui divise $|G|$. L'ordre de G est par conséquent une puissance de p .

Nous nous intéressons maintenant à l'implication inverse. Nous supposons que $|G| = p^n$ pour un certain entier $n \geq 0$. Soit $g \in G$; nous notons r l'ordre de G . Le sous-groupe $\mathrm{gr}(g)$ est d'ordre r , donc r divise $|G|$ (par le théorème 2.14 de Lagrange). Le nombre r est alors une puissance de p . □

LemwDYQMg

Lemme 5.10.

Soit G , un groupe fini de cardinal $|G| = n$ et p , un diviseur premier de n . Nous notons $n = p^m \cdot r$ où p ne divise pas r . Soit H un sous-groupe de G et S , un p -Sylow de G . Alors il existe $g \in G$ tel que

$$gSg^{-1} \cap H \quad (5.5)$$

soit un p -Sylow de H .

1. Définition 4.48.

Démonstration. Nous considérons l'ensemble G/S sur lequel H agit. Si $a \in G$, le stabilisateur de $[a]$ dans G/S est

$$\text{Fix}([a]) = \{h \in H \text{ tel que } [ha] = [a]\} \quad (5.6a)$$

$$= \{h \in H \text{ tel que } a^{-1}ha \in S\} \quad (5.6b)$$

$$= aSa^{-1} \cap H. \quad (5.6c)$$

Nous cherchons $a \in G$ tel que l'entier

$$\frac{\text{Card}(H)}{\text{Card}(aSa^{-1} \cap H)} \quad (5.7)$$

soit premier avec p . En effet, dans ce cas le groupe $\text{Fix}([a])$ est un p -Sylow de H parce que $|H : aSa^{-1} \cap H|$ ne divise pas p . La formule des orbites (équation (2.70)) nous dit que

$$\frac{|H|}{|aSa^{-1} \cap H|} = \text{Card}(\mathcal{O}_{[a]}). \quad (5.8)$$

Supposons que toutes les orbites aient un cardinal divisible par p . Étant donné que G/S est une réunion disjointe de ses orbites, nous aurions

$$p \mid \text{Card}(G/S) = \frac{|G|}{|S|} \quad (5.9)$$

alors que S étant un p -Sylow, p ne peut pas diviser $|G|/|S|$. Toutes les orbites n'ont donc pas un cardinal divisible par p , et il existe un $a \in G$ tel que (5.7) soit vérifiée. $\square$

Théorème 5.11 (Théorème de Sylow).

Soit G un groupe fini et p , un diviseur premier de $|G|$. Alors

(1) G possède au moins un p -Sylow².

(2) Tout p -sous-groupe de G est contenu dans un p -Sylow.

(3) Les p -Sylow de G sont conjugués.

(4) Si n_p est le nombre de p -Sylow de G , alors n_p divise $|G|$ et $n_p \equiv 1 \pmod{p}$.

Démonstration. En plusieurs points.

(1) Nous savons de la remarque 5.5 que G est un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ et que ce dernier a un p -Sylow par la proposition 5.8. Par conséquent G possède un p -Sylow par le lemme 5.10.

(2) Soit H un p -sous-groupe de G et S , un p -Sylow de G (qui existe par le point précédent). Par le lemme 5.10 il existe $a \in G$ tel que $aSa^{-1} \cap H$ soit un p -Sylow de H . Mais H est un p -groupe et un p -Sylow dans un p -groupe est automatiquement le groupe entier. Par conséquent,

$$H = aSa^{-1} \cap H \quad (5.10)$$

et $H \subset aSa^{-1}$, ce qui signifie que H est inclus dans un p -Sylow.

(3) Soit H un p -Sylow. Nous venons de voir que si S est un p -Sylow quelconque, alors H est inclus au p -Sylow aSa^{-1} pour un certain $a \in G$. Donc H est un p -Sylow inclus dans le p -Sylow aSa^{-1} , donc $H = aSa^{-1}$.

(4) Le fait que n_p divise n vient du fait que tous les p -Sylow ont le même nombre d'éléments (ils sont conjugués) et sont deux à deux disjoints. Donc ils forment une partition de G et $|G| = n_p|S|$ si S est un p -Sylow quelconque.

Montrons maintenant que n_p est congru à un modulo p . Soit E l'ensemble des p -Sylow de G . Le groupe G agit sur E par conjugaison. Soit S un p -Sylow et considérons l'ensemble

$$E_S = \{T \in E \text{ tel que } s \cdot T = T, \forall s \in S\}. \quad (5.11)$$

2. Définition 5.6.

où l'action est celle par conjugaison. C'est l'ensemble des points fixes de E sous l'action de S . L'ensemble E est la réunion des orbites sous S et chacune de ces orbites a un cardinal qui divise $|S| = p^m$. Par conséquent $|\mathcal{O}_T|$ vaut 1 lorsque $T \in E_S$ et est un multiple de p sinon. Nous avons donc

$$|E| \equiv |E_S| \pmod{p}. \quad (5.12)$$

Nous voulons obtenir $|E_S| = 1$. Évidemment $S \in E_S$ parce que si $s \in S$ alors $sSs^{-1} = S$. Nous voudrions montrer que S est le seul élément de E_S . Soit $T \in E_S$, c'est-à-dire que T est un p -Sylow de G tel que

$$sTs^{-1} = T \quad (5.13)$$

pour tout $s \in S$. Soit N le groupe engendré par S et T . Montrons que T est normal dans N . Un élément g dans N s'écrit

$$g = s_1 t_1 \cdots s_r t_r \quad (5.14)$$

avec $s_i \in S$ et $t_i \in T$. Si $t \in T$, en utilisant le fait que T est un groupe et le fait que S le normalise, nous avons

$$gtg^{-1} = s_1 t_1 \dots s_r t_r t t_r^{-1} s_r^{-1} \dots t_1^{-1} s_1^{-1} \in T. \quad (5.15)$$

Donc T est un sous-groupe normal de N . Mais S et T sont conjugués dans N (parce que ils sont des p -Sylow de N), donc il existe un élément $a \in N$ tel que $aTa^{-1} = S$. Mais étant donné que T est normal,

$$S = aTa^{-1} = T. \quad (5.16)$$

Ceci achève la démonstration des théorèmes de Sylow. □

Proposition 5.12.

Si S est un p -Sylow dans le groupe G alors pour tout $g \in G$, l'ensemble gSg^{-1} est encore un p -groupe.

Démonstration. Si les éléments de S sont d'ordre p^n , alors nous avons

$$(gs^{-1})^q = gs^qg^{-1} = e. \quad (5.17)$$

Pour avoir $gs^qg^{-1} = e$, il faut et suffit que $gs^q = g$, alors $s^q = e$, c'est-à-dire $q = p^n$. Donc gSg^{-1} est encore un p -Sylow. □

Lemcmbzum

Lemme 5.13 ([164]).

Soit G , un groupe fini et p , un nombre premier. Si H et K sont des groupes distincts d'ordre p , alors $H \cap K = \{e\}$.

Démonstration. L'ensemble $H \cap K$ est un sous-groupe de H . Par conséquent son ordre divise celui de H qui est un nombre premier. Par conséquent soit $|H \cap K| = 1$, soit $|H \cap K| = |H|$. Dans le second cas nous aurions $H = K$, alors que nous avons supposé que H et K étaient distincts. □

PropyfhTmf

Proposition 5.14 ([164]).

Soit G un groupe fini et n le nombre de sous-groupes d'ordre p dans G . Alors le nombre d'éléments d'ordre p dans G vaut $n(p-1)$.

Démonstration. Si g est un élément d'ordre p dans G , le groupe H engendré par g est d'ordre p . Réciproquement si H est un groupe d'ordre p , tous les éléments de $H \setminus \{e\}$ sont d'ordre p (parce que l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe). Donc l'ensemble des éléments d'ordre p dans G est la réunion des ensembles $H \setminus \{e\}$ où H parcourt les sous-groupes d'ordre p dans G . Chacun de ces ensembles possède $p-1$ éléments et le lemme 5.13 nous assure qu'ils sont disjoints. Par conséquent nous avons $n(p-1)$ éléments d'ordre p dans G . □

Corolaire 5.15.

Un groupe d'ordre premier est cyclique.

Démonstration. Soit p l'ordre de G . Le nombre de sous-groupes d'ordre p est $n = 1$ (et c'est G lui-même). La proposition 5.14 nous dit alors que le nombre d'éléments d'ordre p dans G est $p - 1$. Donc tout élément est générateur. $\square$

5.2 Groupe monogène

Groupe monogène : définition 1.427 ; groupe cyclique : définition 1.428.

SECooXIHPOoWVSjhT

Le théorème suivant donne quelques informations à propos des groupes monogènes. Il impliquera dans le corolaire 5.42 qu'un groupe monogène d'ordre n possède $\varphi(n)$ générateurs où φ est la fonction indicatrice d'Euler définie en 5.29.

THOooDOMZooOEYHAe

Théorème 5.16.

Un groupe monogène est abélien. Plus précisément,

- (1) *un groupe monogène infini est isomorphe à $\mathbb{Z}$,*
- (2) *un groupe monogène fini est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour un certain n .*

Démonstration. Le groupe est abélien parce que $g = a^n$, $g' = a^{n'}$ implique $gg' = a^{n+n'} = g'g$. Nous considérons un générateur a de G (qui existe parce que G est monogène) et le morphisme surjectif

$$\begin{aligned} f: \mathbb{Z} &\rightarrow G \\ p &\mapsto a^p. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Si G est infini, alors f est injective parce que si $a^n = a^{n'}$, alors $a^{n-n'} = e$, ce qui rendrait G cyclique et par conséquent non infini. Nous concluons que si G est infini, alors f est une bijection et donc un isomorphisme $\mathbb{Z} \simeq G$.

Si G est fini, alors f n'est pas injective et a un noyau $\ker f$. Étant donné que $\ker f$ est un sous-groupe de G , il existe un (unique) n tel que $\ker f = n\mathbb{Z}$ et le premier théorème d'isomorphisme (théorème 2.7) nous indique que

$$\mathbb{Z}/\ker f = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \text{Image } f = G. \tag{5.19}$$

 $\square$

Le lemme suivant donne une démonstration alternative, avec une construction plus explicite de l'isomorphisme.

LemZhXMit

Lemme 5.17 ([1]).

À propos de groupes monogènes³ et cycliques.

- (1) *Soit un groupe cyclique G de cardinal n dont g est un générateur. Alors il existe un isomorphisme*

$$\phi: G \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) \tag{5.20}$$

tel que $\phi(g) = 1$.

- (2) *Si G est un groupe monogène d'ordre infini et si g est un générateur, alors il existe un isomorphisme*

$$\phi: G \rightarrow (\mathbb{Z}, +) \tag{5.21}$$

tel que $\phi(g) = 1$.

- (3) *Soient G et H deux groupes monogènes de même ordre. Soient g un générateur de G et h , un générateur de H . Il existe un isomorphisme de G sur H qui envoie g sur h .*

3. Définition 1.427.

Démonstration. Commençons par enfoncer une porte ouverte : comme le groupe est monogène, l'ordre du groupe est égal à l'ordre de son générateur. Nous séparons les cas selon que l'ordre soit fini ou non.

- (1) **L'ordre de G est fini et vaut n** Si $k \in \mathbb{Z}$, nous notons $[k]_n$ la classe de k modulo n , c'est-à-dire l'ensemble $\{k + pn \text{ tel que } p \in \mathbb{Z}\}$.

Nous construisons l'isomorphisme $\phi: G \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de la façon suivante :

$$\phi(g^m) = [m]_n. \quad (5.22)$$

Cela est une bonne définition parce qu'une égalité du type $g^m = g^{m'}$ implique que m et m' soient dans la même classe modulo n . Nous vérifions que cela est un isomorphisme entre G et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(1a) **Morphisme** Pour l'identité, si $x = e$ alors $m = 0$ et $\phi(e) = [0]_n$. Et si $x = g^k$, $y = g^l$ alors $\phi(xy) = \phi(g^{k+l}) = [k+l]_n = [k]_n + [l]_n = \phi(x) + \phi(y)$.

(1b) **Injectif** Supposons $\phi(g^k) = \phi(g^l)$ avec $k \geq l$. Nous avons $h^k = h^l$, donc $h^{k-l} = e$, ce qui donne $k - l \in [0]_n$ ou encore $[k]_n = [l]_n$. En particulier $g^k = g^l$.

(1c) **Surjectif** La classe $[k]_n$ est l'image de g^k .

- (2) **L'ordre de G est infini**

Si l'ordre de G est infini alors un élément $x \in G$ s'écrit de façon unique sous la forme $x = g^m$ avec $m \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas nous définissons directement $\phi(g^m) = m$.

Le reste de la preuve est alors identique au cas d'ordre fini, mais sans les complications liées au modulo.

La dernière assertion s'obtient des précédentes par composition d'isomorphismes. □

5.3 Automorphismes du groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Notons que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{F}_n$ est un groupe pour l'addition tandis que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ est un groupe pour la multiplication. Il ne peut donc pas y avoir d'équivoque.

ThoozyeSn

Théorème 5.18 ([165]).

Pour chaque $x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \sigma_x: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ y &\mapsto xy. \end{aligned} \quad (5.23)$$

L'application

$$\sigma: ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \cdot) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) \quad (5.24)$$

ainsi définie est un isomorphisme de groupes.

L'énoncé de ce théorème s'écrit souvent rapidement par

$$\text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \quad (5.25)$$

mais il faut bien garder à l'esprit qu'à gauche on considère le groupe additif et à droite celui multiplicatif.

Démonstration. Nous notons $[x]$ la classe de x dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Nous avons $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = [1]$. Soit f un automorphisme de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$; pour tout $r \in \mathbb{Z}$ nous avons

$$f([r]) = f(r[1]) = rf([1]) = [r]f([1]). \quad (5.26)$$

En particulier, puisque f est surjective, il existe un r tel que $f([r]) = [1]$. Pour un tel r nous avons $[1] = [r]f([1])$, c'est-à-dire que nous avons montré que $f([1])$ est inversible dans $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \cdot)$. Nous montrons à présent que⁴

$$\begin{aligned} \sigma: \text{Aut}((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)) &\rightarrow ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \cdot) \\ f &\mapsto f([1]) \end{aligned} \quad (5.27)$$

est un isomorphisme.

Nous commençons par la surjectivité. Soit $[a] \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Les éléments $[a]$ et $[1]$ étant tous deux des générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, il existe un automorphisme de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui envoie $[1]$ sur $[a]$ par le lemme 5.17. Cela prouve la surjectivité de σ .

En ce qui concerne l'injectivité, considérons des automorphismes f_1 et f_2 de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ tels que $f_1([1]) = f_2([1])$. Les automorphismes f_1 et f_2 prennent la même valeur sur un générateur et donc sur tout le groupe. Donc $f_1 = f_2$.

Enfin nous prouvons que σ est un morphisme, c'est-à-dire que $\sigma(f \circ g) = \sigma(f)\sigma(g)$. Nous avons

$$f(g([1])) = f(g([1])[1]) = g([1])f([1]) = \sigma(f)\sigma(g). \quad (5.28a)$$

□

Ce dernier résultat s'étend aux groupes cycliques.

PROPooBZOMooVOHoYf

Proposition 5.19.

Si G est un groupe cyclique⁵ d'ordre n , alors

$$\text{Aut}(G) = ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \cdot). \quad (5.29)$$

Démonstration. Vu que G est cyclique, le lemme 5.17 nous dit que G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Maintenant le théorème 5.18 nous indique que

Les égalités suivantes sont en réalité des isomorphismes de groupes :

$$\text{Aut}(G) = \text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) \quad \text{SUBEQooBNGBooEKRZUn} \quad (5.30a)$$

$$= ((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \cdot) \quad \text{SUBEQooZBMEooESGPUR} \quad (5.30b)$$

Jusitifications.

- Pour (5.30a). Le lemme 5.17 nous dit que G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, et le lemme 1.89 dit que des groupes isomorphes ont des groupes d'isomorphismes isomorphes.
- Pour (5.30b). C'est le théorème 5.18.

□

CorwgmTK

Corolaire 5.20.

Si p divise $q - 1$ alors $\text{Aut}(\mathbb{F}_q)$ possède un unique sous-groupe d'ordre p .

Démonstration. Si a est un générateur de $\mathbb{F}_q^*$ alors le groupe

$$\text{gr} \left(a^{\frac{q-1}{p}} \right) \quad \text{EqAdGiil} \quad (5.31)$$

est un sous-groupe d'ordre p . En ce qui concerne l'unicité, soit S un sous-groupe d'ordre p . Il est donc d'indice $(q-1)/p$ dans $\mathbb{F}_q^*$ et le lemme 3.25 nous enseigne que le groupe donné en (5.31) est contenu dans S . Il est donc égal à S parce qu'il a l'ordre de S . Le fait que S soit normal est dû au fait que $\mathbb{F}_q^*$ est abélien. □

4. Le σ donné ici est l'inverse de celui donné dans l'énoncé. Cela ne change évidemment rien à la validité de l'énoncé et de la preuve.

5. Définition 1.428.

5.4 Groupes abéliens finis

Nous rappelons que l'exposant d'un groupe fini est le ppcm des ordres de ses éléments. Dans le cas des groupes abéliens finis, l'exposant joue un rôle important du fait qu'il existe un élément dont l'ordre est l'exposant. C'est le théorème suivant.

Théorème 5.21 (Exposant dans un groupe abélien fini).

Un groupe abélien fini contient un élément dont l'ordre est l'exposant du groupe.

Démonstration. Soit G un groupe abélien fini et $x \in G$, un élément d'ordre maximum m . Nous montrons par l'absurde que l'ordre de tous les éléments de G divise m . Soit donc $y \in G$, un élément dont l'ordre ne divise pas m ; nous notons q son ordre. Vu que q ne divise pas m , le nombre q possède au moins un facteur premier plus de fois que m : soit p premier tel que la décomposition de q contienne p^β et celle de m contienne p^α avec $\beta > \alpha$. Autrement dit,

$$m = p^\alpha m' \quad (5.32a)$$

$$q = p^\beta q' \quad (5.32b)$$

où m' et q' ne contiennent plus le facteur p . L'élément x étant d'ordre m , l'élément x^{p^α} est d'ordre m' . De la même manière, l'élément $y^{q'}$ est d'ordre p^β . Étant donné que p^β et m' sont premiers entre eux, l'élément $x^{p^\alpha} y^{q'}$ est d'ordre $p^\alpha m' > m$. D'où une contradiction avec le fait que x était d'ordre maximal.

Par conséquent l'ordre de tous les éléments de G divise celui de x qui est alors le ppcm des ordres de tous les éléments de G , c'est-à-dire l'exposant de G . $\square$

PropfPRVxi

Proposition 5.22.

Soit G un groupe abélien fini et $x \in G$, un élément d'ordre maximum. Alors

(1) *Il existe un morphisme $\varphi: G \rightarrow \text{gr}(x)$ tel que $\varphi(x) = x$.*

ItemKRYwjU

(2) *Il existe un sous-groupe K de G tel que $G = \text{gr}(x) \oplus K$.*

Démonstration. Nous notons a l'ordre de x qui est également l'exposant du groupe G .

Nous allons prouver la première partie par récurrence sur l'ordre du groupe. Si $G = \text{gr}(x)$, alors c'est évident. Soit H un sous-groupe propre de G contenant x et tel que le problème soit déjà résolu pour H : il existe un morphisme $\varphi: H \rightarrow \text{gr}(x)$ tel que $\varphi(x) = x$. Soit $y \in G \setminus H$, d'ordre b . Nous allons trouver un morphisme $\hat{\varphi}: \text{gr}(H, y) \rightarrow \text{gr}(x)$ telle que $\hat{\varphi}(x) = x$.

Pour cela nous commençons par construire les applications suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}: \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \times H &\rightarrow \text{gr}(x) \\ (\bar{k}, h) &\mapsto x^{kl} \varphi(h) \end{aligned} \quad (5.33)$$

où l est encore à déterminer, et

$$\begin{aligned} p: \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \times H &\rightarrow \text{gr}(y, H) \\ (\bar{k}, h) &\mapsto y^k h. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Pour que $\tilde{\varphi}$ soit bien définie, il faut que a divise bl . L'application p est bien définie parce que $\bar{k}$ est pris dans $\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ et que b est l'ordre de y .

Nous allons construire le morphisme $\hat{\varphi}$ en considérant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \ker(p) & \hookrightarrow & \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \times H \xrightarrow{p} \text{gr}(y, H) \\ & & \downarrow \tilde{\varphi} \quad \swarrow \hat{\varphi} \\ & & \text{gr}(x) \end{array} \quad (5.35)$$

que l'on voudra être commutatif. Puisque p est surjective, les théorèmes d'isomorphismes nous disent que

$$\text{gr}(y, H) \simeq \frac{\mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \times H}{\ker p}. \quad (5.36)$$

Si $[\bar{k}, h]$ est la classe de $(\bar{k}, h)$ modulo $\ker(p)$ alors nous voudrions définir $\hat{\varphi}$ par

$$\hat{\varphi}([\bar{k}, h]) = \tilde{\varphi}(\bar{k}, h). \quad (5.37)$$

Pour que cela soit bien défini, il faut que si $(\bar{r}, z) \in \ker p$, alors,

$$\hat{\varphi}([\bar{k}\bar{r}, hz]) = \hat{\varphi}([\bar{k}, h]), \quad (5.38)$$

c'est-à-dire que $\tilde{\varphi}(\bar{r}, z) = e$. Du coup la définition (5.37) n'est bonne que si et seulement si

$$\ker(p) \subset \ker(\tilde{\varphi}). \quad (5.39)$$

Nous pouvons obtenir cela en choisissant bien l .

Déterminons d'abord le noyau de p . Pour cela nous considérons un nombre β divisant b tel que $\text{gr}(y) \cap H = \text{gr}(y^\beta)$. Nous aurons $p(\bar{k}, h) = e$ si et seulement si $y^h = e$. En particulier $h = y^{-k} \in \text{gr}(y) \cap H = \text{gr}(y^\beta)$. Si $h = (y^\beta)^m = y^{m\beta}$, alors $k = -m\beta$ et nous avons

$$\ker(p) = \{(-m\beta, y^{m\beta}) \text{ tel que } m \in \mathbb{Z}\}. \quad (5.40)$$

En plus court : $\ker(p) = \text{gr}(\beta, y^{-\beta})$. Nous devons donc fixer l de telle sorte que $\tilde{\varphi}(\beta, y^{-\beta}) = e$. Étant donné que φ prend ses valeurs dans $\text{gr}(x)$, il existe un entier α tel que $\varphi(y^{-\beta}) = x^\alpha$; en utilisant cet α , nous écrivons

$$\tilde{\varphi}(\beta, y^{-\beta}) = x^{\beta l} \varphi(y^{-\beta}) = x^{\beta l + \alpha}. \quad (5.41)$$

Par conséquent nous choisissons $l = -\alpha/\beta$. Nous devons maintenant vérifier que ce choix est légitime, c'est-à-dire que a divise βl et que α/β est un entier.

Étant donné que y est d'ordre b ,

$$e = \varphi(y^b) = \varphi(y^{-\beta b/\beta}) = \varphi(y^{-\beta})^{b/\beta} = x^{b\beta/\alpha}. \quad (5.42)$$

Par conséquent a divise $\frac{b\alpha}{\beta} = -\beta l$.

Pour voir que l est entier, nous nous rappelons que a est l'exposant de G (parce que x est d'ordre maximum) et que par conséquent b divise a . Mais a divise $\alpha \frac{b}{\beta}$. Donc α/β est entier.

Nous passons maintenant à la seconde partie de la preuve. Nous considérons un morphisme $\varphi: G \rightarrow \text{gr}(x)$ tel que $\varphi(x) = x$. La première partie nous en assure l'existence. Nous montrons que

$$\begin{aligned} \psi: G &\rightarrow \text{gr}(x) \oplus \ker(\varphi) \\ g &\mapsto (\varphi(g), g\varphi(g)^{-1}) \end{aligned} \quad (5.43)$$

est un isomorphisme. D'abord $g\varphi(g)^{-1}$ est dans le noyau de φ parce que $\varphi(g)^{-1}$ étant dans $\text{gr}(x)$, et φ étant un morphisme,

$$\varphi(g\varphi(g)^{-1}) = \varphi(g)\varphi(g)^{-1} = e. \quad (5.44)$$

L'application ψ est un morphisme parce que, en utilisant le fait que G est abélien,

$$\psi(g_1 g_2) = (\varphi(g_1 g_2), g_1 g_2 \varphi(g_1 g_2)^{-1}) \quad (5.45a)$$

$$= (\varphi(g_1)\varphi(g_2), g_1 \varphi(g_1)^{-1} g_2 \varphi(g_2)^{-1}) \quad (5.45b)$$

$$= \psi(g_1)\psi(g_2). \quad (5.45c)$$

L'application ψ est injective parce que si $\psi(g) = (e, e)$ alors $\varphi(g) = e$ et $g\varphi(g)^{-1} = e$, ce qui implique $g = e$.

Enfin ψ est surjective parce qu'elle est injective et que les ensembles de départ et d'arrivée ont même cardinal. En effet par le premier théorème d'isomorphisme (théorème 2.7) appliqué à φ nous avons

$$|G| = |\text{gr}(x)| \cdot |\ker(\varphi)|. \quad (5.46)$$

□

Théorème 5.23.

Si G est un groupe abélien fini non trivial, il existe un unique $r > 0$ et une unique liste de naturels $(d_1, \dots, d_r)$ tels que

- (1) $G \simeq \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$
- (2) $d_1 \geq 1$
- (3) d_i divise d_{i+1} pour tout $i = 1, \dots, r-1$.

Démonstration. Soit x_1 un élément d'ordre maximal dans G . Soit n_1 son ordre et

$$H_1 = \text{gr}(x_1) = \mathbb{F}_{n_1}. \quad (5.47)$$

D'après la proposition 5.22(2), il existe un supplémentaire K_1 tel que $G = \mathbb{F}_{n_1} \oplus K_1$. Si $K_1 = \{e\}$ on s'arrête et on garde $G = \mathbb{F}_{n_1}$. Sinon on continue de la sorte en prenant x_2 d'ordre maximal dans K_1 etc.

Nous devons maintenant prouver l'unicité de cette décomposition. Supposons deux décompositions avec les nombres $(d_1, \dots, d_r)$ et $(s_1, \dots, s_q)$:

$$G = \mathbb{F}_{d_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{F}_{d_r} = \mathbb{F}_{s_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{F}_{s_q}. \quad (5.48)$$

L'exposant de G est d_r et s_q . Donc $d_r = s_q$. Les complémentaires étant égaux nous avons

$$\mathbb{F}_{d_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{F}_{d_{r-1}} = \mathbb{F}_{s_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{F}_{s_{q-1}}. \quad (5.49)$$

En continuant nous trouvons $r = q$ et $d_i = s_i$. □

5.5 Groupes d'ordre pq

Lemme 5.24.

Soit G un groupe d'ordre pq où p et q sont des nombres premiers distincts. Nous supposons que $p < q$.

- (1) Le groupe G possède un unique q -Sylow.
- (2) Cet unique q -Sylow est normal dans G .
- (3) Il n'est ni $\{e\}$ ni G .
- (4) Le groupe G n'est pas un groupe simple⁶.

Démonstration. Soit n_q le nombre de q -Sylow ; par le théorème de Sylow 5.11(1) le groupe G possède des q -Sylow et par 5.11(4),

$$n_q \in [1]_q. \quad (5.50)$$

De plus le nombre n_q divise $|G| = pq$. Donc n_q vaut p , q ou 1 . Avoir $n_q = p$ n'est pas possible parce que $n_q \in [1]_q$ et $p < q$. Avoir $n_q = q$ n'est pas possible non plus, pour la même raison. Donc $n_q = 1$. Notons H l'unique q -Sylow de G .

Le fait que H soit normal est une conséquence de 5.11(3) parce que le conjugué de H est encore un q -Sylow alors que H est l'unique q -Sylow.

Vu que

$$1 < p = |H| < pq = |G|, \quad (5.51)$$

le sous-groupe H n'est ni réduit à l'identité ni le groupe entier.

Par conséquent G n'est pas simple parce qu'il contient un sous-groupe normal non trivial. □

Avant de lire le théorème suivant, n'oubliez pas de lire la définition d'un produit semi-direct 2.48.

6. Pas de sous-groupes normaux non triviaux, 1.260.

ThoLnTMBY

Théorème 5.25 ([166]).

Soient deux nombres premiers distincts⁷ p et q avec $q > p$.

- (1) Si p ne divise pas $q - 1$ alors tout groupe d'ordre pq est cyclique et plus précisément le seul groupe (à isomorphisme près) d'ordre pq est $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$.
- (2) Si $p \mid q - 1$, alors il n'existe que deux groupes d'ordre pq :
 - Le groupe abélien et cyclique $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$.
 - Le produit semi-direct non abélien

ITEMooFQXIooFLAiUD

$$G = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

EqNunTRE (5.52)

où $\varphi(\bar{1})$ est d'ordre p dans $\text{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$.

- (3) Si p et q sont premiers entre eux, le produit est direct⁸.

Démonstration. Division de la preuve en plusieurs parties.

(1) Préliminaires avec Sylow

Soit un groupe G d'ordre pq . Soient H , un q -Sylow et K , un p -Sylow de G . Ils existent parce que p et q sont des diviseurs premiers de $|G|$ (théorème de Sylow 5.11). Si n_q est le nombre de q -Sylow dans G alors n_q divise $|G|$ et $n_q \equiv 1 \pmod{q}$. Donc d'abord n_q vaut 1, p ou q . Ensuite $n_q = q$ est exclu par la condition $n_q \equiv 1 \pmod{q}$; la possibilité $n_q = p$ est également impossible parce que $p \equiv 1 \pmod{q}$ est impossible avec $p < q$. Donc $n_q = 1$ et H est normal dans G .

L'ensemble $H \cap K$ est un sous-groupe à la fois de H et de K , ce qui entraîne que (théorème de Lagrange 2.14) $|H \cap K|$ divise à la fois p et q . Nous en déduisons que $|H \cap K| = 1$ et donc que $H \cap K = \{e\}$.

Étant donné que H est normal, l'ensemble HK est un sous-groupe de G . De plus l'application

$$\begin{aligned} \psi: H \times K &\rightarrow HK \\ (h, k) &\mapsto hk \end{aligned} \tag{5.53}$$

est un bijection. Nous ne devons vérifier seulement l'injectivité. Supposons que $hk = h'k'$. Alors $e = h^{-1}h'k'k^{-1}$, et donc

$$h^{-1}h' = (k'k^{-1})^{-1} \in H \cap K = \{e\}. \tag{5.54}$$

Par conséquent $|pq| = |H \times K| = |HK|$, et $HK = G$. Le corolaire 2.50 nous indique que

$$G = H \rtimes_{\varphi} K \tag{5.55}$$

EqGjQiEN

où φ est l'action adjointe. Nous devons maintenant identifier cette action. En d'autres termes, nous savons que $H = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ et $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et que $\varphi: \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ est un morphisme. Nous devons déterminer les possibilités pour φ .

Soit n_p le nombre de p -Sylow de G . Comme précédemment, n_p vaut 1, p ou q et la possibilité $n_p = p$ est exclue. Donc n_p est 1 ou q .

(2) Si p ne divise pas $q - 1$

Si p ne divise pas $q - 1$ alors il n'est pas possible d'avoir $n_p = q$ parce que $n_p \in [1]_p$. Or dire $n_p = q$ demanderait $q \in [1]_p$, c'est-à-dire $q = kp + 1$, qui impliquerait que p divise $q - 1$.

La seule possibilité est que $n_p = 1$. Dans ce cas, K est également normal dans G . Du coup le produit semi-direct (5.55) est en réalité un produit direct (φ est triviale) et nous avons

$$G = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}. \tag{5.56}$$

7. Le cas $p = q$ sera traité par la proposition 5.28.

8. Cette affirmation me semble très bizarre. Comment deux nombres premiers distincts pourraient ne pas être premiers entre eux ???

(3) **Si p divise $q - 1$**

Cette fois $n_p = 1$ et $n_p = q$ sont tous deux possibles. Ce que nous savons est que $\varphi(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $\text{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$. Par le premier théorème d'isomorphisme 2.7, nous avons

$$|\varphi(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})| = \frac{|\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}|}{|\ker \varphi|}, \quad (5.57)$$

ce qui signifie que $|\varphi(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})|$ divise $|\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}| = p$. Par conséquent, $|\varphi(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})|$ est égal à 1 ou p . Si c'est 1, alors l'action est triviale et le produit est direct.

Nous supposons que $|\varphi(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})| = p$. Le corolaire 5.20 nous indique que $\text{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ possède un unique sous-groupe d'ordre p que nous notons Γ ; c'est-à-dire que $\Gamma = \text{Image}(\varphi)$. Vu que $\varphi: \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ est un morphisme, Γ est généré par $\varphi(\bar{1})$ qui est alors un élément d'ordre p , comme annoncé.

- (4) **Unicité** Nous nous attaquons maintenant à l'unicité. Soient φ et φ' deux morphismes non triviaux $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$. Étant donné que $\text{Aut}(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ ne possède qu'un seul sous-groupe d'ordre p , nous savons que $\text{Image}(\varphi) = \text{Image}(\varphi') = \Gamma$. Nous pouvons donc parler de φ'^{-1} en tant qu'application de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans Γ . Nous montrons que

$$\begin{aligned} f: \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \times_{\varphi} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \times_{\varphi'} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ (h, k) &\mapsto (h, \alpha(k)) \end{aligned} \quad (5.58)$$

où $\alpha = \varphi'^{-1} \circ \varphi$ est un isomorphisme de groupes. Le calcul est immédiat :

$$f(h_1, k_1)f(h_2, k_2) = (h_1, \alpha(k_1))(h_2, \alpha(k_2)) \quad (5.59a)$$

$$= (h_1\varphi'(\alpha(k_1))h_2, \alpha(k_1k_2)) \quad (5.59b)$$

$$= f(h_1\varphi(k_1)h_2, k_1k_2) \quad (5.59c)$$

$$= f((h_1, k_1), (h_2, k_2)). \quad (5.59d)$$

Par conséquent $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \times_{\varphi} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \times_{\varphi'} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

□

Note : il existe des nombres premiers p et q tels que $q \equiv 1 \pmod{p}$. Par exemple $7 \equiv 1 \pmod{3}$.

PROPOoNSRYooEodtUI

Proposition 5.26 ([48]).

Soit G un groupe fini d'ordre pq où p et q sont deux nombres premiers distincts vérifiant

$$\begin{cases} p \not\equiv 1 \pmod{q} \\ q \not\equiv 1 \pmod{p} \end{cases} \quad (5.60a)$$

$$\begin{cases} p \not\equiv 1 \pmod{q} \\ q \not\equiv 1 \pmod{p} \end{cases} \quad (5.60b)$$

Alors G est cyclique, abélien et

$$G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}. \quad (5.61)$$

Démonstration. Soient n_p et n_q les nombres de p -Sylow et q -Sylow. Par le théorème de Sylow 5.11, n_p divise pq et $n_p \equiv 1 \pmod{p}$. Le second point empêche n_p de diviser p . Par conséquent n_p divise q et donc n_p vaut 1 ou q . La possibilité $n_p = q$ est exclue par l'hypothèse $q \not\equiv 1 \pmod{p}$. Donc $n_p = 1$, et de la même façon nous obtenons $n_q = 1$.

Soient S l'unique p -Sylow et T , l'unique q -Sylow. Pour les mêmes raisons que celles exposées plus haut, ce sont deux sous-groupes normaux dans G . Étant donné que S est d'ordre p^n pour un certain n et que l'ordre de S doit diviser celui de G , nous avons $|S| = p$. De la même façon, $|T| = q$. Par conséquent S est un groupe cyclique d'ordre p et nous considérons x , un de ses générateurs. De la même façon soit y , un générateur de T .

Nous montrons maintenant que x et y commutent, puis que xy engendre G . Nous savons que $S \cap T$ est un sous-groupe à la fois de S et de T , de telle façon que $|S \cap T|$ divise à la fois $|S| = p$

et $|T| = q$. Nous avons donc $|S \cap T| = 1$ et donc $S \cap T$ se réduit au neutre. Par ailleurs, S et T sont normaux, donc

$$(xyx^{-1})y^{-1} \in T \quad (5.62a)$$

$$x(yx^{-1}y^{-1}) \in S, \quad (5.62b)$$

donc $xyx^{-1}y^{-1} = e$, ce qui montre que $xy = yx$.

Montrons que xy engendre G . Soit $m > 0$ tel que $(xy)^m = e$. Pour ce m nous avons $x^m = y^{-m}$ et $y^{-m} = x^m$, ce qui signifie que x^m et y^m appartiennent à $S \cap T$ et donc $x^m = y^m = e$. Les nombres p et q divisent donc tous deux m ; par conséquent $\text{ppcm}(p, q) = pq$ divise m . Nous en concluons que xy est d'ordre pq (il ne peut pas être plus) et qu'il est alors générateur.

Pour la suite nous allons d'abord prouver que $G = ST$ puis que $G \simeq S \times T$. Nous savons déjà que $|S \cap T| = 1$, ce qui nous amène à dire que $|ST| = |S||T|$. En effet si $s, s' \in S$ et $t, t' \in T$ et si $st = s't'$, alors $t = s^{-1}s't'$, ce qui voudrait dire que $s^{-1}s' \in T$ et donc que $s^{-1}s' = e$. Au final nous avons

$$|ST| = |S||T| = pq = |G|. \quad (5.63)$$

Par conséquent $G = ST$. En nous rappelant que $S \cap T = \{e\}$ et que S et T sont normaux, le lemme 1.412 nous dit que $G \simeq S \times T$. Le groupe S étant cyclique d'ordre p nous avons $S \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et pour T , nous avons la même chose : $T \simeq \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Nous concluons que

$$G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}. \quad (5.64)$$

□

ThoImkljy

Théorème 5.27 (Théorème de Burnside[113]).

Le centre d'un p -groupe non trivial est non trivial.

Démonstration. Soit G un p -groupe non trivial. Nous considérons l'action adjointe G sur lui-même. Les points fixes de cette action sont les éléments du centre :

$$\mathcal{Z}_G = \{z \in G \text{ tel que } \sigma_x(z) = z, \forall x \in G\} = \text{Fix}_G(G). \quad (5.65)$$

Nous utilisons l'équation aux classes (2.39) pour dire que $|G| = |\mathcal{Z}_G| \pmod{p}$. Mais $|\mathcal{Z}_G|$ n'est pas vide parce qu'il contient l'identité. Donc $|\mathcal{Z}_G|$ est au moins d'ordre p . □

PropsttFK

Proposition 5.28.

Si p est un nombre premier, tout groupe d'ordre p ou p^2 est abélien.

Rappel : un groupe d'ordre p ou p^2 est automatiquement un p -groupe.

Démonstration. Si $|G| = p$, alors le théorème de Cauchy 5.2 nous donne l'existence d'un élément d'ordre p . Cet élément est alors automatiquement générateur, G est cyclique et donc abélien.

Si par contre G est d'ordre p^2 , alors les choses se compliquent (un peu). D'après le théorème de Burnside 5.27, le centre $\mathcal{Z}$ n'est pas trivial; il est alors d'ordre p ou p^2 . Supposons qu'il soit d'ordre p et prenons $x \in G \setminus \mathcal{Z}$. Alors le stabilisateur de x pour l'action adjointe contient au moins $\mathcal{Z}$ et x , c'est-à-dire que $|\text{Fix}_G(x)| \geq p + 1$. Étant donné que $\text{Fix}_G(x)$ est un sous-groupe, son ordre est automatiquement 1, p ou p^2 . En l'occurrence, il doit être p^2 (parce que plus grand que p), et donc x doit être central, ce qui est une contradiction. □

5.5.1 Fonction indicatrice d'Euler

DEFooZRYMooZCozga

Définition 5.29.

La fonction indicatrice d'Euler est l'application

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{N}^* &\rightarrow \mathbb{N}^* \\ n &\mapsto \text{Card} \left(\{m \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } 1 \leq m \leq n, \text{pgcd}(m, n) = 1\} \right). \end{aligned} \quad (5.66)$$

5.30. (1) Voir le thème 11 pour des formules concernant l'indicatrice d'Euler.

(2) Une vidéo de 3Blue1Brown : <https://www.youtube.com/watch?v=EK32jo7i5LQ>.

LEMooVGDHooStUaKH

Lemme 5.31 ([167]).

L'élément $[m]_n$ est inversible dans le groupe $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \cdot)$ si et seulement si $\text{pgcd}(m, n) = 1$.

Démonstration. Dans les deux sens.

- (1) $\Rightarrow$ Si $[m]_n$ est inversible, il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que $[u]_n[m]_n = [1]_n$. Cela donne $[um]_n = [1]_n$ ou encore $um \in [1]_n$, c'est-à-dire $um = 1 + vn$. Le théorème de Bézout 1.349 conclut que $\text{pgcd}(m, n) = 1$.
- (2) $\Leftarrow$ Si $\text{pgcd}(m, n) = 1$, alors le théorème de Bézout 1.349 nous dit qu'il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $um + vn = 1$. Cela donne directement $um = 1 - vn \in [1]_n$ et donc $[u]_n$ est un inverse de $[m]_n$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

□

LEMooCLYEooONhWks

Lemme 5.32.

Nous avons

$$\varphi(n) = \text{Card}((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times) \quad (5.67)$$

où $A^\times$ est le groupe des inversibles (pour la multiplication) dans l'anneau A .

Démonstration. En utilisant le lemme 5.31,

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \{[m]_n \text{ tel que } \text{pgcd}(m, n) = 1\} \quad (5.68a)$$

$$= \{[m]_n \text{ tel que } 1 \leq m \leq n, \text{pgcd}(m, n) = 1\} \quad (5.68b)$$

Comme deux entiers différents entre 1 et n ne peuvent pas être dans la même classe modulo n , il y a bijection entre le dernier ensemble et $\{1 \leq m \leq n \text{ tel que } \text{pgcd}(m, n) = 1\}$. Donc

$$\varphi(n) = \text{Card}(\{[m]_n \text{ tel que } 1 \leq m \leq n, \text{pgcd}(m, n) = 1\}) = \text{Card}((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times). \quad (5.69)$$

□

LEMooRGTYooRxyCO

Lemme 5.33 ([168]).

Soit $n, d \in \mathbb{N}$ tels que $d \mid n$. Nous notons $q = n/d$ et $G = \{k[q]_n \text{ tel que } 0 \leq k \leq d-1\}$. Alors, pour $r \in \mathbb{Z}$ nous avons $d[r]_n = [0]_n$ si et seulement si $[r]_n \in G$.

Démonstration. Dans les deux sens.

- (1) $\Rightarrow$ Nous supposons que $d[r]_n = [0]_n$. Étant donné que $n = dq$ nous avons les implications suivantes :

$$d[r]_n = [0]_n \Rightarrow d \mid dr \Rightarrow dq \mid dr \Rightarrow q \mid r. \quad (5.70)$$

Nous avons donc $r = kq$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Par la division euclidienne 1.343, il existe $s, t \in \mathbb{N}$ tels que $k = sd + t$ avec $t < d$. Avec ça, nous avons le calcul

$$[r]_n = k[q]_n = sd[q]_n + t[q]_n = \underbrace{s[dq]_n}_{=[0]_n} + t[q]_n \in G. \quad (5.71)$$

- (2) $\Leftarrow$ Si $[r]_n \in G$, il existe $0 \leq k \leq d-1$ tel que $[r]_n = k[q]_n$. De ce fait,

$$d[r]_n = dk[q]_n = k[dq]_n = [0]_n. \quad (5.72)$$

Et voilà.

□

La proposition suivante est un pas important dans l'algorithme de Shor permettant aux ordinateurs quantiques de factoriser rapidement des grands nombres[169].

THOooXMBSooxrrfOP

Théorème 5.34 (Euler-Fermat[170]).*Deux énoncés très similaires.*(1) Soient a, n premiers entre eux dans $\mathbb{N}$. Alors Nous avons la formule

$$a^{\varphi(n)} \in [1]_n. \quad (5.73)$$

ITEMooJHZBsooXVKMIT

(2) Soient $A, B \in \mathbb{N}$ premiers entre eux. Alors il existe $p, m \in \mathbb{N}$ tels que

$$A^p = mB + 1. \quad (5.74)$$

Démonstration. Vu que $\text{pgcd}(a, n) = 1$, le théorème de Bézout 1.349 donne $ua + vn = 1$, c'est-à-dire $u[a]_n \in [1]_n$. Autrement dit, $[a]_n$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. De ce fait l'application

$$\begin{aligned} f: (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times &\rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \\ x &\mapsto [a]_n x \end{aligned} \quad (5.75)$$

est une bijection.

Un produit peut être réindexé par une bijection⁹. En posant $P = \prod_{x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} x$, nous avons

$$P = \prod_{x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} x \quad (5.76a)$$

$$= \prod_{x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} f(x) \quad (5.76b)$$

$$= \prod_{x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} [a]_n x \quad (5.76c)$$

$$= \left(\prod_{x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} [a]_n \right) \left(\prod_{x \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} x \right) \quad (5.76d)$$

$$= [a]_n^{\text{Card}((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times)} P \quad (5.76e)$$

En simplifiant par P dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ nous trouvons

$$[a]_n^{\text{Card}((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times)} = [1]_n. \quad (5.77)$$

Et comme le lemme 5.32 donne $\text{Card}((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times) = \varphi(n)$, nous avons trouvé $[a]_n^{\varphi(n)} = [1]_n$. Autrement dit,

$$a^{\varphi(n)} \in [1]_n. \quad (5.78)$$

Le point (2) n'est qu'une reformulation. Vu que A et B sont premiers entre eux, nous venons de voir que $A^{\varphi(B)} \in [1]_B$. Il existe donc $m \in \mathbb{Z}$ tel que $A^{\varphi(B)} = 1 + mB$. Vu que A et B sont dans $\mathbb{N}$, le nombre m est contraint d'être positif, c'est-à-dire $m \in \mathbb{N}$. $\square$

LEMooKPKBsooPbrHki

Lemme 5.35 ([168]).

Soient $d \mid n$ dans $\mathbb{N}^*$. Nous considérons le groupe additif $G_d = \{k[q]_n \text{ tel que } 0 \leq k \leq d-1\}$. Les éléments d'ordre¹⁰ d dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ sont les générateurs de G_d .

Démonstration. Les générateurs de G_d sont d'ordre d parce que $|G_d| = d$. Ça, c'était le sens facile. Dans l'autre sens, si $[r]_n$ est d'ordre d , alors $d[r]_n = [0]_n$. D'après le lemme 5.33, cela prouve que $[r]_n \in G_d$.

Comme le groupe engendré par $[r]_n$ est d'ordre d , il est tout G_d . Donc $[r]_n$ est générateur de G_d . $\square$

9. Proposition 1.296. Pour rappel, le produit n'est rien d'autre qu'une somme pour un groupe dont la loi est notée multiplicativement.

10. Ordre d'un élément, définition 1.250.

LEMooQGGLoDkmcF

Lemme 5.36 ([171]).*L'ensemble des générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.**Démonstration.* Si $[r]_n$ est générateur de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, il existe k tel que $k[r]_n = [1]_n$. Dans ce cas, $[k]_n$ est l'inverse de $[r]_n$ pour la multiplication. Donc $[r]_n \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.À l'inverse, si $[r]_n$ est inversible, alors il existe k tel que $k[r]_n = [1]_n$. Dans ce cas, $[t]_n = kt[r]_n$, ce qui montre que $[r]_n$ est générateur (pour l'addition). $\square$

LEMooRMWRooRSjGPL

Lemme 5.37 ([171]).*Si G est un groupe cyclique d'ordre n , alors G possède $\varphi(n)$ générateurs.**Démonstration.* Vu que tous les groupes cycliques d'ordre n sont isomorphes à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, nous nous contentons de prouver le résultat pour ce groupe. Le lemme 5.36 montre que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ possède $\text{Card}((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times)$ générateurs.Mais le lemme 5.32 assure que $\text{Card}((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times) = \varphi(n)$. $\square$

PROPooYHuDooUROTiN

Proposition 5.38.*Nous avons la formule*

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d). \quad \text{EqTPHagJ} \quad (5.79)$$

Démonstration. Nous notons H_d la partie de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ composée des éléments d'ordre d . Nous avons vu dans le lemme 5.35 que H_d sont justement les générateurs de G_d – voir le lemme pour la notation. Mais comme G_d est un groupe cyclique d'ordre d , il contient $\varphi(d)$ générateurs (lemme 5.37) : $\text{Card}(H_d) = \varphi(d)$.Vu que tous les éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ont un ordre qui divise n (corolaire 2.15), nous avons l'union disjointe

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \bigcup_{d|n} H_d, \quad (5.80)$$

et donc au niveau des cardinaux,

$$n = \text{Card}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \sum_{d|n} \text{Card}(H_d) = \sum_{d|n} \varphi(d). \quad (5.81)$$

 $\square$

LEMooBEJOooDqTirj

Lemme 5.39.*Si p est un nombre premier, alors $\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}$.**Démonstration.* Les éléments de $\{1, \dots, p^n\}$ qui ont un pgcd différent de 1 avec p^n sont des nombres qui s'écrivent sous la forme qp avec $q \leq p^{n-1}$ 11. Il y a évidemment p^{n-1} tels nombres.Par conséquent le cardinal de P_{p^n} est $\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}$. $\square$ **;; Avertissement/question à la lectrice !! 5.40** *P_n n'a pas été défini.**Définition proposée (et vue par après) : $P_n = \{m \in \mathbb{N} \text{ tel que } \text{pgcd}(m, n) = 1\}$. À mettre donc en lien avec Δ_d .***5.5.2 Générateurs**

PropZnmuphiGensn

Proposition 5.41.*Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et le groupe (additif) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. L'élément $[x]_n$ est un générateur de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si $x \in P_n$. En particulier $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un groupe contenant $\varphi(n)$ générateurs.*

11. Corolaire 3.19.

Démonstration. Nous avons $\text{gr}([1]_n) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. L'élément $[x]_n$ sera générateur si et seulement si il génère $[1]_n$, c'est-à-dire si il existe u tel que $u[x]_n = [1]_n$. Cette dernière égalité étant une égalité de classes dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, elle sera vraie si et seulement si il existe v tel que

$$ux + vn = 1. \quad (5.82)$$

Cela signifie entre autres que ¹² $x\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, et aussi que $\text{pgcd}(x, n) = 1$ par le théorème de Bézout 1.349, et donc que $x \in P_n$. $\square$

CORooMBLSooMHKmAq

Corolaire 5.42.

Un groupe monogène d'ordre n possède $\varphi(n)$ générateurs, où φ est la fonction indicatrice d'Euler définie en 5.29.

Démonstration. Le théorème 5.16 nous dit qu'un groupe monogène d'ordre n est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. La proposition 5.41 nous indique que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ possède $\varphi(n)$ générateurs. $\square$

5.5.3 Fonction indicatrice d'Euler (propriétés)

subSecKGDKGooAbEfijs

Corolaire 5.43.

Deux propriétés.

(1) L'indicatrice d'Euler est multiplicative : si p est premier avec q , alors

$$\varphi(pq) = \varphi(p)\varphi(q). \quad (5.83)$$

(2) Si p est un nombre premier,

$$\varphi(p) = (p - 1). \quad (5.84)$$

Démonstration. Nous savons que si p et q sont premiers entre eux, alors le théorème 5.25 nous donne l'isomorphisme de groupe

$$(\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}, +) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, +). \quad (5.85)$$

Un élément (x, y) est générateur du produit si et seulement si x est générateur de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et y est générateur de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Par la proposition 5.41, il y a $\varphi(p)\varphi(q)$ tels éléments. Par ailleurs le nombre de générateurs de $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ est $\varphi(pq)$, d'où l'égalité.

Si p est premier, nous avons $\varphi(p) = p - 1$ parce que tous les entiers de $\{1, \dots, p - 1\}$ sont premiers avec p . $\square$

5.6 Groupe symétrique, groupe alterné

SECooZFYQooFfopMa

La définition des permutations et du groupe symétrique sont 1.261. Voir aussi le thème 8.

5.6.1 Le groupe alterné

DEFooEIVIoofVvKHH

Définition 5.44.

Le groupe A_n des permutations paires ¹³ dans S_n est le **groupe alterné**.

PROPooCPXOooVxPAij

Proposition 5.45.

À propos du groupe alterné dans le groupe symétrique.

(1) Le groupe alterné A_n est un sous-groupe caractéristique ¹⁴ de S_n

ITEMooWXXUooOWvFgE

(2) Le sous-groupe A_n est d'indice 2 dans S_n .

ITEMooGGAHooRYgNqq

(3) Le sous-groupe A_n est l'unique sous-groupe d'indice ¹⁵ 2 de S_n .

12. Corolaire 1.350

13. Définition 1.287.

14. Définition 1.258.

15. Définition 2.13.

Démonstration. Soit $\alpha \in \text{Aut}(S_n)$. Étant donné que $\epsilon \circ \alpha$ est un homomorphisme surjectif sur $\{-1, 1\}$, par unicité de cet homomorphisme, nous avons $\epsilon \circ \alpha = \epsilon$, et donc $\alpha(A_n) = A_n$. Par le premier théorème d'isomorphisme 2.7, il existe un isomorphisme

$$f: S_n / \ker(\epsilon) \rightarrow \text{Image}(\epsilon). \quad (5.86)$$

En égalant le nombre d'éléments nous avons $|S_n : \ker \epsilon| = |S_n : A_n| = 2$.

Nous prouvons maintenant l'unicité. Soit H un sous-groupe d'indice 2 dans S_n . Par le lemme 3.24, H est distingué et nous pouvons considérer le groupe S_n/H . Ce dernier ayant 2 éléments, il est isomorphe à $\{-1, 1\}$. Soit θ l'isomorphisme. On note φ le morphisme canonique $\varphi: S_n \rightarrow S_n/H$:

$$S_n \xrightarrow{\varphi} S_n/H \xrightarrow{\theta} \{-1, 1\}. \quad (5.87) \quad \text{EqSZBP'TH}$$

La composition $\theta \circ \varphi$ est alors un homomorphisme surjectif de S_n sur $\{-1, 1\}$ et nous avons $\theta \circ \varphi = \epsilon$ par la proposition 1.291. L'enchainement (5.87) nous montre que $H = \ker(\theta \circ \varphi) = \ker(\epsilon) = A_n$. $\square$

PROF00PSZVooSmAgPA

Proposition 5.46 ([172]).

Le groupe symétrique S_n peut être écrit comme un produit semi-direct¹⁶ du groupe alterné :

$$S_n = A_n \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad (5.88)$$

où l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur A_n est la conjugaison par $\sigma = (12)$, c'est-à-dire $\rho(-1)\tau = \sigma\tau\sigma^{-1}$.

Démonstration. Nous avons la suite exacte

$$1 \xrightarrow{i} A_n \xrightarrow{i} S_n \xrightarrow{\epsilon} \{\pm 1\} \longrightarrow 1 \quad (5.89)$$

où les i représentent des inclusions et ϵ est la signature définie en 1.284. Grâce à cette suite et au fait que la signature soit un isomorphisme à partir de la partie $\{\text{Id}, \sigma\}$ (pour σ d'ordre 2, par exemple $\sigma = (12)$), le théorème 2.49 nous dit que

$$S_n \simeq A_n \rtimes_{\varphi} \{\text{Id}, \sigma\} \quad (5.90)$$

où φ est l'action adjointe de $\{\text{Id}, \sigma\}$ sur A_n . $\square$

PROF00ZOWBooIMxxlj

Proposition 5.47.

Si $\beta \in S_n$ est une transposition, nous avons les égalités suivantes d'ensembles :

$$S_n = A_n \cup A_n\beta = A_n \cup \beta A_n. \quad (5.91)$$

Démonstration. Les parties A_n et βA_n ont le même nombre d'éléments. En effet, l'application

$$\begin{aligned} \varphi: A_n &\rightarrow A_n\beta \\ \sigma &\mapsto \sigma\beta \end{aligned} \quad (5.92)$$

est une bijection.

De plus ces deux ensembles sont disjoints à cause de la proposition 1.291. En effet si $\sigma \in A_n$, alors $\epsilon(\sigma) = 1$. Mais un élément de $A_n\beta$ est de la forme $\sigma\beta$ avec $\sigma \in A_n$. Or ϵ est un homomorphisme, donc $\epsilon(\sigma\beta) = \epsilon(\sigma)\epsilon(\beta) = -1$.

Enfin, la proposition 5.45(2) dit que A_n est d'indice deux dans S_n . Donc la partie

$$A_n \cup A_n\beta \quad (5.93)$$

contient $|S_n|/2 + |S_n|/2 = |S_n|$ éléments. C'est donc S_n . $\square$

LemiApyfp

Lemme 5.48.

Le groupe dérivé du groupe symétrique est le groupe alterné : $D(S_n) = A_n$.

¹⁶. Définition 2.48.

Démonstration. Tout élément de $D(S_n)$ s'écrit sous la forme $ghg^{-1}h^{-1}$. Quel que soit le nombre de transpositions dans g et h , le nombre de transpositions dans $[g, h]$ est pair. $\square$

PropsHlmv

Proposition 5.49 ([173]).

Soit $n \geq 3$. Les 3-cycles $c_i = (1, 2, i)$ avec $i = 3, \dots, n$ engendrent le groupe alterné A_n .

Démonstration. Soit H , le groupe engendré par les c_i . D'abord nous avons

$$c_i = (1, 2, i) = (1, 2)(2, i), \quad (5.94)$$

de telle sorte que $\epsilon(c_i) = 1$. Par conséquent nous avons $H \subset A_n$. Nous montrons par récurrence que $A_n \subset H$.

Pour $n = 3$ il suffit de vérifier que $A_3 = \{\text{Id}, c_3, c_3^2\}$. Supposons avoir obtenu le résultat pour A_{n-1} , et prouvons le pour A_n . Soit $s \in A_n$.

Si $s(n) = n$, alors s se décompose de la même manière que sa restriction s' à $\{1, \dots, n-1\}$. Par l'hypothèse de récurrence, cette restriction, appartenant à A_{n-1} , se décompose en produit des $c_3, \dots, c_{n-1}$ et de leurs inverses.

Si $s(n) = k$ alors nous considérons l'élément $c_n^2 c_k s$. Cet élément envoie n sur n et peut donc être décomposé avec les c_i ($i = 1, \dots, n-1$) en vertu du point précédent. $\square$

PropiodtBG

Proposition 5.50.

Lorsque $n \geq 5$, tous les 3-cycles de A_n sont conjugués. Autrement dit, la classe de conjugaison d'un 3-cycle est l'ensemble des 3-cycles.

Démonstration. Soient les 3-cycles $\sigma = (i_1, i_2, i_3)$ et $\varphi = (j_1, j_2, j_3)$. Nous considérons une bijection α de $\{1, \dots, n\}$ telle que $\alpha(i_s) = j_s$. Nous avons immédiatement que $\alpha \in S_n$ et que $\alpha\sigma\alpha^{-1} = \varphi$. Donc les 3-cycles sont conjugués dans S_n . Il reste à prouver qu'ils le sont dans A_n .

Si α est une permutation paire, la preuve est terminée. Si α est impaire, alors nous devons un peu la modifier. Comme $n \geq 5$, nous pouvons prendre s et t , des éléments distincts dans $\{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, j_2, j_3\}$ et poser $\tau = (st)$. Puisque la signature est un homomorphisme et que τ et α sont impairs, l'élément $\tau\alpha$ est pair (lemme et proposition 1.290 et 1.283) et est donc dans A_n . Les supports de τ et φ étant disjoints, ces derniers commutent et nous avons

$$(\tau\alpha)\sigma(\tau\alpha)^{-1} = \tau(\alpha\sigma\alpha^{-1})\tau^{-1} = \tau\varphi\tau^{-1} = \varphi. \quad (5.95)$$

Donc σ et φ sont conjugués par $\tau\alpha$ qui est dans A_n . $\square$

ThoURfSUXP

Théorème 5.51 ([48]).

Le groupe alterné A_n est simple¹⁷ pour $n \geq 5$.

Démonstration. Soit N , un sous-groupe normal de A_n non réduit à l'identité. Étant donné que les 3-cycles engendrent A_n (proposition 5.49) et que tous les 3-cycles sont conjugués dans A_n (proposition 5.50), il suffit de montrer que N contient un 3-cycle. En effet si N contient un 3-cycle, le fait qu'il soit normal implique (par conjugaison) qu'il les contienne tous et donc qu'il contient une partie génératrice de A_n .

Soit donc $\sigma \in N$ différent de l'identité. Nous prenons i dans le support de σ et $j = \sigma(i)$. Nous choisissons ensuite $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i, j, \sigma^{-1}(i)\}$ et $m = \sigma(k)$. Nous considérons la permutation $\alpha = (ijk)$. Étant donné que N est normal, l'élément

$$\theta = (\alpha^{-1}\sigma\alpha)\sigma^{-1} \quad (5.96)$$

est dans N . De plus en utilisant le lemme 1.277 et le fait que $\alpha^{-1} = (ikj)$ nous avons

$$\theta = (ikj)(j\sigma(j)m). \quad (5.97)$$

Cela n'est pas spécialement un 3-cycle, mais nous allons en construire un. Nous allons déterminer que θ est soit un 5-cycle, soit un 3-cycle, soit un 2×2 -cycle suivant les valeurs de $\sigma(j)$ et m .

Souvenons-nous que nous avons :

17. Pas de sous-groupes normaux non triviaux, définition 1.260.

- $i \neq j = \sigma(i)$, puisque i est dans le support de σ ;
- $k \neq i$ et $k \neq j$, par définition de k (rappelons aussi que $k \neq \sigma^{-1}(i)$) ;
- $m \neq i$, $m \neq j$ et $m \neq \sigma(j)$ puisque $m = \sigma(k)$.

Il ne nous reste alors seulement les deux possibilités suivantes :

- (1) soit $m = k$, soit $m \neq k$, d'une part ;
- (2) soit $\sigma(j) = i$, soit $\sigma(j) = k$, soit $\sigma(j)$ n'est ni i , ni k , ni m , d'autre part.

Supposons dans un premier temps que $m = k$; alors

$$\theta = (ik)(j\sigma(j)). \quad (5.98)$$

C'est à priori un 2×2 -cycle. Mais si de plus $\sigma(j) = i$, alors

$$\theta = (ijk) \quad (5.99)$$

qui est un 3-cycle ; et si $\sigma(j) = k$, alors

$$\theta = (ikj) \quad (5.100)$$

qui est un autre 3-cycle.

Supposons à présent que $m \neq k$. Si $\sigma(j)$ n'est ni i , ni k , ni m , alors $i, j, k, \sigma(j)$ et m sont cinq nombres différents, et

$$\theta = (i, j, \sigma(j), m, k) \quad (5.101)$$

est un 5-cycle. Si $\sigma(j) = i$, alors

$$\theta = (ikj)(jim) = (imk) \quad (5.102)$$

qui est un 3-cycle. Si $\sigma(j) = k$, alors

$$\theta = (ikj)(jkm) = (ikm) \quad (5.103)$$

qui est encore un 3-cycle.

Bref nous avons montré que θ est soit un 3-cycle, soit un 5-cycle, soit un 2×2 -cycle. Si θ est un 3-cycle, la preuve est terminée.

Si $\theta = (ab)(cd)$, alors on considère $e \in \{1, \dots, n\} \setminus \{a, b, c, d\}$ et nous avons

$$\underbrace{(abe)^{-1}\theta(abe)}_{\in N} \theta^{-1} = (aeb)(ab)(cd)(abe)(an)(cd) = (abe) \in N. \quad (5.104)$$

Si θ est le 5-cycle $(abcde)$, alors l'élément suivant est dans N :

$$(abc)^{-1}\theta(abc)\theta^{-1} = (acb)(abcde)(abc)(aedcb) = (acd). \quad (5.105)$$

Dans tous les cas nous avons trouvé un 3-cycle dans N et nous avons par conséquent $N = A_n$, ce qui fait que A_n ne contient pas de sous-groupes normaux non triviaux. Le groupe alterné A_n est donc simple. $\square$

Nous en déduisons immédiatement que si $n \geq 5$, le groupe dérivé de A_n est A_n parce que A_n ne contient pas d'autres sous-groupes non triviaux.

LEMoolICEHooGSSpkq

Lemme 5.52.

Le groupe alterné¹⁸ A_6 n'accepte pas de sous-groupes normaux d'ordre 60.

Démonstration. Soit G normal dans A_6 , et a , un élément d'ordre 5 dans G (qui existe parce que 5 divise 60). Soit aussi un élément b d'ordre 5 dans A_6 . Les groupes $\text{gr}(a)$ et $\text{gr}(b)$ sont deux 5-Sylow dans A_6 . En effet, 5 est un nombre premier, et est la plus grande puissance de 5 dans la décomposition de 60 ; donc $\text{gr}(a)$ est un 5-Sylow dans G . D'autre part, l'ordre de A_6 (qui est $\frac{1}{2} \cdot 6!$) ne possède également que 5 à la puissance 1 dans sa décomposition.

18. Définition 5.44.

En vertu du théorème de Sylow 5.11(3), les 5-Sylow $\text{gr}(a)$ et $\text{gr}(b)$ sont conjugués et il existe $\tau \in A_6$ tel que $b = \tau a \tau^{-1}$. Mais G étant normal dans A_6 , l'élément $\tau a \tau^{-1}$ est encore dans G , de telle sorte que $b \in G$. Du coup G doit contenir tous les éléments d'ordre 5 de A_6 .

Les éléments d'ordre 5 de A_6 doivent fixer un des points de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ puis permuter les autres de façon à n'avoir qu'un seul cycle. Un cycle correspond à écrire les nombres 1, 2, 3, 4, 5 dans un certain ordre. Ce faisant, le premier n'a pas d'importance parce qu'on considère la permutation cyclique, par exemple (3, 5, 2, 1, 4) est la même chose que (5, 2, 1, 4, 3). Le nombre de cycles sur $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ est donc de $4!$, et par conséquent le nombre d'éléments d'ordre 5 dans A_6 est $6 \cdot 4! = 144$.

Le groupe G doit contenir au moins 144 éléments alors que par hypothèse il en contient 60 ; contradiction. $\square$

Le théorème suivant montre que tout groupe peut être vu, en agissant sur lui-même, comme une partie du groupe symétrique.

Théorème 5.53.

Un groupe G est isomorphe à un sous-groupe de son groupe symétrique $S(G)$.

Démonstration. Nous considérons φ , la translation à gauche :

$$\begin{aligned} \varphi: G &\rightarrow S(G) \\ g &\mapsto t_g \end{aligned} \quad (5.106)$$

où $f_g(h) = gh$. Étant donné que

$$\varphi(gh) = ghx = g(t_h x) = t_g \circ t_h(x), \quad (5.107)$$

l'application φ est un morphisme de groupes. Il est injectif parce que si $gx = hx$ pour tout x , en particulier pour $x = e$ nous trouvons $g = h$.

De la même manière, $\varphi(g)x = \varphi(g)y$ implique $x = y$. Cela montre que l'image est bien dans le groupe symétrique.

L'ensemble $\text{Image}(\varphi)$ est donc un sous-groupe de $S(G)$, et φ est un isomorphisme vers ce groupe. $\square$

LEMooMVUGooRiDaDz

Lemme 5.54.

Si $n \geq 3$, alors

- (1) Le centre de S_n est trivial.
- (2) Le groupe S_n est non abélien.

Démonstration. Soit $s \in Z(S_n)$ et trois éléments distincts a, b et c de $\{1, \dots, n\}$. Nous posons $\tau = (ab)$ et nous avons $s\tau = \tau s$. En notant $a' = s(a)$ et $b' = s(b)$ nous avons

$$a' = s(a) = (\tau s \tau^{-1})(a) = (\tau s)(b) = \tau(b') \quad (5.108a)$$

$$b' = s(b) = (\tau s \tau^{-1})(b) = (\tau s)(a) = \tau(a'). \quad (5.108b)$$

Donc τ permute a' et b' . Mais comme τ ne permute que a et b , en tant qu'ensembles, $\{a, b\} = \{s(a), s(b)\}$. Le même raisonnement sur $\{b, c\}$ donne $\{b, c\} = \{s(b), s(c)\}$. Et puisque a, b et c sont distincts,

$$\{b\} = \{b, c\} \cap \{a, b\} = \{s(b)\}. \quad (5.109)$$

Cela montre que $s(b) = b$, et donc que le centre de S_n est réduit à la permutation identité.

En ce qui concerne le fait que S_n est non abélien, si nous avons $st = ts$ pour tout $s, t \in S_n$ alors $s = tst^{-1}$ pour tout t . Alors s serait dans le centre de S_n . En bref, si S_n était abélien, son centre serait S_n et non $\{\text{Id}\}$. $\square$

Proposition 5.55 ([174, 164]).

Tout groupe simple¹⁹ d'ordre 60 est isomorphe au groupe alterné A_5 .

Démonstration. Nous avons la décomposition en nombres premiers $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Déterminons pour commencer le nombre n_5 de 5-Sylow dans G . Le théorème de Sylow 5.11(4) nous renseigne que n_5 doit diviser 60 et doit être égal à 1 mod 5. Les deux seules possibilités sont $n_5 = 1$ et $n_5 = 6$. Étant donné que tous les p -Sylow sont conjugués, si $n_5 = 1$ alors le 5-Sylow serait un sous-groupe invariant à l'intérieur de G , ce qui est impossible vu que G est simple. Donc $n_5 = 6$.

Par le point (3) du théorème de Sylow, le groupe G agit transitivement sur l'ensemble des 5-Sylow par l'action adjointe :

$$g \cdot S = gSg^{-1}. \quad (5.110)$$

Cela donne donc un morphisme $\theta: G \rightarrow S_6$. Le noyau de θ est un sous-groupe normal. En effet si $k \in \ker \theta$ et si $g \in G$ nous avons

$$(kgk^{-1}) \cdot S = kgk^{-1}Ggk^{-1}g^{-1} \quad (5.111a)$$

$$= gkTk^{-1}g^{-1} \quad (5.111b)$$

$$= gTg^{-1} \quad (5.111c)$$

$$= S \quad (5.111d)$$

où T est le Sylow $T = g^{-1}Sg$. Étant donné que $k \in \ker \theta$ nous avons utilisé $kTk^{-1} = aT$. Au final $kgk^{-1} \cdot S = S$, ce qui prouve que $kgk^{-1} \in \ker \theta$.

Étant donné que $\ker \theta$ est normal dans G , soit il est réduit à $\{e\}$ soit il vaut G . La seconde possibilité est exclue parce qu'elle reviendrait à dire que G agit trivialement, ce qui n'est pas correct étant donné qu'il agit transitivement. Nous en déduisons que $\ker \theta = \{e\}$, que θ est injective et que G est isomorphe à un sous-groupe de S_6 .

Par ailleurs le groupe dérivé de G est un sous-groupe normal (et non réduit à l'identité parce que G est non commutatif). Donc $D(G) = G$. Étant donné que $G \subset S_6$, nous avons

$$G = D(G) \subset D(S_6) = A_6 \quad (5.112)$$

parce que le groupe dérivé du groupe symétrique est le groupe alterné (lemme 5.48).

L'ensemble $\theta^{-1}(A_6)$ est distingué dans G . En effet si $\sigma \in A_6$ et si $g \in G$ nous avons

$$\theta(g\theta^{-1}(\sigma)g^{-1}) = \theta(g)\sigma\theta(g)^{-1} \in A_6. \quad (5.113)$$

Nous en déduisons que $\theta^{-1}(A_6)$ est soit G entier soit réduit à $\{e\}$. Si $\theta^{-1}(A_6) = \{e\}$, alors pour tout $g \in G$ nous aurions $g^2 = e$ parce que $\theta(g^2) \in A_6$. L'ordre de G étant 60, il n'est pas possible que tous ses éléments soient d'ordre 2. Nous en déduisons que $\theta(G) \subset A_6$.

Nous nommons $H = \theta(G)$ et nous considérons l'ensemble $X = A_6/H$ où les classes sont prises à gauche, c'est-à-dire

$$[\sigma] = \{h\sigma \text{ tel que } h \in H\}. \quad (5.114)$$

Évidemment A_6 agit sur X de façon naturelle. Au niveau de la cardinalité,

$$\text{Card}(X) = \frac{|A_6|}{|H|} = \frac{360}{60} = 6. \quad (5.115)$$

Le groupe A_6 agit sur X qui a 6 éléments. Nous avons donc une application $\varphi: A_6 \rightarrow A_6$. Encore une fois, la simplicité de A_6 montre que $\varphi(A_6) = A_6$.

Nous étudions maintenant $\varphi(H)$ agissant sur X . Un élément $x \in A_6$ fixe la classe de l'unité $[e]$ si et seulement si $x \in H$ et par conséquent $\varphi(H)$ est le fixateur de $[e]$ dans X . À la renumérotation près, nous pouvons identifier $\varphi(H)$ au sous-groupe de A_6 agissant sur $\{1, \dots, 6\}$ et fixant 6. Nous avons alors $\varphi(H) = S_5 \cap A_6 = A_5$. Nous venons de prouver que φ fournit un isomorphisme entre A_5 et H . Étant donné que H était isomorphe à G , nous concluons que G est isomorphe à A_6 . $\square$

19. Définition 1.260.

5.6.2 Sous-groupes normaux

NORMooQAZTooBQLqDn

5.56 ([175]).

Soit le groupe V_4 engendré par les doubles transpositions de S_4 . Nous savons de l'exemple 1.281(6) que ce groupe contient exactement 3 éléments non triviaux et l'identité. De plus, comme c'est une classe de conjugaison, V_4 est normal dans S_4 .

Lemme 5.57.

Les sous-groupes $\text{Fix}_{S_n}(a)$ (avec $a \in \{1, \dots, n\}$) sont conjugués entre eux.

Démonstration. Soit $\sigma \in \text{Fix}(a)$ et $s \in S_n$ nous devons prouver que $s\sigma s^{-1}$ est le fixateur d'un élément de $\{1, \dots, n\}$. Nous notons $s(a) = b$. Alors

$$(s\sigma s^{-1})(b) = (s\sigma)(a) = s(a) = b. \quad (5.116)$$

Donc $s\text{Fix}(a)s^{-1} \subset \text{Fix}(b)$.

Dans l'autre sens, si $\sigma \in \text{Fix}(b)$ alors $s^{-1}\sigma s \in \text{Fix}(a)$. Mais $\sigma = s(s^{-1}\sigma s)s^{-1}$, donc $\sigma \in s\text{Fix}(a)s^{-1}$. $\square$

PROPooOTJAooUzbGZm

Proposition 5.58 (Sous-groupes normaux de S_n [175]).

Les sous-groupes normaux de S_n ne sont pas légions.

- (1) Pour $n = 4$, les sous-groupes normaux de S_4 sont $\{\text{Id}\}$, V_4 , A_4 et S_4 .
- (2) Pour $n \neq 4$, les sous-groupes normaux de S_n sont $\{\text{Id}\}$, A_n et S_n .

Démonstration. Les cas $n \leq 2$ sont un peu triviaux, donc nous faisons $n \geq 3$. Soit H normal dans S_n et $s \neq \text{Id}$ dans H ; par le lemme 5.54, s n'est pas dans le centre de S_n et il existe $u \in S_n$ tel que $us \neq su$. Comme u est un produit de transpositions (proposition 1.283), il existe une transposition t telle que $st \neq ts$. Le sous-groupe H est normal et puisque $s \in H$ nous avons aussi $ts^{-1}t^{-1} \in H$. Mais en même temps, la combinaison sts^{-1} est le conjugué d'une transposition et est donc également une transposition (classe de conjugaison de S_4 dans 1.281). Nous en concluons que $sts^{-1}t^{-1}$ est un produit de deux transpositions appartenant à H .

Nous venons de prouver que H contient au moins un produit de deux transpositions. Et ce produit est différent de Id parce que $sts^{-1}t^{-1} = \text{Id}$ impliquerait $st = ts$.

Soient donc deux transpositions $t_1, t_2 \in H$ telles que $t_1 t_2 \neq \text{Id}$. Les supports de t_1 et t_2 ont soit 1 soit aucun élément communs.

(1) Premier cas

Supposons $t_1 = (a, b)$, $t_2 = (b, c)$ avec a, b, c distincts dans $\{1, \dots, n\}$. Dans ce cas $t_1 t_2 = (a, b, c)$ et H contient un cycle de longueur 3. Puisque H est normal et que les cycles de longueur trois sont une classe de conjugaison (exemple 1.281) et que A_n est engendré par ceux-ci (proposition 5.49), $A_n \subset H$. Mais A_n est d'indice deux dans S_n (proposition (2)(2)). Quel nombre plus grand que $n!/2$ divise $n!$? Seulement n lui-même. Donc H est soit A_n soit S_n .

(2) Second cas

Le groupe H contient un élément de la forme $(ab)(cd)$ avec a, b, c, d distincts dans $\{1, \dots, n\}$.

(2a) Si $n = 3$

Impossible parce que avec $n = 3$ nous n'avons pas quatre éléments distincts.

(2b) Si $n = 4$

Le sous-groupe H de S_4 contient un élément de V_4 qui n'est pas l'identité. Par normalité et classes de conjugaison, H contient V_4 . Nous devons maintenant prouver que si H n'est pas V_4 alors H est A_4 ou S_4 . Nous avons les inclusions $V_4 \subset H \subset S_4$ et donc les inégalités

$$4 \leq |H| \leq 24. \quad (5.117)$$

Donc le nombre $|H|$ est un multiple de 4 qui divise 24. Les possibilités sont $|H| = 4, 8, 12, 24$. La possibilité $|H| = 4$ donne $H = V_4$; si $|H| = 24$ alors $H = S_4$; si $|H| = 12$ alors H est d'indice 2 dans S_4 et $H = A_n$ (proposition 5.45(3)). Quid de $|H| = 8$?

D'après le corolaire 2.15 au théorème de Lagrange, l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe. Soit x dans H mais pas dans V_4 . L'ordre de x peut être 1, 2, 4 ou 8. Ordre 1 serait $x = \text{Id}$. Ordre 8, pas possible parce que S_4 n'a pas d'éléments d'ordre 8.

(2b.i) x d'ordre 2

Prenons la décomposition de x en cycles disjoints. Puisqu'on est dans S_4 , ces cycles ne peuvent être que des transpositions. Soit il y en a un (alors H contient une transposition et donc $H = S_4$), soit il y en a deux et alors x est dans V_4 .

(2b.ii) x d'ordre 4

L'élément x est alors un cycle de longueur 4, et H contient tous les cycles de longueur 4 ; par exemple, le produit $(abcd)(bacd) = (adc)$. Le sous-groupe H contient alors A_4 (parce qu'il contient tous les 3-cycles).

(2c) Si $n \geq 5$

Soit un élément e ²⁰ distinct de a, b, c et d . Par notre liste préférée des classes de conjugaison (exemple 1.281(6)), le 2-cycle $(c, e)(a, b)$ est conjugué à $(a, b)(c, d)$ et appartient donc à H . Mais alors le produit suivant est également dans H :

$$(ce)(ab)(ab)(cd) = (ce)(cd) = (ecd). \quad (5.118)$$

Donc H contient un 3-cycle, et par conséquent tous les 3-cycles. Encore une fois, cela prouve que H est soit A_n soit S_n .

(2d) Pourquoi $n = 4$ est spécial ?

Dans le premier cas, nous montrons tout de suite que $H = V_4$ n'est pas possible. Dans le deuxième cas, nous montrons que, grâce à un élément différent de a, b, c et d , la possibilité $H = V_4$ est exclue. La possibilité $H = V_4$ n'existe que pour $n = 4$.

□

5.6.3 Indice

THOooXDRNooIyaGlv

Théorème 5.59.

Tout sous-groupe d'indice n dans S_n est isomorphe à S_{n-1} .

Démonstration. Pour $n = 1$, il n'y a pas de sous-groupe. Pour $n = 2$, un sous-groupe d'indice 2 ne peut contenir que 1 élément, qui est donc l'identité. Ok pour que $\{\text{Id}\}$ soit égal à S_1 ?

Pour les autres, il y a un peu plus de travail.

(1) Pour $n = 3$

Nous avons $|S_3| = 6$. Donc un sous-groupe d'indice 3 dans S_3 contient exactement 2 éléments. Il contient Id et un autre élément $\sigma \in S_3$ qui doit vérifier $\sigma^2 = \text{Id}$ ou $\sigma^2 = \sigma$. Aucun élément de S_3 ne vérifie $\sigma^2 = \sigma$ (à part l'identité). Donc $\sigma^2 = \text{Id}$, ce qui implique que σ est une transposition. Donc

$$H = \{\text{Id}, (12)\} \quad (5.119)$$

ou l'identité avec (23), ou avec (13). Dans tous les cas c'est isomorphe à S_2 .

(2) Pour $n = 4$

Nous avons $|S_4 : H| = 4$, donc $|H| = 6$. Mais $6 = 2 \times 3$ et $2 \mid 3 - 1$, donc le théorème 5.25 nous dit que H est soit cyclique²¹ (et donc abélien), soit un produit semi-direct. Vu que S_4 n'a pas d'éléments d'ordre 6, aucun sous-groupe d'ordre 6 ne peut être cyclique. Nous sommes donc dans le cas du produit semi-direct

$$H = \mathbb{Z}_3 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_2 \quad (5.120) \quad \text{EQooSHWGooFMNRxf}$$

20. e n'est pas l'élément neutre ici

21. Définition 1.428.

où $\varphi: \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_3)$ et $\varphi(1)$ est d'ordre 2 dans $\text{Aut}(\mathbb{Z}_3)$. Il convient de nous attarder un peu pour être sûr d'avoir bien compris tout ce qui se trouve dans l'identification (5.120). D'abord un point de notations : ici nous considérons les groupes $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ munis de l'addition. Donc 1 n'est pas le neutre. Ensuite nous savons du théorème 5.18 que $\text{Aut}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^*$, et que via cette identification, $\varphi(1) = 2 \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^*$ au sens où $\varphi(1)x = 2x$. Nous avons alors $\varphi(1)^2x = 4x = x$ dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Cela montre bien que $\varphi(1)$ est d'ordre 2.

Par rapport à la proposition 5.46, ici nous écrivons $\mathbb{Z}_2 = (\{0, 1\}, +)$ alors que là nous écrivons $\mathbb{Z}_2 = (\{-1, 1\}, \cdot)$. Ce sont les mêmes groupes, mais il convient de remarquer que le 1 ici est le -1 là.

Nous savons par la proposition 5.46 que $S_n = A_n \times_{\varphi} \mathbb{Z}_2$; en comparant avec (5.120) nous voyons qu'il suffit de prouver que $A_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ pour avoir $H = S_3$.

Le groupe A_3 possède $|S_3|/2 = 3$ éléments. Il est vite vu que $A_3 = \{\text{Id}, (12)(31), (12)(32)\}$: ce sont trois éléments de signature paire dans S_3 ; donc c'est S_3 . La correspondance $\text{Id} \mapsto 0$, $(12)(13) \mapsto 1$, $(13)(12) \mapsto 2$ donne un isomorphisme avec $(\mathbb{Z}_3, +)$.

(3) **Pour $n \geq 5$**

Soit un sous-groupe H d'indice n dans S_n et l'action à gauche de S_n sur $E = S_n/H$ (qui n'est a priori pas un groupe) donnée par $g \cdot [s] = [gs]$.

(3a) **Morphisme $\varphi: S_n \rightarrow S_E$**

Le φ défini par l'action est un morphisme parce que

$$\varphi(g_1g_2)[s] = [g_1g_2s] = \varphi(g_1)[g_2s] = \varphi(g_1)\varphi(g_2)[s]. \quad (5.121)$$

Mais il faut également vérifier que pour chaque $g \in G$, l'application $\varphi(g): E \rightarrow E$ est bien une permutation. Pour l'injectivité, si $\varphi(g)[s_1] = \varphi(g)[s_2]$ alors $[gs_1] = [gs_2]$, donc il existe $h \in H$ tel que $gs_1 = gs_2h$, ce qui prouve que $s_1 = s_2h$ et donc que $[s_1] = [s_2]$. Pour la surjectivité, soit $[t] \in S_n/H$ et résolvons $\varphi(g)[s] = [t]$ par rapport à s . L'élément $s = g^{-1}t$ convient.

(3b) **$\ker(\varphi)$ est normal**

Soit $z \in \ker(\varphi)$, c'est-à-dire que $\varphi(z) = \text{Id}_E$. Alors pour $\sigma \in S_n$ nous avons $\varphi(\sigma z \sigma^{-1}) = \varphi(\sigma)\varphi(z)\varphi(\sigma^{-1}) = \text{Id}_E$.

(3c) **$\ker(\varphi) = \bigcap_{g \in S_n} gHg^{-1}$**

Supposons que $z \in gHg^{-1}$ pour tout g , et calculons $\varphi(z)[s]$. D'abord par hypothèse il existe $h \in H$ tel que $z = shs^{-1}$, donc

$$\varphi(z)[s] = [zs] = [shs^{-1}s] = [sh] = [s], \quad (5.122)$$

ce qui prouve que $\varphi(z) = \text{Id}$.

Dans l'autre sens, soit $z \in \ker(\varphi)$. Donc $\varphi(z)[s] = [s]$. Il existe donc $h \in H$ tel que $zs = sh$, c'est-à-dire tel que $z = shs^{-1}$. La formule demandée est donc prouvée.

(3d) **Questions d'ordre**

Nous savons que $|H| = (n-1)!$ alors que $|A_n| = \frac{n!}{2}$. Donc $|H| < |A_n|$ avec une inégalité stricte. En même temps nous avons $|\ker(\varphi)| \leq |H|$ parce que $\ker(\varphi)$ est une intersection dont un des termes est H lui-même. Nous avons alors les inégalités

$$|\ker(\varphi)| \leq |H| = (n-1)! < |A_n|. \quad (5.123)$$

Mais les seuls sous-groupes normaux de S_n sont A_n , S_n et $\{\text{Id}\}$ (proposition 5.58). Donc $\ker(\varphi) = \text{Id}$ et φ est une injection entre deux ensembles finis de même cardinalité. Cela fait de φ une bijection et donc un isomorphisme de groupes

$$\varphi: S_n \rightarrow S_E. \quad (5.124)$$

Soit une fonction de numérotation $\psi: E \rightarrow \{1, \dots, n\}$. Avec cela nous définissons un isomorphisme de groupes

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}: S_E &\rightarrow S_n \\ \sigma &\mapsto \psi\sigma\psi^{-1}. \end{aligned} \quad (5.125)$$

(3e) **Fixateur**

Nous montrons à présent que $(\tilde{\psi} \circ \varphi)(H) = \text{Fix}(\psi[\text{Id}])$ où le stabilisateur est pris dans S_n . Pour la première inclusion, soit $h \in H$. Nous avons $(\tilde{\psi} \circ \varphi)(h) = \psi \circ \varphi(h)\psi^{-1}$, qui nous appliquons à $\psi[\text{Id}]$:

$$(\tilde{\psi} \circ \varphi)(h)\psi[\text{Id}] = \psi \circ \varphi(h)[\text{Id}] = \psi[h] = \psi[\text{Id}]. \quad (5.126)$$

Donc $(\tilde{\psi} \circ \varphi)(H) \subset \text{Fix}(\psi[\text{Id}])$.

Pour l'autre inclusion, soit $\sigma \in S_n$ tel que $\sigma\psi[\text{Id}] = \psi[\text{Id}]$. Puisque $\sigma \in S_n$ nous avons $s \in S_E$ tel que $\sigma = \tilde{\psi}(s)$. Pour ce s nous avons donc

$$(\tilde{\psi}(s) \circ \psi)[\text{Id}] = \psi[\text{Id}], \quad (5.127)$$

d'où nous déduisons $s[\text{Id}] = [\text{Id}]$. Cela prouve que s stabilise $[\text{Id}]$ dans S_E . Donc $s = \varphi(h)$ pour un certain $h \in H$, et au final $\sigma = \tilde{\psi}(\varphi(h))$.

(3f) **Conclusion**

L'application $\tilde{\psi} \circ \varphi: H \rightarrow S_n$ est une application dont l'image est le fixateur d'un point. Plus précisément,

$$\tilde{\psi} \circ \varphi: H \rightarrow \text{Fix}(\psi[\text{Id}]) \quad (5.128)$$

est un isomorphisme de groupe. Mais le stabilisateur d'un point dans S_n est S_{n-1} .

□

5.7 Isométries du cube

Les isométries du cube proviennent de [126].

Nous considérons le cube centré en l'origine de $\mathbb{R}^3$ et G , le groupe des isométries de $\mathbb{R}^3$ préservant ce cube. Nous notons aussi G^+ le sous-groupe de G constitué des éléments de déterminant positif. Nous notons

$$\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_4\} \quad (5.129)$$

l'ensemble des grandes diagonales, c'est-à-dire les segments $[AG]$, $[EC]$, $[FD]$, et $[BH]$. Nous savons que G préserve les longueurs et que ces segments sont les plus longs possibles à l'intérieur du cube. Donc G agit sur $\mathcal{D}$ parce qu'il ne peut transformer une grande diagonale qu'en une autre grande diagonale. Nous avons donc un morphisme de groupes

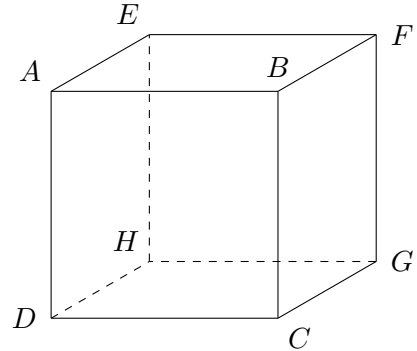
$$\rho: G \rightarrow S_4. \quad (5.130)$$

Nous montrons que ce morphisme est surjectif en montrant qu'il contient les transpositions. Le groupe G contient la symétrie axiale passant par le milieu M de $[A, E]$ et le milieu N de $[C, G]$. Il est facile de voir que cette symétrie permute $[AG]$ avec $[EC]$. De plus elle laisse $[FD]$ inchangée. En effet, aussi incroyable que cela paraisse en regardant le dessin, nous avons $FD \perp MN$, parce qu'en termes de vecteurs directeurs,

$$\overrightarrow{ON} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (5.131)$$

Étudions à présent le noyau $\ker(\rho)$. Si $f \in \ker(\rho)$ n'est pas l'identité, alors $f(D_i) = D_i$ pour tout i , mais au moins pour une des diagonales les sommets sont inversés. Quitte à renommer les sommets du cube nous supposons que la diagonale $[AG]$ est retournée : $f(A) = G$ et $f(G) = A$. Regardons où peut partir B sous l'effet de f . Étant donné que f préserve les diagonales, $f(B) \in \{B, C\}$, mais

SecPVCmkxM



étant donné que f est une isométrie, $d(f(B), f(G)) = d(B, G)$, et nous concluons que $f(B) = H$. Donc la diagonale $[BH]$ est retournée sous l'effet de f . En raisonnant de même, nous voyons que f retourne toutes les diagonales. Donc les éléments non triviaux de $\ker(\rho)$ retournent toutes les diagonales ; il n'y en a donc qu'un seul et c'est la symétrie centrale :

$$\ker(\rho) = \{\text{Id}, s_0\}. \quad (5.132)$$

Le premier théorème d'isomorphisme 2.7 nous permet d'écrire le quotient de groupes :

$$\frac{G}{\{\text{Id}, s_0\}} \simeq S_4. \quad (5.133)$$

Une classe d'équivalence modulo $\ker(\rho)$ dans G est donc toujours de la forme $\{f, f \circ s_0\}$. Et comme s_0 est de déterminant -1 , une classe contient toujours exactement un élément de déterminant 1 et un de déterminant -1 .

D'autre part, $\ker(\rho)$ est normal dans G parce qu'en tant que matrice, $s_0 = -\mathbb{1}$, donc les problèmes de commutativité ne se posent pas. L'application

$$\begin{aligned} \varphi: \frac{G}{\{\text{Id}, s_0\}} &\rightarrow G^+ \\ [g] &\mapsto \begin{cases} g & \text{si } \det(g) > 0 \\ g \circ s_0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.134)$$

est un isomorphisme de groupes. Et enfin nous pouvons écrire

$$G^+ \simeq S_4. \quad (5.135)$$

Nous allons maintenant utiliser le corolaire 2.50 pour montrer que $G = G^+ \times_{\sigma} \ker(\rho)$. Les conditions sont remplies :

- $\ker(\rho)$ normalise G^+ parce que $\ker(\rho)$ ne contient que $\pm \mathbb{1}$.
- $\ker(\rho) \cap G^+ = \{\text{Id}\}$.
- $\ker(\rho)G^+ = G$ parce que les classes d'équivalence de G modulo $\ker(\rho)$ sont composées de $\{f, f \circ s_0\}$.

Puisque $G^+ \simeq S_4$ et $\ker(\rho) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nous pouvons écrire de façon plus brillante que

$$G \simeq S_4 \times_{\sigma} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \quad (5.136)$$

Mais étant donné que la conjugaison par s_0 est triviale, le produit semi-direct est un produit direct :

$$G \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \quad (5.137)$$

Il est maintenant du meilleur gout de pouvoir identifier géométriquement ces éléments. Les éléments de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\text{Id}, s_0\}$ ne font pas de mystère. Dans S_4 nous avons les classes de conjugaison des éléments Id , (12) , (123) , (1234) et $(12)(34)$ déterminées durant l'exemple 1.281.

- (1) L'élément (12) consiste à permuter deux diagonales et laisser les autres en place. Nous avons déjà vu que c'était une symétrie axiale passant par les milieux de deux côtés opposés. Cela fait 6 axes d'ordre 2.
- (2) L'élément (123) fixe une des diagonales. C'est donc la symétrie axiale le long de la diagonale fixée. Par exemple la symétrie d'axe (AG) fait bouger le point B de la façon suivante :

$$B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow B. \quad (5.138)$$

C'est une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$. En tout, nous avons donc 8 rotations d'ordre 3.

Notons à ce propos que la différence entre (234) et (243) est que la première réalise une rotation d'angle $2\pi/3$ tandis que la seconde, une rotation d'angle $-2\pi/3$.

- (3) L'élément (1234) ne maintient aucune des diagonales et est d'ordre 4. C'est donc la rotation d'angle $\pi/2$ ou $-\pi/2$ autour de l'axe passant par les milieux de deux faces opposées. Il y en a 6 comme ça (3 paires de faces puis pour chaque il y a $\pi/2$ et $-\pi/2$), et ça tombe bien 6 est justement la taille de la classe de conjugaison de (1234) dans S_4 .
- (4) L'élément $(12)(34)$ est le carré de la précédente²², c'est-à-dire les rotations d'angle π autour

22. En fait c'est $(13)(24)$, le carré de la précédente, mais c'est la même classe de conjugaison.

des mêmes axes. Cela fait 3 éléments d'ordre 2.

Chapitre 6

Corps

6.1 Généralités

NORMooGPWRooIKJqqw

6.1.

Nous trouvons parfois le terme **anneau à division**. Cela provient du fait que dans beaucoup de cas on considère uniquement des corps commutatifs ; donc on voudrait une façon de parler d'un anneau dont tous les éléments non nuls sont inversibles. Dans ce cadre on dit :

- Un anneau à division est un anneau dont tous les éléments non nuls sont inversibles,
- Un corps est un anneau à division commutatif.

Pour prendre un exemple de cette différence, le théorème de Wedderburn 19.31 est énoncé ici sous les termes « Tout corps fini est commutatif ». Sous-entendu : la commutativité ne fait pas partie de la définition d'un corps. Par contre dans [126] il est énoncé sous les termes « Tout anneau à division fini est un corps ». Chez lui, un corps est toujours commutatif et un anneau à division est ce que nous appelons ici un corps.

6.1.1 Corps ordonnés

Nous avons vu la définition de corps totalement ordonné en 1.481.

Définition 6.2 ([30]).

Un corps est **formellement réel** si -1 n'est pas une somme de carrés.

Proposition 6.3.

Un corps totalement ordonné est formellement réel.

Démonstration. Soit un corps totalement ordonné $(\mathbb{K}, \leq)$ et $a \in \mathbb{K}$ alors $a^2 \geq 0$. En effet si $a \geq 0$ alors $a^2 = a \times a \geq 0$ directement par la définition 1.481(2). Si $a \leq 0$ alors $-a \geq 0$ et

$$a^2 = (-a)^2 \geq 0. \quad (6.1)$$

Comme $-1 < 0$, il ne peut donc pas être écrit comme un carré. A fortiori comme somme de carrés. $\square$

6.1.2 Automorphismes de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

PROPOoLLPMooIVanaO

Proposition 6.4 ([176, 1]).

L'identité est l'unique automorphisme du corps $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit un automorphisme $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Comme pour tout automorphisme,

$$\sigma(a) = \sigma(1a) = \sigma(1)\sigma(a). \quad (6.2)$$

Donc $\sigma(1) = 1$.

(1) **Identité sur les rationnels** De plus

$$\sigma(n) = \sigma(1 + \dots + 1) = \sigma(1) + \dots + \sigma(1) = n, \quad (6.3)$$

et

$$\sigma\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + \sigma\left(\frac{1}{n}\right) = \sigma\left(\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \sigma(1) = 1. \quad (6.4)$$

Donc $\sigma(1/n) = 1/n$.

Nous en déduisons que pour tout $q \in \mathbb{Q}$, $\sigma(q) = q$. Cela ne suffit pas pour déduire $\sigma(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ parce que rien n'indique que σ soit continue.

(2) **Positive sur les positifs**

Si $x > 0$ alors $\sigma(x) = \sigma(\sqrt{x})^2 > 0$.

(3) **Croissance**

Si $x > y$ alors $x - y > 0$ et $\sigma(x - y) > 0$. Cela donne $\sigma(x) > \sigma(y)$.

(4) **Identité sur les réels**

Soit un irrationnel $x \in \mathbb{R}$ et une suite (q_i) dans $\mathbb{Q}$ qui converge de façon croissante vers x . Soit $\epsilon > 0$ dans $\mathbb{Q}$. Il existe N tel que si $i > N$ alors $q_i + \epsilon > x$; en appliquant σ à cette inégalité et en se souvenant que σ est l'identité sur $\mathbb{Q}$,

$$q_i + \epsilon > \sigma(x). \quad (6.5)$$

Mais de plus, $q_i < x$ donne $\sigma(q_i) < \sigma(x)$, c'est-à-dire $q_i < \sigma(x)$. En regroupant ces deux inégalités,

$$q_i < \sigma(x) < q_i + \epsilon \quad (6.6)$$

pour tout $\epsilon > 0$ dans $\mathbb{Q}$ et $i > N$. Ce ϵ étant fixé nous pouvons prendre la limite des inégalités (6.6) :

$$x \leq \sigma(x) \leq x + \epsilon. \quad (6.7)$$

Cela étant valable pour tout $\epsilon > 0$ dans $\mathbb{Q}$, nous avons bien $x = \sigma(x)$.

□

REMooGHEDooOYYUPk

Remarque 6.5.

Certains[176] pensent que l'énoncé de cette proposition, ne parlant que de *corps* $\mathbb{R}$ n'autorise pas l'utilisation d'autre structure réelle que celle de corps. Du coup il faut reconstruire la notion d'ordre à partir seulement du langage des corps. Par exemple en disant que $a > b$ si et seulement si il existe k tel que $a = b + k^2$.

On peut s'en sortir en donnant l'énoncé suivant : « Si $\mathbb{K}$ est un corps isomorphe (en tant que corps) à $\mathbb{R}$ alors son unique automorphisme est l'identité ». Cela se démontre immédiatement en disant que si f est un automorphisme de $\mathbb{K}$ et si ϕ est un isomorphisme $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$ alors $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}$. Donc il est l'identité et f l'est également.

Attention cependant à prouver que ϕ^{-1} est un morphisme. En effet en posant $\phi^{-1}(x) = a$ et $\phi^{-1}(y) = b$ nous avons

$$\phi(\phi^{-1}(x) + \phi^{-1}(y)) = x + y \quad (6.8)$$

parce que ϕ est un morphisme. D'autre part,

$$\phi(\phi^{-1}(x) + \phi^{-1}(y)) = \phi(a + b). \quad (6.9)$$

Donc

$$\phi^{-1}(x + y) = \phi^{-1}(\phi(a) + \phi(b)) = \phi^{-1}(\phi(a + b)) = a + b = \phi^{-1}(x) + \phi^{-1}(y). \quad (6.10)$$

PROPooEATMooIPPrRV

Proposition 6.6.

Un automorphisme du corps $\mathbb{C}$ qui fixe $\mathbb{R}$ est soit l'identité soit la conjugaison complexe¹.

1. Par « fixer $\mathbb{R}$ » nous entendons que $\sigma(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, pas spécialement que $\sigma(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Soit un automorphisme σ vérifiant la condition de fixer $\mathbb{R}$. Alors la restriction de σ à $\mathbb{R}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}$ et y est donc l'identité par la proposition 6.4.

En ce qui concerne les imaginaires purs,

$$-1 = \sigma(-1) = \sigma(ii) = \sigma(i)^2. \quad (6.11)$$

Donc $\sigma(i)$ est un élément de $\mathbb{C}$ vérifiant $\sigma(i)^2 = -1$. C'est-à-dire $\sigma(i) = \pm i$.

Si $\sigma(i) = i$ alors $\sigma = \text{Id}$. Si $\sigma(i) = -i$ alors σ est la conjugaison complexe. $\square$

6.1.3 Corps premier

Définition 6.7.

Un corps est **premier** si il est son seul sous-corps. Le **sous-corps premier** d'un corps est l'intersection de tous ses sous-corps.

Lemme 6.8.

Le sous corps premier d'un corps est un corps.

Démonstration. Soit un corps $\mathbb{K}$ et son sous-corps premier $\mathbb{P}$. Si $x, y \in \mathbb{P}$, alors pour tout sous-corps $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ nous avons $x, y \in \mathbb{L}$ et donc $xy \in \mathbb{L} \subset \mathbb{P}$. Même type de vérification pour les autres propriétés d'un corps. $\square$

Lemme 6.9.

Un corps premier est commutatif.

Démonstration. Le centre d'un corps est certainement un sous-corps. Par conséquent un corps premier doit être contenu dans son propre centre, c'est-à-dire être commutatif. $\square$

Définition 6.10.

Soit p un nombre premier. Nous notons $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Nous verrons plus loin (section 19.4) comment nous pouvons définir $\mathbb{F}_{p^n}$ lorsque p est premier, ainsi que l'unicité d'un tel corps.

Nous avons par exemple

$$\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\} \quad (6.12)$$

avec la loi $2 = 0$.

Notons que $\mathbb{F}_p$ est un corps² possédant p éléments. L'ensemble $\mathbb{F}_p^*$ est un groupe d'ordre $p - 1$.

Lemme 6.11.

Les corps $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (avec p premier) sont premiers.

Démonstration. Tout sous-corps de $\mathbb{Q}$ doit contenir 1, et par conséquent $\mathbb{Z}$. Devant également contenir tous les inverses, il contient $\mathbb{Q}$.

Tout sous-corps de $\mathbb{F}_p$ doit contenir 1 et donc $\mathbb{F}_p$ en entier. Par ailleurs nous savons de la proposition 3.52 que $\mathbb{F}_p$ est un corps lorsque p est premier. $\square$

Lemme 6.12.

Si $k \in \mathbb{Z}$, nous notons $k_{\mathbb{K}}$ l'élément $k \cdot 1_{\mathbb{K}} = \sum_{i=1}^k 1_{\mathbb{K}}$. L'application

$$\begin{aligned} s: \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{K} \\ k &\mapsto k_{\mathbb{K}} \end{aligned} \quad (6.13)$$

est un morphisme d'anneaux.

Si la caractéristique de $\mathbb{K}$ est 0, alors s est injective.

2. Quand p est premier, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps, proposition 3.52.

PROPooXLLOooIAhEue

Proposition 6.13 (Sous-corps premier[177]).

Soit $\mathbb{K}$, un corps³ de caractéristique p .

- (1) Si $p > 0$ alors le sous-corps premier de $\mathbb{K}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.
- (2) Si $p = 0$ alors le sous-corps premier de $\mathbb{K}$ est isomorphe à $\mathbb{Q}$.

Démonstration. Pour les besoins de notations, dans la suite si $k \in \mathbb{Z}$, nous notons $k_{\mathbb{K}}$ l'élément $k \cdot 1_{\mathbb{K}} = \sum_{i=1}^k 1_{\mathbb{K}}$. Notons aussi $\mathbb{P}$ le sous-corps premier de $\mathbb{K}$.

Étant donné que $1_{\mathbb{K}}$ est dans tout sous-corps, nous devons avoir $\mathbb{Z}1_{\mathbb{K}} \subseteq \mathbb{P}$. Nous avons donc toujours

$$\mathbb{Z}1_{\mathbb{K}} \subset \mathbb{P} \subset \mathbb{K}. \quad (6.14)$$

Maintenant, le lemme 1.454 nous dit la nature de $\mathbb{Z}1_{\mathbb{K}}$ en tant qu'anneaux, et nous pouvons séparer les cas en fonction de la caractéristique.

- (1) **Si $p > 0$** Nous avons $\mathbb{Z}1_{\mathbb{K}} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par le lemme 1.454. L'ensemble $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ étant un corps, $\mathbb{Z}1_{\mathbb{K}}$ est un corps et c'est donc le corps premier de $\mathbb{K}$.
- (2) **Si $p = 0$** Si $p = 0$, alors $\mathbb{Z}1 \simeq \mathbb{Z}$ en tant qu'anneaux. Dommage que $\mathbb{Z}$ ne soit pas un corps. Soit $n \in \mathbb{Z}1_{\mathbb{K}}$ et $m \in (\mathbb{Z}1_{\mathbb{K}})^*$. L'élément $nm^{-1} \in \mathbb{K}$ est dans $\mathbb{P}$ parce que $\mathbb{P}$ est un corps. Donc l'application

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{Q} &\rightarrow \mathbb{P} \\ ab^{-1} &\mapsto a_{\mathbb{K}}b_{\mathbb{K}}^{-1} \end{aligned} \quad (6.15)$$

prend bien ses valeurs dans $\mathbb{P}$ et est un morphisme de corps.

La surjectivité de ψ est ce dont nous venons de parler. En ce qui concerne l'injectivité, si $\psi(ab^{-1}) = \psi(xy^{-1})$, alors $a_{\mathbb{K}}b_{\mathbb{K}}^{-1} = x_{\mathbb{K}}y_{\mathbb{K}}^{-1}$ et la commutativité de $\mathbb{K}$ nous permet d'écrire

$$a_{\mathbb{K}}y_{\mathbb{K}} = x_{\mathbb{K}}b_{\mathbb{K}}. \quad (6.16)$$

Étant donné le lemme 6.12, nous déduisons que $(ay - xb)_{\mathbb{K}} = 0$. Et comme $z \mapsto z_{\mathbb{K}}$ est injective, nous en déduisons que $ay - xb = 0$ dans $\mathbb{Z}$, et donc que $ab^{-1} = xy^{-1}$ dans $\mathbb{Q}$ par le lemme 1.477.

□

PropqPPrgJ

Proposition 6.14.

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{P}$ son sous-corps premier⁴. Si $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{K})$ alors $\sigma|_{\mathbb{P}} = \text{Id}$, c'est-à-dire que $\sigma(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{P}$.

Démonstration. Soit $\mathbb{P}$ le sous-corps premier de $\mathbb{K}$. La proposition 6.13 nous dit que $\mathbb{P}$ est soit $\mathbb{Z}$ soit $\mathbb{Q}$ en fonction de la caractéristique de $\mathbb{K}$. Nous allons faire le cas de caractéristique nulle, c'est-à-dire $\mathbb{P} \simeq \mathbb{Q}$.

Tout élément de $\mathbb{P}$ peut être écrit sous la forme $k_{\mathbb{K}}l_{\mathbb{K}}^{-1}$ pour des $k, l \in \mathbb{Z}$. Nous calculons la valeur de σ sur ces éléments. D'abord σ satisfait $\sigma(1_{\mathbb{K}})$ et préserve la somme, dont $\sigma(k_{\mathbb{K}}) = k_{\mathbb{K}}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ ⁵. Étant donné que σ préserve également l'inverse et le produit,

$$\sigma(k_{\mathbb{K}}l_{\mathbb{K}}^{-1}) = \sigma(k_{\mathbb{K}})\sigma(l_{\mathbb{K}})^{-1} = k_{\mathbb{K}}l_{\mathbb{K}}^{-1}. \quad (6.17)$$

Et voila.

□

3. Je rappelle que tous les corps du Frido sont commutatifs, sauf mention explicite du contraire.

4. Définition 6.7.

5. Dans le cas de caractéristique non nulle, $\mathbb{P} = \mathbb{Z}$ et vous pouvez vous arrêter ici.

6.1.4 Petit théorème de Fermat

ThoOPQOio

Théorème 6.15 (Petit théorème de Fermat).

Soit p un nombre premier.

- (1) Si $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ alors $x^p = x$.
- (2) Si $x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, alors $x^{p-1} = 1$.
- (3) Si $x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ alors $x^{-1} = x^{p-2}$.
- (4) Si x est premier avec p , alors $x^{p-1} \in [1]_p$.

ITEMooRNIVooOIZqgc

Démonstration. Étant donné que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps commutatif et que p est premier, la proposition 1.457 nous indique que $\sigma(x) = x^p$ est un automorphisme. La proposition 6.14 nous indique alors que

$$a^p = a. \quad (6.18)$$

Si a est inversible alors $a^{p-1} = a^p a^{-1} = 1$.

Pour (4). Le nombre x n'est pas premier avec p uniquement lorsque x est multiple de p . Dans ce cas c'est $[a]_p = 0$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et donc $a^{p-1} = 0$. $\square$

Exemple 6.16.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{29}$. Le nombre 29 étant premier, $\mathbb{K}$ est un corps. C'est le corps des entiers modulo 29. Nous avons donc

$$-142 = -113 = -84 = -55 = -26 = 3 = 32 = 61 = 90 = 119. \quad (6.19)$$

Le petit théorème de Fermat nous permet aussi de calculer des exposants et des inverses. En effet, puisque $1 = x^{28}$ pour tout $x \in \mathbb{F}_{29}^*$, nous avons $x^{-1} = x^{27}$, et par suite, pour tout entier a ,

$$x^{-a} = (x^a)^{27} = x^{27a}. \quad (6.20)$$

Le nombre $27a$ peut être grand par rapport à 29. Mais en réutilisant le fait que $1 = x^{28}$, on obtient

$$x^{-a} = x^{[27a]_{28}}. \quad (6.21)$$

Cette expression doit être comprise comme disant que pour tout $k \in [27a]_{28}$ nous avons $x^{-a} = x^k$.

Chose à retenir : dans les exposants nous calculons modulo 28. $\triangle$

6.1.5 Nombres de Sophie Germain

DEFooCVFJooKCdVVD

Définition 6.17.

Un nombre premier p est de **Sophie Germain** si $p > 2$ et si le nombre $q = 2p + 1$ est également premier.

Notons qu'il existe des nombres premiers de Sophie Germain. Par exemple $p = 3$ donne $q = 2 \times 3 + 1 = 7$. Comme 7 est un nombre premier, le nombre 3 est de Sophie Germain. D'après Wikipédia[178], l'existence d'une infinité de nombres premiers de Sophie Germain est encore une question ouverte⁶.

LEMooIYIKooGkoqRJ

Lemme 6.18 ([179, 180]).

Soit p , un nombre premier de Sophie Germain. Si $m \in \mathbb{Z}$ n'est pas divisible par q , alors $m^p \in [\pm 1]_q$ où $q = 2p + 1$.

Démonstration. Le petit théorème de Fermat 6.15 nous dit que $m^{q-1} \in [1]_q$. Mais $m^{q-1} = m^{2p} = (m^p)^2$. Donc

$$(m^p)^2 \in [1]_q. \quad (6.22)$$

Puisque q est premier, l'anneau $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ est intègre par le corolaire 1.399. Comme $1 \neq -1$, la proposition 3.121 s'applique et nous avons $m^p \in [\pm 1]_q$. $\square$

6. Si vous lisez ce paragraphe dans un futur où la question est tranchée, n'hésitez pas à m'écrire pour mettre à jour.

THOooSZXWooVeHdrrh

Théorème 6.19 ([179, 180, 181]).

Soit un nombre premier de Sophie Germain (définition 6.17). Il n'existe pas de solution (x, y, z) dans $\mathbb{Z}^3$ au système

$$\begin{cases} x^p + y^p + z^p = 0 \\ [xyz]_p \neq 0. \end{cases} \quad (6.23)$$

Démonstration. Nous supposons que $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ est une solution telle que $\text{pgcd}(x, y, z) = 1$.

- (1) **x, y et z sont premiers deux à deux** Supposons que k soit un diviseur premier commun à x et y . Alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tels que $x = k\alpha$ et $y = k\beta$. Du coup on aurait $z^p = -k^p(\alpha^p + \beta^p)$. Donc k divise z^p . Le lemme 1.367 nous indique qu'alors k divise z . Donc $k = 1$ parce que k diviserait x, y et z .

Ce qui est vrai pour le couple (x, y) est encore vrai pour (x, z) et pour (y, z) .

- (2) **Le fameux u** Nous introduisons à présent une nouvelle variable intermédiaire qui va beaucoup nous aider. En utilisant le lemme 1.377,

$$-x^p = y^p + z^p = (y + z) \sum_{k=0}^{p-1} y^k (-z)^{p-1-k} = (y + z)u \quad (6.24)$$

où nous avons posé $u = \sum_{k=0}^{p-1} y^k (-z)^{p-1-k}$.

- (3) $\text{pgcd}(u, y + z) = 1$ Soit α un nombre premier qui divise u et $y + z$. D'abord α divise x^p et donc x (lemme 1.367). Autrement dit : $[x]_\alpha = 0$. Ensuite, $0 = [x + z]_\alpha$, de telle sorte que

$$[y]_\alpha = -[z]_\alpha \quad (6.25)$$

EQooPTICooBNDwpX

Enfin, en prenant la classe de u modulo α , et en substituant (6.25) :

$$0 = [u]_\alpha = \left[\sum_{k=0}^{p-1} y^k (-z)^{p-1-k} \right]_\alpha \quad (6.26a)$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} [y^k]_\alpha [y^{p-1-k}]_\alpha \quad (6.26b)$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} [y]_\alpha^{p-1} \quad (6.26c)$$

$$= p[y]_\alpha^{p-1}. \quad (6.26d)$$

Nous avons donc $p[y]_\alpha^{p-1} = 0$. Mais $\mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z}$ est un anneau intègre⁷. Donc la règle du produit nul s'applique⁸ et nous avons deux possibilités : $[p]_\alpha = 0$ ou $[y]_\alpha^{p-1} = 0$.

D'abord α divise déjà x . Or $\text{pgcd}(x, y) = 1$. Donc α ne peut pas diviser y (à part si $\alpha = 1$ évidemment), et à fortiori pas y^{p-1} non plus. Nous en déduisons que $[p]_\alpha = 0$. Puisque p est premier, nous avons $p = \alpha$.

Mais nous avons déjà vu que α divisait x . Donc $0 = [x]_\alpha = [x]_p$. Cela n'est pas possible parce que $[xyz]_p \neq 0$.

Nous avons donc prouvé que $\text{pgcd}(u, y + z) = 1$.

- (4) **Utilisation d'un lemme**

Pour rappel, p est impair. Nous avons $(-x)^p = (y + z)u$. Le lemme 3.17 nous dit qu'il existe $a, \alpha \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\begin{cases} y + z = a^p \\ u = \alpha^p. \end{cases} \quad (6.27)$$

EQooKMPZooCSHHT

7. Corolaire 1.399.

8. Proposition 1.326.

Ce que nous venons de faire pour $y + z$ peut être fait pour les autres couples. Donc il existe $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que

$$y + z = a^p \quad (6.28a)$$

$$x + z = b^p \quad (6.28b)$$

$$x + y = c^p. \quad (6.28c)$$

- (5) q divise un et un seul des x, y ou z Supposons que q ne divise ni x , ni y ni z . Alors le lemme 6.18 dit que $x^p \in [\pm 1]_q$, $y^p \in [\pm 1]_q$ et $z^p \in [\pm 1]_q$. Donc les valeurs possibles pour $[x^p + y^p + z^p]_q$ sont $[\pm 3]_q$ et $[\pm 1]_q$.

Mais nous avons supposé que $x^p + y^p + z^p = 0$ et que $q \geq 5$ de telle sorte que $[\pm 3]_q \neq 0$. Contradiction. Donc q divise au moins un des trois x, y ou z .

Nous avons déjà montré que x, y et z étaient deux à deux premiers entre eux. Donc q ne peut diviser qu'un seul des trois.

- (6) q divise x Jusqu'à présent x, y et z avaient des rôles symétriques. Maintenant nous supposons que q divise x .

- (7) $[y^p]_q = [\pm 1]_q$ Nous savons que $c^p = x + y$. En passant aux classes modulo q , nous avons

$$[c^p]_q = [x]_q + [y]_q = [y]_q \quad (6.29)$$

parce que nous avons choisi que q divise x . Nous avons maintenant les implications suivantes :
 q ne divise pas y .

$\Rightarrow q$ ne divise pas c^p parce que $[y]_q = [c^p]_q$.

$\Rightarrow q$ ne divise pas c par le lemme 1.367.

$\Rightarrow c^p \in [\pm 1]_q$ par le lemme 6.18.

$\Rightarrow y \in [\pm 1]_q$ toujours parce que $[y]_q = [c^p]_q$.

- (8) $[z^p]_q = [\pm 1]_q$ Parce que les rôles de y et z sont symétriques. Donc ce que nous avons fait pour obtenir $[y^p]_q = [\pm 1]_q$ tient pour avoir $[z^p]_q = [\pm 1]_q$.

- (9) q divise $y + z$ Nous avons dit que q divisait x . Il divise donc aussi $2x$. Nous avons :

$$2x = (x + y) + (x + z) - (y + z) = c^p + b^p - a^p. \quad (6.30)$$

En passant au modulo q , à gauche nous avons $[2x]_q = 0$. Donc

$$[a^p]_q = [c^p]_q + [b^p]_q \quad (6.31a)$$

$$= [y]_q + [z]_q \quad (6.31b)$$

$$= [\pm 1]_q + [\pm 1]_q \quad (6.31c)$$

$$\in \{[2]_q, [-2]_q, [0]_q\}. \quad (6.31d)$$

En tout état de cause, $[a^p]_q$ n'est pas $[\pm 1]_q$. La contraposée du lemme 6.18 nous dit alors que q divise $a^p = y + z$.

- (10) $[y]_q = [-z]_q$ Il s'agit seulement du fait que q divise $y + z$.

- (11) $[u]_q = [p]_q$ Par définition, $u = \sum_{k=0}^{p-1} y^k (-z)^{p-1-k}$. On passe au modulo q , en substituant $[-z]_q$ par $[y]_q$:

$$[u]_q = \sum_{k=0}^{p-1} [y]_q^k [y]_q^{p-1-k} = \sum_{k=0}^{p-1} [y]_q^{p-1} = p[y]_q^{p-1} = [p]_q \quad (6.32)$$

La dernière égalité est le fait que $[y]_q = [\pm 1]_q$ et que $p - 1$ est pair.

- (12) La contradiction Vous vous souvenez de (6.27) qui disait que $u = \alpha^p$ pour un certain p ? Nous avons les implications suivantes :

$$[\alpha^p]_q = [p]_q \neq 0 \Rightarrow q \text{ ne divise pas } \alpha^p.$$

$$\Rightarrow q \text{ ne divise pas } \alpha.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \alpha^p &\in [\pm 1]_q . \\ \Rightarrow [p]_q &\in [\pm 1]_q . \end{aligned}$$

La dernière ligne est clairement fausse parce que $q > p$ et p n'est certainement pas égal à 1 ou -1 .

Nous avons prouvé le théorème pour les triples (x, y, z) sans facteur commun. Si k était un diviseur commun de x , y et z , alors $(x/k, y/k, z/k)$ serait encore une solution, ce qui n'est pas le cas. $\square$

6.2 Théorème des deux carrés

PropleGdaT

Proposition 6.20.

Soit p un nombre premier et P un élément de $\mathbb{F}_p[X]$. L'anneau $\mathbb{F}_p[X]/(P)$ est intègre si et seulement si P est irréductible dans $\mathbb{F}_p[X]$.

Démonstration. Supposons que P soit réductible dans $\mathbb{F}_p[X]$, c'est-à-dire qu'il existe $Q, R \in \mathbb{F}_p[X]$ tels que $P = QR$. Dans ce cas, $\bar{Q}$ est diviseur de zéro dans $\mathbb{F}_p[X]/(P)$ parce que $\bar{Q}\bar{R} = 0$.

Nous supposons maintenant que $\mathbb{F}_p[X]/(P)$ ne soit pas intègre : il existe des polynômes $R, Q \in \mathbb{F}_p[X]$ tels que $\bar{Q}\bar{R} = 0$. Dans ce cas le polynôme QR est le produit de P par un polynôme : $QR = PA$. Tous les facteurs irréductibles de A étant soit dans Q soit dans R , il est possible de modifier un peu Q et R pour obtenir $QR = P$, ce qui signifie que P n'est pas irréductible. $\square$

6.2.1 Un peu de structure dans $\mathbb{Z}[i]$

LemSCAIICY

Lemme 6.21.

L'application

$$\begin{aligned} N: \mathbb{Z}[i] &\rightarrow \mathbb{N} \\ a + bi &\mapsto a^2 + b^2 \end{aligned} \tag{6.33}$$

est un stathme euclidien pour $\mathbb{Z}[i]$.

Démonstration. Soient $t, z \in \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}$ dont le quotient s'écrit

$$\frac{z}{t} = x + iy \tag{6.34}$$

dans $\mathbb{C}$. Nous considérons $q = a + bi$ où a et b sont les entiers les plus proches de x et y . Si il y a *ex aequo*, on prend au hasard⁹. Alors nous avons

$$\left| \frac{z}{t} - q \right| \leq \frac{|1+i|}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1. \tag{6.35}$$

On pose $r = z - qt$ qui est bien un élément de $\mathbb{Z}[i]$. De plus

$$|r| = |z - qt| = |t| \left| \frac{z}{t} - q \right| < |t|, \tag{6.36}$$

c'est-à-dire que $|r|^2 < |t|^2$ et donc $N(r) < N(t)$. $\square$

Étant donné que $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien, il est principal (proposition 1.341).

LemBMEIiV

Lemme 6.22.

Les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ sont $\{\pm 1, \pm i\}$.

9. Dans l'exemple 1.338, nous prenions toujours l'inférieur parce que le stathme tenait compte de la positivité.

Démonstration. Déterminons les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$. Si $z \in \mathbb{Z}[i]^*$, alors il existe $z' \in \mathbb{Z}[i]^*$ tel que $zz' = 1$. Dans ce cas nous aurions

$$1 = N(zz') = N(z)N(z'), \quad (6.37)$$

ce qui est uniquement possible avec $N(z) = N(z') = 1$, c'est-à-dire $z = \pm 1$ ou $z = \pm i$. Nous avons donc

$$\mathbb{Z}[i]^* = \{\pm 1, \pm i\}. \quad (6.38)$$

□

DEFooUCSHooJqGuVB

Définition 6.23 ([182]).

Un **monoïde** est un triplet $(E, *, e)$ où E est un ensemble, e est un élément de E et $*$: $E \times E \rightarrow E$ est une loi de composition telle que pour tout $x, y \in E$,

- (1) $x * (y * z) = (x * y) * z$ (associativité)
- (2) $e * x = x * e = x$ (e est un neutre).

Nous notons $\Sigma = \{a^2 + b^2 \text{ tel que } a, b \in \mathbb{N}\}$.

LemIBDPzMB

Lemme 6.24.

L'ensemble $\Sigma = \{a^2 + b^2 \text{ tel que } a, b \in \mathbb{N}\}$ est un sous-monoïde¹⁰ de $\mathbb{N}$.

Démonstration. Il suffit de prouver que si $m, n \in \Sigma$, alors le produit mn est également dans Σ . Soit N , le stathme euclidien sur $\mathbb{Z}[i]$ (celui donné par le lemme 6.21). Vu que $n \in \Sigma$, il existe $z \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $N(z) = n$. Idem pour m : il existe $z' \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $N(z') = m$. Nous avons évidemment $zz' \in \mathbb{Z}[i]$, et

$$N(zz') = N(z)N(z') = nm. \quad (6.39)$$

Donc nm est l'image de zz' par N , ce qui prouve que $nm \in \Sigma$.

□

ThospaAEI

Théorème 6.25 (Théorème des deux carrés, version faible).

Un nombre premier est somme de deux carrés si et seulement si $p = 2$ ou $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Démonstration. Soit p un nombre premier dans Σ . Si $a = 2k$, alors $a^2 = 4k^2$ et $a^2 \equiv 0 \pmod{4}$. Si au contraire a est impair, $a = 2k + 1$ et $a^2 = 4k^2 + 1 + 4k \equiv 1 \pmod{4}$. La même chose est valable pour b . Par conséquent, $a^2 + b^2$ est automatiquement $[0]_4$, $[1]_4$ ou $[2]_4$. Évidemment les nombres de la forme $0 \pmod{4}$ ne sont pas premiers ; parmi les $2 \pmod{4}$, seul $p = 2$ est premier (et vaut $1^2 + 1^2$).

Nous avons démontré que les seuls premiers de la forme $a^2 + b^2$ sont $p = 2$ et les $p \equiv 1 \pmod{4}$. Il reste à faire le contraire : démontrer que si un nombre premier p vaut $1 \pmod{4}$, alors il est premier. Nous considérons l'anneau

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \text{ tel que } a, b \in \mathbb{Z}\}. \quad (6.40)$$

puis l'application

$$\begin{aligned} N : \mathbb{Z}[i] &\rightarrow \mathbb{N} \\ a + bi &\mapsto a^2 + b^2. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Un peu de calcul dans $\mathbb{C}$ montre que pour tout $z, z' \in \mathbb{Z}[i]$, $N(zz') = N(z)N(z')$.

Nous savons que les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ sont ± 1 et $\pm i$ (lemme 6.22).

Le lemme 6.21 montre que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau euclidien parce que N est un stathme. L'anneau $\mathbb{Z}[i]$ étant euclidien, il est principal (proposition 1.341).

Pour la suite, nous allons d'abord montrer que $p \in \Sigma$ si et seulement si p n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$, puis nous allons voir quels sont les irréductibles de $\mathbb{Z}[i]$.

Soit p , un nombre premier dans Σ . Si $p = a^2 + b^2$, alors nous avons $p = (a + ib)(a - bi)$, mais étant donné que p est premier, nous avons $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Du coup p n'est pas inversible dans

10. Définition 6.23.

$\mathbb{Z}[i]$, mais il peut être écrit comme le produit de deux non inversibles. Le nombre p est donc non irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.

Dans l'autre sens, nous supposons que p est un nombre premier non irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$. Nous avons alors $p = zz'$ avec ni z ni z' dans $\{\pm 1, \pm i\}$. En appliquant N nous avons

$$p^2 = N(p) = N(z)N(z'). \quad (6.42)$$

Comme p est premier par hypothèse, c'est uniquement possible avec $N(z) = N(z') = p$ (avoir $N(z) = 1$ est impossible parce que cela signifierait que z est inversible). Si $z = a + ib$, alors $p = N(z) = a^2 + b^2$, et donc $p \in \Sigma$.

Nous savons déjà que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau principal et n'est pas un corps ; la proposition 1.400 s'applique donc et p sera non irréductible si et seulement si l'idéal (p) est non premier. Le fait que (p) soit un idéal non premier implique que le quotient $\mathbb{Z}[i]/(p)$ est non intègre (c'est la définition d'un idéal premier). Nous cherchons donc les nombres premiers pour lesquels le quotient $\mathbb{Z}[i]/(p)$ n'est pas intègre.

Nous commençons par écrire le quotient $\mathbb{Z}[i]/(p)$ sous d'autres formes. D'abord en remarquant que si I et J sont deux idéaux, on a $(\mathbb{A}/I)/J \simeq (\mathbb{A}/J)/I$. Par conséquent, en tenant compte du fait que $\mathbb{Z}[i] = \mathbb{Z}[X]/(X^2 + 1)$, nous avons

$$\mathbb{Z}[i]/(p) = (\mathbb{Z}[X]/(p))/(X^2 + 1) = \mathbb{F}_p[X]/(X^2 + 1). \quad (6.43)$$

Nous avons donc équivalence des propositions suivantes :

$$p \in \Sigma \quad (6.44a)$$

$$\mathbb{F}_p[X]/(X^2 + 1) \text{ n'est pas intègre} \quad (6.44b)$$

$$X^2 + 1 \text{ n'est pas irréductible dans } \mathbb{F}_p \quad (6.44c)$$

$$X^2 + 1 \text{ admet une racine dans } \mathbb{F}_p \quad (6.44d)$$

$$-1 \in (\mathbb{F}_p^*)^2 \quad (6.44e)$$

$$\exists y \in \mathbb{F}_p^* \text{ tel que } y^2 = -1. \quad (6.44f)$$

Le point (6.44c) vient de la proposition 6.20. Maintenant nous utilisons le fait que p soit un premier impair (parce que le cas de $p = 2$ est déjà complètement traité), donc $(p-1)/2 \in \mathbb{N}$ et nous avons, pour le y de la dernière ligne,

$$(-1)^{(p-1)/2} = (y^2)^{(p-1)/2} = y^{p-1} = 1 \quad (6.45)$$

parce que dans $\mathbb{F}_p$ nous avons $y^{(p-1)} = 1$ par le petit théorème de Fermat (théorème 6.15). Ainsi p doit vérifier

$$1 = (-1)^{(p-1)/2}, \quad (6.46)$$

c'est-à-dire $\frac{p-1}{2} = 0 \pmod{2}$ ou encore $p = 1 \pmod{4}$. $\square$

Remarque 6.26.

Il n'est pas dit que les nombres dans $[1]_4$ sont premiers ($9 = 8 + 1$ ne l'est pas par exemple). Le théorème signifie que (à part 2), si un nombre premier est dans $[1]_4$ alors il est somme de deux carrés, et inversement, si un nombre premier est somme de deux carrés, il est dans $[1]_4$.

Théorème 6.27 (Théorème des deux carrés[126]).

Soit $n \geq 2$ un nombre dont nous notons

$$n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(n)} \quad (6.47)$$

où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers. Alors $n \in \Sigma$ si et seulement si pour tout $p \in \mathcal{P} \cap [3]_4$, nous avons $v_p(n) \in [0]_2$ (c'est-à-dire $v_p(n)$ est pair).

Démonstration. (1) **Condition suffisante.**

Le produit (6.47) est évidemment un produit fini que nous pouvons alors regrouper en quatre parties : $\mathcal{P} \cap [0]_4$, $\mathcal{P} \cap [1]_4$, $\mathcal{P} \cap [2]_4$ et $\mathcal{P} \cap [3]_4$.

- Il n'y a pas de nombres premiers dans $[0]_4$.
- Les nombres premiers de $[1]_4$ sont dans Σ . Le produit d'éléments de Σ étant dans Σ , nous avons

$$\prod_{p \in \mathcal{P} \cap [1]_4} p^{v_p(n)} \in \Sigma. \quad (6.48)$$

- Le seul nombre premier dans $[2]_4$ est 2. C'est un élément de Σ .
- Le produit

$$\prod_{p \in \mathcal{P} \cap [3]_4} p^{v_p(n)} \quad (6.49)$$

est par hypothèse un produit de carrés ($v_p(n)$ est pair), et est donc un carré.

Au final le produit $\prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(n)}$ est un produit d'un carré par un élément de Σ , ce qui est encore un élément de Σ .

Pour cette partie, nous avons utilisé et réutilisé le lemme 6.24.

(2) **Condition nécessaire.**

Soit p , un nombre premier. Nous voulons montrer que

$$\{v_p(n) \text{ tel que } n \in \Sigma\} \subset [2]_2. \quad (6.50)$$

Pour montrer cela nous allons procéder par récurrence sur les ensembles

$$E_k = \{v_p(n) \text{ tel que } n \in \Sigma\} \cap \{0, \dots, k\}. \quad (6.51)$$

Il est évident que les éléments de E_0 sont pairs, puisqu'il n'y a que zéro, qui est pair.

Supposons que $E_k \subset [0]_2$, et montrons que $E_{k+1} \subset [0]_2$. Soit un élément de E_{k+1} , c'est-à-dire $v_p(n) \leq k+1$ avec $n = a^2 + b^2$. Si $v_p(n) = 0$ alors l'affaire est réglée ; sinon c'est que p divise n . Mais dans $\mathbb{Z}[i]$ nous avons

$$n = a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi) \quad (6.52)$$

Comme $\mathbb{Z}[i]$ est principal, le lemme de Gauss 3.60 nous dit que si p divise n , alors il doit diviser soit $a + bi$, soit $a - bi$ (et en fait, les deux). Nous avons alors $p \mid a$ et $p \mid b$ en même temps. Et donc

$$p^2 \mid a^2 + b^2 = n. \quad (6.53)$$

Posons $a = pa'$ et $b = pb'$ avec $a', b' \in \mathbb{N}$. Nous avons

$$\frac{n}{p^2} = \frac{p^2 a'^2 + p^2 b'^2}{p^2} = a'^2 + b'^2 \in \Sigma. \quad (6.54)$$

Mais par construction,

$$v_p\left(\frac{n}{p^2}\right) = v_p(n) - 2 < k. \quad (6.55)$$

Donc $v_p(\frac{n}{p^2})$ est pair et par conséquent, $v_p(n)$ doit également être pair.

□

6.2.2 Résultats chinois

Nous allons maintenant parler du système d'équations SUBEQooHVCTooGXvbAH

$$\begin{cases} x = a_1 \pmod{p} \\ x = a_2 \pmod{q} \end{cases} \quad \begin{matrix} (6.56a) \\ (6.56b) \end{matrix}$$

avec a_1, a_2 donnés dans $\mathbb{Z}$ et p, q des entiers premiers entre eux. Le lemme chinois nous donne la liste des solutions ainsi qu'une manière de les construire. Le théorème chinois en sera une espèce de corolaire qui établira l'isomorphisme d'anneaux $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Voir [183].

Notons que le système (6.56), en suivant les notations usuelles du Frido s'écrit plutôt

$$x \in [a_1]_p \cap [a_2]_q. \quad (6.57)$$

LemCtUeGA

Lemme 6.28 (Lemme chinois [184]).

Soient n_1, n_2 deux entiers premiers entre eux¹¹. Soient $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$.

ITEMooZVUSooGoplQW

(1) Il existe $u_1, u_2 \in \mathbb{Z}$ tels que

$$u_1 n_1 + u_2 n_2 = 1. \quad (6.58)$$

EQooIJXOooNEfCB

ITEMooFMFEooQHNLfc

(2) Nous posons

$$a = a_1 u_2 n_2 + a_2 n_1 u_1. \quad (6.59)$$

Nous avons

$$[a_1]_{n_1} \cap [a_2]_{n_2} = [a]_{n_1 n_2}. \quad (6.60)$$

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **Pour (1)** Il suffit d'utiliser le théorème de Bézout 1.349

(2) **Pour (2) première inclusion** Soit $x \in [a]_{n_1 n_2}$, et vérifions que $x \in [a_1]_{n_1}$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x = a_1 u_2 n_2 + a_2 n_1 u_1 + k n_1 n_2. \quad (6.61)$$

En remplaçant $u_2 n_2$ par $1 - u_1 n_1$, nous avons

$$x = a_1(1 - u_1 n_1) + a_2 n_1 u_1 + k n_1 n_2 \in [a_1]_{n_1} \quad (6.62)$$

parce qu'il n'y a que le tout premier terme qui ne contient pas de facteur n_1 .

Le fait que $x \in [a_2]_{n_2}$ se vérifie de même¹².

(3) **Pour (2) seconde inclusion** Soit $x \in [a_1]_{n_1} \cap [a_2]_{n_2}$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = a_1 + k n_2$. Donc

$$x - a = a_1 + k n_2 - (a_1 u_2 n_2 + a_2 n_1 u_1) \quad (6.63a)$$

$$= a_1 - a_1 u_2 n_2 + k' n_1 \quad (6.63b)$$

$$= a_1 \underbrace{(1 - u_2 n_2)}_{=u_1 n_1} + k' n_1 \quad (6.63c)$$

$$= a_1 u_1 n_1 + k' n_1, \quad (6.63d)$$

ce qui signifie que n_1 divise $x - a$.

De même nous prouvons que n_2 divise $x - a$. Il existe $k, l \in \mathbb{Z}$ tels que

$$x - a = k n_1 = l n_2. \quad (6.64)$$

EQooFMWBBooTpooj

En particulier n_1 divise $l n_2$ alors que n_1 et n_2 sont premiers entre eux. Le lemme de Gauss 3.60 dit alors que n_1 divise l . Il existe donc $s \in \mathbb{Z}$ tel que $l = s n_1$. En remettant ce l dans (6.64), nous trouvons

$$x - a = l n_2 = s n_1 n_2, \quad (6.65)$$

11. Définition 1.355.

12. Je dis ça au hasard ; je n'ai pas vérifié. Faites-moi signe si c'est bon.

et donc $x - a$ est divisible en $n_1 n_2$, c'est-à-dire

$$x \in [a]_{n_1 n_2}, \quad (6.66)$$

ce qu'il fallait prouver. □

THOooQHYLooVMBaFe

Théorème 6.29 (Théorème chinois[185]).

Soient p, q deux naturels premiers entre eux. Si $p, q \geq 2$ alors l'application

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \\ [x]_{pq} &\mapsto ([x]_p, [x]_q) \end{aligned} \quad (6.67)$$

est un isomorphisme d'anneaux.

Démonstration. Nous devons prouver que l'application ϕ respecte la somme, le produit et qu'elle est bijective. En ce qui concerne la somme,

$$\phi([x]_{pq} + [y]_{pq}) = \phi((x + y) \bmod pq) \quad (6.68a)$$

$$= ([x + y]_p, [x + y]_q) \quad (6.68b)$$

$$= ([x]_p + [y]_p, [x]_q + [y]_q) \quad (6.68c)$$

$$= ([x]_p, [x]_q) + ([y]_p, [y]_q) \quad (6.68d)$$

$$= \phi(x) + \phi(y). \quad (6.68e)$$

En ce qui concerne le produit, c'est le même jeu : nous obtenons

$$\phi([xy]_{pq}) = \phi([x]_{pq})\phi([y]_{pq}) \quad (6.69)$$

en utilisant le fait que $[xy]_p = [x]_p[y]_p$.

Montrons maintenant que ϕ est surjective. Soient $y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{Z}$. Demander

$$\phi([x]_{pq}) = ([y_1]_p, [y_2]_q) \quad (6.70)$$

revient à demander de résoudre le système

$$\begin{cases} [x]_p = [y_1]_p \\ [x]_q = [y_2]_q \end{cases} \quad (6.71a)$$

$$(6.71b)$$

pour l'inconnue $x \in \mathbb{Z}$. Le lemme chinois 6.28 nous assure qu'une solution existe.

En ce qui concerne l'injectivité, nous supposons que x et y soient deux entiers tels que

$$\phi([x]_{pq}) = \phi([y]_{pq}). \quad (6.72)$$

Nous en déduisons le système

$$\begin{cases} [x]_p = [y]_p \\ [x]_q = [y]_q \end{cases} \quad (6.73a)$$

$$(6.73b)$$

c'est-à-dire qu'il existe des entiers k et l tels que $x = y + kp$ et $x = y + lq$ ou encore tels que

$$kp + lq = 0. \quad (6.74)$$

Étant donné que p et q sont premiers entre eux, le lemme de Gauss 1.361 implique que p divise l : il existe $l' \in \mathbb{Z}$ tel que $lp' = l$. En injectant cela dans $x = y + lq$, nous trouvons $x = y + l'pq$. Donc $[x]_{pq} = [y]_{pq}$, ce qu'il fallait. □

THOooVIGQooUhwBLS

Théorème 6.30 (Théorème chinois[1]).

Soit A un anneau commutatif. Soient $n \geq 2$, des éléments $x_1, \dots, x_n$ dans A et des idéaux $I_1, \dots, I_n$ tels que $I_i + I_j = A$ pour tout $i \neq j$.

Alors il existe un $x \in A$ tel que $x - x_i \in I_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Démonstration. En plusieurs points.

(1) **Définition de J_k**

Pour $k \in \{1, \dots, n\}$ nous notons J_k le produit $J_k = \prod_{l \neq k} I_l$.

(2) **Si $k \neq i$ alors $J_k \subset I_i$** Un élément de J_k est de la forme

$$\prod_{l \neq k} a_l = a_i \prod_{\substack{l \neq k \\ l \neq i}} a_l \quad (6.75)$$

avec $a_l \in I_l$. Vu que a_i est dans I_i qui est un idéal, tout le produit (6.75) est dans I_i .

(3) **$I_i + J_i = A$** En effet, soit $k \neq i$. Nous avons $J_i \subset I_k$ et donc

$$I_i + J_i \subset I_i + I_k = A. \quad (6.76)$$

(4) **Des α et des β**

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Puisque $I_i + J_i = A$, nous pouvons donc prendre $\alpha_i \in I_i$ et $\beta_i \in J_i$ tels que

$$\alpha_i + \beta_i = 1. \quad (6.77)$$

(5) **Et enfin** Nous posons $x = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i$. Pour chaque k nous avons

$$x - x_k = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i - x_k \quad (6.78a)$$

$$= \sum_{i \neq k} \beta_i x_i + (\beta_k - 1)x_k \quad (6.78b)$$

$$= \sum_{i \neq k} \beta_i x_i - \alpha_k x_k. \quad (6.78c)$$

Les deux termes sont dans I_k . En effet, d'une part $\beta_i \in J_i \subset I_k$ et I_k est un idéal, donc $\beta_i x_i \in I_k$, et d'autre part $\alpha_k \in I_k$, donc $\alpha_k x_k \in I_k$.

Un idéal étant stable par somme, la somme du tout est dans I_k .

□

Remarque 6.31.

Ce théorème chinois est bien une généralisation du lemme chinois 6.28. En effet, l'élément x dont il est question est solution du problème $x = x_i \pmod{I_i}$. L'hypothèse $I_i + I_j = A$ n'est pas nouvelle non plus étant donné que si p et q sont des entiers premiers entre eux nous avons $p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ par le corolaire 1.350.

6.3 Polynômes à coefficients dans un corps

Nous supposons que $\mathbb{K}$ est un corps commutatif, et nous étudions l'anneau $\mathbb{K}[X]$, défini en 1.461.

Lemme 6.32 ([140]).

Soit un anneau factoriel A , ainsi que son corps des fraction¹³ $\mathbb{K}$. Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est de degré ≥ 1 , nous pouvons écrire $P = qP_1$ où

$$(1) \quad q \in \mathbb{K}^\times$$

$$(2) \quad P_1 \in A[X] \text{ est primitif}^{14}.$$

13. Définition 1.471.

14. Définition 3.103(1).

Démonstration. Nous considérons le polynôme $P = \sum_{j=0}^n \frac{a_j}{s_j} X^j$ avec $n \geq 1$, $a_j \in A$, $s_j \in A^*$ et $a_n \neq 0$. Si $s \in \text{ppcm}(\{s_j\}_{j=1,\dots,n})$, nous avons

$$P = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^n a'_j X^j \quad (6.79)$$

avec $a'_j \in A$.

Si $d \in \text{pgcd}(\{a'_j\})$, nous pouvons écrire $a'_j = db_j$ où les $b_j \in A$ sont premiers entre eux. Avec tout ça,

$$P = \frac{d}{s} \sum_j b_j X^j. \quad (6.80)$$

Maintenant en posant $q = d/s$ et $P_1 = \sum_j b_j X^j$ nous avons ce qu'il faut parce que $d/s \in \mathbb{K}^\times$ et P_1 est primitif. $\square$

LEMooGTPJooFWkffg

Lemme 6.33 ([65]).

Soit un polynôme primitif $P \in A[X]$ sur l'anneau factoriel A . Nous notons $\mathbb{K}$ le corps des fractions de A . Soient $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P = QR$. Il existe $q, r \in \mathbb{K}$ tels que

$$P = (qQ)(rR) \quad (6.81)$$

avec qQ, rR dans $A[X]$.

Démonstration. En utilisant le lemme 6.32, nous considérons $qQ = Q_1$ et $rR = R_1$ avec Q_1 et R_1 primitifs dans $A[X]$. Avec ces éléments nous avons

$$R_1 Q_1 = r q P Q = q r P. \quad (6.82)$$

EQooMGXYooIAFBgy

À priori q et p sont dans $\mathbb{K}$. Nous allons prouver que $qr = 1$.. pas tout à fait. Nous allons prouver que qr est inversible. Ensuite il faudra choisir les q et r un peu autrement.

- (1) $qr \in A$ Posons $P = \sum_i a_i X^i$ ainsi que $qr = s/t$ avec $s, t \in A$. Nous supposons que s/t est une fraction irréductible. L'équation (6.82) nous dit que le polynôme qrP est $R_1 Q_1$ et donc à coefficients dans A . Pour chaque i , il existe donc $b_i \in A$ tel que

$$\frac{sa_i}{t} = b_i, \quad (6.83)$$

ou encore $sa_i = tb_i$. Donc nous avons $t \mid sa_i$ pour tout i . Vu que la fraction $\text{pgcd}(t, s) = 1$, le lemme de Gauss 3.60 nous indique que t divise a_i . Donc si $\delta \in \text{pgcd}(\{a_i\}_{i=1,\dots,n})$, alors $t \mid \delta$. Vu que P est primitif, δ est inversible, et donc t l'est aussi. Nous avons alors le calcul

$$\frac{s}{t} = \frac{st^{-1}}{tt^{-1}} = st^{-1} \in A. \quad (6.84)$$

Nous avons prouvé que $qr \in A$.

- (2) qr est inversible

Comme qr est dans A nous pouvons l'utiliser dans le lemme 1.330. Nous savons que $c(P)$ est inversible, disons $c(P) = u$. Nous avons donc, en utilisant le lemme 3.107,

$$qru = qr c(P) = u c(qrP) = u c(Q_1 R_1) = uv c(Q_1) c(R_1) \in A^\times \quad (6.85)$$

pour un certain inversible $v \in A^\times$. Donc qru est inversible et comme u est inversible, qr est inversible.

- (3) Conclusion

Nous avons $P = QR$, et nous avons posé $qQ = Q_1$, $rR = R_1$. Maintenant, en posant $u = (qr)^{-1}$ nous avons

$$(uqQ)(rR) = uqrQR = P. \quad (6.86)$$

En même temps, $uqQ = uQ_1 \in A[X]$ et $rR = R_1 \in A[X]$. Donc les polynômes qui satisfont la demande sont uqQ et rR .

□

THOooJESZooNqScLF

Théorème 6.34 ([65]).

Soient un anneau factoriel A et son corps des fractions $\mathbb{K}$. Les irréductibles¹⁵ dans $A[X]$ sont :

- (1) les polynômes de degré zéro dont l'unique coefficient est un élément irréductible de A (polynômes constants),
- (2) les polynômes de $A[X]$ qui sont de degré ≥ 1 , primitifs dans $A[X]$ et irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$.

ITEMooVKOOooDeGYYz

Démonstration. Un polynôme est soit de degré zéro soit de degré ≥ 1 .

(1) **Degré zéro, $\Rightarrow$**

Soit un polynôme irréductible¹⁶ $P \in \mathcal{P}_0(A)$.

Si nous notons $a \in A$ l'unique coefficient de P , nous devons prouver que a est irréductible dans A .

- (1a) **a n'est pas inversible** Si a était inversible dans A , alors nous pourrions considérer le polynôme $Q \in \mathcal{P}_0(A)$ dont le coefficient est a^{-1} . Nous aurions alors $PQ = U$ où $U \in \mathcal{P}(A)$ est le polynôme dont le coefficient est $1 \in A$.

Ce U étant le neutre pour la multiplication dans $\mathcal{P}(A)$, le polynôme P est inversible, ce qui est contraire à l'hypothèse.

- (1b) **a n'est pas produit de deux non inversibles** Même jeu : si $a = xy$ avec x et y non inversibles, alors en prenant les polynômes correspondants, P est produit de deux non inversibles, le polynôme P serait produit de deux non inversibles, et donc pas irréductible dans $\mathcal{P}(A)$.

(2) **Degré zéro, $\Leftarrow$**

Si a est irréductible dans A , le polynôme P de coefficient a est irréductible dans $\mathcal{P}(A)$. Même principe de preuve que le point précédent.

(3) **Degré $n \geq 1$, $\Rightarrow$**

Soit $P \in \mathcal{P}_n(A)$ irréductible dans $\mathcal{P}(A)$. Nous devons démontrer que P est dans le cas (2). Nous écrivons $P = c(P)P_1$ avec P_1 primitif. Vu que P n'est pas produit de deux non inversibles et que P_1 n'est pas inversible, le polynôme $c(P) \in \mathcal{P}_0(A)$ est inversible¹⁷, et donc $c(P)$ est inversible dans A . Cela démontre déjà que P est primitif.

Pour voir que P est irréductible dans $\mathcal{P}(\mathbb{K})$, nous supposons avoir une égalité $P = QR$ avec $Q, R \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$. Par le lemme 6.33, il existe $q, r \in \mathbb{K}$ tels que

$$P = (qQ)(rR) \quad (6.87)$$

avec $qQ, rR \in \mathcal{P}(A)$. Vu que P est irréductible dans $\mathcal{P}(A)$, soit qQ soit rR doit être inversible dans $\mathcal{P}(A)$. Supposons que ce soit qQ . Nous avons donc $qQ \in A^\times$ (qui serait mieux écrit $qQ \in \mathcal{P}_0(A^\times)$), et donc $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{K})^\times$.

En résumé nous avons prouvé que si $P = QR$ (dans $\mathcal{P}(\mathbb{K})$), alors soit Q soit R était dans $\mathcal{P}(\mathbb{K})^\times$.

(4) **Degré $n \geq 1$, $\Leftarrow$**

Nous supposons que $P \in \mathcal{P}_n(A)$ vérifie la condition (2), et nous montrons qu'il est irréductible dans $\mathcal{P}(A)$. Les polynômes non constants ne sont jamais inversibles, donc pour cette partie-là de la définition d'irréductibilité on est bon.

15. Définition 1.318.

16. Cette notation $\mathcal{P}$ de (1.617) devrait être utilisée plus souvent ; dans le meilleur des mondes, on n'utiliserait jamais $A[X]$.

17. On note de la même manière le polynôme constant $c(P)$ et l'élément $c(P)$ dans A , parce qu'on a beau détester les abus de notations, il y a des limites.

Supposons que $P = QR$ avec $Q, R \in \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(\mathbb{K})$. Comme P est irréductible dans $\mathcal{P}(\mathbb{K})$, un des deux Q ou R est inversible dans $\mathcal{P}(\mathbb{K})$. Disons que Q le soit. Donc $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{K})^\times$, et nous notons $q \in \mathbb{K}^\times$ l'unique coefficient de Q . Nous avons donc

$$P = qR. \quad \text{E} \text{Q} \text{o} \text{o} \text{Q} \text{U} \text{M} \text{S} \text{o} \text{o} \text{F} \text{G} \text{I} \text{G} \text{x} \text{E} \quad (6.88)$$

Comme, dès le début, on avait dit $Q \in \mathcal{P}(A)$, nous avons en réalité $q \in A$. Nous pouvons donc prendre le contenu de (6.88) en appliquant le lemme 1.330 : $c(P) = q c(R)$. Nous savons que $c(P)$ est inversible dans A ; nous multiplions par $c(P)^{-1}$:

$$1 = qc(R)c(P)^{-1}. \quad (6.89)$$

Nous voyons que $c(R)c(P)^{-1}$ est un inverse de q dans A . Donc P est irréductible dans $\mathcal{P}(A)$.

□

T H O o o V Z U B o o N S v c B r

Théorème 6.35 ([65]).

Si A est un anneau factoriel, l'anneau des polynômes $\mathcal{P}(A)$ est factoriel.

Démonstration. Si $P \in \mathcal{P}(A)$, nous devons prouver l'existence et l'unicité d'une décomposition de P en irréductibles.

_____ Existence _____

Nous y allons par récurrence sur le degré de P .

- (1) Si $\deg(P) = 0$ L'unique coefficient de P est un élément de A , et se décompose en irréductibles parce que A est factoriel.
- (2) Si $\deg(P) = n + 1$ Nous supposons que l'existence est prouvée pour tout $k \leq n$. Nous écrivons $P = c(P)P_1^{(0)}$ avec P primitif dans $\mathcal{P}(A)$. Il y a deux possibilités : soit $c(P)$ est inversible, soit non. Si $c(P)$ est inversible, alors P est primitif et nous posons $P_1 = P$ et $c_1 = 1$. Si $c(P)$ n'est pas inversible, alors nous posons $c_1 = c(P)$ et $P_1 = P_1^{(0)}$. Dans les deux cas nous avons

$$P = c_1 P_1 \quad (6.90)$$

où P_1 est primitif et c_1 est soit 1 soit non inversible. Si $c_1 = 1$, il n'y a rien à faire avec lui. Sinon, il est non inversible et non nul dans A qui est factoriel. Nous avons donc une décomposition en irréductibles $c_1 = p_1 \dots p_k$. Dans le cas $c_1 = 1$, nous avons $p_1 = 1$ et c'est tout.

En ce qui concerne P_1 , il y a deux possibilités : soit il est irréductible dans $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ soit pas. Si il est irréductible dans $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ alors il est à fortiori irréductible dans $\mathcal{P}(A)$ et

$$P = p_1 \dots p_k P_1 \quad (6.91)$$

est une décomposition de P en irréductibles dans $\mathcal{P}(A)$.

Et si P_1 n'est pas irréductible ? C'est qu'il existe deux non inversibles $Q, R \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ tels que $P = QR$. Le lemme 6.33 permet d'écrire alors

$$P_1 = QR = Q_1 R_1 \quad (6.92)$$

avec $Q_1, R_1 \in \mathcal{P}(A)$. Notons que ni P_1 ni R_1 ne sont des constantes : les constantes sont inversibles dans $\mathcal{P}(\mathbb{K})$. Et comme la construction du lemme montre que $\deg(Q_1) = \deg(Q)$ et $\deg(R_1) = \deg(R)$, les polynômes Q_1 et R_1 sont non constants dans $\mathcal{P}(A)$. Nous avons donc $\deg(Q_1) < n + 1$ et $\deg(R_1) < n + 1$.

L'hypothèse de récurrence fonctionne pour les polynômes Q_1 et R_1 dans $\mathcal{P}(A)$. Nous avons donc des polynômes irréductibles $S_1, \dots, S_l$ tels que

$$P_1 = Q_1 R_1 = S_1 \dots S_l. \quad (6.93)$$

Au final, nous avons la décomposition ¹⁸

$$P = p_1 \dots p_k S_1 \dots S_l. \quad (6.94)$$

————— Unicité —————

Soient $P = p_1 \dots p_k S_1 \dots S_m = q_1 \dots q_l T_1 \dots T_n$ deux décompositions de P en irréductibles de A . Les p_i et les q_i sont les polynômes de degré zéro (donc dans A) et les S_i, T_j sont ceux de degré strictement positifs.

(1) **Pour les p_i et q_j**

Comme les polynômes S_i et T_j sont irréductibles leurs contenus sont inversibles, et en utilisant les lemmes 3.107 et 1.330, l'égalité

$$c(p_1 \dots p_k S_1 \dots S_m) = c(q_1 \dots q_l T_1 \dots T_n) \quad (6.95)$$

devient

$$p_1 \dots p_k c(S_1 \dots S_m) = q_1 \dots q_l c(T_1 \dots T_n). \quad (6.96)$$

Il existe donc un inversible $u \in A$ tel que $p_1 \dots p_k = u q_1 \dots q_l$. L'élément $(u q_1)$ est irréductible (lemme 1.321) et donc

$$p_1 \dots p_k = (u q_1) q_2 \dots q_l \quad (6.97)$$

sont deux décompositions en irréductibles du même élément dans A . Donc, parce que A est factoriel, nous avons $k = l$ et il existe une permutation σ qui fait que p_i est associé à $q_{\sigma(i)}$.

(2) **Pour les polynômes**

Nous avons $S_1 \dots S_m = T_1 \dots T_n$. Le polynôme S_1 divise le produit $T_1 \dots T_n$. Comme S_1 est irréductible dans $\mathcal{P}(A)$, il est irréductible dans $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ par le théorème 6.34.

L'anneau $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ est euclidien par 3.98 et donc principal par 1.341. Or dans un anneau principal, les irréductibles sont premiers par 1.396. Tout ça pour dire que S_1 est premier dans $\mathcal{P}(\mathbb{K})$. Donc, comme il divise un produit, il doit diviser un des facteurs. Disons que $S_1 \mid T_i$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{K})$.

Il existe $R \in \mathcal{P}(\mathbb{K})$ tel que $S_1 R = T_i$. Comme S_1 est non inversible (irréductible), et T_i est irréductible, R doit être inversible dans $\mathcal{P}(\mathbb{K})$. Il existe $q \in \mathbb{K}^\times$ tel que $T_i = q S_1$.

Comme T_i et S_1 sont irréductibles, ils sont primitifs dans $\mathcal{P}(A)$ (théorème 6.34). Supposons que q s'écrive sous forme irréductible $q = s/t$ avec $s, t \in A$. On note $T_i = \sum_j a_j X^j$ et $S_1 = \sum_j b_j X^j$. Pour tout i nous avons

$$\frac{s b_j}{t} = a_j, \quad (6.98)$$

ou encore $s b_j = t a_j$. Donc t divise $s b_j$ pour tout j . Mais comme t est premier avec s , l'élément t divise b_j pour tout j . Il divise donc le pgcd des a_j qui est inversible parce que T_i est primitif. Bref, t est inversible dans A . Nous avons donc

$$q = \frac{s}{t} = \frac{s t^{-1}}{t t^{-1}} = s t^{-1} \in A. \quad (6.99)$$

Nous avons donc $T_i = q S_1$ avec $q \in A$. Comme T_i et S_1 sont irréductibles dans $\mathcal{P}(A)$, l'élément q est inversible dans A .

Nous avons fini de montrer que S_1 était associé à un des T_i . L'égalité

$$S_1 \dots S_m = T_1 \dots T_n \quad (6.100)$$

peut être alors réécrite

$$S_1 \dots S_m = q T_1 \dots T_{i-1} S_1 T_{i+1} \dots T_n \quad (6.101)$$

18. Ici [140] utilise le théorème 6.34. Certes, il présente sa récurrence de façon un peu différente, mais j'espère n'avoir pas loupé une étape. Soyez prudente et écrivez-moi si vous voyez une erreur.

Comme A est factoriel, il est intègre, et donc $\mathcal{P}(A)$ est intègre (théorème 3.92). Nous pouvons donc simplifier par S_1 et il reste

$$S_2 \dots S_m = uT_1 \dots T_{i-1}T_{i+1} \dots T_n. \quad (6.102)$$

Par récurrence, nous avons que chacun des S_i est associé à un des T_j .

□

PropqGZXvr

Proposition 6.36 ([140, 186]).

Si $\mathbb{K}$ est un corps commutatif, alors l'anneau des polynômes $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ est factoriel¹⁹.

Démonstration. Un corps est un anneau factoriel (proposition 3.69), donc le théorème 6.35 conclut que l'anneau des polynômes sur un corps est factoriel. □

6.3.1 Irréductibilité

Pour rappel, un élément irréductible dans un anneau est la définition 1.318 : non inversible et pas le produit de deux non inversibles.

LEMooTMSUooCWoVHG

Lemme 6.37.

Soit un corps $\mathbb{K}$. Les éléments inversibles dans $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes constants non nuls.

Exemple 6.38.

Si un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ n'a que des racines complexes, ça ne l'empêche pas d'être réductible sur $\mathbb{Z}$. La réductibilité ne signifie pas qu'on peut mettre des racines en évidence. Par exemple le polynôme $P = X^4 + 3X^2 + 2$ est réductible sur $\mathbb{Z}$ en

$$P = (X^2 + 1)(X^2 + 2), \quad (6.103)$$

mais n'a pas de racines dans $\mathbb{Z}$. Si on veut réduire plus, il faut sortir de $\mathbb{Z}$.

△

DefCPLSooQaHJKQ

Définition 6.39 (Polynôme scindé).

Nous disons que $P \in \mathbb{K}[X]$ est **scindé** sur $\mathbb{K}$ si il est produit dans $\mathbb{K}[X]$ de polynômes de degré 1.

Note : les constantes ne sont donc pas des polynômes scindés.

Proposition 6.40 (Critère d'Eisenstein).

Soit le polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ dans $\mathbb{Z}[X]$. Nous supposons avoir un nombre premier p tel que

- (1) p divise tous les $a_0, \dots, a_{n-1}$,
- (2) p ne divise pas a_n ,
- (3) p^2 ne divise pas a_0 .

Alors P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Si de plus P est primitif au sens du pgcd (définition 3.103) alors P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Démonstration. Nous considérons $\bar{P}$ le polynôme réduit modulo p , c'est-à-dire $\bar{P} \in \mathbb{F}_p[X]$. Étant donné que par hypothèse tous les coefficients sont multiples de p sauf a_n , nous avons $\bar{P} = cX^n$. Supposons par l'absurde que $P = QR$ avec $Q, R \in \mathbb{Q}[X]$. Alors le lemme de Gauss (3.60) impose $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$.

Nous avons aussi, au niveau des réductions modulo p que $\bar{Q}\bar{R} = \bar{P}$. Or $\bar{P}$ est un monôme, donc $\bar{Q}$ et $\bar{R}$ doivent également l'être. Donc $\bar{Q} = dX^k$ et $\bar{R} = eX^{n-k}$ et en particulier $\bar{Q}(0) = \bar{R}(0) = 0$, c'est-à-dire que $Q(0)$ et $R(0)$ sont divisibles par p . Cela impliquerait que $a_0 = Q(0)R(0)$ soit divisible par p^2 , ce qui est exclu par les hypothèses. Donc P est irréductible.

Supposons de surcroît que P soit primitif au sens du pgcd. Il est donc irréductible et primitif sur $\mathbb{Q}[X]$ et le corolaire 3.122 nous dit alors que P est irréductible sur $\mathbb{Z}[X]$. □

19. Définition 3.53.

Exemple 6.41.

Soit le polynôme $P = 3X^4 + 15X^2 + 10$. Pour appliquer le critère d'Eisenstein il nous faut un nombre premier p divisant 15 et 10, mais pas 3, et dont le carré ne divise pas 10. On aura vite vu que $p = 5$ fait l'affaire. Le polynôme P est donc irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$. $\triangle$

6.3.2 Idéaux

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. Nous notons (P) l'idéal engendré par P :

$$(P) = \{PR \text{ tel que } R \in \mathbb{K}[X]\}. \quad \text{EqDefxMkDtW (6.104)}$$

Lemme 6.42.

Nous avons

- (1) $(P) \subset (Q)$ si et seulement si Q divise P ,
- (2) $(P) = (Q)$ si et seulement si P et Q sont multiples (non nuls) l'un de l'autre.

Démonstration. Si $(P) \subset (Q)$, en particulier $P \in (Q)$ et il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = QR$, ce qui signifie que Q divise P .

Si les idéaux de P et de Q sont identiques, l'un divise l'autre et l'autre divise l'un. Ils sont donc multiples l'un de l'autre. $\square$

Théorème 6.43.

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif.

- (1) L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est euclidien et principal.
- (2) Si I est un idéal dans $\mathbb{K}[X]$ et si $P \in I$ est de degré minimal, alors $(P) = I$.
- (3) De plus si $I \neq \{0\}$, il existe un unique polynôme unitaire μ tel que $I = (\mu)$.

Démonstration. Le point (1) a déjà été démontré dans le lemme 3.98 via le fait que $\mathbb{K}[X]$ est euclidien. Nous allons cependant donner ici une preuve directe que tous les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ sont principaux. Si $I = \{0\}$, le résultat est évident. Nous supposons donc I non nul. Soit P de degré minimum parmi les éléments de I . Évidemment $(P) \subset I$. Nous allons démontrer qu'en réalité $(P) = I$.

Soit $P' \in I$. Par le théorème 3.95 de la division euclidienne²⁰, il existe Q et R dans $\mathbb{K}[X]$ tels que $P' = PQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(P)$. Étant donné que $R = P' - PQ$ nous avons $R \in I$ et par conséquent $R = 0$ parce que P a été choisi de degré minimum dans I . Nous avons donc $P' = PQ$ et $I \subset (P)$.

L'existence d'un polynôme unitaire qui génère I est obtenu en choisissant $\mu = P/a_n$ où a_n est le coefficient du terme de plus haut degré. L'unicité d'un tel polynôme est obtenu par le fait que si μ et μ' génèrent le même idéal, alors ils sont multiples l'un de l'autre, or puisqu'ils sont unitaires, ils sont égaux. $\square$

Nous voyons que n'importe quel polynôme de degré minimum dans un idéal génère l'idéal. Une importante conséquence du théorème 6.43 que nous verrons plus bas est que tout polynôme annulateur d'un endomorphisme est divisé par le polynôme minimal (proposition 8.99).

Corolaire 6.44.

Si $\mathbb{K}$ est un corps et si P est un polynôme irréductible, alors l'ensemble $\mathbb{L} = \mathbb{K}[X]/(P)$ est un corps. De plus $\mathbb{L}$ est un espace vectoriel de dimension $\deg(P)$.

Démonstration. En effet $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal par le théorème 6.43, par conséquent la proposition 1.402(2) déduit que $\mathbb{K}[X]/(P)$ est un corps.

20. Ici $\mathbb{K}$ est un corps et donc l'hypothèse d'inversibilité est automatiquement vérifiée.

Une base de $\mathbb{L}$ est donnée par les projections de $1, X, X^2, \dots, X^{n-1}$. En effet ces éléments forment une famille libre parce que si $\sum_{k=0}^{n-1} a_k \bar{X}^k = 0$ alors un représentant de cette classe doit être de la forme SP dans $\mathbb{K}[X]$, c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k = SP, \quad (6.105)$$

ce qui n'est possible que si $S = 0$ et $a_k = 0$. D'autre part c'est un système générateur. En effet si $P = X^n + Q$ avec $\deg(Q) = n - 1$ alors

$$\bar{X}^{n+l} = \bar{X}^n \bar{X}^l = (\bar{P} - \bar{Q}) \bar{X}^l = \bar{Q} \bar{X}^l. \quad (6.106)$$

Nous avons donc exprimé $\bar{X}^{n+l}$ comme une somme de termes de degré $n + l - 1$. Par récurrence nous pouvons exprimer tout $\bar{X}^{n+l}$ comme combinaison d'éléments de degré plus petit que n . $\square$

6.45.

Ce corolaire prendra une nouvelle jeunesse lorsque nous parlerons de polynômes d'endomorphismes, en particulier la proposition 8.109 va donner des précisions.

LEMooGRIMooPxXAZ

Lemme 6.46 ([187]).

Soit un isomorphisme de corps $\tau: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}'$. Alors

(1) L'application étendue

$$\begin{aligned} \tau: \mathbb{K}[X] &\rightarrow \mathbb{K}'[X] \\ \sum_i a_i X^i &\mapsto \sum_i \tau(a_i) X^i \end{aligned} \quad (6.107)$$

est un isomorphisme d'anneaux ;

(2) pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, le passage au quotient

$$\begin{aligned} \phi_\tau: \mathbb{K}[X]/(P) &\rightarrow \mathbb{K}'[X]/(\tau(P)) \\ \bar{Q} &\mapsto \overline{\tau(Q)} \end{aligned} \quad (6.108)$$

est un isomorphisme d'anneaux (et d'abord est bien définie).

Démonstration. Nous n'allons pas faire explicitement toutes les vérifications, mais tout de même les principales. Montrons que τ respecte le produit entre $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}'[X]$. Nous rappelons que ce produit est défini par la formule (1.620). En notant P_i les coefficients de P et Q_i ceux de Q et en remarquant que la définition de τ est essentiellement que $\tau(P)_i = \tau(P_i)$, nous avons :

$$\tau(PQ) = \tau\left(\sum_k \left(\sum_{l=0}^k P_l Q_{k-l}\right) X^k\right) \quad (6.109a)$$

$$= \sum_k X^k \sum_{l=0}^k \tau(P_l Q_{k-l}) \quad (6.109b)$$

$$= \sum_k X^k \sum_{l=0}^k \tau(P_l) \tau(Q_{k-l}) \quad (6.109c)$$

$$= \sum_k X^k \sum_{l=0}^k \tau(P)_l \tau(Q)_{k-l} \quad (6.109d)$$

$$= \sum_i (\tau(P)_i X^i) \sum_j (\tau(Q)_j X^j) \quad (6.109e)$$

$$= \tau(P) \tau(Q). \quad (6.109f)$$

Passons à l'isomorphisme d'anneaux donné par ϕ_τ .

(1) **Bien définie**

Si $\bar{Q}_1 = \bar{Q}_2$ alors $Q_2 = Q_1 + RP$ pour un certain $R \in \mathbb{K}[X]$. Dans ce cas,

$$\phi_\tau(Q_2) = \overline{\tau(Q_2)} = \overline{\tau(Q_1) + \tau(RP)} \quad (6.110a)$$

$$= \overline{\tau(Q_1) + \tau(R)\tau(P)} \quad (6.110b)$$

$$= \overline{\tau(Q_1)}. \quad (6.110c)$$

L'application ϕ_τ est donc bien définie.

(2) **Injection**

Si $\phi_\tau(\bar{Q}_1) = \phi_\tau(\bar{Q}_2)$ alors $\overline{\tau(Q_1)} = \overline{\tau(Q_2)}$, ce qui signifie que

$$\tau(Q_1) = \tau(Q_2) + R \tau(P) \quad (6.111)$$

pour un certain $R \in \mathbb{K}'[X]$. Puisque $\tau: \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}'[X]$ est un isomorphisme, nous pouvons y appliquer τ^{-1} pour trouver :

$$Q_1 = Q_2 + \tau^{-1}(R)P, \quad (6.112)$$

ce qui signifie que $\bar{Q}_1 = \bar{Q}_2$.

(3) **Surjection**

Un élément de $\mathbb{K}'[X]/(\tau(P))$ est de la forme $\bar{Q}$ avec $Q \in \mathbb{K}'[X]$. C'est l'image par ϕ_τ de l'élément $\overline{\tau^{-1}(Q)} \in \mathbb{K}[X]/(P)$.

(4) **Morphisme**

Nous vous laissons vérifier que l'application ϕ_τ est un morphisme d'anneaux.

□

6.3.3 Identité de Bézout

ThoBezoutOuGmLB

Théorème 6.47 (Bézout).

Les polynômes $P_1, \dots, P_n$ dans $\mathbb{K}[X]$ sont premiers dans leur ensemble si et seulement si il existe des polynômes $Q_1, \dots, Q_n \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$P_1Q_1 + \dots + P_nQ_n = 1. \quad (6.113)$$

Démonstration. L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est principal (lemme 3.98). La proposition 3.59 s'applique donc.

□

Deux polynômes P et Q ne sont donc pas premiers entre eux si il existe des polynômes x et y tels que l'identité de Bézout soit vérifiée :

$$xP + yQ = 0; \quad (6.114)$$

EgkbbzAi

cette dernière pourra être écrite en termes de la matrice de Sylvester, voir sous-section 8.2.7.

LemuALZHn

Lemme 6.48.

Soient $(P_i)_{i=1, \dots, n} \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes étrangers deux à deux. Alors les polynômes

$$Q_i = \prod_{j \neq i} P_j \quad (6.115)$$

sont étrangers entre eux²¹.

LemzkwYdn

Lemme 6.49 ([188]).

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $\mathbb{A} \subset \mathbb{K}$ un sous anneau de $\mathbb{K}$. Alors $\mathbb{A}[X]$, vu comme idéal de $\mathbb{K}[X]$, est un idéal premier.

En d'autres termes, si $\phi \in \mathbb{K}[X]$, et si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ unitaire tel que $\phi Q \in \mathbb{A}[X]$, alors $\phi \in \mathbb{A}[X]$.

21. Et non seulement deux à deux.

6.3.4 Lemme et théorème de Gauss

ThoLLgIsig

Théorème 6.50 (Théorème de Gauss).

Soient $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$ tels que P soit premier avec Q et divise QR . Alors P divise R .

Démonstration. Étant donné que P est premier avec Q , le théorème de Bézout²² nous donne $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $PU + QV = 1$. De plus il existe un polynôme S tel que $PS = QR$. En multipliant l'identité de Bézout par R , nous obtenons

$$R = PUR + QVR = PUR + VPS = P(UR + VS), \quad (6.116)$$

ce qui signifie que P divise R . $\square$

Le lemme suivant est une généralisation du lemme de Gauss dans $\mathbb{Z}$ (lemme 3.60).

LemEfdkZw

Lemme 6.51 (Lemme de Gauss[136]).

Soient les polynômes unitaires $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$. Si $PQ \in \mathbb{Z}[X]$, alors P et Q sont tous deux dans $\mathbb{Z}[X]$.

Démonstration. Soit $a > 0$ le plus petit entier tel que $aP \in \mathbb{Z}[X]$ (c'est le PPCM des dénominateurs) et de la même façon $b > 0$ le plus petit entier tel que $bQ \in \mathbb{Z}[X]$. On pose $P_1 = aP$ et $Q_1 = bQ$.

Si $ab = 1$, alors $a = b = 1$ et nous avons tout de suite $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$. Nous supposons donc $ab > 1$ et nous considérons p , un diviseur premier de ab . Ensuite nous considérons la projection

$$\pi_p: \mathbb{Z}[X] \rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]. \quad (6.117)$$

Par définition $abPQ = P_1Q_1 \in \mathbb{Z}[X]$; en prenant la projection,

$$\pi_p(P_1)\pi_p(Q_1) = \pi_p(P_1Q_1) = \pi_P(ab)\pi_p(PQ) = 0 \quad (6.118)$$

parce que $\pi_p(ab) = 0$. Étant donné que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ est intègre (théorème 3.92), nous avons soit $\pi_p(P_1) = 0$ soit $\pi_p(Q_1) = 0$. Supposons pour fixer les idées que $\pi_p(P_1) = 0$. Alors $P_1 = pP_2$ pour un certain $P_2 \in \mathbb{Z}[X]$. Par ailleurs P est unitaire et $P_1 = aP$, donc le coefficient de plus haut degré de P_1 est a , et nous concluons que p divise a .

Mettons $a = pa'$. Dans ce cas, $pa'P = P_1 = pP_2$, et donc $a'P = P_2 \in \mathbb{Z}[X]$. Cela contredit la minimalité de a . $\square$

6.3.5 Polynômes sur un corps et pgcd

Nous savons qu'un corps est un anneau intègre (lemme 1.327). De plus l'ensemble des polynômes sur un anneau intègre est lui-même un anneau intègre (théorème 3.92). Donc la notion de pgcd à utiliser dans le cas de $\mathbb{K}[X]$ est celle de la définition 1.103.

LEMooXISOOoNAMEVX

Lemme 6.52 (Unicité du pgcd à inversibles près).

Soit un corps commutatif $\mathbb{K}$ et $S \subset \mathbb{K}[X]$.

(1) Si δ_1 et δ_2 sont des pgcd²³ de S , alors $\delta_1 = k\delta_2$ avec $k \in \mathbb{K}$.

ITEMooARLJooOQvBcw

(2) Il existe un unique polynôme unitaire dans $\text{pgcd}(S)$.

Démonstration. Nous savons que δ_1 est un pgcd de S , mais que δ_2 divise S . Donc $\delta_2 \mid \delta_1$. De la même manière, $\delta_1 \mid \delta_2$. Il existe donc $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\delta_1 = A\delta_2$ et $\delta_2 = B\delta_1$. En substituant,

$$\delta_1 = AB\delta_1. \quad (6.119)$$

Mais $\mathbb{K}[X]$ possède la propriété de simplification par la proposition 1.326(3). Donc $AB = 1$. Cela signifie entre autres que A et B sont des inversibles de $\mathbb{K}[X]$.

22. théorème 6.47.

23. Définition 1.103.

Or les seuls inversibles dans $\mathbb{K}[X]$ sont les éléments de $\mathbb{K}$; si vous en doutez, pensez que le degré de AB est supérieur ou égal à celui de A .

En ce qui concerne l'existence et l'unicité d'un polynôme unitaire dans $\text{pgcd}(S)$. Existence : si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \text{pgcd}(S)$, alors le polynôme P/a_n est unitaire et également dans $\text{pgcd}(S)$. Unicité : supposons que P est unitaire dans $\text{pgcd}(S)$ et que Q est dans $\text{pgcd}(S)$. Il existe $k \in \mathbb{K}$ tel que $Q = kP$. Vu que P est unitaire, Q ne l'est pas. $\square$

NORMooUJDJooWfjxT

6.53.

En général, lorsque nous dirons « le » pgcd d'un ensemble de polynômes, nous parlerons du pgcd unitaire, qui existe et est bien défini par le lemme 6.52. En particulier, si P et Q sont des polynômes, nous notons $\text{pgcd}(P, Q)$ l'unique polynôme unitaire parmi les PGCD de P et Q .

LEMooIAGMooHUQtUs

Lemme 6.54 ([189]).

Soit un corps commutatif $\mathbb{K}$, deux polynômes quelconques $A, B \in \mathbb{K}[X]$ et un polynôme unitaire G .

Nous avons $G = \text{pgcd}(A, B)$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- (1) Il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = G$,
- (2) G divise A et B .

Démonstration. Une implication dans chaque sens.

(1) $\Rightarrow$

Si G est le pgcd de A et B , il est clair que $G|A$ et $G|B$. Il reste donc à montrer l'existence des polynômes U et V vérifiant $AU + BV = G$. Puisque G divise A et B , il existe des polynômes A_1, B_1 tels que $A = GA_1$ et $B = GB_1$.

Nous montrons que les polynômes A_1 et B_1 sont premiers entre eux. S'ils ont un diviseur commun D , alors GD est un diviseur commun à A et B . Or, G est le pgcd de A et B donc $GD|G$; D ne peut être qu'un polynôme constant (c'est-à-dire un élément de $\mathbb{K}$). Mais comme G est unitaire, le coefficient du terme de plus haut degré de GD doit être 1. Donc $D = 1$. L'élément 1 est l'unique diviseur commun de A_1 et B_1 ; donc A_1 et B_1 sont bien premiers entre eux.

D'après le théorème de Bézout 6.47, il existe donc U et V tels que $A_1U + B_1V = 1$. En multipliant par G , nous obtenons l'égalité voulue : $AU + BV = G$.

(2) $\Leftarrow$

Si G vérifie les deux conditions, montrons que G est le pgcd de A et B . Nous savons déjà (par hypothèse) que G divise A et B , il reste à montrer que tous les diviseurs commun à A et B divisent aussi G . Soit donc D un diviseur commun à A et B : il existe A_1 et B_1 tels que $A = DA_1$ et $B = DB_1$. Nous savons que $G = AU + BV$ donc $G = D(A_1U + B_1V)$, et $D|G$. Par définition, G est bien le pgcd de A et B . $\square$

Notons qu'en supprimant la condition d'unitarité de G , le résultat tient presque : il suffit de remplacer partout « le pgcd » par « un pgcd ».

LEMooVFBUooLoaOGr

Lemme 6.55 ([190]).

Soit un corps $\mathbb{K}$. Soient des polynôme P et Q dans $\mathbb{K}[X]$. Si S est un diviseur commun de P et Q , alors

ITEMooZTCCooPBqzNE

- (1) S divise $\text{pgcd}(P, Q)$
- (2) $\deg(S) \leq \deg(\text{pgcd}(P, Q))$.

ITEMooIINooUZVtAb

Démonstration. Il faut bien relire la définition 1.103 du pgcd ; en particulier le point (2) dit exactement notre point (1).

Étant donné que S divise $\text{pgcd}(P, Q)$ nous avons automatiquement que le degré de S est plus petit que celui de $\text{pgcd}(P, Q)$. $\square$

LEMooGNAMooXRpgBn

Lemme 6.56 ([189]).

Soient deux polynômes A, B premiers entre eux. Si le polynôme P est divisible par A et par B alors P est divisible par AB .

Démonstration. Comme $A \mid P$, il existe $Q_1 \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = AQ_1$. Mais B divise $P = AQ_1$ alors que B est premier avec A ; donc d'après le théorème de Gauss 6.50 : $B \mid Q_1$.

Il existe donc $Q_2 \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q_1 = BQ_2$. On a donc $P = ABQ_2$: P est bien divisible par AB . $\square$

LemUEL/TuwK

Lemme 6.57 ([189]).

Quelques propriétés du PGCD²⁴ dans les polynômes. Soient des polynômes $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$.

ITEMooBPOZooYeFGjI

(1) Nous avons l'égalité²⁵

$$\text{pgcd}(P, PQ + R) = \text{pgcd}(P, R). \quad (6.120)$$

ITEMooUVGRooNSGDZn

(2) Si Q et R sont premiers entre eux,

$$\text{pgcd}(P, QR) = \text{pgcd}(P, Q) \text{pgcd}(P, R) \quad (6.121)$$

ITEMooYXAHooXibkgV

(3) Si P et Q sont premiers entre eux,

$$\text{pgcd}(P, QR) = \text{pgcd}(P, R) \quad (6.122)$$

Démonstration. Dans la suite si A et B sont des polynômes, nous dirons « les diviseurs de $\{A, B\}$ » pour parler des diviseurs communs de A et B .

(1) **Pour (1)**

Nous montrons que $\{P, PQ + R\}$ a les mêmes diviseurs que $\{P, R\}$.

D'une part, si $A \mid \{P, PQ + R\}$, alors il existe des polynômes B_1 et B_2 tels que $P = AB_1$ et $PQ + R = AB_2$. Donc

$$R = AB_2 - PQ = AB_2 - AB_1Q = A(B_2 - B_1Q), \quad (6.123)$$

et nous concluons que A divise R .

D'autre part, si $A \mid \{P, R\}$ alors il existe des polynômes B_1 et B_2 tels que $P = AB_1$ et $R = AB_2$. Donc

$$PQ + R = AB_1Q + AB_2 = A(B_1Q + B_2), \quad (6.124)$$

et A divise $PQ + R$.

Conclusion : les paires $\{P, PQ + R\}$ et $\{P, R\}$ ont même ensemble de diviseurs, et donc même pgcd.

(2) **Pour (2)**

Nous avons trois polynômes P, Q, R et nous savons que Q et R sont premiers entre eux. Nous notons : $G_1 = \text{pgcd}(P, Q)$ et $G_2 = \text{pgcd}(P, R)$. Il faut montrer que G_1G_2 est le pgcd de P et QR ; pour cela nous allons utiliser le lemme 6.54.

(2a) $\exists U, V$ tels que $G_1G_2 = PU + QRV$

Puisque $G_1 = \text{pgcd}(P, Q)$, il existe U_1 et V_1 tels que $G_1 = PU_1 + QV_1$ (lemme 6.54). On a de même : $G_2 = PU_2 + RV_2$. En prenant le produit :

$$G_1G_2 = (PU_1 + QV_1)(PU_2 + RV_2) = P(PU_1U_2 + RU_1V_2 + QV_1V_2) + QR(V_1V_2). \quad (6.125)$$

Donc c'est bon pour ce point.

24. Définition 1.103.

25. Notez l'analogie avec le lemme 3.7.

(2b) G_1 et G_2 sont premiers entre eux

Si D est un diviseur commun à G_1 et G_2 , alors D divise Q et R qui sont premiers entre eux ; D ne peut être qu'un polynôme constant. Tous les diviseurs communs de G_1 et G_2 sont dans $\mathbb{K}$. Mais le pgcd est par définition un diviseur commun unitaire, donc $\text{pgcd}(G_1, G_2) = 1$. Cela signifie que G_1 et G_2 sont premiers entre eux (définition 1.355).

(2c) $G_1G_2 \mid QR$ En effet : $G_1 \mid Q$ et $G_2 \mid R$ donc $G_1G_2 \mid QR$.(2d) $G_1G_2 \mid P$ Le polynôme P est divisible par G_1 et par G_2 , et de plus G_1 et G_2 sont premiers entre eux. Donc le lemme 6.56 conclut que P est divisible par G_1G_2 .

(3) (3)

Supposons d'abord que $A \in \mathbb{K}[X]$ divise P et QR . Le théorème de Bézout 6.47 assure l'existence de polynômes U et V tels que $PU + QV = 1$. Ensuite l'hypothèse de division nous donne des polynômes B_1 et B_2 tels que $P = AB_1$ et $QR = AB_2$. Nous avons :

$$1 = PU + QV = AB_1U + QV. \quad (6.126)$$

Cela prouve que A est premier avec Q grâce encore à Bézout, mais dans l'autre sens. Donc A est premier avec Q et $A \mid QR$. Donc $A \mid R$ par le théorème de Gauss 6.50.

Dans l'autre sens, si $A \mid R$ alors on a évidemment : $A \mid QR$.

Les diviseurs de $\{P, QR\}$ sont exactement les diviseurs de $\{P, R\}$. En conséquence, nous concluons que les paires $\{P, QR\}$ et $\{P, R\}$ ont le même pgcd.

□

6.4 Extension de corps

Lemme 6.58.

Soit $\mathbb{L}$ un corps²⁶ fini et $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{L}$. Alors il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que

$$\text{Card}(\mathbb{L}) = \text{Card}(\mathbb{K})^s. \quad (6.127)$$

Démonstration. Le corps $\mathbb{L}$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Si s est la dimension alors nous avons la formule (6.127) parce que chaque élément de $\mathbb{L}$ est un s -uple d'éléments de $\mathbb{K}$. □

Définition 6.59 ([191]).

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Une **extension** de $\mathbb{K}$ est un couple $(\mathbb{L}, j)$ où $\mathbb{L}$ est un corps et $j: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$ est un morphisme de corps.

Nous identifions le plus souvent $\mathbb{K}$ avec $j(\mathbb{K}) \subset \mathbb{L}$, mais il faut savoir que le corps $\mathbb{L}$ étendant $\mathbb{K}$ n'est pas toujours un sur-corps de $\mathbb{K}$. En particulier, l'ensemble $\mathbb{L}$ peut ne pas être une extension de l'ensemble $\mathbb{K}$.

Lemme-Définition 6.60.

Si $(\mathbb{L}, i)$ est une extension de $\mathbb{K}$, alors $\mathbb{L}$ devient un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ si nous posons

$$\lambda \cdot x = i(\lambda)x \quad (6.128)$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathbb{L}$. La multiplication du membre de droite est celle du corps $\mathbb{L}$.

Définition 6.61.

Le **degré** de $\mathbb{L}$ est la dimension de cet espace vectoriel. Il est noté $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$; notons qu'il peut être infini.

Proposition 6.62.

Le corps $\mathbb{C}$ est une extension de $\mathbb{R}$ et son degré²⁷ est $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$.

26. Définition 1.378.

27. Définition 6.61.

Proposition 6.63 (Composition des degrés[192]).

Si $\mathbb{L}_2$ est une extension de $\mathbb{L}_1$ qui est elle-même une extension de $\mathbb{K}$, alors $\mathbb{L}_2$ est une extension de $\mathbb{K}$ et on a :

$$[\mathbb{L}_2 : \mathbb{K}] = [\mathbb{L}_2 : \mathbb{L}_1][\mathbb{L}_1 : \mathbb{K}]. \quad (6.129)$$

Dans ce cas, si $\{v_i\}_{i \in I}$ est une $\mathbb{K}$ -base de $\mathbb{L}_1$ et si $\{w_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est une $\mathbb{L}_1$ -base de $\mathbb{L}_2$ alors $\{v_i w_\alpha\}_{\substack{i \in I \\ \alpha \in A}}$ est une $\mathbb{K}$ -base de $\mathbb{L}_2$.

Notons que la formule (6.129) n'est pas très instructive dans le cas des extensions non finies. La seconde partie, sur les bases, est en réalité nettement plus intéressante.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{L}_2$. Puisque les w_α forment une $\mathbb{L}_1$ -base de $\mathbb{L}_2$, il existe des $a_\alpha \in \mathbb{L}_1$ tels que

$$a = \sum_{\alpha} a_{\alpha} w_{\alpha}. \quad (6.130)$$

Mais les v_i forment une $\mathbb{K}$ -base de $\mathbb{L}_1$, donc chacun des a_α peut être décomposé comme $a_\alpha = \sum_i a_{\alpha i} v_i w_\alpha$. Donc :

$$a = \sum_{\alpha i} a_{\alpha i} v_i w_\alpha, \quad (6.131)$$

qui donne une décomposition de a en éléments de $\{v_i w_\alpha\}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. La partie proposée est donc génératrice.

Pour prouver qu'elle est également libre, nous supposons avoir des éléments $a_{\alpha i} \in \mathbb{K}$ tels que

$$\sum_{\alpha i} a_{\alpha i} v_i w_\alpha = 0. \quad (6.132)$$

En récrivant sous la forme

$$\sum_{\alpha} \left(\sum_i a_{\alpha i} v_i \right) w_\alpha = 0, \quad (6.133)$$

nous reconnaissons une combinaison linéaire nulle des w_α à coefficients dans $\mathbb{L}_1$. Les coefficients sont donc nuls : $\sum_i a_{\alpha i} v_i = 0$. C'est une combinaison linéaire nulle des v_i à coefficients dans $\mathbb{K}$. Comme les v_i forment une base, les coefficients sont nuls : $a_{\alpha i} = 0$. $\square$

6.4.1 Extension et polynôme minimal

Lemme-Définition 6.64 (Polynôme minimal).

Soit $\mathbb{L}$ une extension de $\mathbb{K}$ et $a \in \mathbb{L}$. Nous considérons la partie

$$I_a = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P(a) = 0\} \quad (6.134)$$

que nous supposons non réduite à $\{0\}$ ²⁸

- (1) La partie I_a est un idéal dans $\mathbb{K}[X]$,
- (2) la partie I_a est un idéal principal dans $\mathbb{K}[X]$,
- (3) l'idéal I_a possède un unique générateur unitaire.

Cet unique générateur unitaire est le **polynôme minimal** de a sur $\mathbb{K}$.

Démonstration. En plusieurs parties.

- (1) **Pour (1)** Soit $P \in I_a : P(a) = 0$. Si $Q \in \mathbb{K}[X]$ alors la proposition 1.465 nous indique que

$$(PQ)(a) = P(a)Q(a) = 0. \quad (6.135)$$

Donc $PQ \in I_a$. Comme de plus I_a est clairement vectoriel, I_a est un idéal.

28. La non trivialité de I_a est une vraie hypothèse. En effet si nous prenons $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ et l'extension $\mathbb{L} = \mathbb{R}$, alors il suffit de prendre un réel a non algébrique sur $\mathbb{Q}$ pour que I_a soit réduit au seul polynôme identiquement nul.

Notez que nous avons utilisé la règle du produit nul justifiée par le fait que $\mathbb{K}$ soit un corps²⁹ et donc soumis au point (3) de la proposition 1.326.

- (2) **Pour (2)** Nous savons par le théorème 6.43 que $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal. En particulier, tous ses idéaux sont principaux, c'est dans la définition 1.340 d'un anneau principal.
- (3) **Pour (3)** Le théorème 6.43(3) nous informe alors que I_a possède un unique générateur unitaire.

□

Si nous avons un corps et un élément dans une extension du corps, il n'est pas autorisé de dire « soit le polynôme minimal de cet élément dans le premier corps » parce qu'il n'existe peut-être pas de polynôme annulateur.

6.65.

Dans le cas des opérateurs sur un espace de dimension finie (par exemple les matrices), il existe toujours un polynôme minimal, comme nous le verrons dans le lemme 8.95.

Exemple 6.66.

Le polynôme minimal dépend du corps sur lequel on le considère. Par exemple le nombre imaginaire pur i accepte $X - i$ comme polynôme minimal sur $\mathbb{C}$ et $X^2 + 1$ sur $\mathbb{Q}[X]$. △

PropRARooKavaIT

Proposition 6.67 ([1]).

Soit $\mathbb{L}$ une extension de $\mathbb{K}$ et $a \in \mathbb{L}$ dont le polynôme minimal sur $\mathbb{K}$ est $\mu_a \in \mathbb{K}[X]$. Alors itemDOQooYpLvXri

- (1) le polynôme μ_a est irréductible³⁰ sur $\mathbb{K}$;
- (2) Le polynôme μ_a est premier³¹ avec tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ non annulateur de a .

Démonstration. Une chose à la fois.

- (1) D'abord le polynôme μ_a n'est pas inversible parce que seuls les éléments de $\mathbb{K}$ (ceux de degré zéro) peuvent être inversibles³². Mais ces polynômes sont constants et ne peuvent donc pas être des polynômes annulateurs de quoi que ce soit.

Ensuite, supposons la décomposition $\mu_a = PQ$ avec $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. En évaluant cette égalité en a nous avons

$$0 = P(a)Q(a). \quad (6.136)$$

Puisque nous sommes sur un corps, nous avons la règle du produit nul³³ et nous déduisons que soit $P(a)$ soit $Q(a)$ est nul, ou les deux. Pour fixer les idées, nous supposons $P(a) = 0$.

Dans ce cas, P fait partie de l'idéal annulateur de a , lequel idéal est engendré par μ_a . Donc il existe $S \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = S\mu_a$. En réécrivant $\mu_a = PQ$ avec cela nous avons :

$$\mu_a = S\mu_a Q \quad (6.137)$$

ou encore : $SQ = 1$, ce qui signifie que S et Q sont dans $\mathbb{K}$ et inversibles.

Nous concluons que μ_a ne peut pas être écrit sous forme de produit de deux non inversibles.

- (2) Soit Q un polynôme non annulateur de a . Soit aussi un diviseur commun P de Q et μ_a dans $\mathbb{K}[X]$. Nous devons prouver que P est un inversible, c'est-à-dire un élément de $\mathbb{K}$ (le fait que P ne soit pas le polynôme nul est évident). Nous avons $\mu_a = PR_1$ et $Q = PR_2$ pour certains polynômes $R_1, R_2 \in \mathbb{K}[X]$. Puisque μ_a est irréductible par (1), il n'est pas produit de deux

29. Si vous connaissez un contre-exemple à cette proposition dans le cas où $\mathbb{K}$ serait remplacé par un anneau, écrivez-moi.

30. Définition 1.318.

31. Définition 3.99.

32. Et d'ailleurs, le sont, mais ce n'est pas important ici.

33. Parce qu'un corps est un anneau intègre par le lemme 1.327 et qu'un anneau intègre est justement un anneau sur lequel nous avons la règle du produit nul, voir la définition 1.326.

non inversibles. En d'autres termes, soit P soit R_1 est inversible. Si P n'est pas inversible, alors R_1 est inversible ; disons $R_1 = k \in \mathbb{K}$. Alors

$$0 = \mu_a(a) = P(a)k, \quad (6.138)$$

donc $P(a) = 0$. Mais alors

$$Q(a) = P(a)R_2(a) = 0, \quad (6.139)$$

ce qui est contraire à l'hypothèse selon laquelle Q n'était pas annulateur de a .

Nous retenons donc que P est inversible, ce qu'il fallait montrer.

□

DEFooJQQYooMKqWov

Définition 6.68.

Deux éléments α et β dans $\mathbb{L}$ sont dit **conjugués** s'ils ont même polynôme minimal³⁴. Par exemple i et $-i$ sont conjugués dans $\mathbb{C}$ vu comme extension de $\mathbb{Q}$.

6.4.2 Extensions algébriques et éléments transcendants

6.4.2.1 Éléments algébriques et transcendants

6.69.

Mise en garde pour les gens qui aiment avoir des notations précises. Dans les lemmes 6.71 et 6.73 ainsi que dans la définition 6.75 il faut garder en tête qu'une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ est une application $\iota: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$. Il n'est pas spécialement vrai que $\mathbb{K}$ est un sous-sensé de $\mathbb{L}$.

Pour être rigoureux, beaucoup d'énoncés devraient contenir plus d'applications ι un peu partout.

DEFooBBYGooWoOloR

Définition 6.70.

L'ensemble $A[X]$ devient un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel avec la définition

$$(\lambda P)_k = \lambda P_k. \quad (6.140)$$

Voici une définition d'un élément algébrique sur un corps. Une caractérisation plus « pratique » sera donnée dans le lemme 6.73.

LEMooLVPLooEkWYDN

Lemme-Définition 6.71 (Élément algébrique et transcendant[193]).

Soit une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{L}$. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{K}[X] &\rightarrow \mathbb{L} \\ P &\mapsto P(\alpha). \end{aligned} \quad (6.141)$$

Alors

(1) L'application φ est un morphisme d'anneaux³⁵.

(2) L'application φ est un morphisme de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Si φ est injective, nous disons que α est **transcendant**. Sinon, nous disons qu'il est **algébrique**.

Démonstration. Le fait que φ soit un morphisme d'anneaux est le lemme 1.465 déjà prouvé.

Pour le morphisme de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, il faut seulement ajouter le calcul

$$\varphi(\lambda P) = (\lambda P)(\alpha) = \lambda P(\alpha) = \lambda \varphi(P). \quad (6.142)$$

Notons la justification suivante qui n'est pas tout à fait triviale :

$$(\lambda P)(\alpha) = \sum_k (\lambda P)_k \alpha^k = \sum_k \lambda P_k \alpha^k = \lambda P(\alpha) \quad (6.143)$$

qui utilise la définition 6.70.

□

34. Définition 6.64.

35. Définition 1.96.

Exemple 6.72.

L'injectivité de φ n'est pas automatique. Prenons par exemple $\mathbb{L} = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ dans $\mathbb{R}$. Les polynômes dans $\mathbb{Q}[X]$ ont des degrés arbitrairement élevés en X , tandis que les éléments de $\mathbb{L}$ n'ont pas de degré très élevés en $\sqrt{2}$ parce que $\sqrt{2}\sqrt{2} = 2$. L'ensemble $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ne contient donc que des éléments de la forme $a + b\sqrt{2}$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$.

Si par contre $x_0 \in \mathbb{R}$ n'est racine d'aucun polynôme (cela existe parce que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable), alors $\mathbb{Q}[x_0]$ contient tous les $\sum_{k=0}^N a_k x_0^k$ avec N arbitrairement grand. Et tous ces nombres sont différents. $\triangle$

Le lemme suivant donne une caractérisation d'élément algébrique moins abstraite que la définition 6.71.

LEMooTZSSooZmwYji

Lemme 6.73.

Soit $\mathbb{K}$, un corps et $\mathbb{L}$, une extension de $\mathbb{K}$. Un élément $\alpha \in \mathbb{L}$ est algébrique sur $\mathbb{K}$ si et seulement si existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$.

Démonstration. Nous considérons l'application φ de la définition 6.71. Si φ n'est pas injective, c'est qu'il existe un polynôme P dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $\varphi(P) = 0$. Dans ce cas, $P(\alpha) = 0$.

À l'inverse si il existe P non nul dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$, alors $\varphi(P) = 0$ et φ n'est pas injective. $\square$

DEFooYZOYooAesmnP

Définition 6.74.

Un corps $\mathbb{K}$ est **algébriquement clos** si tout polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{K}$ contient au moins une racine dans $\mathbb{K}$.

Nous verrons dans le théorème de d'Alembert 12.92 que $\mathbb{C}$ est un corps algébriquement clos.

DEFooREUHooLVwRuw

Définition 6.75 (Extension algébrique, clôture algébrique).

Soient un corps $\mathbb{K}$ et une extension $\alpha: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$.

- (1) L'extension $\mathbb{L}$ est une extension **algébrique** de $\mathbb{K}$ si tous ses éléments sont algébriques³⁶ sur $\mathbb{K}$, c'est-à-dire sont racines de polynômes à coefficients dans $\alpha(\mathbb{K})$, voir le lemme 6.73.
ITEMooEiWVooVjJRoR
- (2) L'extension $\mathbb{L}$ est **algébriquement close** si le corps $\mathbb{L}$ est algébriquement clos (définition 6.74).
- (3) L'extension $\mathbb{L}$ est une **clôture algébrique** du corps $\mathbb{K}$ si elle est une extension algébrique qui est algébriquement close.

6.76.

Donc une extension est algébrique si elle contient seulement des racines de polynômes ; elle est close si elle contient au moins une racine de chaque polynôme. L'extension est une clôture algébrique si elle est les deux en même temps.

6.77 (Unicité).

Le théorème de Steinitz 6.134 donnera une unicité de la clôture algébrique.

Exemple 6.78.

Le corps $\mathbb{R}$ n'est pas une extension algébrique de $\mathbb{Q}$. En effet il existe seulement une infinité dénombrable de polynômes dans $\mathbb{Q}[X]$ et donc une infinité dénombrable de racines de tels polynômes. Toute extension algébrique de $\mathbb{Q}$ est donc dénombrable. Voir aussi la proposition 6.130. $\triangle$

LEMooEYRSooUREeDI

Lemme 6.79.

Un corps est algébriquement clos si et seulement si tous ses polynômes sont scindés³⁷.

Démonstration. Si tout polynôme est scindé, tout polynôme possède des racines ; c'est l'autre sens qui est plus consistant.

36. Définition 6.71.

37. Définition 6.39

Soit un corps algébriquement clos $\mathbb{K}$. Nous allons effectuer une récurrence sur le degré des polynômes. Si P est un polynôme de degré 1, alors il est scindé.

Nous supposons que tous les polynômes de degré $n - 1$ sont scindés. Soit un polynôme P de degré n . Le corps étant algébriquement clos, le polynôme P a une racine que nous notons $a_n \in \mathbb{K}$. La proposition 3.115 nous explique qu'il existe un polynôme Q de degré $n - 1$ tel que $P = (X - a_n)Q$.

Par hypothèse de récurrence, le polynôme Q est scindé : il existe $\{a_i\}_{i=1, \dots, n-1}$ dans $\mathbb{K}$ tels que $Q = \prod_{i=1}^{n-1} (X - a_i)$. Au final,

$$P = (X - a_n)Q = \prod_{k=1}^n (X - a_k) \quad (6.144)$$

et P est scindé. □

LEMooYVHKooWhewKp

Lemme 6.80.

Soient un corps $\mathbb{K}$ et un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$. Nous supposons que P est scindé :

$$P = \prod_{k=1}^n (X - a_k). \quad (6.145)$$

Si α est une racine de P , alors α est l'un des a_k .

Démonstration. Dire que α est une racine de P revient à dire que

$$\prod_{k=1}^n (\alpha - a_k) = 0 \quad (6.146)$$

EQooXHSCooVdMiva

Un corps est toujours un anneau intègre (lemme 1.327), c'est-à-dire que la règle du produit nul est utilisable. Dans notre cas, le produit nul (6.146) nous indique que $\alpha - a_k = 0$ pour (au moins) un des k . Donc effectivement α est l'un des a_k . □

Lemme 6.81.

Soient un corps algébriquement clos $\mathbb{K}$ ainsi qu'une extension algébrique $\alpha: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$. Alors $\alpha(\mathbb{K}) = \mathbb{L}$.

Démonstration. Nous allons montrer que tous les éléments de $\mathbb{L}$ sont dans l'image de α . Soit donc $l \in \mathbb{L}$. Puisque l'extension $\alpha: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$ est une extension algébrique, il existe un polynôme $P \in \alpha(\mathbb{K})[X]$ tel que $P(l) = 0$.

Étant donné que α est injective, il est possible de considérer le polynôme $Q = \alpha^{-1}(P)$, c'est-à-dire que, si $P = \sum_k a_k X^k$, nous posons $Q = \sum_k \alpha^{-1}(a_k) X^k$.

Le corps $\mathbb{K}$ étant algébriquement clos, le polynôme Q est scindé (proposition 6.79) :

$$Q = \prod_{k=1}^n (X - b_k) \quad (6.147)$$

avec $b_k \in \mathbb{K}$. Nous avons alors aussi la factorisation

$$P = \prod_{k=1}^n (X - \alpha(b_k)) \quad (6.148)$$

dans $\mathbb{L}[X]$. Nous avons vu que l était une racine de P . Donc l est un des $\alpha(b_k)$ (lemme 6.80). Cela prouve que $l \in \alpha(\mathbb{K})$. □

6.4.3 Extension algébrique et polynôme minimal

PROPooALFJooDjmIcb

Proposition 6.82 ([117]).

Soit une extension algébrique³⁸ $\mathbb{L}$ du corps $\mathbb{K}$.

³⁸. Définition 6.75.

- (1) Pour tout $a \in \mathbb{L}$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(a) = 0$. ITEMooEFNFooKYqXDk
- (2) Le polynôme minimal de a dans $\mathbb{K}[X]$ est l'unique polynôme unitaire irréductible annulant a .

Démonstration. Le premier point est seulement la définition 6.75 d'une extension algébrique.

L'idéal annulateur $I_a = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P(a) = 0\}$ n'est pas réduit à $\{0\}$ parce que $\mathbb{L}$ est une extension algébrique. L'existence du polynôme minimal est le lemme 6.64 et le fait qu'il soit irréductible est la proposition 6.67(1).

Ce qui nous intéresse ici est l'unicité. Soit $\mu_1 \in \mathbb{K}[X]$, un polynôme annulateur de a irréductible et unitaire. Puisque $\mu_1 \in I_a$ et que par définition, $I_a = (\mu)$, il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\mu_1 = P\mu$. Comme μ n'est pas inversible et que μ_1 est irréductible, P doit être inversible : $\mu_1 = k\mu$ pour un certain $k \in \mathbb{K}$.

Puisque μ et μ_1 sont unitaires, $k = 1$. Donc $\mu_1 = \mu$. □

LEMooHKTMOoKEoOuK

Lemme 6.83.

Soient un corps $\mathbb{K}$, une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{L}$, un élément algébrique³⁹ sur $\mathbb{K}$. Si μ est le polynôme minimal de α sur $\mathbb{K}$ alors

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{K}[\alpha] &\rightarrow \mathbb{K}[X]/(\mu) \\ Q(\alpha) &\mapsto \bar{Q} \end{aligned} \tag{6.149}$$

avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ est un isomorphisme de corps et de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

Démonstration. D'abord, α est algébrique, donc l'idéal annulateur I_α n'est pas réduit à $\{0\}$, et l'existence d'un polynôme minimal est assurée par le lemme 6.64.

Ensuite, le fait que $\mathbb{K}[X]/(\mu)$ soit un corps est le corolaire 6.44. Nous montrons à présent que φ est un isomorphisme (d'anneaux) ; cela suffit pour en déduire que $\mathbb{K}[\alpha]$ est également un corps.

Ces préliminaires étant dits, nous commençons.

- (1) **Bien définie** Nous devons prouver que φ est bien définie, c'est-à-dire que tout élément de $\mathbb{K}[\alpha]$ peut être écrit sous la forme $Q(\alpha)$ pour un $Q \in \mathbb{K}[X]$, et que si $Q_1(\alpha) = Q_2(\alpha)$ alors $\bar{Q}_1 = \bar{Q}_2$.

Le fait que tous les éléments de $\mathbb{K}[\alpha]$ peuvent être écrits sous la forme $Q(\alpha)$ est la proposition 3.91. Supposons que $Q_1(\alpha) = Q_2(\alpha)$. Alors nous définissons $R \in \mathbb{K}[X]$ par $Q_1 = Q_2 + R$, et en évaluant cette égalité en α nous avons

$$Q_1(\alpha) = Q_2(\alpha) + R(\alpha), \tag{6.150}$$

autrement dit $R(\alpha) = 0$. Donc R est dans l'idéal annulateur de α et est donc dans (μ) , c'est-à-dire que dans le quotient $\mathbb{K}[X]/(\mu)$ nous avons $\bar{R} = 0$ et donc $\bar{Q}_1 = \bar{Q}_2$.

- (2) **Surjective**

Tout élément de $\mathbb{K}[X]/(\mu)$ est de la forme $\bar{Q}$ pour un $Q \in \mathbb{K}[X]$. Or ces éléments sont ceux de l'ensemble d'arrivée de φ .

- (3) **Injective**

Si $\bar{Q}_1 = \bar{Q}_2$, alors $Q_1 = Q_2 + R$ avec R dans l'idéal engendré par μ , c'est-à-dire entre autres $R(\alpha) = 0$. Donc $Q_1(\alpha) = Q_2(\alpha)$.

Nous devons encore montrer que nous avons là un morphisme de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

- (1) Si $k \in \mathbb{K}$ alors $\varphi(kQ(\alpha)) = \overline{kQ}$. Mais par définition de la structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}[X]/(\mu)$, $\overline{kQ} = k\bar{Q}$ (vérifier que cette définition de la multiplication par un scalaire sur $\mathbb{K}[X]/(\mu)$ est correcte).
- (2) Nous avons aussi $\varphi(Q_1(\alpha) + Q_2(\alpha)) = \varphi((Q_1 + Q_2)(\alpha)) = \overline{Q_1 + Q_2} = \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2$.

□

39. Définition 6.71.

6.4.4 Extensions et polynômes

Nous savons déjà depuis la définition 1.461 ce qu'est $A[X]$ pour tout anneau A et donc, à fortiori, pour un corps.

DEFooQPZlOoQYiNVh

Définition 6.84.

Soit un corps commutatif⁴⁰. Nous notons $\mathbb{K}(X)$ le corps des fractions⁴¹ de $\mathbb{K}[X]$.

DEFooZHBZooKInfGZ

Lemme-Définition 6.85.

Si $R \in \mathbb{K}(X)$, avec $R = P/Q$ et si $\mathbb{L}$ est une extension⁴² de $\mathbb{K}$ contenant l'élément α , alors nous définissons

$$R(\alpha) = P(\alpha)Q(\alpha)^{-1}. \quad (6.151)$$

Cela est une bonne définition au sens où elle ne dépend pas du choix du représentant (P, Q) pris dans la classe P/Q .

Démonstration. Supposons $R = P_1/Q_1 = P_2/Q_2$. Par définition des classes (définition 1.471) nous avons

$$P_1Q_2 = Q_1P_2. \quad (6.152)$$

EQooKHVNooABuHaQ

Puisque l'évaluation est un morphisme $\mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}$ ⁴³ nous pouvons évaluer l'équation (6.152) en α :

$$P_1(\alpha)Q_2(\alpha) = Q_1(\alpha)P_2(\alpha). \quad (6.153)$$

EQooJAIGooRADgiD

Cette dernière est une égalité dans le corps $\mathbb{K}$. Nous pouvons donc la multiplier par $Q_2(\alpha)^{-1}Q_1(\alpha)^{-1}$ (et utiliser toutes les hypothèses de commutativité des anneaux et corps) pour obtenir

$$P_1(\alpha)Q_1(\alpha)^{-1} = P_2(\alpha)Q_2(\alpha)^{-1}, \quad (6.154)$$

c'est-à-dire

$$(P_1/Q_1)(\alpha) = (P_2/Q_2)(\alpha). \quad (6.155)$$

□

DEFooVSKGooMyeGel

Proposition-Définition 6.86 ([1]).

Soient un corps $\mathbb{K}$, une extension $(\mathbb{L}, j_{\mathbb{L}})$ de $\mathbb{K}$ et un élément $\alpha \in \mathbb{L}$. Nous définissons $\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}}$ comme étant l'intersection de tous les sous-corps de $\mathbb{L}$ contenant $j_{\mathbb{L}}(\mathbb{K})$ et α .

Alors

- (1) $\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}}$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$,
- (2) $\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}}$ est une extension⁴⁴ de $\mathbb{K}$.

Démonstration. Nous commençons par prouver que $\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}}$ est bien un corps. Si $a, b \in \mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}}$ alors il suffit de calculer ab , $a + b$ et a^{-1} dans n'importe quel sous-corps de $\mathbb{L}$ contenant $\mathbb{K}$ et α ; nous avons une garantie que a , b , ab , $a + b$ et a^{-1} sont dans tous les tels sous-corps.

Pour prouver que $\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}}$ est bien une extension, nous devons trouver un morphisme de corps $j: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}}$. On constate que prendre $j = j_{\mathbb{L}}$ fonctionne parce que par définition, $\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}}$ est une partie de $\mathbb{L}$ contenant l'image de $j_{\mathbb{L}}$. □

LEMooHZLCooPLHkLS

Lemme 6.87.

Soit n tel que $\sqrt{n}$ ne soit pas un rationnel. Si $\alpha \in \{a + b\sqrt{n}\}_{a,b \in \mathbb{Q}}$, alors il existe un unique choix $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ tel que

$$\alpha = x + y\sqrt{n}. \quad (6.156)$$

40. Sauf mention du contraire, tous les corps du Frido sont commutatifs.

41. Définition 1.471.

42. Définition 6.59.

43. Lemme 1.465. Certes ce lemme ne parle que d'anneaux, mais à y bien penser, dans le passage de (6.152) à (6.153), nous ne considérons que les structures d'anneaux sur $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}$.

44. Définition 6.59.

Démonstration. L'existence est dans la définition de α . Il s'agit de voir l'unicité. Supposons $x + y\sqrt{n} = a + b\sqrt{n}$ avec $x, y, a, b \in \mathbb{Q}$. Si $b \neq y$ nous pouvons écrire

$$\sqrt{n} = \frac{x - a}{b - y}. \quad (6.157)$$

Comme $\sqrt{n}$ n'est pas un rationnel, une telle écriture est impossible. Donc $b = y$. Nous avons alors $x + y\sqrt{n} = a + y\sqrt{n}$ et du coup aussi $x = a$. $\square$

Exemple 6.88.

Nous avons

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2})_{\mathbb{R}} = \{a + b\sqrt{2}\}_{a,b \in \mathbb{Q}} \quad (6.158)$$

où à droite nous calculons les sommes et les produits dans $\mathbb{R}$. Le tout est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui se révèle être un corps contenant $\mathbb{Q}$ et $\sqrt{2}$.

En particulier, dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})_{\mathbb{R}}$ nous avons $\sqrt{2}\sqrt{2} = 2$. $\triangle$

LEMooKVPZooPqPrce

Lemme 6.89.

Les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2})_{\mathbb{R}}$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{3})_{\mathbb{R}}$ ne sont pas isomorphes.

Démonstration. Supposons l'existence d'un morphisme de corps ⁴⁵

$$\psi: \mathbb{Q}(\sqrt{2})_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{3})_{\mathbb{R}}. \quad (6.159)$$

Nous notons « 1 » à la fois le neutre de la multiplication dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})_{\mathbb{R}}$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{3})_{\mathbb{R}}$ (qui s'avèrent être les mêmes en tant qu'élément de $\mathbb{R}$, mais ça n'a pas d'importance ici).

Soit $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})_{\mathbb{R}}$ tel que $\alpha^2 - 2 = 0$. Alors nous avons aussi

$$\psi(\alpha)^2 - 2 = \psi(\alpha^2) - \psi(2) = \psi(\alpha^2 - 2) = \psi(0) = 0. \quad (6.160)$$

Donc $\psi(\alpha)$ est un élément de $\mathbb{Q}(\sqrt{3})_{\mathbb{R}}$ qui est une racine de $X^2 - 1$.

Or un tel élément n'existe pas dans $\mathbb{Q}(\sqrt{3})_{\mathbb{R}}$ parce que nous savons que dans $\mathbb{R}$ entier, il n'y a que deux racines : $\pm\sqrt{2}$, et aucune des deux n'est dans $\mathbb{Q}(\sqrt{3})_{\mathbb{R}}$. $\square$

EXooJRSUooYhAZkR

Exemple 6.90.

Est-ce que $\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}}$ dépend réellement de $\mathbb{L}$? Si $\mathbb{L}_2$ est une extension de $\mathbb{L}$ alors nous avons évidemment ⁴⁶ $\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}_2} = \mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}}$.

Nous commençons par construire un corps $\mathbb{K}$ un peu idiot qui, comme ensemble, est comme $\mathbb{Q}(\sqrt{2})_{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire la partie

$$\{a + b\sqrt{2}\}_{a,b \in \mathbb{Q}}, \quad (6.161)$$

de $\mathbb{R}$.

Mais cette fois nous définissons la multiplication suivante :

$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = ac + 3bd + (ad + bc)\sqrt{2}. \quad (6.162)$$

C'est un corps parce que tout élément non nul est inversible. En effet, l'équation

$$(a + b\sqrt{2})(x + y\sqrt{2}) = 1 \quad (6.163)$$

EQooIZLEooLPQbC

donne

$$\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.164)$$

Ce système a une unique solution si et seulement si $\det \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} = 0$. Cela survient si et seulement si

$$a^2 - 3b^2 = 0. \quad (6.165)$$

45. Définition 1.96. Oui, c'est un bête morphisme d'anneaux. Il n'y a pas plus de structure dans un corps que dans un anneau.

46. Vérifiez-le tout de même.

Les solutions de cette équation dans $\mathbb{R}$ sont $a = \pm\sqrt{3}|b|$. Dès que a ou b est non nul, cela ne peut pas satisfaire $a, b \in \mathbb{Q}$. Donc le déterminant est toujours non nul et il existe $x, y \in \mathbb{Q}$ tels que (6.163) soit satisfaite.

Tout cela nous a donné un corps $\mathbb{K}$ dont $\mathbb{Q}$ est un sous-corps et qui contient l'élément $\sqrt{2}$ de $\mathbb{R}$. Il n'est cependant pas un sous-corps de $\mathbb{R}$.

Ce corps est isomorphe à $\mathbb{Q}(\sqrt{3})_{\mathbb{R}}$. En effet, nous montrons que

$$\begin{aligned}\psi: \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{3})_{\mathbb{R}} \\ a + b\sqrt{2} &\mapsto a + b\sqrt{3}\end{aligned}\tag{6.166}$$

est un isomorphisme de corps. Pour le produit, nous avons

$$\begin{aligned}\psi((a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2})) &= \psi(ac + 3bd + (ad + bc)\sqrt{2}) && \text{SUBEQooQSZBooHZDTKoo} \tag{6.167a)} \\ &= ac + 3bd + (ad + bc)\sqrt{3} && \text{SUBEQooPEKHooNPcjE} \tag{6.167b)} \\ &= (a + b\sqrt{3})(c + d\sqrt{3}) && \text{SUBEQooIGBZooMwrmFe} \tag{6.167c)} \\ &= \psi(a + b\sqrt{2})\psi(c + d\sqrt{2}). && \tag{6.167d)}\end{aligned}$$

Remarques :

- L'application ψ est bien définie grâce au lemme 6.87 couplé au théorème 3.32 appliqué à $n = 2$ et $n = 3$.
- Dans le membre de gauche de (6.167a), $b\sqrt{2}$ est un produit dans $\mathbb{R}$ (d'où l'importance du lemme 6.87 qui permet de re-séparer les éléments de $\mathbb{R}$ partie rationnelle et partie multiple de $\sqrt{2}$), et le produit entre $(a + b\sqrt{2})$ et $(c + d\sqrt{2})$ est un produit dans $\mathbb{K}$.
- Dans (6.167b) et (6.167c), tous les produits sont dans $\mathbb{R}$.

En comparant avec le lemme 6.89, nous avons alors

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2})_{\mathbb{K}} = \mathbb{Q}(\sqrt{3})_{\mathbb{R}} \neq \mathbb{Q}(\sqrt{2})_{\mathbb{R}}\tag{6.168}$$

△

6.91.

Nous allons encore enfoncer le clou sur le fait que $\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}}$ dépend de $\mathbb{L}$.

Le fait est que si on y pense, l'objet $\sqrt{2}$ n'a aucun rapport avec $\mathbb{Q}$. En effet les objets de $\mathbb{Q}$ sont des classes d'équivalence de couples d'éléments de $\mathbb{Z}$, alors que l'élément $\sqrt{2}$ est une classe d'équivalence de suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.

Lorsque nous écrivons $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, nous associons des objets de nature complètement différentes, et il n'y a aucune raison à priori de définir la multiplication entre eux d'une façon plutôt qu'une autre.

Plus généralement, dans ZF (nous faisons semblant de suivre ZF tout en sachant que nous ne savons pas ce que c'est réellement⁴⁷), tout est ensemble. Peut-on dire ce que serait $\mathbb{Q}(I)$ si I est un ensemble quelconque? Attention : en écrivant $\mathbb{Q}(I)$, nous entendons un corps dont I est un élément, pas un corps qui contiendrait comme éléments tous les éléments de I .

Si I est juste un ensemble, quelle définition donner de I^2 ? Il y a plein de choix et rien ne se dégage clairement comme étant pertinent. Si par contre, en guise de I nous considérons l'ensemble $\sqrt{2}$ (oui, c'est un ensemble : un ensemble de suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$), alors tout de suite nous nous disons que la bonne façon de faire est $\sqrt{2}^2 = 2$. Ce réflexe est juste conditionné par le fait que nous connaissons déjà par ailleurs le corps $\mathbb{R}$. Rien de plus.

Donc oui, $\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}}$ dépend de $\mathbb{L}$, mais dans les cas particuliers où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, il y a une égalité implicite $\mathbb{L} = \mathbb{C}$. Cela étant dit, il n'y a plus d'ambiguïté en écrivant $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

EXooKLRBooUswzpV

Exemple 6.92.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ et $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Afin de montrer que $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\alpha)$ avec $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ nous devons montrer que $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ sont des polynômes en α . △

47. En lisant quelques pages de Wikipédia, vous pourrez briller en société, mais ne tentez pas le coup à l'agrégation.

DefZCYIbve

Définition 6.93.

Soit une extension⁴⁸ de corps $j: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$. Soit $A \subset \mathbb{L}$.

ITEMooJEGUooMsDBhF

- (1) Nous notons $\mathbb{K}(A)_{\mathbb{L}}$ le plus petit sous-corps de $\mathbb{L}$ contenant $j(\mathbb{K})$ et A . C'est l'intersection de tous les sous-corps de $\mathbb{L}$ contenant A et $j(\mathbb{K})$.
- (2) Nous notons $\mathbb{K}[A]_{\mathbb{L}}$ le plus petit sous-anneau de $\mathbb{L}$ contenant $j(\mathbb{K})$ et A . C'est l'intersection de tous les sous-anneaux de $\mathbb{L}$ contenant A et $j(\mathbb{K})$.

Nous disons que l'extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ est **monogène** ou **simple** si il existe $\theta \in \mathbb{L}$ tel que $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\theta)$. Un tel élément θ est dit **élément primitif** de $\mathbb{L}$. Il n'est pas nécessairement unique.

Le plus souvent, l'indice $\mathbb{L}$ dans $\mathbb{K}(A)_{\mathbb{L}}$ et $\mathbb{K}[A]_{\mathbb{L}}$ est omis parce que le contexte est clair⁴⁹, et nous avons même très souvent $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ en tant qu'ensembles. Dans ce cas, l'application j est l'identité et elle sera omise.

Remarque 6.94.

Les ensembles $\mathbb{K}(A)$ et $\mathbb{K}[A]$ sont aussi appelés respectivement corps **engendré** et anneau engendré par A . Cependant il faut bien remarquer que ce sont les parties de $\mathbb{L}$ engendrées par A . Il n'est pas question à priori de parler de corps engendré par A sans dire dans quel corps plus grand nous nous plaçons.

Exemple 6.95.

Nous savons que $\mathbb{R}$ est une extension de $\mathbb{Q}$. Si $a \in \mathbb{R}$ alors $\mathbb{Q}(a)$ est le plus petit corps contenant $\mathbb{Q}$ et a . $\triangle$

Exemple 6.96.

Nous avons déjà vu à l'occasion de la définition 1.461 que $A[X]$ est l'anneau de tous les polynômes de degré fini en X . Cela rentre dans le cadre de la définition 6.93 parce qu'un anneau contenant X doit contenir tous les X^n .

Notons que même si $\mathbb{K}$ est un corps, $\mathbb{K}[X]$ reste un anneau parce qu'un éventuel inverse de X n'est pas dedans⁵⁰. Par contre, $\mathbb{K}(X)$ est un corps parce qu'il contient également les fractions rationnelles. $\triangle$

ExLQhLhJ

Exemple 6.97.

Si nous prenons $\mathbb{F}_5$ et que nous l'étendons par i , nous obtenons le corps $\mathbb{K} = \mathbb{F}_5(i)$. Nous savons que tous les éléments $a \in \mathbb{F}_5$ sont racines de $X^5 - X$. Mais étant donné que $i^5 = i$, nous avons aussi $x^5 = x$ pour tout $x \in \mathbb{F}_5(i)$. Pour le prouver, utiliser le morphisme de Frobenius. Le polynôme $X^5 - X$ est donc le polynôme nul dans $\mathbb{K}$.

Ceci est un cas très particulier parce que nous avons étendu $\mathbb{F}_p$ par un élément α tel que $\alpha^p = \alpha$. En général sur $\mathbb{F}_p(\alpha)$, le polynôme $X^p - X$ n'est pas identiquement nul, et possède donc au maximum p racines. Pour $x \in \mathbb{F}_p(\alpha)$, nous avons $x^p = x$ si et seulement si $x \in \mathbb{F}_p$. $\triangle$

Dans l'énoncé suivant, la notation $R(\alpha)_{\mathbb{L}}$ signifie que l'évaluation de R sur α se fait en calculant dans le sur-corps $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$. Cette proposition semble indiquer que $\mathbb{K}(\alpha)$ est donné en termes de $\mathbb{K}(X)$, lequel est défini de façon très intrinsèque sans faire appel implicitement à un sur-corps de $\mathbb{K}$.

PROPooYSFNooFGbbCi

Proposition 6.98 ([1]).

Soit une extension $\mathbb{L}$ du corps $\mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{L}$. Alors nous avons les isomorphismes de corps suivants :

- (1) $\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}} = \text{Frac}(\mathbb{K}[\alpha]_{\mathbb{L}})$,
- (2) $\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}} = \{R(\alpha)_{\mathbb{L}} \text{ tel que } R \in \mathbb{K}(X)\}$.

ITEMooATPTooVXKdIK

48. Définition 6.59.

49. Et je me demande si il est possible de trouver un cas tordu où $\mathbb{K}(A)_{\mathbb{L}} \neq \mathbb{K}(A)_{\mathbb{M}}$. Par exemple lorsque A est dans $\mathbb{L}$ et $\mathbb{M}$, mais que $\mathbb{L}$ n'est pas inclus dans $\mathbb{M}$, ni $\mathbb{M}$ dans $\mathbb{L}$.

50. Lorsqu'on multiplie, les degrés montent toujours.

Démonstration. Le corps $\mathbb{K}(\alpha)$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$ contenant $\mathbb{K}[\alpha]$ comme sous-anneau. La proposition 1.478 nous dit alors que l'application suivante est un morphisme injectif de corps :

$$\begin{aligned} \epsilon: \text{Frac}(\mathbb{K}[\alpha]) &\rightarrow \mathbb{K}(\alpha) \\ P/Q &\mapsto PQ^{-1}. \end{aligned} \quad (6.169)$$

Pour rappel, la notation P/Q est bien une notation pour la classe d'équivalence du couple (P, Q) pour la relation définie en 1.471.

Par ailleurs, la partie $\epsilon(\text{Frac}(\mathbb{K}[\alpha]))$ de $\mathbb{L}$ est un corps contenant $\mathbb{K}$ et α . Donc ce corps fait partie des corps sur lesquels on prend l'intersection pour définir $\mathbb{K}(\alpha)$ ⁵¹. Cela prouve que

$$\mathbb{K}(\alpha) \subset \epsilon(\text{Frac}(\mathbb{K}[\alpha])). \quad (6.170)$$

L'application ϵ est donc surjective sur $\mathbb{K}(\alpha)$. Comme elle était déjà injective, elle est bijective.

Pour la seconde partie, veuillez lire la définition 1.480 de l'évaluation d'une fraction rationnelle sur un élément de l'anneau. Si $R = P/Q \in \mathbb{K}(X)$ et si $\alpha \in \mathbb{L}$, nous avons

$$R(\alpha) = P(\alpha)Q(\alpha)^{-1}. \quad (6.171)$$

Tout sous-corps de $\mathbb{L}$ contenant $\mathbb{K}$ et α doit contenir en particulier $\{P(\alpha) \text{ tel que } P \in \mathbb{K}[X]\}$, les inverses $\{P(\alpha)^{-1} \text{ tel que } P \in \mathbb{K}[X], P(\alpha) \neq 0\}$ et les produits de ceux-ci. Donc tout sous-corps de $\mathbb{L}$ contenant $\mathbb{K}$ et α contient $\{R(\alpha) \text{ tel que } R \in \mathbb{K}(X)\}$.

Nous avons donc

$$\{R(\alpha) \text{ tel que } R \in \mathbb{K}(X)\} \subset \mathbb{K}(\alpha). \quad (6.172)$$

Mais puisque $\mathbb{K}(\alpha)$ est lui-même un sous-corps de $\mathbb{L}$ contenant $\mathbb{K}$ et α , il est contenu dans $\{R(\alpha) \text{ tel que } R \in \mathbb{K}(X)\}$. D'où l'égalité. $\square$

Pourquoi cela ne contredit pas l'exemple 6.90 ? Lorsque nous écrivons

$$\mathbb{K}(\alpha) = \{R(\alpha) \text{ tel que } R \in \mathbb{K}(X)\}, \quad (6.173)$$

certaines $\mathbb{K}(X)$ est défini sans faire appel à un corps contenant $\mathbb{K}$. Mais l'évaluation $R(\alpha)$, oui. Pour calculer $R(\alpha)$, il faut écrire $R = P/Q$ et calculer $P(\alpha)Q(\alpha)^{-1}$. Tous les calculs de cette dernière expression doivent se faire dans un sur-corps de $\mathbb{K}$. Il suffit que le sur-corps en question soit un monceau de mauvaise foi comme celui de l'exemple 6.90, et en réalité $\mathbb{K}(\alpha)$ peut ne pas être ce que l'on croit.

Le corolaire suivant montre que les choses s'arrangent.

Corolaire 6.99.

Soient un corps $\mathbb{K}$, une extension $\mathbb{L}_1$ de $\mathbb{K}$, un élément $\alpha \in \mathbb{L}_1$ et une extension $\mathbb{L}_2$ de $\mathbb{L}_1$. Alors

$$\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}_1} = \mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}_2}. \quad (6.174)$$

Démonstration. La proposition 6.98 nous dit que

$$\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}_1} = \{R(\alpha)_{\mathbb{L}_1} \text{ tel que } R \in \mathbb{K}(X)\} \quad (6.175a)$$

$$\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}_2} = \{R(\alpha)_{\mathbb{L}_2} \text{ tel que } R \in \mathbb{K}(X)\}. \quad (6.175b)$$

Mais lorsque $R \in \mathbb{K}(X)$, le calcul de $R(\alpha)$ est exactement le même dans $\mathbb{L}_1$ et dans $\mathbb{L}_2$ parce que $\mathbb{L}_2$ est un sur-corps de $\mathbb{L}_1$ et que les calculs effectifs de $R(\alpha) = P(\alpha)Q(\alpha)^{-1}$ ne font intervenir que des quantités de $\mathbb{K}$ et des puissances de α . $\square$

Ce que ce corolaire nous dit est que si le contexte fixe une extension de $\mathbb{K}$, nous pouvons faire tous les calculs dans cette extension, même si il y a des piles d'extensions à côté.

Typiquement, à chaque fois que nous considérons des sous-corps de $\mathbb{C}$, les extensions se feront dans $\mathbb{C}$: pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, les corps $\mathbb{Q}(\alpha)$, $\mathbb{R}(\alpha)$ se calculent dans $\mathbb{C}$.

51. Pour rappel, la définition 6.93(1) donne $\mathbb{K}(\alpha)$ comme une intersection.

PROPooSYQWooFbfQtm

Proposition 6.100.

Soit un corps $\mathbb{K}$, une extension $\mathbb{L}$ et un élément $\alpha \in \mathbb{L}$. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned}\varphi: \mathbb{K}[X] &\rightarrow \mathbb{L} \\ P &\mapsto P(\alpha).\end{aligned}\tag{6.176}$$

ITEMooUZDQooOasiRQ

- (1) Si α est transcendant, alors $\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}[X]$ (isomorphisme d'anneaux).
- (2) Si α est transcendant, alors $\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}} = \mathbb{K}(X)$ (isomorphisme de corps),
- (3) Si α est algébrique, alors $\ker(\varphi)$ est un idéal possédant un unique générateur unitaire, lequel est le polynôme minimal⁵² de α sur $\mathbb{K}$.

Démonstration. Point par point.

- (1) Nous savons que $\mathbb{K}[\alpha] = \{Q(\alpha) \text{ tel que } Q \in \mathbb{K}[X]\}$ (c'est la proposition 3.91). Donc φ est surjective sur $\mathbb{K}[\alpha]$, et est donc bijective. Elle est un isomorphisme⁵³ parce que le lemme 6.71 dit déjà que c'est un morphisme.
- (2) Nous supposons encore que α est transcendant et nous considérons l'application

$$\begin{aligned}\psi: \mathbb{K}(X) &\rightarrow \mathbb{K}(\alpha) \\ P &\mapsto R(\alpha).\end{aligned}\tag{6.177}$$

Note : cette application n'est pas φ . En effet φ n'est définie que sur $\mathbb{K}[X]$; le corps des fractions $\mathbb{K}(X)$ est nettement plus grand (classes d'équivalence de couples).

Le fait que cette application soit surjective est la proposition 6.98(2). Pour l'injectivité nous supposons que $\psi(R) = 0$, c'est-à-dire que $R(\alpha) = 0$. Nous considérons un représentant (P, Q) de R ; c'est-à-dire $R = P/Q$. L'égalité $R(\alpha) = 0$ signifie $P(\alpha)Q(\alpha)^{-1} = 0$ (égalité dans $\mathbb{L}$). Puisque $\mathbb{L}$ est un corps, c'est un anneau intègre et nous avons la règle du produit nul; soit $P(\alpha) = 0$, soit $Q(\alpha)^{-1} = 0$. La seconde possibilité est impossible parce que zéro n'est pas inversible. Donc $P(\alpha) = 0$. Donc $\varphi(P) = 0$ et φ étant injective, $P = 0$.

Lorsque $P = 0$, la classe P/Q est nulle dans $\mathbb{K}(X) = \text{Frac}(\mathbb{K}[X])$.

- (3) C'est le lemme-définition 6.64.

□

PropXULooPCusvE

Proposition 6.101.

Soit un corps $\mathbb{K}$ et une extension $\mathbb{L}$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{L}$, une racine de P . Alors le polynôme minimal d'une racine divise⁵⁴ tout polynôme annulateur.

Autrement dit, l'idéal engendré par le polynôme minimal est l'idéal des polynômes annulateurs.

Démonstration. Nous considérons l'idéal

$$I = \{Q \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } Q(a) = 0\}.\tag{6.178}$$

Le fait que cela soit un idéal est simplement dû à la définition du produit : $(PQ)(a) = P(a)Q(a)$. Par le théorème 6.43, le polynôme minimal μ_a de a est dans I et, qui plus est, le génère : $I = (\mu_a)$. Par conséquent tout polynôme annulateur de a est divisé par μ_a . □

52. Définition 6.64.

53. Les amateurs d'écriture inclusive ne seront, je l'espère, pas choqué par « elle est un isomorphisme » ; c'est une tournure que je propose ici sur le modèle de l'immonde « elle est un ministre » ou, à peine moins grave, « il est une sommité ».

54. Définition 3.96.

6.4.4.1 Extension algébrique, degré

Proposition 6.102.

Toute extension finie est algébrique.

Démonstration. Soient un corps $\mathbb{K}$, une extension $\mathbb{L}$ de degré⁵⁵ n de $\mathbb{K}$ et $a \in \mathbb{L}$. Nous devons montrer qu'il existe un polynôme annulateur de a à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Soit la partie $S = \{1, a, a^2, \dots, a^n\}$ de $\mathbb{L}$. Si cette partie contient des éléments non distincts, alors c'est plié. En effet, si $a^k = a^l$, alors le polynôme X^{k-l} est un polynôme annulateur de a .

Nous supposons donc que S contienne exactement $n+1$ éléments distincts. Le lemme 4.12 nous assure que S est une partie liée : il existe des éléments $k_i \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=0}^n k_i a^i = 0$.

Donc le polynôme $\sum_i a_i X^i$ est un polynôme annulateur de a . □

PropURZooVtwNXE

Proposition 6.103 (Propriétés d'extensions algébriques[1]).

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif⁵⁶ et a un élément algébrique⁵⁷ sur $\mathbb{K}$, de polynôme minimal μ_a de degré n . Alors

ItemJCMooDgEHajmi

(1) En considérant l'application d'évaluation

$$\begin{aligned} \varphi_a: \mathbb{K}[X] &\rightarrow \mathbb{L} \\ Q &\mapsto Q(a), \end{aligned} \tag{6.179}$$

nous avons $\mathbb{K}[a] = \text{Image}(\varphi_a)$.

ItemJCMooDgEHajiv

(2) Une base de $\mathbb{K}[a]$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est donnée par $\{1, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$.

ItemJCMooDgEHajiii

(3) Le degré de l'extension $\mathbb{K}[a]$ est égal au degré du polynôme minimal :

$$[\mathbb{K}[a] : \mathbb{K}] = n. \tag{6.180}$$

(4) L'anneau $\mathbb{K}[a]$ est l'ensemble des polynômes en a de degré jusqu'à $n-1$ à coefficient dans $\mathbb{K}$.

ItemJCMooDgEHaji

(5) $\mathbb{K}(a) = \mathbb{K}[a]$.

ItemJCMooDgEHajii

(6) Il existe un isomorphisme d'anneaux $\varphi: \mathbb{K}[a] \rightarrow \mathbb{K}[X]/(\mu_a)$ tel que $\varphi(k) = \bar{k}$ pour tout $k \in \mathbb{K}$. $\mathbb{K}[a] \simeq \mathbb{K}[X]/(\mu_a)$ (isomorphisme d'anneau).

L'intérêt de (6) est qu'il permet de caractériser $\mathbb{K}[a]$ sans avoir recours à un sur-corps de $\mathbb{K}$. Le point (3) indique que le degré d'une extension algébrique est égal au degré du polynôme minimal.

Démonstration. (1) Nous avons $\mathbb{K}[a] \subset \text{Image}(\varphi_a)$ parce que $\text{Image}(\varphi_a)$ est lui-même un sous-anneau de $\mathbb{L}$ contenant $\mathbb{K}$ et a . Pour rappel, $\mathbb{K}[a]$ est l'intersection de tous les tels sous-anneaux.

L'inclusion inverse est le fait que si $Q \in \mathbb{K}[X]$ alors $Q(a) \in \mathbb{K}[a]$ parce que $\mathbb{K}[a]$ est un anneau et contient donc tous les a^n .

(2) La partie $\{1, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ est libre parce qu'une combinaison linéaire de ces éléments est un polynôme de degré au plus $n-1$ en a . Un tel polynôme ne peut pas être nul parce que nous avons mis comme hypothèse que le polynôme minimal de a est de degré n .

Rappelons qu'en vertu de la définition 6.64, le polynôme minimal μ_a est unitaire ; donc $\deg(\mu_a(X) - X^n) \leq n-1$. Par conséquent en posant $S(X) = X^n - \mu_a(X)$, nous avons $\deg(S) \leq n-1$ et $S(a) = a^n$.

En vertu du point (1), un élément de $\mathbb{K}[a]$ s'écrit $Q(a)$ pour un certain $Q \in \mathbb{K}[X]$. Supposons que Q soit de degré $p > n-1$; alors nous le décomposons en une partie contenant les termes de degré jusqu'à $n-1$ et une partie contenant les autres :

$$Q(X) = Q_1(X) + X^n Q_2(X) \tag{6.181}$$

55. Définition 6.61.

56. Juste en passant nous rappelons que tous les corps considérés ici sont commutatifs

57. Définition 6.71.

où $\deg(Q_1) \leq n - 1$ et $\deg(Q_2) = p - n$. Nous évaluons cette égalité en a :

$$Q(a) = Q_1(a) + S(a)Q_2(a). \quad (6.182)$$

Donc $Q(a)$ est l'image de a par le polynôme $Q_1 + SQ_2$ qui est de degré $p - 1$. Par récurrence, $Q(a)$ est l'image de a par un polynôme de degré $n - 1$.

Notons que l'idée est très simple : il s'agit de remplacer récursivement tous les a^n par $S(a)$.

- (3) Conséquence immédiate de (2).
- (4) Conséquence immédiate de (2).
- (5) Un élément général non nul de $\mathbb{K}[a]$ est de la forme $Q(a)$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$; il s'agit de lui trouver un inverse. Pour cela nous remarquons que les polynômes $\mu_a(X)$ et $Q(x)$ sont premiers entre eux, sinon μ_a ne serait pas un polynôme minimal (voir la proposition 6.67). Donc le théorème de Bézout 6.47 affirme l'existence d'éléments $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$U\mu_a + VQ = 1 \quad (6.183)$$

dans $\mathbb{K}[X]$. Nous évaluons cette égalité en a en tenant compte de $\mu_a(a) = 0$ dans $\mathbb{K}[a]$:

$$U(a)\mu_a(a) + V(a)Q(a) = 1 \quad (6.184)$$

dans $\mathbb{K}[a]$. Par conséquent $V(a)Q(a) = 1$, ce qui signifie que $V(a)$ est l'inverse de $Q(a)$.

- (6) Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{K}[X]/(\mu_a) &\rightarrow \mathbb{K}[a] \\ \bar{R} &\mapsto R(a) \end{aligned} \quad (6.185)$$

et nous montrons qu'elle convient. Pour cela, nous nous souvenons que la proposition 6.101 nous enseigne que (μ_a) , l'idéal engendré par μ_a , est égal à l'idéal des polynômes annulateurs de a dans $\mathbb{K}[X]$. Le polynôme μ_a divise tous les éléments de cet idéal ; voir aussi la définition 1.310 de l'idéal (μ_a) . Cela étant mis au point, nous passons à la preuve.

(6a) ψ est bien définie

Si $\bar{R} = \bar{S}$ alors $R = S + Q$ avec $Q \in (\mu_a)$, et par conséquent $R(a) = S(a) + Q(a)$ avec $Q(a) = 0$.

(6b) Surjective

Nous savons que $\mathbb{K}[a] = \text{Image}(\varphi_a)$. Si $x \in \mathbb{K}[a]$ alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $x = Q(a)$. Dans ce cas nous avons aussi $x = \psi(\bar{Q})$.

(6c) Injective

Si $\psi(\bar{R}) = 0$ alors $R(a) = 0$, mais comme mentionné plus haut, μ_a engendre l'idéal des polynômes annulateurs de a . Donc $R \in (\mu_a)$ et nous avons $\bar{R} = 0$ dans $\mathbb{K}[X]/(\mu_a)$. □

Exemple 6.104.

Un fait connu est que $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc l'inverse de $\sqrt{2}$ s'exprime bien comme un polynôme en $\sqrt{2}$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$, ce qui confirme le point (5) de la proposition 6.103. Du point de vue de Bézout, $\mu_{\sqrt{2}}(X) = X^2 - 2$, et nous cherchons des polynômes U et V tels que

$$U(X^2 - 2) + VX = 1. \quad (6.186)$$

cette égalité est réalisée par $U = -\frac{1}{2}$ et $V = \frac{1}{2}X$. Et effectivement $V(\sqrt{2})$ est bien l'inverse de $\sqrt{2}$:

$$V(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}. \quad (6.187)$$

△

PROPooNGJWooYSpwVn

Proposition 6.105 ([193]).

Soient un corps $\mathbb{K}$, une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ et un élément α de $\mathbb{L}$. Il y a équivalence entre les trois points suivants :

ITEMooYTEBooUuEfBz

(1) α est algébrique sur $\mathbb{K}$,

ITEMooWMQTooLnepQl

(2) $\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}(\alpha)$,

ITEMooAQIUooMVZojp

(3) $\mathbb{K}[\alpha]$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Si ces affirmations sont vraies, alors $[\mathbb{K}(\alpha) : \mathbb{K}]$ est le degré du polynôme minimal de α sur $\mathbb{K}$.

Démonstration. Démonstration décomposée en plusieurs implications.

(1) **(1) implique (2)**

Soit α algébrique sur $\mathbb{K}$. Nous considérons le polynôme minimal de α sur $\mathbb{K}$ (définition 6.64). Nous savons par le lemme 6.83 (qui fonctionne parce que α est algébrique) que $\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}[X]/(\mu)$ en tant qu'anneaux.

Mais $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal et μ en est un élément irréductible. Donc la proposition 1.400 dit que (μ) est un idéal maximum ; la proposition 1.402 avance encore un peu en disant que $\mathbb{K}[X]/(\mu)$ est un corps.

Donc $\mathbb{K}[X]/(\mu)$ est un corps isomorphe à $\mathbb{K}[\alpha]$ en tant qu'anneaux. En conséquence de quoi $\mathbb{K}[\alpha]$ est un corps.

Le corps $\mathbb{K}[\alpha]$ est un sous-corps de $\mathbb{L}$ contenant $\mathbb{K}$ et α ; par définition nous avons donc $\mathbb{K}(\alpha) \subset \mathbb{K}[\alpha]$.

Mais d'autre part, $\mathbb{K}[\alpha]$ est contenu dans tout sous-corps de $\mathbb{L}$ contenant $\mathbb{K}$ et α , donc il est inclus dans l'intersection de tout ces corps, donc $\mathbb{K}[\alpha] \subset \mathbb{K}(\alpha)$.

Nous avons donc l'égalité $\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}(\alpha)$.

(2) **(2) implique (1)**

Nous montrons que non-(1) implique non-(2). Nous disons donc que α est transcendant sur $\mathbb{K}$; cela implique par la proposition 6.100(1) que $\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}[X]$ en tant qu'anneaux. Donc $\mathbb{K}[\alpha]$ n'est pas un corps parce que $\mathbb{K}[X]$ ne l'est pas.

N'étant pas un corps, $\mathbb{K}[\alpha]$ ne peut pas être égal à $\mathbb{K}(\alpha)$ qui, lui, est un corps.

(3) **(1) implique (3)**

L'élément α est maintenant algébrique et nous considérons son polynôme minimal μ . Nous savons par le lemme 6.83 que $\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}[X]/(\mu)$ en tant qu'espaces vectoriels. Or $\mathbb{K}[X]/(\mu)$ est de dimension finie $\deg(\mu)$. Donc $\mathbb{K}[\alpha]$ est également de dimension finie.

(4) **(3) implique (1)**

Nous démontrons la contraposée. En supposant que α est transcendant nous avons $\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}[X]$ par la proposition 6.100. Or $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie sur $\mathbb{K}$, donc $\mathbb{K}[\alpha]$ non plus.

□

Lemme 6.106.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme unitaire irréductible de degré n . Il existe une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ et $a \in \mathbb{L}$ telle que $\mathbb{L} = \mathbb{K}(a)$ et P est le polynôme minimal de a dans $\mathbb{L}$.

Démonstration. Nous prenons $\mathbb{L} = \mathbb{K}[X]/(P)$ où (P) est l'idéal dans $\mathbb{K}[X]$ généré par P . C'est un corps par le corolaire 6.44. Nous identifions $\mathbb{K}$ avec $\phi(\mathbb{K})$ où

$$\phi: \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{L} \quad (6.188)$$

est la projection canonique. Nous considérons également $a = \phi(X)$.

Nous avons alors $P(a) = 0$ dans $\mathbb{L}$. En effet $P(a) = P(\phi(X))$ est à voir comme l'application du polynôme P au polynôme X , le résultat étant encore un élément de $\mathbb{L}$. En l'occurrence le résultat est P qui vaut 0 dans $\mathbb{L}$.

Le polynôme P étant unitaire et irréductible, il est minimum dans $\mathbb{L}$.

Nous devons encore montrer que $\mathbb{L} = \mathbb{K}(a)$. Le fait que $\mathbb{K}(a) \subset \mathbb{L}$ est une tautologie parce qu'on calcule $\mathbb{K}(a)$ dans $\mathbb{L}$. Pour l'inclusion inverse soit $Q(X) = \sum_i Q_i X^i$ dans $\mathbb{K}[X]$. Dans $\mathbb{L}$ nous avons évidemment $Q = \sum_i Q_i a^i$. $\square$

PropyMTEbH

Proposition 6.107 ([117]).

Soit $\mathbb{K}$, un corps et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. Soient a et b , deux racines de P dans (éventuellement) une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$. Si μ_a et μ_b sont les polynômes minimaux de a et b (dans $\mathbb{K}[X]$) et si $\mu_a \neq \mu_b$, alors $\mu_a \mu_b$ divise P dans $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration. Nous considérons les idéaux

$$I_a = \{Q \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } Q(a) = 0\}; \quad (6.189a)$$

$$I_b = \{Q \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } Q(b) = 0\}. \quad (6.189b)$$

Même si $Q(a)$ et $Q(b)$ sont calculés dans $\mathbb{L}$, I_a, I_b sont des idéaux de $\mathbb{K}[X]$. Le polynôme μ_a est par définition le générateur unitaire de I_a , et comme a est une racine de P , nous avons $P \in I_a$ et il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = \mu_a Q. \quad (6.190) \quad \text{EayTPoSq}$$

Montrons que $\mu_a(b) \neq 0$. Pour cela, nous supposons que $\mu_a(b) = 0$, c'est-à-dire que $\mu_a \in I_b$. Il existe alors $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\mu_a = \mu_b R$. Mais par la proposition 6.67, le polynôme μ_a est irréductible, donc soit μ_b , soit R , est inversible. Comme les inversibles sont les éléments de $\mathbb{K}$ (polynômes de degré zéro), μ_b n'est pas inversible (sinon il serait constant et ne pourrait pas être annulateur de b). Donc R est inversible. Disons $R = k$.

Donc $\mu_a = k\mu_b$. Mais puisque μ_a et μ_b sont unitaires, nous avons obligatoirement $k = 1$. Cela donnerait $\mu_a = \mu_b$, ce qui est contraire aux hypothèses. Nous en déduisons que $\mu_a(b) \neq 0$.

Étant donné que $\mu_a(b) \neq 0$, l'évaluation de (6.190) en b montre que $Q(b) = 0$, de telle sorte que $Q \in I_b$ et il existe un polynôme S tel que $Q = \mu_b S$, c'est-à-dire tel que $P = \mu_a \mu_b S$, ce qui signifie que $\mu_a \mu_b$ divise P . $\square$

Exemple 6.108.

Soit $P = (X^2 + 1)(X^2 + 2)$ dans $\mathbb{R}[X]$. Dans $\mathbb{C}$ nous avons les racines $a = i$ et $b = \sqrt{2}i$ dont les polynômes minimaux sont $\mu_a = X^2 + 1$ et $\mu_b = X^2 + 2$. Nous avons effectivement $\mu_a \mu_b$ divise P dans $\mathbb{R}[X]$.

Si par contre nous considérons les racines $a = i$ et $b = -i$, nous aurions $\mu_a = \mu_b = X^2 + 1$, tandis que le polynôme μ_a^2 ne divise pas P . $\triangle$

6.4.5 Racines de polynômes

CorDIYooEtmztc

Corolaire 6.109 (Factorisation d'une racine).

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, un polynôme de degré n et $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $P(\alpha) = 0$. Alors il existe un polynôme Q de degré $n - 1$ tel que $P(x) = (X - \alpha)Q$.

Démonstration. Il s'agit d'un cas particulier de la proposition 6.101 : si $\alpha \in \mathbb{K}$ alors son polynôme minimal dans $\mathbb{K}$ est $X - \alpha$; donc $X - \alpha$ divise P . Il existe un polynôme Q tel que $P = (X - \alpha)Q$. Le degré est alors immédiat. $\square$

Nous sommes sur le point de prouver le théorème 6.110 qui dit qu'un polynôme avec trop de racines est nul.

- (1) Relisez d'abord la définition 3.89 pour savoir ce qu'est un polynôme nul.
- (2) Si vous être seulement intéressé par le cas de polynôme réels, peut-être que le déterminant de Vandermonde 4.126 sera une façon plus facile de prouver.

ThoLXTooNaUAKR

Théorème 6.110 (Polynôme qui a tellement de racines qu'il s'annule).

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré n possédant $n + 1$ racines distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$, alors $P = 0$.

Démonstration. Si P est de degré 1, il s'écrit $P = aX + b$; si il a comme racines α et β , nous avons le système

$$\begin{cases} a\alpha + b = 0 \\ a\beta + b = 0. \end{cases} \quad \begin{matrix} (6.191a) \\ (6.191b) \end{matrix}$$

La différence entre les deux donne $a(\alpha - \beta) = 0$. Puisque $\alpha \neq \beta$, la règle du produit nul (lemme 1.327) nous donne $a = 0$. Maintenant que $a = 0$, l'annulation de b est alors immédiate.

Nous faisons maintenant la récurrence en supposant le théorème vrai pour le degré n et en considérant un polynôme P de degré $n + 1$ possédant $n + 2$ racines distinctes. Puisque $P(\alpha_1) = 0$, le corolaire 6.109 nous donne un polynôme Q de degré n tel que

$$P = (X - \alpha_1)Q. \quad \text{EqQGSooNdTWfz} \quad (6.192)$$

Étant donné que pour tout $i \neq 1$ nous avons $\alpha_i \neq \alpha_1$,

$$0 = P(\alpha_i) = \underbrace{(\alpha_i - \alpha_1)}_{\neq 0} Q(\alpha_i), \quad (6.193)$$

et la règle du produit nul donne $Q(\alpha_i) = 0$. Par conséquent le polynôme Q est de degré n et possède $n + 1$ racines distinctes; tous ses coefficients sont alors nuls par hypothèse de récurrence. Tous les coefficients du produit (6.192) sont alors également nuls. $\square$

ExGRHooBNpJSP

Exemple 6.111.

Un polynôme à plusieurs variables peut s'annuler en une infinité de points sans être nul. Par exemple le polynôme $X^2 + Y^2 - 1 \in \mathbb{R}[X, Y]$ s'annule sur tout un cercle de $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas nul, loin s'en faut.

Nous verrons dans la proposition 6.185 une condition pour qu'un polynôme à plusieurs variables s'annule du fait qu'il ait « trop » de racines. $\triangle$

Remarque 6.112.

L'intérêt du théorème 6.110 est que si l'on prouve qu'un polynôme s'annule sur un corps infini, alors il s'annulera sur n'importe quel autre corps. Nous aurons un exemple d'utilisation de cela dans le théorème de Cayley-Hamilton 13.31.

6.4.6 Corps de rupture

DEFooVALTooDJJmJv

Définition 6.113.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme irréductible. Une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ est un **corps de rupture** pour P si il existe $a \in \mathbb{L}$ tel que $P(a) = 0$ et $\mathbb{L} = \mathbb{K}(a)$.

NORMALooTPOIooVZAfUo

6.114.

Nous insistons sur le fait que nous ne définissons le concept de corps de rupture que pour un polynôme irréductible à coefficients dans un corps. Les deux points sont importants : irréductible et à coefficient dans un corps.

Nous discuterons brièvement le pourquoi de cela dans la section 6.4.11.

ExemGVxJUC

Exemple 6.115.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ et $P = X^2 - 2$. On pose $a = \sqrt{2}$ et $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{R}$. De cette façon P est scindé dans $\mathbb{L}$:

$$P = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2}). \quad (6.194)$$

Le corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est donc un corps de rupture pour P . $\triangle$

Exemple 6.116.

Dans l'exemple 6.115, nous avons un corps de rupture dans lequel le polynôme P était scindé. Il n'en est pas toujours ainsi. Prenons

$$P = X^3 - 2 \quad (6.195)$$

et $a = \sqrt[3]{2}$. Nous avons, certes, $P(a) = 0$ dans $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, mais P n'est pas scindé parce qu'il y a deux racines complexes. $\triangle$

Exemple 6.117.

Nous considérons le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où p est un nombre premier. Si $s \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ n'est pas un carré, alors le polynôme $P = X^2 + s$ est irréductible et un corps de rupture de P sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est donné par $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]/(X^2 + s)$, c'est-à-dire l'ensemble des polynômes de degré 1 en $\sqrt{s}$. Le cardinal en est p^2 . $\triangle$

Comme nous allons abondamment parler du quotient $\mathbb{K}[X]/(P)$, nous nous permettons un petit lemme.

LEMooWYYFooXYacdF

Lemme 6.118.

Soit un corps $\mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant. Alors $\mathbb{K}[X]/(P)$ est un corps si et seulement si P est irréductible.

Démonstration. Nous utilisons le trio d'enfer dont il est question dans le thème 18. D'abord $\mathbb{K}[X]$ est un anneau principal par le lemme 3.98. Donc $\mathbb{K}[X]/(P)$ sera un corps si et seulement si (P) est un idéal maximum (proposition 1.389), et cela sera le cas si et seulement si (P) est engendré par un polynôme irréductible (proposition 1.400).

Il ne nous reste qu'à montrer que (P) est engendré par un irréductible si et seulement si P est irréductible. Il y a un sens dans lequel c'est évident.

Soit un irréductible μ tel que $(P) = (\mu)$. En particulier $\mu \in (P)$, c'est-à-dire qu'il existe Q tel que $\mu = PQ$. Puisque μ est irréductible, soit P , soit Q , est inversible. Si P est inversible, c'est-à-dire constant, c'est ce que nous avons exclu par hypothèse. Si par contre Q est inversible, alors $P = k\mu$ pour un certain $k \in \mathbb{K}$, ce qui montre que P est irréductible autant que μ . $\square$

PROPooUBIooGZQyeE

Proposition 6.119 (Existence d'un corps de rupture).

Soit un corps $\mathbb{K}$ et un polynôme irréductible non constant P . Alors

- (1) Le corps $\mathbb{L} = \mathbb{K}[X]/(P)$ est un corps de rupture pour P .
- (2) L'élément $\bar{X}$ de $\mathbb{L}$ est une racine de P .
- (3) $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\bar{X})_{\mathbb{L}}$

Démonstration. Commençons par nous convaincre que $\mathbb{K}[X]/(P)$ est une extension de $\mathbb{K}$ (définition 6.59). Le fait que ce soit un corps est le lemme 6.118. Le morphisme $j: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}[X]/(P)$ est simplement $k \mapsto \bar{k}$ où à droite, $\bar{k}$ voit k dans $\mathbb{K}[X]$ comme étant le polynôme constant. Notez qu'il est automatiquement injectif (lemme 1.419).

Il faut maintenant voir que $\mathbb{K}[X]/(P) = \mathbb{K}(\alpha)$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{K}[X]/(P)$. Grâce à notre compréhension des notations acquise dans 1.19.2.2, nous savons que $X \in \mathbb{K}[X]$ et qu'il est donc parfaitement légitime de poser $\alpha = \bar{X}$ dans $\mathbb{K}[X]/(P)$. Il s'agit simplement de l'ensemble $\bar{X} = \{X + QP \text{ tel que } Q \in \mathbb{K}[X]\}$ où X est une notation pour la suite $(0, 1, 0, 0, \dots)$.

Bref, nous notons $\alpha = \bar{X}$ et nous démontrons que $P(\alpha) = 0$ et que $\mathbb{K}[X]/(P) = \mathbb{K}(\alpha)$ (isomorphisme de corps).

- (1) $P(\bar{X}) = 0$

C'est le moment de nous souvenir comment la notation des X fonctionne, et en particulier la pirouette autour de (1.629). D'abord la définition du produit sur $\mathbb{K}[X]/(P)$ est $\bar{P}\bar{Q} = \overline{PQ}$; en particulier si $P = \sum_k a_k X^k$, alors $P(\bar{X}) = \sum_k a_k \bar{X}^k = \sum_k a_k \overline{X^k}$, et

$$P(\bar{X}) = \overline{P(X)} = \bar{P} = 0. \quad (6.196)$$

(2) **L'égalité**

Nous montrons à présent que $\mathbb{K}(\bar{X})_{\mathbb{L}} = \mathbb{L}$. C'est-à-dire que $\mathbb{L}$ est bien engendrée par $\mathbb{K}$ et un seul élément. D'abord, $\mathbb{L} = \mathbb{K}[X]/(P)$ contient bien évidemment $\mathbb{K}$ et $\bar{X}$. Ensuite nous devons prouver que tout sous-corps de $\mathbb{L}$ contenant $\mathbb{K}$ et $\bar{X}$ est en réalité $\mathbb{L}$ entier.

Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$, et montrons que $\bar{Q}$ est dans tout sous-corps de $\mathbb{L}$ contenant $\mathbb{K}$ et $\bar{X}$.

Par le lemme 3.87 nous avons $\bar{Q} = Q(\bar{X})$. Et si un corps contient $\mathbb{K}$ et $\bar{X}$, il doit contenir tous les polynômes en $\bar{X}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Donc un tel corps doit contenir $Q(\bar{X})$ et donc $\bar{Q}$.

□

Exemple 6.120.

Soit le polynôme $P = X^2 + 1 \in \mathbb{Z}[X]$. Dans le quotient $\mathbb{Z}[X]/(P)$ nous avons $\bar{X}^2 + 1 = 0$ et donc $\bar{X}^2 = -1$. C'est-à-dire que $\mathbb{Z}[X]/(P)$ contient un élément dont le carré est -1 . Avouez que c'est bien ce à quoi nous nous attendions.

Notons que $-\bar{X}$ est également une racine de P dans $\mathbb{Z}[X]/(P)$.

En calculant dans les polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}(\bar{X})$ nous avons :

$$(X + \bar{X})(X - \bar{X}) = X^2 - \bar{X}^2 = X^2 + 1, \quad (6.197)$$

c'est-à-dire que P est bien factorisé, et que nous avons retrouvé la multiplication $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$. △

6.121.

Il n'y a évidemment pas unicité d'un corps de rupture pour un polynôme donné. Une raison est qu'un polynôme peut accepter plusieurs racines complètement indépendantes. Le corps étendu par l'une ou l'autre racine donne deux corps de rupture différents. Par exemple dans $\mathbb{Q}[X]$, le polynôme

$$P = X^4 - X^2 - 2 \quad (6.198)$$

a pour racines (dans $\mathbb{C}$) les nombres $\sqrt{2}$ et i . Donc on a deux corps de rupture complètement différents : $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et $\mathbb{Q}(i)$.

6.122.

La proposition suivante donne une unicité du corps de rupture dans le cas d'un polynôme irréductible. Et nous comprenons pourquoi : un polynôme irréductible n'a fondamentalement qu'une seule racine « indépendante ». Par exemple $X^2 - 2$ a pour racines $\pm\sqrt{2}$. Autre exemple, le polynôme $X^2 + 6X + 13$ a pour racines, dans $\mathbb{C}$, les nombres complexes conjugués $z = -3 + 2i$ et $\bar{z} = -3 - 2i$.

PROPooVJACooNDmIfb

Proposition 6.123 ([187]).

Soient un corps $\mathbb{K}$ et un polynôme irréductible $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors toute extension $\mathbb{L}$ contenant une racine α de P admet un unique morphisme de corps

$$\psi: \mathbb{K}[X]/(P) \rightarrow \mathbb{L} \quad (6.199)$$

tel que $\psi(\bar{X}) = \alpha$.

Dans un tel cas,

(1) l'image de ψ est $\mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}}$,

ITEMooHRFHooWLIIdWU

(2) si $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha)_{\mathbb{L}}$ alors ψ est un isomorphisme.

Démonstration. L'idéal annulateur de α parmi les polynômes de $\mathbb{K}[X]$ n'est pas réduit à $\{0\}$ parce qu'il contient P . Le lemme 6.64 s'applique donc et nous avons μ , le polynôme minimal de α dans $\mathbb{K}[X]$. Il divise P qui est irréductible, donc

$$P = \lambda\mu \quad (6.200)$$

pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$.

Nous posons

$$\begin{aligned}\psi: \mathbb{K}[X]/(P) &\rightarrow \mathbb{L} \\ \bar{Q} &\mapsto Q(\alpha).\end{aligned}\tag{6.201}$$

(1) **Bien définie** Si $\bar{Q}_1 = \bar{Q}_2$ alors il existe un $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q_1 = Q_2 + RP$. Mais alors $\psi(\bar{Q}_1) = Q_1(\alpha) = Q_2(\alpha) + R(\alpha)P(\alpha) = Q_2(\alpha)$.

(2) **Injective**

Si $\psi(\bar{Q}_1) = \psi(\bar{Q}_2)$ alors $Q_1 - Q_2 = R$ pour un certain $R \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant $R(\alpha) = 0$. Nous avons alors un polynôme S tel que $R = S\mu = \lambda^{-1}SP$. Donc $\bar{R} = 0$ et donc $\bar{Q}_1 = \bar{Q}_2$.

(3) **Morphisme**

Laissé comme exercice ; la paresse de l'auteur de ces lignes attend vos contributions.

(4) **La condition**

Le morphisme ψ respecte de plus la condition

$$\psi(\bar{X}) = X(\alpha) = \alpha.\tag{6.202}$$

En ce qui concerne l'unicité, fixer $\psi(\bar{X})$ est suffisant pour fixer un morphisme. En effet si $\psi(\bar{X}) = \alpha$, alors

$$\psi(\bar{Q}) = \psi\left(\sum_k a_k \bar{X}^k\right) = \sum_k a_k \psi(\bar{X})^k = \sum_k a_k \alpha^k.\tag{6.203}$$

Pour le second point de l'énoncé, il faut remarquer que α est algébrique et non transcendant. Donc en utilisant les propositions 3.91 et 6.103(5) nous trouvons

$$\text{Image}(\psi) = \{Q(\alpha) \text{ tel que } Q \in \mathbb{K}[X]\} = \mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}(\alpha).\tag{6.204}$$

Et finalement pour le dernier point, un morphisme de corps est toujours injectif. Si il est également surjectif, il sera bijectif. $\square$

6.4.7 Pile d'extensions

LEMooTURZooXnjmjT

Lemme 6.124 ([1]).

Soient un corps $\mathbb{K}$, des extensions $\mathbb{L}_1, \dots, \mathbb{L}_n$ et des éléments $\alpha_i \in \mathbb{L}_i$ tels que

$$\mathbb{L}_1 = \mathbb{K}(\alpha_1)_{\mathbb{L}_1}\tag{6.205}$$

EQooOCQSooFMkzTc

et

$$\mathbb{L}_k = \mathbb{L}_{k-1}(\alpha_k)_{\mathbb{L}_k}.\tag{6.206}$$

Alors

$$\mathbb{L}_n = \mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)_{\mathbb{L}_n}.\tag{6.207}$$

Démonstration. Nous démontrons par récurrence sur n . Le cas $n = 1$ est simplement l'hypothèse (6.205).

Supposons donc que le lemme soit correct pour n , et étudions le cas $n + 1$. Nous avons, par définition et par hypothèse de récurrence :

$$\mathbb{L}_{n+1} = \mathbb{L}_n(\alpha_{n+1})_{\mathbb{L}_{n+1}} = \left(\mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)_{\mathbb{L}_n}\right)(\alpha_{n+1})_{\mathbb{L}_{n+1}}.\tag{6.208}$$

Notre tâche sera donc de montrer que

$$\left(\mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)_{\mathbb{L}_n}\right)(\alpha_{n+1}) = \mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})\tag{6.209}$$

EQooIHMGoOTIPssd

où nous n'écrivons plus les indices $\mathbb{L}_{n+1}$ partout.

Le membre de gauche est un sous-corps de $\mathbb{L}_{n+1}$ contenant à la fois $\mathbb{K}$ et tous les α_i , si bien que

$$\mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \subset \left(\mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)_{\mathbb{L}_n}\right)(\alpha_{n+1})_{\mathbb{L}_{n+1}}.\tag{6.210}$$

EQooLLRHooHOjLfk

Il faut donc prouver l'inclusion inverse; c'est-à-dire montrer que tout élément x du corps $(\mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)_{\mathbb{L}_n})(\alpha_{n+1})$ est forcément dans tout sous-corps de $\mathbb{L}_{n+1}$ contenant $\mathbb{K}$ et les α_i . Un tel élément x est, par la proposition 6.98(2), de la forme $r(\alpha_{n+1})$ avec $r \in \mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)(X)$, c'est-à-dire

$$P(\alpha_{n+1})Q(\alpha_{n+1})^{-1} \quad (6.211)$$

avec $P, Q \in \mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)[X]$.

Prouvons d'abord que si $P \in \mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)[X]$, alors $P(\alpha_{n+1})$ est dans tout sous-corps de $\mathbb{L}_{n+1}$ contenant $\mathbb{K}$ et les α_i . Nous pouvons écrire $P = \sum_i a_i X^i$ avec $a_i \in \mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, et donc

$$P(\alpha_{n+1}) = \sum_i a_i \alpha_{n+1}^i. \quad (6.212)$$

Tout corps contenant $\mathbb{K}$ et les $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ contient les a_i . Par produit, tout corps contenant $\mathbb{K}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ contient les termes $a_i \alpha_{n+1}^i$, et donc $P(\alpha_{n+1})$ par somme.

De la même façon, si un corps contient $\mathbb{K}$ et les α_i , ($i = 1, \dots, n+1$), alors il contient $Q(\alpha_{n+1})$. Comme c'est un corps, il contient aussi son inverse $Q(\alpha_{n+1})^{-1}$, et il contient aussi le produit

$$r(\alpha_{n+1}) = P(\alpha_{n+1})Q(\alpha_{n+1})^{-1}. \quad (6.213)$$

On vient ainsi de montrer que tout élément $x \in (\mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)_{\mathbb{L}_n})(\alpha_{n+1})$ était dans tout sous-corps de $\mathbb{L}_{n+1}$ qui contient $\mathbb{K}$ et les α_i , ($i = 1, \dots, n+1$); en d'autres termes :

$$(\mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)_{\mathbb{L}_n})(\alpha_{n+1})_{\mathbb{L}_{n+1}} \subset \mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}). \quad (6.214)$$

Les inclusions (6.210) et (6.214) prouvent l'égalité d'ensembles (6.209) que nous voulions montrer. $\square$

6.4.8 Clôture algébrique

Le concept de clôture algébrique a été défini dans 6.75. Voici un lemme qui dit qu'une clôture algébrique est en quelque sorte une extension algébrique maximale.

Lemme 6.125 ([1]).

Soient un corps $\mathbb{K}$ et une extension algébrique $\mathbb{F}$ de $\mathbb{K}$. Nous supposons que pour toute extension algébrique de $\mathbb{L}$ nous avons $\mathbb{L} = \mathbb{F}$

Alors $\mathbb{F}$ est algébriquement clos⁵⁸.

Démonstration. Soit un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$. Nous voudrions prouver que P a des racines dans $\mathbb{F}$. Pour cela, nous voyons P comme un polynôme sur $\mathbb{F}[X]$ et, grâce à la proposition 6.119 nous considérons un corps de rupture $\mathbb{L}$ pour P . Puisque $\mathbb{L}$ est une extension de $\mathbb{F}$, nous avons $\mathbb{L} = \mathbb{F}$. Donc $\mathbb{F}$ contient des racines de P . $\square$

6.126.

Nous avons défini le concept d'extension algébrique en 6.75. Nous allons en construire un petit exemple très piéton.

Souvenez vous que la proposition 1.581 nous donne l'existence et l'unicité d'un réel $\sqrt{2}$ strictement positif dont le carré est 2. Ce réel est irrationnel par la proposition 1.511.

Proposition 6.127 ([194]).

Soit $\mathbb{L} = \{a + b\sqrt{2}\}_{a,b \in \mathbb{Q}}$.

(1) C'est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

(2) Tout sous-corps de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{Q}$ et $\sqrt{2}$ contient $\mathbb{L}$.

Démonstration. Nous devons d'abord prouver que $\mathbb{L}$ est un corps en vérifiant d'une part que c'est un anneau (définition 1.90) et d'autre part le fait que tous les éléments non nuls sont inversibles.

58. Définition 6.75(2).

— La partie $\mathbb{L}$ de $\mathbb{R}$ est stable pour l'addition : dès que $a, b, a', b' \in \mathbb{Q}$,

$$(a + b\sqrt{2}) + (a' + b'\sqrt{2}) = (a + a') + (b + b')\sqrt{2} \in \mathbb{L}. \quad (6.215)$$

— Les neutres 0 et 1 sont dans $\mathbb{L}$.

— Si $\alpha \in \mathbb{L}$, alors $-\alpha \in \mathbb{L}$:

$$-(a + b\sqrt{2}) = -a - b\sqrt{2}. \quad (6.216)$$

— La partie $\mathbb{L}$ est stable pour le produit parce que

$$(a + b\sqrt{2})(a' + b'\sqrt{2}) = (aa' + 2bb') + (ab' + ba')\sqrt{2}. \quad (6.217)$$

— L'inverse d'un élément de $\mathbb{L}$ est dans $\mathbb{L}$. C'est le seul point pas tout à fait évident. D'abord, l'ensemble $\mathbb{R}$ est un corps par le théorème 1.521. Donc pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, le nombre

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} \quad (6.218)$$

existe dans $\mathbb{R}$.

D'abord $a - b\sqrt{2}$ n'est pas nul, parce que si il l'était, nous aurions $\sqrt{2} = a/b \in \mathbb{Q}$ alors que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel par la proposition 1.511. Nous pouvons donc faire le coup de multiplier le numérateur et le dénominateur par le binôme conjugué :

$$\frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}. \quad (6.219)$$

Cela est un rationnel. Donc les éléments non nuls de $\mathbb{L}$ ont un inverse qui appartient également à $\mathbb{L}$.

Nous passons à la preuve du point (2). Si $\mathbb{L}'$ est un corps qui contient $\mathbb{Q}$ et $\sqrt{2}$, il doit contenir $b\sqrt{2}$ pour tout $b \in \mathbb{Q}$ et donc aussi tous les $a + b\sqrt{2}$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$. Par conséquent, $\mathbb{L}'$ doit contenir au moins tout $\mathbb{L}$. $\square$

Proposition 6.128.

Soit $\mathbb{L} = \{a + b\sqrt{2}\}_{a,b \in \mathbb{Q}}$.

(1) C'est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{Q}$.

(2) Si $\alpha \in \mathbb{L}$, alors il existe un polynôme $P \in \mathbb{L}[X]$ de degré 2 ou moins tel que $P(\alpha) = 0$.

(3) Le corps $\mathbb{L}$ est une extension algébrique de $\mathbb{Q}$.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) (1) Pour la dimension, notez que $\{1, \sqrt{2}\}$ est une partie libre et génératrice de $\mathbb{L}$.

(2) (2)

Soit $\alpha \in \mathbb{L}$. La partie $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ est de cardinal 1, 2 ou 3. Si c'est 1 ou 2, c'est que $1 = \alpha$ ou $1 = \alpha^2$ ou $\alpha = \alpha^2$. Si par exemple $1 = \alpha$ alors avec $P = X - 1$ nous avons $P(\alpha) = 0$.

Si au contraire $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ est de cardinal 3, alors c'est une partie liée par la proposition 4.7.

Il existe donc des rationnels a, b, c tels que $a + b\alpha + c\alpha^2 = 0$, c'est-à-dire $P(\alpha) = 0$ avec $P = cX^2 + bX + a$.

(3) (3) Nous venons de voir que tous les éléments de $\mathbb{L}$ sont des racines de polynômes de $\mathbb{Q}[X]$. $\square$

Lemme 6.129.

Si $\mathbb{K}$ est un corps infini, alors $\mathbb{K}[X]$ est équipotent⁵⁹ à $\mathbb{K}$.

59. Définition 1.65.

Démonstration. Notons provisoirement $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré n . Nous avons une surjection

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{K}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{K}_n[X] \\ (k_0, \dots, k_n) &\mapsto \sum_{i=0}^n k_i X^i. \end{aligned} \tag{6.220}$$

Par récurrence sur le théorème⁶⁰ 1.244, nous avons $\mathbb{K}^{n+1} \approx \mathbb{K}$. La surjection (6.220) dit alors que

$$\mathbb{K}_n[X] \leq \mathbb{K}^{n+1} \approx \mathbb{K}. \tag{6.221}$$

Mais puisqu'il y a une surjection $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}_n[X]$, nous avons aussi $\mathbb{K}_n[X] \geq \mathbb{K}$. Le théorème 1.75 dit alors que $\mathbb{K}_n[X] \approx \mathbb{K}$.

Le lemme 1.245 nous permet alors de conclure que

$$\mathbb{K}[X] = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{K}_n[X] \approx \mathbb{K}. \tag{6.222}$$

□

Proposition 6.130 ([1]).

Soit un corps $\mathbb{K}$. Une extension algébrique de $\mathbb{K}$ est

- (1) au plus dénombrable si $\mathbb{K}$ est fini,
- (2) équipotente à $\mathbb{K}$ si $\mathbb{K}$ est infini.

Démonstration. En deux parties.

- (1) **Si $\mathbb{K}$ est fini** Un polynôme non nul possède toujours au maximum un nombre fini de racines (éventuellement zéro) par la proposition 6.110. Par ailleurs, chaque degré de polynôme ayant seulement un nombre fini de possibilités, l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ est au plus dénombrable (proposition 1.220).

Pour $P \in \mathbb{K}[X]$ nous avons une surjection de $\mathbb{N}$ vers l'ensemble des racines de P . Nous la notons $\varphi_P: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{L}$, en posant par exemple $\varphi_P(n) = 1$ si P n'a pas de racines. Enfin nous posons

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{K}[X] \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{L} \\ (P, n) &\mapsto \varphi_P(n). \end{aligned} \tag{6.223}$$

C'est la fonction qui à un polynôme P et un nombre n fait correspondre la n^{e} racine de P . Comme $\mathbb{L}$ est une extension algébrique, φ est surjective.

En termes de cardinalité, que $\mathbb{K}[X]$ soit fini ou dénombrable, dans les deux cas, $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{N}$ est dénombrable (proposition 1.216). Il existe donc une surjection d'un ensemble dénombrable vers $\mathbb{L}$. Le lemme 1.219 conclut que $\mathbb{L}$ est fini ou dénombrable.

- (2) **Si $\mathbb{K}$ est infini** Nous procédons de la même manière, mais nous devons faire appel à des résultats plus technologiques pour maîtriser la cardinalité. Nous considérons à nouveau l'application

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{K}[X] \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{L} \\ (P, n) &\mapsto \varphi_P(n). \end{aligned} \tag{6.224}$$

Cette application est encore surjective : $\mathbb{L} \leq \mathbb{K}[X] \times \mathbb{N}$. Le lemme 6.129 nous assure que $\mathbb{K}[X] \approx \mathbb{K}$ parce que $\mathbb{K}$ est infini. Ensuite la proposition 1.237 nous dit que $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{N} \approx \mathbb{K}[X]$. Donc

$$\mathbb{K} \approx \mathbb{K}[X] \approx \mathbb{K}[X] \times \mathbb{N} \geq \mathbb{F}. \tag{6.225}$$

Mais $\mathbb{F}$ est une extension de $\mathbb{K}$. Donc il existe une injection $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{F}$, c'est-à-dire $\mathbb{K} \leq \mathbb{F}$.

Ayant $\mathbb{K} \leq \mathbb{F} \leq \mathbb{K}$, le théorème 1.75 implique que $\mathbb{K} \approx \mathbb{F}$.

60. J'ai quand même du mal à croire qu'il faille vraiment le lemme de Zorn pour prouver que $\mathbb{K}[X]$ est équipotent à $\mathbb{K}$. Si vous connaissez un moyen plus direct, écrivez-moi.

□

Lemme 6.131 ([1]).

Soient des corps $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ ainsi qu'un morphisme de corps $\rho: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$. Si $P \in \mathbb{K}[X]$ a une racine dans $\mathbb{K}$, alors le polynôme $\rho(P)$ a une racine dans $\mathbb{L}$.

Démonstration. Nous notons $P = \sum_k P_k X^k$. Si $a \in \mathbb{K}$ est une racine de P , alors $\sum_k P_k a^k = 0$. Nous appliquons ρ à cette égalité : $\sum_k \rho(P_k) \rho(a)^k = 0$, c'est-à-dire $\rho(P)(\rho(a)) = 0$. Donc $\rho(a) \in \mathbb{L}$ est une racine de $\rho(P)$. □

Note à propos du lemme suivant (6.132) : en pratique, les corps $\mathbb{L}$ et $\mathbb{F}$ sont le plus souvent des sur-corps de $\mathbb{K}$, de telle sorte que les applications α et β sont l'identité. En particulier, la conclusion de ce lemme s'écrit le plus souvent $\sigma|_{\mathbb{K}} = \text{Id}$. Il faut juste savoir que le Frido est un névrosé des notations précises.

LEM001IKYooHMNqYn

Lemme 6.132 ([195]).

Nous considérons un triplet $(\mathbb{K}, \mathbb{L}, \mathbb{F})$ où

- (1) $\mathbb{K}$, $\mathbb{L}$ et $\mathbb{F}$ sont des corps
- (2) il existe $a \in \mathbb{L}$ algébrique sur $\mathbb{K}$ tel que $\mathbb{L} = \mathbb{K}(a)$ et un morphisme de corps $\alpha: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$.
- (3) $\mathbb{F}$ est une extension algébriquement close de $\mathbb{K}$: il existe un morphisme $\beta: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{F}$.

Alors il existe un morphisme de corps $\sigma: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{F}$ tel que $\sigma|_{\alpha(\mathbb{K})} = \beta$.

Démonstration. Comme $\mathbb{L}$ est monogène, si $\mu_a \in \mathbb{K}[X]$ est le polynôme minimal de $a \in \mathbb{L}$, alors les points (5) et (6) de la proposition 6.103 disent que $\mathbb{L} \simeq \mathbb{K}[a] \simeq \mathbb{K}[X]/(\mu_a)$. Pour référence ultérieure, nous considérons un isomorphisme

$$\varphi: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{K}[X]/(\mu_a). \quad (6.226)$$

Les coefficients de μ_a sont dans $\mathbb{K}$, donc nous pouvons voir $\mu_a \in \mathbb{F}[X]$. Plus précisément, si $\mu_a = \sum_k a_k X^k$, nous définissons

$$\mu'_a = \sum_k \beta(a_k) X^k \in \mathbb{F}[X]. \quad (6.227)$$

Comme $\mathbb{F}$ est algébriquement clos, le polynôme μ'_a possède une racine (au moins) $b \in \mathbb{F} : \mu'_a(b) = 0$.

Nous posons

$$\begin{aligned} \sigma': \mathbb{K}[X]/(\mu_a) &\rightarrow \mathbb{F} \\ \overline{\sum_k s_k X^k} &\mapsto \sum_k \beta(s_k) b^k. \end{aligned} \quad (6.228)$$

- (1) **σ' est bien définie** La réalité est que nous utilisons la proposition 1.55. Si $P = \sum_k s_k X^k$ et $\mu_a = \sum_k a_k X^k$ ($a_k, s_k \in \mathbb{K}$), alors

$$\sigma'(\overline{P + \mu_a}) = \sigma'(\overline{\sum_k (a_k + s_k) X^k}) = \sum_k \beta(a_k) b^k + \sum_k s_k b^k = \mu'_a(b) + \sigma'(\overline{P}) = \sigma'(\overline{P}). \quad (6.229)$$

- (2) **σ' est un morphisme de corps** Il s'agit de vérifier les conditions de la définition 1.96. Soient deux polynômes $P = \sum_k P_k X^k$ et $Q = \sum_l Q_l X^l$. Nous avons

$$\sigma'(\overline{P}) + \sigma'(\overline{Q}) = \sum_k \beta(P_k) b^k + \sum_l \beta(Q_l) b^l \quad (6.230a)$$

$$= \sum_k (\beta(P_k) + \beta(Q_k)) b^k \quad (6.230b)$$

$$= \sum_k \beta(P_k + Q_k) b^k \quad \beta \text{ est morphisme} \quad (6.230c)$$

$$= \sigma'(\overline{\sum_k (P_k + Q_k) X^k}) \quad (6.230d)$$

$$= \sigma'(\overline{P + Q}) \quad (6.230e)$$

$$= \sigma'(\overline{P} + \overline{Q}). \quad (6.230f)$$

Pour prouver que $\sigma'(PQ) = \sigma'(P)\sigma'(Q)$, c'est le même type de calcul⁶¹. Il suffit d'écrire $PQ = \sum_k S_k X^k$ et remarquer que S_k s'exprime en fonction des P_i et Q_j rien qu'avec des sommes et produits.

Enfin le polynôme 1 est donné par $s_0 = 1$ et $s_k = 0$ pour $k \geq 1$. Donc $\sigma'(\bar{1}) = 1$ parce que $\beta(s_0)b^0 = \beta(1) = 1$. Toujours parce que β est un morphisme de corps.

(3) $\varphi(\alpha(k)) = \bar{k}$ Quand nous parlons de $\bar{k}$, nous parlons de la classe du polynôme de degré zéro donné par $\bar{k} \in \mathbb{K}$.

(4) **La réponse** Nous posons

$$\sigma = \sigma' \circ \varphi. \quad (6.231)$$

Pour tout $k \in \mathbb{K}$,

$$(\sigma' \varphi \alpha)(k) = \sigma'(\bar{k}) = \beta(k), \quad (6.232)$$

c'est ce qu'il fallait.

□

LEMooUULTooYcytat

Lemme 6.133 ([195]).

Soit un corps $\mathbb{K}$ muni de deux extensions $\alpha: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$ et $\beta: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{F}$. Nous supposons que

- (1) $\mathbb{L}$ est algébrique sur $\mathbb{K}$;
- (2) $\mathbb{F}$ est algébriquement clos.

Alors il existe un morphisme de corps $\sigma: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{F}$ tel que $\sigma \circ \alpha = \beta$.

Démonstration. Nous allons utiliser le lemme de Zorn 1.37 sur l'ensemble

$$\mathcal{A} = \left\{ (\mathbb{M}, \varphi) \text{ tel que } \begin{cases} \mathbb{M} \text{ est un sous-corps de } \mathbb{L} \\ \alpha(\mathbb{K}) \subset \mathbb{M} \\ \varphi: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{F} \text{ est une extension de corps} \\ \varphi \circ \alpha = \beta \end{cases} \right\}. \quad (6.233)$$

Nous ordonnons (partiellement) cet ensemble en disant que $(\mathbb{M}_1, \varphi_1) < (\mathbb{M}_2, \varphi_2)$ si $\mathbb{M}_1 \subset \mathbb{M}_2$ et $\varphi_2|_{\mathbb{M}_1} = \varphi_1$. Il se fait que $\mathcal{A}$ est un ensemble inductif et que nous pouvons donc lui appliquer le lemme de Zorn.

Soit un élément maximal $(\mathbb{M}, \varphi)$. Nous allons montrer que $\mathbb{M} = \mathbb{L}$.

Soit $l \in \mathbb{L}$. Puisque $\mathbb{L}$ est une extension algébrique de $\mathbb{K}$, il existe un polynôme P à coefficients dans $\alpha(\mathbb{K})$ tel que $P(l) = 0$. Mais comme $\alpha(\mathbb{K}) \subset \mathbb{M}$, ce polynôme est également à coefficients dans $\mathbb{M}$. Donc l est un élément algébrique sur $\mathbb{M}$.

Nous pouvons donc considérer le triplet $(\mathbb{M}, \mathbb{M}(l), \mathbb{F})$ qui vérifie les hypothèses du lemme 6.132. Il existe donc un morphisme de corps $\sigma: \mathbb{M}(l) \rightarrow \mathbb{F}$ tel que $\sigma|_{\mathbb{M}} = \varphi$.

Nous avons

$$\sigma \circ \alpha = \sigma|_{\sigma(\mathbb{K})} \circ \alpha = \sigma|_{\mathbb{M}} \circ \alpha = \varphi \circ \alpha = \beta. \quad (6.234)$$

Donc l'élément $(\mathbb{M}(l), \sigma)$ majore $(\mathbb{M}, \varphi)$ dans $\mathcal{A}$.

Par maximalité, nous déduisons que $\mathbb{M} = \mathbb{L}$. Donc le morphisme $\varphi: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{F}$ vérifie $\varphi \circ \alpha = \beta$, ce qu'il nous fallait. □

THOooEDQKooLEGIDv

Théorème 6.134 (Steinitz[196, 197]).

À propos de clôture algébrique.

- (1) Tout corps possède une clôture algébrique⁶².
- (2) Si $\alpha_1: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{F}_1$ et $\alpha_2: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{F}_2$ sont deux clôtures algébriques du même corps $\mathbb{K}$, alors il existe un isomorphisme de corps $\varphi: \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{F}_2$ tel que $\varphi \circ \alpha_1 = \alpha_2$.

Démonstration. Nous commençons par l'existence, en plusieurs points.

61. J'ai pas vérifié ; écrivez-moi si ça pose un problème.

62. Définition 6.75.

- (1) **Un ensemble** Nous considérons un ensemble Ω qui contient $\mathbb{K}$, qui est strictement surpotent⁶³ à $\mathbb{K}$ et qui est infini non dénombrable si $\mathbb{K}$ est fini. Par exemple $\mathcal{P}(\mathbb{K}) \cup \mathbb{K}$ si $\mathbb{K}$ est infini et $\mathbb{R} \cup \mathbb{K}$ si $\mathbb{K}$ est fini (voir le théorème de Cantor 1.79).
- (2) **L'ensemble pour Zorn** Nous considérons l'ensemble des extensions algébriques de $\mathbb{K}$ contenues dans Ω , c'est-à-dire

$$\mathcal{A} = \left\{ (\mathbb{L}, +_{\mathbb{L}}, \times_{\mathbb{L}}) \text{ tel que } \begin{cases} \mathbb{K} \subset \mathbb{L} \subset \Omega \\ (\mathbb{L}, +_{\mathbb{L}}, \times_{\mathbb{L}}) \text{ est une extension algébrique de } (\mathbb{K}, +, \times). \end{cases} \right\} \quad (6.235)$$

Nous ordonnons $\mathcal{A}$ par l'inclusion : nous disons que

$$(\mathbb{L}_1, +_1, \times_1) < (\mathbb{L}_2, +_2, \times_2) \quad (6.236)$$

lorsque $(\mathbb{L}_2, +_2, \times_2)$ est un sur-corps de $(\mathbb{L}_1, +_1, \times_1)$ (en particulier $\mathbb{L}_1 \subset \mathbb{L}_2$).

- (3) **$\mathcal{A}$ est inductif** Soit une partie $\mathcal{F} = \{(\mathbb{L}_i, +_i, \times_i)\}_{i \in I}$ de $\mathcal{A}$ que nous supposons être totalement ordonnée. Nous allons lui trouver un majorant dans $\mathcal{A}$. Nous posons $\mathbb{L} = \bigcup_{i \in I} \mathbb{L}_i$, et si $a \in \mathbb{L}_i$, $b \in \mathbb{L}_j$, alors nous définissons

$$\begin{cases} a +_{\mathbb{L}} b = a +_k b \\ a \times_{\mathbb{L}} b = a \times_k b \end{cases} \quad \begin{matrix} (6.237a) \\ (6.237b) \end{matrix}$$

où $k \in I$ est sélectionné de telle façon à avoir $(\mathbb{L}_i, +_i, \times_i) < (\mathbb{L}_k, +_k, \times_k)$ et $(\mathbb{L}_j, +_j, \times_j) < (\mathbb{L}_k, +_k, \times_k)$. Comme tous les corps $\mathbb{L}_i$ sont des sous-corps les uns des autres, c'est une bonne définition.

- (4) **Lemme de Zorn** Nous utilisons le lemme de Zorn 1.37. Nous notons $(\mathbb{F}, +, \times)$ un élément maximal de $\mathcal{A}$. Puisque $\mathbb{K}$ en est un sous-corps, il n'y a pas d'ambiguïté de noter $+$ et $\times$ ses opérations.
- (5) **Stratégie pour la suite** Nous allons montrer que si $\mathbb{E}$ est une extension algébrique de $\mathbb{F}$, alors $\mathbb{E} = \mathbb{F}$ (le but est d'utiliser le lemme 6.125).
- (6) **Un peu de cardinalité** D'abord, comme $\mathbb{F}$ est algébrique sur $\mathbb{K}$, l'ensemble $\mathbb{F}$ est équipotent à $\mathbb{K}$ si $\mathbb{K}$ est infini, et au plus dénombrable, si $\mathbb{K}$ est fini ; c'est la proposition 6.130. En bref :
- Si $\mathbb{K}$ est infini, $\mathbb{K} \approx \mathbb{F} \approx \mathbb{E} < \Omega$.
 - Si $\mathbb{K}$ est fini, $\mathbb{K} \leq \mathbb{F} \leq \mathbb{E} < \Omega$ où $\mathbb{E}$ est au maximum dénombrable et Ω est indénombrable.

Dans tous les cas, Ω est strictement surpotent à $\mathbb{F}$, et le lemme 1.239 permet de dire

$$\mathbb{E} \setminus \mathbb{F} \leq \mathbb{E} < \Omega \approx \Omega \setminus \mathbb{F}. \quad (6.238)$$

- (7) **Quelques injections** Il existe donc une injection $\varphi: \mathbb{E} \setminus \mathbb{F} \rightarrow \Omega \setminus \mathbb{F}$. Nous posons

$$\begin{aligned} f: \mathbb{E} &\rightarrow \Omega \\ x &\mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{F} \\ \varphi(x) & \text{si } x \notin \mathbb{F}. \end{cases} \end{aligned} \quad (6.239)$$

Nous montrons que f est injective. Soient $x, y \in \mathbb{E}$ tels que $f(x) = f(y)$. Si $x, y \in \mathbb{F}$, alors $x = f(x) = f(y) = y$. Si $x \in \mathbb{F}$ et $y \notin \mathbb{F}$, alors $x = \varphi(y)$ alors que $x \in \mathbb{F}$ et $\varphi(y) \in \Omega \setminus \mathbb{F}$; ce cas est impossible. Enfin si x et y sont hors de $\mathbb{F}$, alors $f(x) = \varphi(x)$ et $f(y) = \varphi(y)$; donc $\varphi(x) = \varphi(y)$ et $x = y$ par injectivité de φ .

Nous avons donc bien une injection $f: \mathbb{E} \rightarrow \Omega$.

63. Définition 1.65.

(8) **La maximalité**

Nous pouvons mettre sur $f(\mathbb{E}) \subset \Omega$ la structure de corps venant de $\mathbb{E}$. Comme $f(\mathbb{F}) = \mathbb{F}$, le corps $f(\mathbb{E})$ est une extension algébrique de $\mathbb{F}$. Par maximalité, $f(\mathbb{E}) = \mathbb{F}$.

Mais si $x \in \mathbb{E} \setminus \mathbb{F}$, alors $f(x) \in \Omega \setminus \mathbb{F}$. Donc en réalité nous avons aussi $\mathbb{E} \subset \mathbb{F}$.

(9) **Conclusion** En conclusion $\mathbb{E} = \mathbb{F}$ et le lemme 6.125 termine en disant que $\mathbb{F}$ est une clôture algébrique de $\mathbb{K}$.

Nous passons à la partie « unicité » de la clôture algébrique. Étant donné que $\mathbb{F}_1$ est une extension algébrique de $\mathbb{K}$ et que $\mathbb{F}_2$ est algébriquement clos, le lemme 6.133 nous donne un morphisme de corps $\sigma: \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{F}_2$ tel que $\sigma \circ \alpha_1 = \alpha_2$.

Nous sommes donc dans la situation où $\sigma: \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{F}_2$ est une extension de corps où $\mathbb{F}_1$ est algébriquement clos et $\mathbb{F}_2$ est algébrique. Le lemme 6.80 conclut que $\sigma(\mathbb{F}_1) = \mathbb{F}_2$, c'est-à-dire que σ est surjectif. En tant que morphisme de corps, σ était déjà injective; elle est donc bijective.

Donc $\sigma: \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{F}_2$ est un isomorphisme de corps vérifiant $\sigma \circ \alpha_1 = \alpha_2$. $\square$

6.135.

Bien que $\mathbb{C}$ soit une extension algébriquement close de $\mathbb{Q}$, l'ensemble $\mathbb{C}$ n'est pas une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$. C'est ce que nous montrons maintenant.

LEMooRDIZooRjWNMa

Lemme 6.136.

Le corps $\mathbb{C}$ n'est pas une clôture algébrique⁶⁴ de $\mathbb{Q}$.

Démonstration. Nous montrons qu'il existe des éléments de $\mathbb{C}$ qui ne sont pas des racines de polynômes à coefficients rationnels. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable par la proposition 1.489. L'ensemble des polynômes de degré n à coefficients dans $\mathbb{Q}$ est en bijection avec les n -uples de rationnels, c'est-à-dire avec $\mathbb{Q}^n$ qui est également dénombrable par la proposition 1.225. Enfin l'ensemble des polynômes à coefficients sur $\mathbb{Q}$ est l'union des polynômes de degré fixés, donc dénombrable par la proposition 1.220.

Jusqu'ici nous avons prouvé que l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels était dénombrable. Or chaque polynôme possède une quantité finie de racines par le corolaire 3.119. Donc la partie de $\mathbb{C}$ constituée des nombres qui sont des racines de polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$ est dénombrable. Mais $\mathbb{C}$ n'est pas dénombrable, donc possède des éléments qui ne sont pas des racines de polynômes. $\square$

La proposition suivante est une conséquence de Steinitz 6.134, de 6.62.

PROPooZWVPooStuTAO

Proposition 6.137 (Clôture algébrique de $\mathbb{R}$ [198]).

Le corps $\mathbb{C}$ est l'unique (à isomorphisme près) clôture algébrique de $\mathbb{R}$. Son degré est 2.

6.4.9 Polynômes à plusieurs variables

Nous avons déjà vu $A[X, Y]$ lorsque A est un anneau en la définition 3.39.

DEFooRHRKooPqLNOp

Définition 6.138.

Soit un corps $\mathbb{K}$. Le corps $\mathbb{K}(X_1, \dots, X_n)$ est le corps des fractions de l'anneau $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$.

DEFooOCPhooXneutp

Définition 6.139.

Soient un corps $\mathbb{K}$ et une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ contenant les éléments $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de $\mathbb{L}$. Nous définissons $\mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ comme étant l'intersection de tous les sous-corps de $\mathbb{L}$ contenant $\mathbb{K}$ et les α_i .

La proposition suivante est analogue à 6.98(2).

LEMooQEJHooAmSNxU

Lemme 6.140 ([1]).

Soient un corps $\mathbb{K}$, une extension $\mathbb{L}$ et des éléments $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ dans $\mathbb{L}$. Alors

$$\mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \{r(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \text{ tel que } r \in \mathbb{K}(X_1, \dots, X_n)\}. \quad (6.240)$$

64. Clôture algébrique, définition 6.75.

Démonstration. Ce que nous avons à droite est un corps : par exemple pour l'inverse, si $r = P/Q$ alors $r(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = P(\alpha_1, \dots, \alpha_n)Q(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^{-1}$. Cet élément a un inverse en la fraction $(Q/P)(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Donc à droite nous avons un sous-corps de $\mathbb{L}$ contenant $\mathbb{K}$ ainsi que les α_i . Donc

$$\mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \subset \{r(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \text{ tel que } r \in \mathbb{K}(X_1, \dots, X_n)\}. \quad (6.241)$$

D'autre part, tout corps contenant $\mathbb{K}$ et les α_i doit contenir tous les $P(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ($P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$), leurs inverses ainsi que leurs produits ; bref doit contenir tous les $r(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ avec $r \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. $\square$

6.4.10 Corps de décomposition

DEFooEKGZooSkybum

Définition 6.141.

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $F = (P_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments non constants de $\mathbb{K}[X]$. Un **corps de décomposition** de F est une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ telle que

- (1) les P_i sont scindés sur $\mathbb{L}$,
- (2) $\mathbb{L} = \mathbb{K}(R)$ où $R = \bigcup_{i \in I} \{x \in \mathbb{L} \text{ tel que } P_i(x) = 0\}$.

C'est-à-dire que $\mathbb{L}$ étend $\mathbb{K}$ par toutes les racines de tous les polynômes de F .

PROFOoDPOYooFHcqkU

Proposition 6.142 ([199]).

Tout polynôme admet un corps de décomposition. Plus précisément, soit un corps $\mathbb{K}$ et un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n . Il existe un corps de décomposition $\mathbb{D}$ de la forme $\mathbb{D} = \mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ où les α_i sont des racines de P dans $\mathbb{D}$.

Notons que rien dans l'énoncé ne prétend que les α_i soient tous distincts, ni même que certains (voire tous) ne seraient pas dans $\mathbb{K}$.

Démonstration. Soient un corps $\mathbb{K}$ et un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$. Si le degré de P est 0 ou 1, alors $\mathbb{K}$ est un corps de décomposition pour P . Pour le reste nous faisons une récurrence sur le degré de P .

Il y a deux possibilités, soit il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $P(\alpha) = 0$, soit non.

- (1) **Si racine dans $\mathbb{K}$** Alors le corolaire 6.109 nous permet de factoriser $X - \alpha$:

$$P = (X - \alpha)Q \quad (6.242)$$

avec $\deg(Q) = \deg(P) - 1$. Dans ce cas, $\mathbb{K}$ est un corps de rupture de P .

- (2) **Si pas de racines dans $\mathbb{K}$**

Nous prenons alors un corps de rupture $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha)$ avec $P(\alpha) = 0$ (c'est la proposition 6.119 qui donne l'existence d'un corps de rupture). Dans $\mathbb{L}_1$ nous avons

$$P = (X - \alpha)Q \quad (6.243)$$

avec $Q \in \mathbb{L}_1[X]$ et $\deg(Q) = \deg(P) - 1$.

- (3) **Dans les deux cas**

Dans les deux cas, par hypothèse de récurrence nous avons un corps de décomposition pour Q qui se présente sous la forme

$$\mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}). \quad (6.244)$$

De plus, $\mathbb{L}$ est une extension de $\mathbb{L}_1$ parce que c'est une extension du corps sur lequel est Q .

Pour terminer la preuve nous prouvons que

$$\mathbb{D} = \mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha) \quad (6.245)$$

est un corps de décomposition de P . Vu que $\mathbb{D}$ contient $\mathbb{K}(\alpha)$ (comme cas particulier du lemme 6.140), dans $\mathbb{D}$ nous avons l'égalité $P = (X - \alpha)Q$. Et vu que $\mathbb{D}$ contient également $\mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$, toujours dans $\mathbb{D}$ nous avons aussi

$$Q = (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_{n-1}). \quad (6.246)$$

Donc nous avons dans $\mathbb{D}$ l'égalité

$$P = (X - \alpha)(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_{n-1}). \quad (6.247)$$

□

LEMooJNGWooTXdGre

Lemme 6.143 ([1]).

Soit un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, et un corps $\mathbb{L}$ dans lequel P est scindé. Si $P = P_1 \dots P_r$ est la décomposition de P en irréductibles dans $\mathbb{K}$, alors chacun des P_i est scindé dans $\mathbb{L}$.

Démonstration. Juste pour le mentionner, le fait que P ait une décomposition en irréductibles est le fait que $\mathbb{K}[X]$ soit factoriel, c'est-à-dire la proposition 6.36.

Le polynôme P est scindé dans $\mathbb{L}$, c'est-à-dire que, en notant n le degré de P ,

$$P = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i) \quad (6.248)$$

EQooNFXSooUjkWeQu

avec $\lambda_i \in \mathbb{L}$.

Soit $\mathbb{L}_1$, une extension de $\mathbb{L}$ dans laquelle P_1 est scindé. Ensuite, $\mathbb{L}_2$ une extension de $\mathbb{L}_1$ dans laquelle P_2 est scindé et ainsi de suite. Nous avons construit $\mathbb{L}_r$, une extension de $\mathbb{L}$ dans laquelle tous les P_i sont scindés ainsi que P lui-même. Dans ce corps nous avons l'égalité

$$P = \prod_{k=1}^n (X - \mu_k) \quad (6.249)$$

EQooBEFUooBngSUS

où les μ_k sont des éléments des diverses extensions $\mathbb{L}_i$, et sont les racines des P_i . En tout cas, tous sont dans $\mathbb{L}_r$.

Les deux décompositions (6.248) et (6.249) sont des décompositions dans $\mathbb{L}_r[X]$ du polynôme P . Vu que ce dernier est factoriel, en réalité les deux décompositions sont identiques (se souvenir de la définition 3.53), et nous avons $\mu_k \in \mathbb{L}$ pour tout k . Toutes les extensions $\mathbb{L}_i$ sont en réalité triviales, et nous avons $\mathbb{L}_r = \mathbb{L}$.

Bref, tout cela pour dire que les P_i ont toutes leurs racines dans $\mathbb{L}$.

□

THOooQVKWooZAAYxK

Théorème 6.144 ([187]).

Soient :

- (1) un isomorphisme de corps $\tau: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}'$;
- (2) un polynôme non constant $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n ;
- (3) un corps de décomposition $\mathbb{L}$ de P sur $\mathbb{K}$;
- (4) un corps de décomposition $\mathbb{L}'$ de $\tau(P)$ sur $\mathbb{K}'$;

Alors τ se prolonge en un isomorphisme $\sigma: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}'$.

Démonstration. Soit m le nombre de racines de P dans $\mathbb{L} \setminus \mathbb{K}$. Nous faisons une récurrence sur m .

Si $m = 0$ alors $\mathbb{K}$ est un corps de rupture de P ; nous avons

$$P = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n) \quad (6.250)$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Dans ce cas nous avons aussi

$$\tau(P) = (X - \tau(\lambda_1)) \dots (X - \tau(\lambda_n)) \quad (6.251)$$

avec $\tau(\lambda_i) \in \mathbb{K}'$. Nous avons donc $\mathbb{L}' = \mathbb{K}'$ et prendre $\sigma = \tau$ fonctionne.

Nous supposons à présent que $m > 0$. Plus précisément nous considérons un polynôme possédant exactement m racines dans $\mathbb{L} \setminus \mathbb{K}$. Soit

$$P = P_1 \dots P_r \quad (6.252)$$

sa décomposition en irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$ (notons que $r \leq n$ parce que chacun des facteurs est de degré au moins 1). Au moins un des P_i est de degré plus grand ou égal à 2. Nous savons de la proposition 6.36 que $\mathbb{K}[X]$ est un anneau factoriel. Le lemme 6.143 nous assure que les polynômes P_i sont également scindés dans $\mathbb{L}$. Et l'unicité de la décomposition fait en sorte que les racines des P_i sont celles de P .

Soit $\alpha \in \mathbb{L}$, une racine de P_1 . Vu que P_1 est irréductible sur $\mathbb{K}$, l'application suivante est un isomorphisme de corps par le lemme 6.83 :

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{K}[X]/(P_1) &\rightarrow \mathbb{K}[\alpha] \\ \bar{Q} &\mapsto Q(\alpha). \end{aligned} \quad (6.253)$$

Notons que le lemme parle du quotient par le polynôme minimal, mais ici nous avons un irréductible. Un polynôme annulateur irréductible est multiple du polynôme minimal, et l'idéal engendré est le même.

Nous avons aussi la décomposition

$$\tau(P) = \tau(P_1) \dots \tau(P_r), \quad (6.254)$$

et chacun des $\tau(P_i)$ a ses racines dans $\mathbb{L}'$. Soit β , une racine de $\tau(P_1)$ dans $\mathbb{L}'$. Alors nous avons l'isomorphisme

$$\psi': \mathbb{K}'[X]/(\tau(P_1)) \rightarrow \mathbb{K}'[\beta]. \quad (6.255)$$

De plus, par le lemme 6.46, nous savons que τ passe aux classes :

$$\phi_\tau: \mathbb{K}[X]/(P_1) \rightarrow \mathbb{K}'[X]/(\tau(P_1)) \quad (6.256)$$

est un isomorphisme d'anneaux. Et enfin, dernier résultat externe à invoquer, la proposition 6.103 nous assure que $\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}(\alpha)$ et $\mathbb{K}'[\beta] = \mathbb{K}'(\beta)$. Posons pour l'occasion $\mathbb{K}_1 = \mathbb{K}(\alpha)$ et $\mathbb{K}'_1 = \mathbb{K}'(\beta)$.

Nous avons l'enchaînement suivant d'isomorphismes de corps⁶⁵ :

$$\tau_1 = \psi' \circ \phi_\tau \circ \psi^{-1}: \mathbb{K}_1 \rightarrow \mathbb{K}[X]/(P_1) \rightarrow \mathbb{K}'[X]/(\tau(P_1)) \rightarrow \mathbb{K}'_1. \quad (6.257)$$

Cet isomorphisme $\tau_1: \mathbb{K}_1 \rightarrow \mathbb{K}'_1$ prolonge τ . Si vous aimez les diagrammes, en voici un sur lequel les i représentent des inclusions et où τ et τ_1 sont des isomorphismes

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{K} & \xrightarrow{i} & \mathbb{K}_1 & \xrightarrow{i} & \mathbb{L} \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau_1 & & \\ \mathbb{K}' & \xrightarrow{i} & \mathbb{K}'_1 & \xrightarrow{i} & \mathbb{L}' \end{array} \quad (6.258)$$

Le corps $\mathbb{L}$ est un corps de décomposition de P sur $\mathbb{K}_1$, et le nombre de racines de P dans $\mathbb{L} \setminus \mathbb{K}_1$ est strictement plus petit que m parce qu'il y en a exactement m dans $\mathbb{L} \setminus \mathbb{K}$ et que $\mathbb{K}_1$ en a au moins une de plus que $\mathbb{K}$. Même raisonnement pour $\mathbb{K}'$, $\mathbb{K}'_1$ et $\mathbb{L}'$.

Résumons la situation :

- $\tau_1: \mathbb{K}_1 \rightarrow \mathbb{K}'_1$ est un isomorphisme de corps ;
- $P \in \mathbb{K}_1[X]$ est un polynôme non constant ;
- $\mathbb{L}$ est un corps de décomposition de P sur $\mathbb{K}_1$;

65. En réalité il est plus exact de dire « isomorphisme d'anneaux », parce que la structure de corps n'est en réalité aucune nouvelle structure par rapport à l'anneau.

- $\mathbb{L}'$ est un corps de décomposition de P sur $\mathbb{K}'_1$;
- le nombre de racines de P dans $\mathbb{L} \setminus \mathbb{K}_1$ est strictement inférieur à m .

Donc, par hypothèse de récurrence sur m , il existe un isomorphisme $\sigma: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}'$ qui prolonge τ_1 .
Vu que τ_1 prolonge τ , nous avons également σ qui prolonge τ . $\square$

L'énoncé le plus compact pour l'unicité du corps de décomposition (à isomorphisme près) est le suivant :

PropTMkfyM

Proposition 6.145.

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $P \in \mathbb{K}[X]$. Soient $\mathbb{L}$ et $\mathbb{F}$ deux corps de décomposition de P . Alors il existe un isomorphisme $f: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{F}$ tel que $f|_{\mathbb{K}} = \text{Id}$.

Démonstration. C'est un cas particulier du théorème 6.144, où nous considérons $\mathbb{K} = \mathbb{K}'$ muni de l'isomorphisme identité. $\square$

Cependant le passage par l'énoncé plus compliqué 6.144 est nécessaire pour les besoins de la récurrence.

6.146.

À propos de terminologie. Lorsque nous disons « *un* corps de décomposition » nous référons à la définition 6.141 et il n'y a pas vraiment unicité. Si nous disons « *le* corps de décomposition » nous référons en général à celui construit dans la proposition 6.142 qui n'est en réalité même pas très explicite.

Quoi qu'il en soit, nous nous permettons de dire « *le* » corps de décomposition lorsque nous parlons de propriétés invariantes par isomorphisme.

6.147.

La construction du corps de décomposition d'un polynôme fonctionne en prenant successivement le corps de rupture des facteurs irréductibles. Nous insistons sur le fait que cette opération se fait sur chaque facteur irréductible séparément.

L'exemple suivant montre dans quel ordre se passent les choses.

Exemple 6.148.

Soit le polynôme $P = X^4 - 5X^2 + 6$. Sa factorisation en irréductibles est :

$$P = (X^2 - 2)(X^2 - 3). \quad (6.259)$$

Ce polynôme n'est pas irréductible sur $\mathbb{Q}$ et il ne s'agit donc pas de prendre brutalement un corps de rupture pour P . Il s'agit de poser $P = P_1 P_2$ avec

$$P_1 = X^2 - 2 \quad (6.260a)$$

$$P_2 = X^2 - 3, \quad (6.260b)$$

de remarquer que P_1 et P_2 sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$ et de chercher des corps de rupture pour eux. On commence par P_1 . Nous avons le corps de rupture $\mathbb{L}_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et la factorisation

$$P_1 = (X + \sqrt{2})(X - \sqrt{2}). \quad (6.261)$$

Ensuite nous considérons P_2 dans $\mathbb{L}_1[X]$. Ce P_2 est encore irréductible. Nous lui cherchons un corps de rupture, et c'est $\mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_1(\sqrt{3})$ dans lequel nous avons

$$P_2 = (X - \sqrt{3})(X + \sqrt{3}). \quad (6.262)$$

Nous savons (par le lemme 6.124) que

$$\mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_1(\sqrt{3}) = (\mathbb{Q}(\sqrt{2}))(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}). \quad (6.263)$$

Nous pouvons donc écrire en toute confiance, dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ la factorisation

$$P = (X + \sqrt{2})(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{3})(X - \sqrt{3}). \quad (6.264)$$

Et nous notons que si nous avons commencé par P_2 au lieu de P_1 , nous aurions eu le même résultat final. $\triangle$

CORooELAUooPQGLkR

Corolaire 6.149 ([1]).

Le corps de décomposition d'un polynôme est une extension finie.

Démonstration. Soient un corps $\mathbb{K}$, un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ et un corps de décomposition $\mathbb{D}$ de P de la forme $\mathbb{D} = \mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ où les α_i sont les racines de P dans $\mathbb{D}$. Cela existe par la proposition 6.142.

Vu que le lemme 6.124 donne

$$\mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}))(\alpha_n), \quad (6.265)$$

le corps $\mathbb{D}$ se construit comme une pile d'extensions finies. Les degrés se composant par le lemme 6.63, au final ce corps de décomposition est une extension finie.

Soit maintenant un corps de décomposition quelconque $\mathbb{L}$. La proposition 6.145 donne un isomorphisme de corps⁶⁶ $f: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{D}$ tel que f soit l'identité sur $\mathbb{K}$.

Si $\{v_i\}_{i \in I}$ est une base de $\mathbb{D}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, êtes-vous prêts à parier que $\{f(v_i)\}_{i \in I}$ est une base de $\mathbb{L}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ⁶⁷? $\square$

6.4.11 Non irréductible ou pas corps ?

SUBSECooEDMJooTXBfOu

Nous avons déjà mentionné que nous ne définissons le corps de rupture d'un polynôme que dans le cas de polynôme irréductible à coefficients dans un corps.

D'abord si P n'est pas irréductible, la question de chercher un corps de rupture n'a pas beaucoup de sens.

Si A est un anneau intègre et si P est un polynôme irréductible sur A , nous pouvons considérer le corps des fractions de A , dire $P \in \text{Frac}(A)[X]$ et continuer. Étendre la définition de corps de rupture de cette façon aux polynômes à coefficients dans un anneau intègre n'est pas une grande révolution.

Au lieu de cela, nous pouvons nous demander dans quel cas nous aurions que $A[X]/(P)$ est directement un corps.

Exemple 6.150.

Soit le polynôme constant $P = 2$ dans $\mathbb{Z}[X]$. Il y est irréductible parce qu'il ne peut pas être écrit comme produit de deux non inversibles. Ce polynôme a deux propriétés ennuyeuses :

- Il n'est plus irréductible sur $\mathbb{Q}$,
- Il n'existe aucun corps contenant une racine de P tout en contenant $\mathbb{Z}$ comme sous-anneau.

$\triangle$

6.4.12 Clôture algébrique

THOooQFWWooMWXehT

Théorème 6.151.

Tout corps $\mathbb{K}$ possède une clôture algébrique⁶⁸ Ω . De plus si $\mathbb{L}$ est une extension de $\mathbb{K}$, alors $\mathbb{L}$ est $\mathbb{K}$ -isomorphe à un sous corps de Ω .

Les deux parties de ce théorème utilisent l'axiome du choix.

Notons en particulier que si Ω' est une autre clôture algébrique de $\mathbb{K}$, alors Ω et Ω' sont des sous corps l'un de l'autre et sont donc $\mathbb{K}$ -isomorphes.

66. Un isomorphisme de corps est juste un isomorphisme d'anneaux.

67. Personnellement, je n'ai pas vérifié. Vérifiez vous-même et écrivez-moi pour dire si c'est bon ou non.

68. Définition 6.75.

Lemme 6.152.

Les polynômes $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ ne sont pas premiers entre eux si et seulement s'ils ont une racine commune dans la clôture algébrique Ω de $\mathbb{K}$.

Démonstration. Soit A un polynôme non inversible divisant P et Q . Par définition de Ω , ce polynôme A a une racine dans Ω qui est alors une racine commune à P et Q dans Ω .

Pour le sens inverse, si α est une racine commune de P et Q , alors le polynôme $X - \alpha$ divise P et Q et donc P et Q ne sont pas premiers entre eux. $\square$

ExfUqQXQ

Exemple 6.153.

Soit p un nombre premier. Montrons que le polynôme

$$Q(X) = X^p - X + 1 \quad (6.266)$$

est irréductible dans $\mathbb{F}_p$.

Nous supposons qu'il n'est pas irréductible, c'est-à-dire que

$$Q(X) = R(X)S(X) \quad (6.267)$$

avec R et S , des polynômes de degrés ≥ 1 dans $\mathbb{F}_p[X]$

Soit $\bar{\mathbb{F}}_p$ une clôture algébrique⁶⁹ de $\mathbb{F}_p$ et $\alpha \in \bar{\mathbb{F}}_p$ tel que $R(\alpha) = 0$. Pour tout $a \in \mathbb{F}_p$, nous avons

$$Q(\alpha + a) = (\alpha + a)^p - (\alpha + a) + 1 \quad (6.268a)$$

$$= \alpha^p + a^p - \alpha - a + 1 \quad (6.268b)$$

$$= \alpha^p - \alpha + 1 \quad (6.268c)$$

$$= Q(\alpha) \quad (6.268d)$$

$$= 0 \quad (6.268e)$$

où nous avons utilisé le fait que $a^p = a$ et que α était une racine de Q . Ce que nous venons de prouver est que l'ensemble des racines de Q dans $\bar{\mathbb{F}}_p$ est donné par $\{\alpha + a \text{ tel que } a \in \mathbb{F}_p\}$.

Les polynômes R et S sont donc formés de produits de termes $X - (\alpha + a)$ avec $a \in \mathbb{F}_p$. L'un des deux –disons R pour fixer les idées– doit bien en avoir plus que 1. Nous avons alors

$$R(X) = \prod_{i=1}^k (X - (\alpha + a_i)) \quad (6.269)$$

où les a_i sont les éléments de $\mathbb{F}_p$. En développant un peu,

$$R(X) = X^k - \sum_{i=1}^k (\alpha + a_i) X^{k-1} + \text{termes de degré plus bas en } X. \quad (6.270)$$

Le coefficient devant X^{k-1} n'est autre que $k\alpha + \sum_i a_i$. Étant donné que $k \neq 0$ et que $R \in \mathbb{F}_p[X]$, nous devons avoir $\alpha \in \mathbb{F}_p$. Par conséquent nous avons $\alpha^p = \alpha$ et une contradiction :

$$Q(\alpha) = \alpha^p - \alpha + 1 = 1 \neq 0. \quad (6.271)$$

Le polynôme $X^p - X + 1$ est donc irréductible sur $\mathbb{F}_p$. $\triangle$

6.4.13 Dérivée de polynômes

DEFooICHTooAggARW

Définition 6.154 ([200]).

Soit un anneau A ainsi que $a_i \in A$. Pour le polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, nous définissons le **polynôme dérivé**

$$P' = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1}. \quad (6.272)$$

69. Définition 6.75. Pour l'existence c'est le théorème 6.151.

Lemme 6.155 (Règle de Leibniz[200]).

LEMooEFQQooTzDanH

Soit un anneau A . Nous considérons l'application dérivée⁷⁰

$$\begin{aligned} D: A[X] &\rightarrow A[X] \\ P &\mapsto P'. \end{aligned} \tag{6.273}$$

(1) L'application D est A -linéaire.

(2) Elle vérifie $(PQ)' = PQ' + P'Q$.

LEMooFNFYooAfPRT

Lemme 6.156 ([200]).

Soit un corps $\mathbb{K}$. Nous considérons l'application de dérivation⁷¹ $D: \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$.

(1) Si $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle, alors $\ker(D) = \mathbb{K}$.

(2) Si $\mathbb{K}$ est de caractéristique $p \neq 0$, alors $\ker(D) = \mathbb{K}[X^p]$.

Ici, $\mathbb{K}[X^p]$ est un gros abus de notations pour dire

$$\mathbb{K}[X^p] = \{Q(X^p) \text{ tel que } Q \in \mathbb{K}[X]\}. \tag{6.274}$$

6.4.14 Extensions séparables

Notons que dans ce qui va suivre nous allons parler de $\mathbb{K}[X]$, l'ensemble des polynômes sur un corps. Cela ne s'applique donc pas à $\mathbb{Z}[X]$ par exemple.

Une des choses intéressantes avec les extensions séparables c'est qu'elles vérifient le théorème de l'élément primitif 6.171.

LEMooGUUJooDSrQFU

Lemme 6.157 ([200]).

Soit un corps $\mathbb{K}$. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Nous avons équivalence entre :

ITEMooHMMMooWKzSLA

(1) a est une racine multiple⁷² de P .

ITEMooZXCTooPctrMm

(2) $(X - a) \mid P$ et $(X - a) \mid P'$.

ITEMooBMSSooNOYfKn

(3) $P(a) = P'(a) = 0$

Démonstration. Soit n la multiplicité de la racine a de P . Éventuellement $n = 0$ si a n'est en réalité pas une racine. Nous avons

$$P = (X - a)^n Q \tag{6.275}$$

EQooRGYSooSkATBv

avec $Q(a) \neq 0$.

En ce qui concerne la dérivée, si $n = 0$ nous avons $P' = Q'$, et si $n \geq 1$ nous avons

$$P' = n(X - a)^{n-1}Q + (X - a)^n Q'. \tag{6.276}$$

EQooQLINooPKUENI

Nous faisons maintenant la preuve.

- (1) **(1) implique (2)** Nous supposons que a est une racine multiple, c'est-à-dire $n \geq 2$. Les relations (6.275) et (6.276) nous montrent que $(X - a)$ divise aussi bien P que P' .
- (2) **(2) implique (3)** Celle-ci est facile. Les hypothèses sont qu'il existe des polynômes A et B tels que $P = (X - a)A$ et $P' = (X - a)B$. Nous avons alors bien $P(a) = P'(a) = 0$.
- (3) **(3) implique (1)** Nous avons $P = (X - a)^n Q$ avec $Q(a) \neq 0$. Par hypothèse $P(a) = 0$. Donc $n \geq 1$. Nous pouvons alors utiliser la formule (6.276) pour la dérivée :

$$P' = n(X - a)^{n-1}Q(a) + (X - a)^n Q'. \tag{6.277}$$

Nous avons donc $P'(a) = n0^{n-1}Q(a)$ avec $Q(a) \neq 0$. Par hypothèse $P'(a) = 0$ et donc $n - 1 \geq 0$, ce qui signifie $n \geq 2$ et donc que a est une racine multiple de P .

70. Définition 6.154.

71. Voir lemme 6.155.

72. Racine multiple, définition 3.112.

□

Proposition 6.158.

Soit P irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ ayant des racines distinctes dans le corps de décomposition $\mathbb{L}$. Si $\mathbb{L}'$ est un autre corps de décomposition pour P , alors P a aussi ses racines distinctes dans $\mathbb{L}'$.

Démonstration. L'ingrédient est la proposition 6.145 qui donne l'unicité du corps de décomposition à $\mathbb{K}$ -isomorphisme près. Soit donc $\psi: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}'$ un isomorphisme laissant invariant les éléments de $\mathbb{K}$. D'une part, étant donné que P est à coefficients dans $\mathbb{K}$, nous avons $\psi(P) = P$. D'autre part dans $\mathbb{L}$ le polynôme P s'écrit

$$P = a(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_n) \quad (6.278)$$

avec $a \in \mathbb{K}$ et $\alpha_i \in \mathbb{L}$. Nous avons donc

$$P = \psi(P) = a(X - \psi(\alpha_1)) \dots (X - \psi(\alpha_n)). \quad (6.279)$$

Donc les racines de P dans $\mathbb{L}'$ sont les éléments $\psi(\alpha_i)$ qui sont distincts. □

Exemple 6.159.

Un polynôme peut être séparable sur un corps, mais non séparable sur un autre. Soit $\mathbb{L} = \mathbb{F}_p(T)$ et $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p(T^p)$. Nous considérons le polynôme

$$P = X^p - T^p \quad (6.280)$$

dans $\mathbb{K}[X]$. Par le morphisme de Frobenius nous avons

$$P = (X - T)^p \quad (6.281)$$

dans $\mathbb{L}[X]$. Le polynôme P est irréductible sur $\mathbb{K}[X]$ parce que ses diviseurs sont de la forme $(X - T)^k$ qui contiennent T^k qui n'est pas dans $\mathbb{K}$ (sauf si $k = n$ ou $k = 0$).

Ce polynôme n'est pas séparable sur $\mathbb{K}$ parce que dans le corps de décomposition $\mathbb{L}$, la racine T est multiple. Notons bien le raisonnement : P étant irréductible, pour savoir si il est séparable, on le regarde dans un corps de décomposition.

Par contre si nous regardons P dans $\mathbb{L}[X]$ alors P n'est plus irréductible parce que ses facteurs irréductibles sont $(X - T)$. N'étant pas irréductible, nous regardons les racines de *ses facteurs irréductibles*. Or chacun des facteurs irréductibles étant $X - T$, les racines sont simples. △

Exemple 6.160.

Le polynôme $X^3 - 1$ est séparable sur $\mathbb{Q}$ parce que ses facteurs irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$ sont $X - 1$ et $X^2 + X + 1$, et ces deux polynômes ont des racines simples (dans $\mathbb{Q}(i)$). △

Exemple 6.161.

Le polynôme $(X^2 + 1)^2$ est séparable dans $\mathbb{Q}[X]$. En effet, il a pour facteurs irréductibles le polynôme $X^2 + 1$ (en deux exemplaires), et ce polynôme a pour racines $\pm i$ dans l'extension $\mathbb{Q}(i)$, racines qui sont simples pour ce polynôme. △

PropolyeZff

Proposition 6.162 ([201]).

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

ItemdqPFUi

(1) Il existe une extension de $\mathbb{K}$ dans laquelle P a une racine multiple.

ItemdqPFUiib

(2) P a une racine multiple dans tout corps de décomposition.

ItemdqPFUi

(3) P et P' ont une racine commune dans une extension de $\mathbb{K}$.

ItemdqPFUi

(4) le degré de $\text{pgcd}(P, P')$ est ≥ 1 .

Démonstration. En plusieurs parties.

- (1) **(1)⇒(2)** Soit a , une racine multiple de P dans une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$, et $\mathbb{E}$, un corps de décomposition de P . Alors nous voulons prouver que P ait une racine multiple dans $\mathbb{E}$.

Nous pouvons voir $P \in \mathbb{L}[X]$, et construire un corps de décomposition $\mathbb{E}'$ qui est une extension de $\mathbb{L}$. Vu que $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ sont deux corps de décomposition de P nous avons un isomorphisme $\psi: \mathbb{E}' \rightarrow \mathbb{E}$. Si $a \in \mathbb{E}$ est une racine multiple de P , alors $\psi(a)$ est une racine multiple de P dans $\mathbb{E}'$ parce que

$$P(\psi(a)) = \psi(P(a)). \quad (6.282)$$

- (2) **(2)⇒(3)** Soit $\mathbb{L}$ un corps de décomposition de P sur $\mathbb{K}$ et $a \in \mathbb{L}$, une racine multiple de P . On a alors $P = (X - a)^2 Q$ avec $Q \in \mathbb{L}[X]$. En dérivant,

$$P' = 2(X - a)Q + (X - a)^2 Q', \quad (6.283)$$

et donc a est également une racine de P' .

- (3) **(3)⇒(4)** Soit D un pgcd de P et P' . D'après le théorème de Bézout il existe $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$AP + BP' = D. \quad (6.284)$$

Si a est une racine commune de P et P' dans une extension $\mathbb{L}$, alors c'est aussi une racine de D et donc $\deg(D) \geq 1$.

- (4) **(4)⇒(1)** Si le degré de D est plus grand ou égal à 1, alors nous considérons une racine a de D dans $\mathbb{L}$ (une extension de $\mathbb{K}$). Étant donné que D divise P et P' , l'élément a est une racine commune de P et P' . Nous montrons maintenant que a est alors une racine multiple de P . Vu que $P(a) = 0$ nous avons

$$P = (X - a)Q, \quad (6.285)$$

et $P' = Q + (X - a)Q'$. Mais alors $P'(a) = Q(a)$ et donc $Q(a) = 0$ et donc a est une racine double de P . Par conséquent a est une racine multiple de P dans $\mathbb{K}$. □

Notons que si P est irréductible, cette proposition donne des conditions pour que P ne soit pas séparable.

Lemme 6.163 ([190]).

Soient un corps $\mathbb{K}$ ainsi qu'un polynôme irréductible non nul $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors P divise Q si et seulement si $\text{pgcd}(P, Q) \neq 1$.

Démonstration. Nous notons $D = \text{pgcd}(P, Q)$. C'est un polynôme qui divise P . De plus P est irréductible, donc non inversible. Vu que P est non nul, nous avons $\deg(P) \geq 1$.

- (1) $\Rightarrow$ Nous supposons que P divise Q . Alors P est un diviseur commun de P et Q . Le lemme 6.55 (qui n'est en fait qu'une répétition de la définition du pgcd) nous dit alors que P divise $\text{pgcd}(P, Q)$. Nous avons donc

$$0 < \deg(P) \leq \deg(\text{pgcd}(P, Q)). \quad (6.286)$$

Donc le polynôme $\text{pgcd}(P, Q)$ est un polynôme non constant et n'est en particulier pas 1.

- (2) $\Leftarrow$ Le polynôme D est un diviseur commun de P et Q . En particulier $P = SD$ pour un certain polynôme S . Étant donné que P est irréductible, soit S soit D (ou les deux) est inversible. Par hypothèse $D \neq 1$, et comme D est unitaire, nous savons que D n'est pas un inversible. Bref, S est un inversible, c'est-à-dire que $S = k \in \mathbb{K}$. Nous notons que

$$P = kD. \quad (6.287)$$

Le polynôme D divise également Q . Il existe $T \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q = TD$. En remplaçant D par sa valeur déduite de (6.287) nous avons

$$Q = TD = k^{-1}TP, \quad (6.288)$$

ce qui signifie que P divise Q .

□

Nous rappelons à le très aimable lecteur que $\text{pgcd}(P, Q)$ est l'unique polynôme unitaire parmi les PGCD de P et Q . La définition des PGCD est 1.103 et l'unicité de l'unitaire est dans le lemme 6.52(2).

PROPooPRGQooOkEmag

Proposition-Définition 6.164 ([200, 202]).

Soient un corps $\mathbb{K}$, un polynôme non constant $P \in \mathbb{K}[X]$ ainsi qu'une extension algébriquement close Ω et un corps de décomposition⁷³ $\mathbb{M}$ pour P . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes⁷⁴ :

ITEMooVMJLooUdZLQR

- (1) $\text{pgcd}(P, P') = 1$.
- (2) P et P' n'ont de racines communes dans aucune extension de $\mathbb{K}$.
- (3) P et P' n'ont pas de racines communes dans $\mathbb{M}$.
- (4) P et P' n'ont pas de racines communes dans Ω .
- (5) P n'a de racines multiples dans aucune extension de $\mathbb{K}$.
- (6) P n'a que des racines simples dans $\mathbb{M}$.
- (7) P n'a que des racines simples dans Ω .
- (8) Il existe une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ ainsi que $\beta, \alpha_i \in \mathbb{L}$ tels que

ITEMooARPLooBoUrxX

$$P = \beta \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i) \quad (6.289)$$

où les α_i sont distincts.

- (9) Il existe $\beta, \alpha_i \in \mathbb{M}$ tels que $P = \beta \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$ où les α_i sont distincts.
- (10) Il existe $\beta, \alpha_i \in \Omega$ tels que $P = \beta \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$ où les α_i sont distincts.

Un polynôme irréductible qui vérifie ces conditions est dit **séparable**.

Si P est un polynôme non constant dont la décomposition en irréductibles est $P = P_1 \dots P_r$, nous disons qu'il est **séparable** si tous les P_i le sont.

PROPooMOZFooDGemBJ

Proposition 6.165 ([200, 202]).

Soit un corps $\mathbb{K}$ et un polynôme irréductible non nul $P \in \mathbb{K}[X]$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

ITEMooDOTTooTZGhSq

- (1) P est séparable⁷⁵
- (2) $P' \neq 0$
- (3) Il existe une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ dans laquelle P a une racine simple.

ITEMooRTDCooJGEtum

ITEMooZOMZooDPrNaC

Démonstration. En plusieurs parties.

- (1) **(3) implique (2)** Soient une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ ainsi qu'une racine simple $a \in \mathbb{L}$. Nous utilisons la proposition 3.116 : il existe un polynôme $Q \in \mathbb{L}[X]$ tel que $P = (X - a)Q(X)$ avec $\mathbb{L} \neq 0$.

Nous utilisons la règle de Leibniz (lemme 6.155) : $P' = (X - a)'Q(X) + (X - a)Q'(X) = Q(X) + (X - a)Q'(X)$. En évaluant en a ,

$$P'(a) = Q(a) \neq 0. \quad (6.290)$$

- (2) **(2) implique $\text{pgcd}(P, P') = 1$** Notons $D = \text{pgcd}(P, P')$. Vu que D divise P , il existe un polynôme Q tel que $P = QD$. Le polynôme P étant irréductible, soit Q soit D est inversible.

73. Tout polynôme admet un corps de décomposition, proposition 6.142.

74. Pour le polynôme dérivé P' , définition 6.154.

75. Polynôme séparable, définition 6.164.

Supposons que Q est inversible. Alors $P = kD$ avec $k \in \mathbb{K}$. En particulier $\deg(P) = \deg(D)$. Mais comme D est un diviseur de P' , nous avons

$$\deg(D) \leq \deg(P') < \deg(P). \quad (6.291)$$

Nous avons une contradiction.

Nous en déduisons que dans l'égalité $P = DQ$, c'est D qui est inversible. Donc $D \in \mathbb{K}$. Vu que D est unitaire⁷⁶, nous avons $D = 1$.

- (3) **(2) implique (1)** Nous avons déjà vu que dans le cas (2) nous avons $\text{pgcd}(P, P') = 1$. La proposition-définition 6.164(1) nous indique qu'alors P est séparable.
- (4) **(1) implique (3)** La proposition 6.142 nous permet de considérer un corps de décomposition de P . Dans ce corps, P admet des racines (autant que son degré, mais c'est une autre histoire), et ces racines sont simples par la définition 6.164(5).

□

CorUjfJSE

Corolaire 6.166.

Si $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle, alors tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est séparable.

Démonstration. Il suffit de montrer que les irréductibles sont séparables. Soit P un polynôme irréductible et unitaire de degré d . Le terme de plus haut degré de P' est alors dX^{d-1} qui est non nul parce que $d \neq 0$ en caractéristique nulle. Donc $P' \neq 0$ et donc P est séparable par la proposition 6.162.

□

DEFooKTVHooTydOTM

Définition 6.167.

Soit $\mathbb{L}$ une extension algébrique de $\mathbb{K}$.

ITEMooOFYPooLYkIPr

- (1) On dit que l'élément $a \in \mathbb{L}$ est **séparable** sur $\mathbb{K}$ si son polynôme minimal dans $\mathbb{K}[X]$ est séparable sur $\mathbb{K}$ (définition 6.164).
- (2) L'extension $\mathbb{L}$ est **séparable** si tous ses éléments sont séparables.

PropUmxJVw

Proposition 6.168.

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Les conditions suivantes sont équivalentes :

ITEMooUSKRooDmsGmw

- (1) toutes les extensions algébriques de $\mathbb{K}$ sont séparables ;
- (2) tout polynôme irréductible de $\mathbb{K}[X]$ est séparable.

ITEMooJGWLooKInxSG

En particulier les extensions algébriques des corps de caractéristique nulle sont toutes séparables.

Démonstration. En plusieurs parties.

- (1) **(1) implique (2)**

Soit un polynôme irréductible P de $\mathbb{K}[X]$, et un corps de décomposition $\mathbb{L}$ de P . Cela est une extension algébrique par le corolaire 6.149. Elle est donc séparable par hypothèse.

Voilà une première chose de dite.

Maintenant, nous voudrions montrer que P est un polynôme séparable. Dans $\mathbb{L}$ nous avons

$$P = \prod_{i=1}^n (X - a_i), \quad (6.292)$$

et tout le défi est de prouver que les a_i sont tous distincts.

Soient deux racines $a, b \in \mathbb{L}$ de P . Nous considérons les polynômes minimaux μ_a et μ_b dans $\mathbb{K}[X]$. Ces deux polynômes divisent P parce que P est à la fois dans l'idéal annulateur de a et de b . Mais comme P est irréductible, il existe $k_a, k_b \in \mathbb{K}$ tels que $P = k_a \mu_a$ et $P = k_b \mu_b$. Donc les polynômes μ_a, μ_b et P sont multiples les uns des autres. Vu que μ_a et μ_b sont unitaires, $\mu_a = \mu_b$.

76. Le pgcd de deux polynômes est l'unitaire parmi tous les pgcd, voir 6.53.

Nous avons :

$$P = k\mu = \prod_{i=1}^n (X - a_i). \quad (6.293)$$

Or le polynôme μ est irréductible par la proposition 6.67(1), et l'extension $\mathbb{L}$ est séparable, donc μ n'a que des racines simples. Donc tous les a_i sont distincts.

(2) **(2) implique (1)**

Soit une extension algébrique $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$. Soit $a \in \mathbb{L}$. Nous devons prouver que le polynôme minimal de a dans $\mathbb{K}$ est séparable, c'est-à-dire qu'il n'a que des racines simples.

Le polynôme minimal $\mu_a \in \mathbb{K}[X]$ de a est irréductible et donc séparable. Donc $\mathbb{L}$ est séparable.

La dernière phrase est une conséquence du corolaire 6.166. □

CORooNZZMooIoBYXY

Corolaire 6.169.

Toute les extensions algébriques de $\mathbb{Q}$ sont séparables.

Démonstration. Le corps $\mathbb{Q}$ est de caractéristique nulle (définition 1.452). Le corolaire 6.166 dit alors que tout polynôme sur $\mathbb{Q}$ est séparable. La proposition 6.168 conclut en disant que toutes les extensions algébriques de $\mathbb{Q}$ sont séparables. □

ThobkwCMm

Théorème 6.170 ([122]).

Soit $\mathbb{K}$ un corps (pas spécialement fini). Tout sous-groupe fini de $\mathbb{K}^*$ est cyclique.

Démonstration. Soit G un sous-groupe fini de $\mathbb{K}^*$ et ω son exposant (qui est le PPCM des ordres des éléments de G). Étant donné que $|G|$ est divisé par tous les ordres, il est divisé par le PPCM des ordres. Bref, nous avons

$$x^\omega = 1 \quad (6.294)$$

pour tout $x \in G$. Mais ce polynôme possède au plus ω racines dans $\mathbb{K}$. Du coup $|G| \leq \omega$. Et comme on avait déjà vu que $\omega \mid |G|$, on a $\omega = |G|$. Il suffit plus que trouver un élément d'ordre effectivement ω . Cela est fait par le lemme 3.28. □

ThoORxgBC

Théorème 6.171 (Théorème de l'élément primitif[122]).

Toute extension de corps séparable finie admet un élément primitif⁷⁷.

Autrement dit, soient des éléments algébriques $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ séparables⁷⁸ sur $\mathbb{K}$, et soit l'extension engendrée $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Alors $\mathbb{L}$ admet un élément primitif, c'est-à-dire un élément θ tel que $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\theta)$.

Démonstration. Si le corps $\mathbb{K}$ est fini, alors $\mathbb{L}$ est également fini. Donc $\mathbb{L}^*$ est cyclique par le théorème 6.170. Si θ est un générateur de $\mathbb{L}^*$, alors $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\theta)$.

Passons au cas où $\mathbb{K}$ est infini. Il suffit d'examiner le cas $n = 2$; en effet pour $n = 1$ c'est trivial et si $n > 2$, alors

$$\mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})(\alpha_n), \quad (6.295)$$

et donc si $\mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) = \mathbb{K}(\theta)$, nous avons

$$\mathbb{K}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \mathbb{K}(\theta, \alpha_n) \quad (6.296)$$

et nous sommes réduit au cas $n = 2$ par récurrence.

Soit donc $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha, \beta)$; soit P le polynôme minimal de α sur $\mathbb{K}$ et Q celui de β . Nous nommons $\mathbb{E}$, un corps de décomposition de PQ . Nous avons $\mathbb{L} \subset \mathbb{E}$. Vu que P et Q sont polynômes minimaux d'éléments qui sont par hypothèse séparables, les polynômes P et Q sont séparables. Donc dans $\mathbb{E}$ les racines de P sont distinctes parce que P est irréductible (et idem pour Q). Soient les racines

$$\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_r \quad (6.297)$$

⁷⁷. Définition 6.93.

⁷⁸. Définition 6.167(1).

de P dans $\mathbb{E}$ et les racines

$$\beta_1 = \beta, \beta_2, \dots, \beta_s \quad (6.298)$$

de Q dans $\mathbb{E}$. Ici r et s sont les degrés de P et Q .

Si $s = 1$ alors $Q = X - \beta$ et donc $\beta \in \mathbb{K}$ (parce que $Q \in \mathbb{K}[X]$). Du coup nous avons $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha)$ et le théorème est démontré. Nous supposons donc maintenant que $s \geq 2$.

Pour chaque $(i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket \times \llbracket 2, s \rrbracket$, l'équation $\alpha_i + x\beta_k = \alpha_1 + x\beta_1$ pour $x \in \mathbb{K}$ a au plus ⁷⁹ une solution donnée le cas échéant par

$$x = (\alpha_i - \alpha_1)(\beta_1 - \beta_k)^{-1} \quad (6.299)$$

Notons que cela est de toutes façons dans $\mathbb{L}$ et qu'étant donné que $\beta_1 \neq \beta_k$, cette solution a un sens (ici on utilise l'hypothèse de séparabilité). Étant donné que $\mathbb{K}$ est infini nous pouvons donc trouver un $c \in \mathbb{K}$ qui ne résout aucune des équations (6.299) :

$$\alpha_i + c\beta_k \neq \alpha_1 + c\beta_1. \quad (6.300)$$

Nous posons $\theta = \alpha_1 + c\beta_1$ et nous prétendons que $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\theta)$.

Pour cela, commençons par montrer que $\beta_1 \in \mathbb{K}(\theta)$. On considère, dans $\mathbb{K}(\theta)[T]$, les polynômes $Q(T)$ et $S(T) = P(\theta - cT)$, et on nomme R le PGCD de ces deux polynômes. Alors, une racine de R doit être une racine de Q , et est donc un des β_i . Or, d'une part, le choix de θ fait que β_1 est une racine de R parce que

$$S(\beta_1) = P(\theta - c\beta_1) = P(\alpha_1 + c\beta_1 - c\beta_1) = P(\alpha_1) = 0. \quad (6.301)$$

D'autre part, si $k \geq 2$, alors

$$S(\beta_k) = P(\alpha_1 + c\beta_1 - c\beta_k) = P(\alpha_1 + c(\beta_1 - \beta_k)) \neq 0 \quad (6.302)$$

parce que $\alpha_1 + c(\beta_1 - \beta_k)$ ne vaut ni α_1 (le second terme est non-nul), ni un autre α_i (à cause de (6.300)).

Il s'ensuit que Q et S n'ont qu'une racine commune $\beta_1 = \beta$, qui est donc l'unique racine de R . Ainsi,

$$R = X - \beta \in \mathbb{K}(\theta)[T], \quad (6.303)$$

et donc $\beta \in \mathbb{K}(\theta)$.

Dès lors $\alpha = \alpha_1 = \theta - c\beta$ est alors immédiatement dans $\mathbb{K}(\theta)$; puisque les deux éléments α et β sont dans $\mathbb{K}(\theta)$, nous avons obtenu $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha, \beta) = \mathbb{K}(\theta)$. □

Exemple 6.172.

Le théorème de l'élément primitif 6.171 ne tient pas pour les corps non commutatifs. Considérons par exemple le corps $\mathbb{K}$ des quaternions et le groupe à 8 éléments $G = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$. Ce dernier groupe n'est pas cyclique alors qu'il est un groupe fini dans $\mathbb{K}^*$. △

Exemple 6.173.

Il est aussi possible pour un groupe fini d'avoir $\omega(G) = |G|$ sans pour autant que G soit cyclique. Par exemple pour $G = S_3$, nous avons $|S_3| = 6$ alors que les éléments de S_3 sont soit d'ordre 2 soit d'ordre 3 et $\omega(G) = \text{ppcm}(2, 3) = 6$. Pourtant S_3 n'est pas cyclique. △

6.5 Idéal maximum

6.5.1 Idéal maximum

Définition 6.174.

Une $\mathbb{K}$ -algèbre est de **type fini** si elle est le quotient de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ par un idéal (pour un certain n).

⁷⁹. La solution (6.299) peut être dans $\mathbb{L}$ et non dans $\mathbb{K}$. L'équation peut donc très bien ne pas avoir de solutions $x \in \mathbb{K}$.

ThonoZyKa

Théorème 6.175 ([203]).

Soit $\mathbb{K}$ un corps et B , une $\mathbb{K}$ -algèbre de type fini. Si B est un corps, alors c'est une extension algébrique finie de $\mathbb{K}$.

ThowgZYqx

Théorème 6.176 ([203]).

Si $\mathbb{K}$ est un corps algébriquement clos, les idéaux maximaux⁸⁰ de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ sont de la forme

$$(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) \quad (6.304)$$

où les a_i sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Démonstration. Nous commençons par montrer que

$$J = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) \quad (6.305)$$

est un idéal maximum. Pour cela nous considérons le morphisme surjectif d'anneaux

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] &\rightarrow \mathbb{K} \\ P &\mapsto P(a_1, \dots, a_n). \end{aligned} \quad (6.306)$$

Soit $P \in \ker(\phi)$; nous écrivons la division euclidienne de P par $X - a_1$ puis celle du reste par $X - a_2$ et ainsi de suite :

$$P = (X - a_1)Q_1 + \dots + (X_n - a_n)Q_n + R \quad (6.307)$$

EqDAkiiH

où R doit être une constante parce que le premier reste est de degré zéro en X_1 , le second est de degré zéro en X_1 et X_2 , etc. Afin d'identifier cette constante, nous appliquons l'égalité (6.307) à $(a_1, \dots, a_n)$ et en nous rappelant que $P \in \ker(\phi)$ nous obtenons

$$0 = P(a_1, \dots, a_n) = R, \quad (6.308)$$

donc $R = 0$ et $P = (X_1 - a_1)Q_1 + \dots + (X_n - a_n)Q_n$, c'est-à-dire $P \in J$. Nous avons donc $\ker(\phi) \subset J$. Par ailleurs $J \subset \ker(\phi)$ est évident, donc $J = \ker(\phi)$.

Vu que J est le noyau de l'application $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \mathbb{K}$, nous avons

$$\frac{\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]}{J} = \mathbb{K}. \quad (6.309)$$

Donc J est un idéal maximal parce que tout polynôme n'étant pas dans J doit avoir un terme indépendant non nul et donc être dans $\mathbb{K}$ vis à vis du quotient $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/J$.

Nous montrons maintenant l'implication inverse. Nous supposons que I est un idéal maximum et nous montrons qu'il doit être égal à J (pour un certain choix de $a_1, \dots, a_n$).

Le quotient

$$\frac{\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]}{I} \quad (6.310)$$

est une $\mathbb{K}$ -algèbre de type fini (définition 6.174). De plus c'est un corps par la proposition 1.389. C'est donc une extension algébrique finie de $\mathbb{K}$ par le théorème 6.175. Mais $\mathbb{K}$ étant algébriquement clos, il est sa propre et unique extension algébrique; nous en déduisons que

$$\frac{\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]}{I} = \mathbb{K}. \quad (6.311)$$

Donc pour tout $1 \leq i \leq n$, il existe $a_i \in \mathbb{K}$ tel que $X_i - a_i \in I$, sinon le monôme X_i ne se projetterait pas sur un élément dans $\mathbb{K}$ dans le quotient. Cela prouve que J est contenu dans I ; par maximalité nous avons donc $I = J$. $\square$

80. Définition 1.388.

Corolaire 6.177.

Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos et I , un idéal de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. Si nous notons

$$V(I) = \{x \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } P(x_1, \dots, x_n) = 0, \forall P \in I\} \quad (6.312)$$

l'ensemble des racines communes à tous les éléments de I , on a $V(I) = \emptyset$ si et seulement si $I = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$.

Démonstration. Si $I = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ en particulier $1 \in I$ et nous avons évidemment $V(I) = \emptyset$. Le sens difficile est l'autre sens.

Supposons que $I \neq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ et que K est un idéal maximum contenant I (ça existe par le théorème de Krull 1.390). Nous savons déjà par le théorème 6.176 que K est de la forme $K = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$. Un élément de I est dans K , donc si $P \in I$ nous avons

$$P(a_1, \dots, a_n) = 0, \quad (6.313)$$

c'est-à-dire que $(a_1, \dots, a_n) \in V(I)$ et donc que $V(I) \neq \emptyset$. $\square$

6.6 Polynômes symétriques et alternés

6.6.1 Polynômes symétriques, alternés ou semi-symétriques

Nous rappelons que le groupe symétrique S_n agit sur l'anneau des polynômes de n variables sur l'anneau A par le lemme 1.470.

Définition 6.178.

Un polynôme Q en n indéterminées est

- (1) **symétrique** si $Q = \sigma \cdot Q$ pour tout $\sigma \in S_n$;
- (2) **alterné** si $\sigma \cdot Q = \epsilon(\sigma)Q$ pour tout $\sigma \in S_n$;
- (3) **semi-symétrique** si $\sigma \cdot Q = Q$ pour tout $\sigma \in A_n$

Le polynôme $T_1 + T_2$ est symétrique ; le polynôme $T_1 + T_2^2$ ne l'est pas.

6.6.2 Polynôme symétrique élémentaire

DEFooTREUooZKoXeg

Définition 6.179.

Le k -ième **polynôme symétrique élémentaire** à n inconnues est le polynôme

$$\sigma_k(T_1, \dots, T_n) = \sum_{s \in F_k} \prod_{i=1}^k T_{s(i)} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} X_{i_1} \dots X_{i_k}. \quad (6.314)$$

où F_k est l'ensemble des fonctions strictement croissantes $\{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$.

$$\sigma_1(T_1, \dots, T_n) = T_1 + T_2 + \dots + T_n \quad (6.315a)$$

$$\sigma_2(T_1, \dots, T_n) = T_1 T_2 + \dots + T_1 T_n + T_2 T_3 + \dots + T_2 T_n + \dots + T_{n-1} T_n \quad (6.315b)$$

$$\sigma_n(T_1, \dots, T_n) = T_1 \dots T_n. \quad (6.315c)$$

En particulier, $\sigma_2(x, y, z) = xy + yz + xz$.

TholReBiw

Théorème 6.180 ([204, 205]).

Soit un anneau commutatif A . Soit un polynôme symétrique à n indéterminées P à coefficients dans A . Alors il existe un unique polynôme Q à coefficients dans A tel que

$$P = Q(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \quad (6.316)$$

où les σ_i sont les polynômes symétriques élémentaires⁸¹.

81. Définition 6.179.

Exemple 6.181.

Nous voulons décomposer $P(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ en polynômes symétriques élémentaires, c'est-à-dire en

$$\begin{cases} \sigma_1 = x + y + z & (6.317a) \\ \sigma_2 = xy + xz + yz & (6.317b) \\ \sigma_3 = xyz. & (6.317c) \end{cases}$$

Étant donné que P est de degré 3, les seules combinaisons des σ_i qui peuvent intervenir sont σ_1^3 , $\sigma_1\sigma_2$ et σ_3 . Étant donné que dans P le coefficient de x^3 est un, il est obligatoire d'avoir un coefficient 1 devant σ_1^3 . Nous le calculons :

```
-----
| Sage Version 4.8, Release Date: 2012-01-20                               |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.             |
|-----|
sage: var('x,y,z')
(x, y, z)
sage: P=x**3+y**3+z**3
sage: S1=x+y+z
sage: S2=x*y+x*z+y*z
sage: S3=x*y*z
sage: (S1**3).expand()
x^3 + 3*x^2*y + 3*x^2*z + 3*x*y^2 + 6*x*y*z + 3*x*z^2 + y^3
      + 3*y^2*z + 3*y*z^2 + z^3
sage: (S1**3-P).expand()
3*x^2*y + 3*x^2*z + 3*x*y^2 + 6*x*y*z + 3*x*z^2 + 3*y^2*z + 3*y*z^2
x^3 + 3*x^2*y + 3*x^2*z + 3*x*y^2 + 6*x*y*z + 3*x*z^2
      + y^3 + 3*y^2*z + 3*y*z^2 + z^3
```

Dans la différence $\sigma_1^3 - P$ nous voyons que le terme en xyz est $6xyz$; par conséquent nous savons que le coefficient de σ_3 sera -6 . Il nous reste :

```
sage: (S1**3+6*S3-P).expand()
3*x^2*y + 3*x^2*z + 3*x*y^2 + 12*x*y*z + 3*x*z^2 + 3*y^2*z + 3*y*z^2
```

que nous identifions facilement avec $3\sigma_1\sigma_2$. Nous avons donc

$$P = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3. \quad (6.318)$$

△

LemSoXCQH

Lemme 6.182 ([136]).

Soit $\mathbb{K}$ une extension de degré δ de $\mathbb{Q}$ et $P \in \mathbb{K}[T_1, \dots, T_m]$. Alors il existe $\bar{P} \in \mathbb{Q}[T_1, \dots, T_m]$ tel que

- (1) $\deg \bar{P} = \delta \deg(P)$
- (2) pour tout $(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m$ tel que $P(z_1, \dots, z_m) = 0$, on a $\bar{P}(z_1, \dots, z_m) = 0$.

Démonstration. En vertu de la proposition 6.168 et du corolaire 6.169, $\mathbb{K}$ est une extension séparable de $\mathbb{Q}$, et donc vérifie le théorème de l'élément primitif (6.171). Il existe $\theta \in \mathbb{K}$ tel que $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\theta)$. Soit $P_\theta \in \mathbb{Q}[X]$ le polynôme minimal de θ . L'extension $\mathbb{K}$ étant de degré δ , et θ étant un générateur, une base de $\mathbb{K}$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ est

$$\{1, \theta, \dots, \theta^{\delta-1}\}. \quad (6.319)$$

Mais par ailleurs la proposition 6.103(2) nous indique qu'une base de $\mathbb{Q}(\theta)$ sur $\mathbb{Q}$ est donnée par

$$\{1, \theta, \dots, \theta^{n-1}\} \quad (6.320)$$

où n est le degré de P_θ . Donc P_θ est de degré δ . Nous nommons $\theta_1, \dots, \theta_\delta$ les racines de P_θ dans un corps de décomposition. Ici nous notons $\theta = \theta_1$ et nous ne prétendons pas que $\theta_k \in \mathbb{K}$. Notons que ces θ_i sont toutes des racines simples de P_θ , sinon nous aurions un facteur irréductible $(X - \theta_k)^2$, et P_θ ne serait pas irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Soit σ_k le morphisme canonique

$$\begin{aligned} \sigma_k: \mathbb{Q}(\theta) &\rightarrow \mathbb{Q}(\theta_k) \\ \sum_i q_i \theta^i &\mapsto \sum_i q_i \theta_k^i \end{aligned} \quad (6.321)$$

Nous avons $\sigma_1: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ qui est l'identité.

Notons N le degré du polynôme $P \in \mathbb{K}[T_1, \dots, T_m]$ dont il est question dans l'énoncé. Nous le décomposons alors en

$$P = \sum_{l=0}^N \sum_{i=1}^m c_{il} T_i^l \quad (6.322)$$

avec $c_{il} \in \mathbb{K}$. Nous voyons $c_{i\cdot}$ comme un élément de $\mathbb{K}^m$ et donc nous écrivons⁸²

$$P = \sum_{l=0}^N \sum_{i=1}^m c_l(\theta)_i T_i^l \quad (6.323)$$

où $c_l \in \mathbb{Q}[X]^m$. Nous pouvons choisir $\deg(c_l) < \delta$ parce que les puissances plus grandes de θ ne génèrent rien de nouveau.

Nous posons aussi

$$P^{\sigma_k} = \sum_{l,i} c_l(\theta_k)_i T_i^l \in \mathbb{Q}(\theta_k)[T_1, \dots, T_m], \quad (6.324)$$

et $\bar{P} = PP^{\sigma_2} \dots P^{\sigma_k}$. Le coefficient de T_i^l dans $\bar{P}$ est

$$\bar{c}_l(\theta_1, \dots, \theta_\delta)_i = \sum_{l_1 + \dots + l_\delta = l} c_{l_1}(\theta_1)_i \dots c_{l_\delta}(\theta_\delta)_i. \quad (6.325)$$

Ce dernier est un polynôme en les θ_k à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Qui plus est, c'est un polynôme symétrique. En effet un terme contenant $\theta_k^a \theta_l^b$ provenant de $c_{l_i}(\theta_k) c_{l_j}(\theta_l)$ a un terme correspondant $\theta_k^b \theta_l^a$ provenant de $c_{l_j}(\theta_k) c_{l_i}(\theta_l)$.

C'est donc le moment d'utiliser le théorème 6.180 à propos des polynômes symétriques élémentaires qui nous dit que les coefficients de $\bar{P}$ sont en réalité des polynômes en ceux de P_θ qui sont dans $\mathbb{Q}$. Donc $\bar{P} \in \mathbb{Q}[T_1, \dots, T_m]$. Par ailleurs nous avons que

$$\deg(\bar{P}) = \delta \deg(P) \quad (6.326)$$

parce que $\bar{P}$ est le produit de δ « copies » de P . De plus $P = P^{\sigma_1}$ divise $\bar{P}$ donc on a bien que si $P(z) = 0$ alors $\bar{P}(z) = 0$. Le polynôme $\bar{P}$ est celui que nous cherchions. $\square$

6.6.3 Relations coefficients racines

ThoOQRgjpl

Théorème 6.183 (Relations coefficients-racines).

Soit le polynôme $P = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$ et r_i ses n racines. Alors nous avons pour chaque $1 \leq k \leq n$ la relation

$$\sigma_k(r_1, \dots, r_n) = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n} \quad (6.327)$$

où σ_k est le k^e polynôme symétrique défini en 6.179.

⁸². Il me semble qu'il manque la somme sur i dans [136].

ExHfHhBr

Exemple 6.184.

Soit le polynôme

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4 \quad (6.328)$$

et ses racines que nous nommons a, b, c . Nous voudrions calculer $a^2 + b^2 + c^2$. D'abord nous décomposons $Q(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2$ en polynômes symétriques élémentaires : $Q(a, b, c) = \sigma_1(a, b, c)^2 - 2\sigma_2(a, b, c)$.

Mais les relations coefficients-racines⁸³ nous donnent $\sigma_1(a, b, c) = -2$ et $\sigma_2(a, b, c) = 3$, donc

$$a^2 + b^2 + c^2 = (-2)^2 - 2 \cdot 3 = -2. \quad (6.329)$$

Cela nous assure déjà qu'au moins une des solutions n'est pas réelle.

Nous pouvons en avoir une vérification directe en calculant explicitement les racines (ce qui est possible pour le degré 3) :

```

1 sage: P(x)=x**3+2*x**2+3*x+4
2 sage: S=solve( P(x)==0,x )
3 sage: sols=[ s.rhs() for s in S ]
4 sage: Q=[ s**2 for s in sols ]
5 sage: s=sum(Q)
6 sage: s.simplify_full()
7 -2

```

tex/frido/VAYVmNRpolynomeSym.py

Notez qu'il faut un peu chipoter pour isoler les solutions depuis la réponse de la fonction `solve`. $\triangle$

En suivant le même cheminement que dans l'exemple, si P est un polynôme de degré n et si r_i sont ses racines, il est facile de calculer $Q(r_1, \dots, r_n)$ pour n'importe quel polynôme symétrique Q

PropTETooGuBYQf

Proposition 6.185 (Annulation de fonctions polynomiales[206]).

Soit $\mathbb{K}$ un corps et P un polynôme à n indéterminées. Nous supposons que P s'annule sur un ensemble de la forme $A_1 \times \dots \times A_n$ avec $\text{Card}(A_j) > \deg_{X_j}(P)$ pour tout j . Alors $P = 0$.

De plus si $P = 0$ alors tous ses coefficients sont nuls⁸⁴.

Démonstration. Nous prouvons le résultat par récurrence sur le nombre n d'indéterminées. Si $n = 1$, cela est le théorème 6.110. Nous classons les monômes du polynôme P par ordre de puissance de X_n et nous le factorisons :

$$P = \sum_{i=1}^m P_i X_n^i \quad (6.330)$$

avec $P_i \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_{n-1}]$. Soit $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in A_1 \times \dots \times A_{n-1}$ et posons

$$Q(T) = P(a_1, \dots, a_{n-1}, T) = \sum_{i=1}^m P_i(a_1, \dots, a_{n-1}) T^i. \quad (6.331)$$

Le polynôme Q s'annule sur A_n avec $\deg(Q) = \deg_{X_n}(P) < \text{Card}(A_n)$ et le théorème 6.110 nous donne $Q = 0$. Or les coefficients des différentes puissances de T dans $Q(T)$ sont les $P_i(a_1, \dots, a_{n-1})$; ils sont donc nuls.

Nous avons montré que le polynôme P_i s'annule pour tout élément de $A_1 \times \dots \times A_{n-1}$, mais nous avons

$$\deg_{X_j}(P_i) \leq \deg_{X_j} P < \text{Card}(A_j), \quad (6.332)$$

donc l'hypothèse de récurrence donne $P_i = 0$. Par suite, $P = 0$ également. $\square$

83. Théorème 6.183

84. L'intérêt de cela est qu'un polynôme de $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ peut s'évaluer sur un élément de n'importe quel corps ; il restera le polynôme nul.

6.7 Minuscule morceau sur la théorie de Galois

Vous trouverez des détails et des preuves à propos de la théorie de Galois dans [207, 122].

Définition 6.186.

Soit $\mathbb{K}$, un corps.

Le **groupe de Galois** d'une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ est le groupe des automorphismes de $\mathbb{L}$ laissant $\mathbb{K}$ invariant.

Le groupe de Galois d'un polynôme sur $\mathbb{K}$ est le groupe de Galois de son corps de décomposition sur $\mathbb{K}$.

Définition 6.187.

Des éléments $b_1, \dots, b_n$ d'une extension de $\mathbb{K}$ sont **algébriquement indépendants** si ils ne satisfont à aucune relation du type

$$\sum \alpha_{i_1 \dots i_n} b_1^{i_1} \dots b_n^{i_n} = 0 \quad (6.333)$$

avec $\alpha_{i_1 \dots i_n} \in \mathbb{K}$.

Nous disons que l'équation

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0 \quad (6.334)$$

est l'**équation générale** de degré n si les coefficients a_i sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{K}$.

THOooDTCXooTIOSe

Théorème 6.188.

Le groupe de Galois d'un polynôme de degré n est isomorphe au groupe symétrique S_n .

CORooBRKTooBWldRC

Corolaire 6.189 ([208]).

L'équation générale de degré n est résoluble par radicaux si et seulement si $n \leq 5$.

Chapitre 7

Topologie générale

7.1 Éléments généraux de topologie

7.1.1 Définitions et propriétés de base

DefTopologieGene

Définition 7.1 ([209]).

Soient X , un ensemble et $\mathcal{T}$, une partie de l'ensemble de ses parties qui vérifie les propriétés suivantes.

- (1) Les ensembles $\emptyset$ et X sont dans $\mathcal{T}$,
- (2) Une union quelconque¹ d'éléments de $\mathcal{T}$ est dans $\mathcal{T}$.
- (3) Une intersection finie d'éléments de $\mathcal{T}$ est dans $\mathcal{T}$.

ITEMooGJAPooOWIOzv

Un tel choix $\mathcal{T}$ de sous-ensembles de X est une **topologie** sur X , et les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés des **ouverts**. On dit aussi que $(X, \mathcal{T})$ (voire simplement X lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté) est un **espace topologique**.

Deux espaces topologiques sont isomorphes quand il existe une bijection continue d'inverse continue. Nous verrons ça en la définition 7.51.

7.1.2 Base de topologie

DEFooLEHPoolINmpi

Proposition-Définition 7.2 (Base de topologie[210, 211]).

Soit un espace topologique $(X, \mathcal{T})$. Soit une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

ITEMooCTPEooRCaxvx

- (1) Tout élément de $\mathcal{T}$ est une réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.
- (2) Pour tout $x \in X$ et pour tout ouvert $\mathcal{O}$ contenant x , il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que

ITEMooWOVWooRozYmM

$$x \in B \subset \mathcal{O}. \quad (7.1)$$

Une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}$ qui vérifie ces propriétés est une **base de topologie** pour X .

Démonstration. En deux parties.

- (1) **(1) implique (2)** Soient $x \in X$ et $\mathcal{O}$ un ouvert contenant x . Étant donné que $\mathcal{O}$ est une réunion d'éléments de $\mathcal{B}$, il y a au moins un $B \in \mathcal{B}$ contenant x . Ce B vérifie $x \in B \subset \mathcal{O}$.
- (2) **(2) implique (1)** Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de X ; pour chaque $x \in \mathcal{O}$ nous considérons un ouvert $B(x) \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B(x) \subset \mathcal{O}$. Nous avons alors $\mathcal{O} = \bigcup_{x \in \mathcal{O}} B(x)$.

□

1. Par « quelconque » nous entendons vraiment quelconque : c'est-à-dire indicée par un ensemble qui peut autant être $\mathbb{N}$ que $\mathbb{R}$ qu'un ensemble encore considérablement plus grand.

7.1.3 Fermés

DEFermeooNSAAooHxZbAo

Définition 7.3.

Si X est un espace topologique, un sous-ensemble F de X est dit **fermé** si son complémentaire, $X \setminus F$, est ouvert.

DEFVoisinageooGHZCooLRepXY

Définition 7.4.

Si $a \in X$, on dit que $V \subset X$ est un **voisinage** de a si il existe un ouvert $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$ tel que $a \in \mathcal{O}$ et $\mathcal{O} \subset V$.

DEFooBWZlaoXotZLA

Définition 7.5 (Base de voisinage[212]).

Soient un espace topologique X ainsi que $a \in X$. Un ensemble $\{U_i\}_{i \in I}$ de voisinages de a est une **base de voisinages** de a si pour tout voisinage V de a , il existe $k \in I$ tel que $U_k \subset V$.

LemQYUJwPC

Lemme 7.6.

Union et intersection de fermés.

ITEMooBHIGooMvkUtX

(1) Une intersection quelconque de fermés est fermée.

ItemKJYVooMBmMbG

(2) Une union finie de fermés est fermée.

Démonstration. Soit $\{F_i\}_{i \in I}$ un ensemble de fermés ; nous avons

$$\left(\bigcap_{i \in I} F_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} F_i^c. \quad (7.2)$$

Le membre de droite est une union d'ouverts, c'est donc un ouvert ; donc l'intersection qui apparaît dans le membre de gauche est le complémentaire d'un ouvert : c'est donc un fermé.

De la même manière, le complémentaire d'une union finie de fermés est une intersection finie de complémentaires de fermés, et est donc ouvert². $\square$

LEMooSFMZooBguLdf

Lemme 7.7.

Ouverts et fermés.

ITEMooFPGVooUZHkA

(1) Si F est fermé et si $\mathcal{O}$ est ouvert, alors $F \setminus \mathcal{O}$ est fermé.

ITEMooULNTooKQyrJb

(2) Si F est fermé dans l'ouvert $\mathcal{O}$, alors $\mathcal{O} \setminus F$ est ouvert.

Démonstration. Nous savons par le lemme 1.44 que $(F \setminus \mathcal{O})^c = F^c \cup \mathcal{O}$. Vu que F^c et $\mathcal{O}$ sont ouverts, l'union est ouverte. Le complémentaire de $F \setminus \mathcal{O}$ étant ouvert, il est fermé.

Pour le second point, nous considérons le complémentaire. Si nous nommons X l'espace topologique, nous avons

$$X \setminus (\mathcal{O} \setminus F) = (X \setminus \mathcal{O}) \cup F. \quad (7.3)$$

Étant une union de fermés, cela est fermé (lemme 7.6). Donc $\mathcal{O} \setminus F$ est ouvert. $\square$

Dans un espace topologique, nous avons une caractérisation très importante des ouverts.

ThoPartieOUvpartouv

Théorème 7.8.

Une partie d'un espace topologique est ouverte si et seulement si elle contient un ouvert autour de chacun de ses éléments.

Démonstration. Soit X un espace topologique et $A \subset X$. Le sens direct est évident : A lui-même est un ouvert autour de $x \in A$, qui est inclus dans X .

Pour le sens inverse, nous supposons que A contienne un ouvert autour de chacun de ses points. Pour chaque $x \in A$, choisissons $\mathcal{O}_x \subset A$ un ouvert autour de x . Alors,

$$A = \bigcup_{x \in A} \mathcal{O}_x \quad (7.4)$$

EqAUniondesOx

2. Un bon exercice est d'écrire ces unions et intersections, pour se convaincre que ça fonctionne.

en effet, d'une part, $A \subset \bigcup_{x \in A} \mathcal{O}_x$ parce que chaque élément x de A est dans le $\mathcal{O}_x$ correspondant, par construction ; et d'autre part, $\bigcup_{x \in A} \mathcal{O}_x \subset A$ parce que chacun des $\mathcal{O}_x$ est inclus dans A .

Ainsi, A est égal à une union d'ouverts, cela prouve que A est un ouvert. $\square$

Le lemme 7.292 est une version particulière de celui-ci, pour l'espace topologique $\mathbb{R}$. Une autre application typique est la proposition 7.2 et le théorème 7.262.

7.1.4 Quelques exemples

7.1.4.1 Une première vague

DefTopologieGrossiere

Exemple 7.9.

Soit un ensemble quelconque X . L'ensemble de parties $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ est une topologie sur X .

La topologie ainsi définie sur X est appelée **topologie grossière**. $\triangle$

DefTopologieDiscrete

Exemple 7.10.

Pour un ensemble X quelconque, on considère l'ensemble $\mathcal{T}$ constitué de toutes les parties de X . Avec cet ensemble, on confère à nouveau une structure d'espace topologique à X ; toutes les parties sont des ouverts, et aussi des fermés. La topologie ainsi posée sur X est appelée **topologie discrète**. $\triangle$

EXooLAOSooJtjJnu

Exemple 7.11 (Toutes les topologies d'un ensemble à 3 éléments).

On pose $X = \{1, 2, 3\}$. Alors on peut munir X de 29 topologies différentes[213] ; saurez-vous les retrouver toutes ? $\triangle$

⚠ Avertissement/question au lecteur !! 7.12

Je n'ai pas réfléchi à faire 7.11. Ou au moins pas comment le faire autrement qu'en passant en revue les 2^8 possibilités. Si vous savez comment faire, écrivez-moi.

7.1.4.2 Topologie engendrée

DefTopologieEngendree

Proposition-Définition 7.13 (Topologie engendrée, prébase[214]).

Soient un ensemble X , et $\mathcal{T}_0$ un ensemble de parties de X . Nous définissons $\tau(\mathcal{T}_0)$ comme étant l'union quelconque d'intersections finies d'éléments de $\mathcal{T}_0$.

Plus précisément, nous faisons les constructions suivantes :

- (1) Nous notons $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ les éléments de $\mathcal{T}_0$ indexés par l'ensemble I .
- (2) Soit $B(\mathcal{T}_0)$ l'ensemble des intersections finies d'éléments de $\mathcal{T}_0$:

$$B(\mathcal{T}_0) = \left\{ \bigcap_{j \in J} \mathcal{O}_j \right\}_{J \text{ fini dans } I} \quad (7.5)$$

où nous convenons que $\bigcap_{j \in \emptyset} \mathcal{O}_j = X$ ³.

- (3) Soit A un ensemble qui indexe $B(\mathcal{T}_0)$:

$$B(\mathcal{T}_0) = \{B_\alpha\}_{\alpha \in A}. \quad (7.6)$$

- (4) Nous posons

$$\tau(\mathcal{T}_0) = \left\{ \bigcup_{\alpha \in S} B_\alpha \right\}_{S \subset A}. \quad (7.7)$$

Alors :

ITEMooTCGTTooJwfpel

- (1) $\tau(\mathcal{T}_0)$ est une topologie sur X .
- (2) Toute topologie sur X contenant $\mathcal{T}_0$ contient $\tau(\mathcal{T}_0)$.

ITEMooBJVVooEVRgdq

La topologie $\tau(\mathcal{T}_0)$ est appelée la **topologie engendrée** par $\mathcal{T}_0$. La partie $\mathcal{T}_0$ est appelée **prébase** de la topologie $\tau(\mathcal{T}_0)$.

3. Bref, nous mettons X dans $B(\mathcal{T}_0)$.

Démonstration. Pour (1), nous devons montrer les différents points de la définition 7.1 d'une topologie.

- (1) L'ensemble vide est dans $\tau(\mathcal{T}_0)$ parce que $\emptyset = \bigcup_{\alpha \in \emptyset} B_\alpha$. L'ensemble X est également dans $\tau(\mathcal{T}_0)$ parce que $X \in B(\mathcal{T}_0)$.
- (2) Soient $\{D_l\}_{l \in L}$ des éléments de $\tau(\mathcal{T}_0)$ indexés par un ensemble L . Pour chaque l nous avons un ensemble $S \subset A$ tel que $D_l = \bigcup_{\alpha \in S_l} B_\alpha$. En posant $S = \bigcup_{l \in L} S_l$ nous avons

$$\bigcup_{l \in L} D_l = \bigcup_{\alpha \in S} B_\alpha \in \tau(\mathcal{T}_0). \quad (7.8)$$

Donc $\tau(\mathcal{T}_0)$ est stable par union quelconque.

- (3) Soient D_1 et D_2 des éléments de $\tau(\mathcal{T}_0)$. Nous posons $D_i = \bigcup_{\alpha \in S_i} B_\alpha$. Alors nous avons

$$\bigcup_{\alpha \in S_1} B_\alpha \cap \bigcup_{\beta \in S_2} B_\beta = \bigcup_{\alpha, \beta \in S_1 \times S_2} (B_\alpha \cap B_\beta). \quad (7.9)$$

Mais B_α et B_β sont dans $B(\mathcal{T}_0)$. Donc $B_\alpha \cap B_\beta \in B(\mathcal{T}_0)$. Donc (7.9) est une union d'éléments de $B(\mathcal{T}_0)$.

Au final nous avons prouvé que $\tau(\mathcal{T}_0)$ est une topologie sur X .

Nous démontrons à présent le point (2). Soit une topologie μ sur X contenant $\tau(\mathcal{T}_0)$. Puisque μ est une topologie, les intersections finies d'éléments de μ sont dans μ , donc, en suivant les notations de 7.13, $B(\mathcal{T}_0) \subset \mu$.

Comme toutes les unions d'éléments de μ sont dans μ , l'inclusion de $B(\mathcal{T}_0)$ dans μ implique celle de $\tau(\mathcal{T}_0)$. $\square$

Dès que nous avons une topologie, nous avons une notion de convergence de suite.

Définition 7.14 (Convergence de suite).

Une suite (x_n) d'éléments de X **converge** vers un élément x de X si pour tout ouvert $\mathcal{O}$ contenant x , il existe un $K \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq K$ implique $x_k \in \mathcal{O}$.

Nous disons alors que x est une **limite** de (x_k) .

La proposition suivante montre que vérifier la convergence d'une suite sur une prébase suffit pour vérifier la convergence.

Proposition 7.15.

Soit $\mathcal{T}_0$ un ensemble de parties de l'ensemble X . Soient une suite (x_n) dans X ainsi que $x \in X$. Nous supposons que la suite (x_n) satisfait la propriété suivante : pour tout $A \in \mathcal{T}_0$ tel que $x \in A$, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq K$ implique $x_k \in A$.

Alors nous avons la convergence de suite⁴

$$x_n \xrightarrow{(X, \tau(\mathcal{T}_0))} x. \quad (7.10)$$

Démonstration. Nous considérons la topologie $\tau(\mathcal{T}_0)$ sur X . Soit un ouvert $\mathcal{O}$ contenant x . Nous le décomposons en suivant (à l'envers) la construction de la définition 7.13 :

$$\mathcal{O} = \bigcup_{\alpha \in S} B_\alpha \quad (7.11)$$

avec $B_\alpha \in B(\mathcal{T}_0)$. Donc pour chaque α , il existe un ensemble fini J_α tel que

$$B_\alpha = \bigcap_{j \in J_\alpha} A_j \quad (7.12)$$

avec $A_j \in \mathcal{T}_0$. Puisque $x \in \mathcal{O}$, nous avons un α_0 tel que $x \in B_{\alpha_0}$. Donc $x \in A_j$ pour tous les $j \in J_{\alpha_0}$.

Pour chaque $j \in J_{\alpha_0}$, il existe $K_j \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq K_j$ implique $x_k \in A_j$. Comme J_{α_0} est un ensemble fini, nous pouvons poser $K = \max_{j \in J_{\alpha_0}} K_j$.

Maintenant, si $k \geq K$, nous avons $x_k \in A_j$ pour tout j , et donc $x_k \in B_{\alpha_0}$. Par conséquent, $x_k \in \mathcal{O}$. $\square$

4. Définition 7.14.

7.1.5 Adhérence, fermeture, intérieur, point d'accumulation et point isolé

DEFooSVWMooLpAVZRInt

Définition 7.16.

Soient un espace topologique X et une partie A de X .

- (1) Un point $x \in X$ est **intérieur** à A si il existe un ouvert $\mathcal{O}$ tel que $x \in \mathcal{O} \subset A$.
- (2) L'**intérieur** de A , notée $\text{Int}(A)$, est l'union de tous les ouverts de X contenus dans A .

Lemme 7.17.

Quelques propriétés en vrac.

ITEMooHLIMooJEacKt

- (1) L'intérieur de A est l'ensemble de tous les points intérieurs de A .
- (2) Pour tout $A \subset X$, l'ensemble $\text{Int}(A)$ est un ouvert.
- (3) On a $\text{Int}(A) \subset A$
- (4) Nous avons $\text{Int}(A) = A$ si et seulement si A est un ouvert.

ITEMooYTXSooMyiBpMgzK

ITEMooYYFDooHgsRfV

ITEMooTDXFooFdyLeO

Démonstration. En plusieurs morceaux.

- (1) **(1)** Si $a \in \text{Int}(A)$, alors a est dans un ouvert contenu dans A , et donc a est un point intérieur à A . Dans l'autre sens, si a est un point intérieur à A , alors il existe un ouvert $\mathcal{O} \subset A$ contenant a . Puisque $\mathcal{O}$ est un ouvert dans A , nous avons $\mathcal{O} \subset \text{Int}(A)$, et en particulier $a \in \text{Int}(A)$.
- (2) **(2)** L'ensemble $\text{Int}(A)$ est une union d'ouverts.
- (3) **(3)** L'ensemble $\text{Int}(A)$ est une union d'ensembles contenus dans A .
- (4) **(4)** Supposons que $\text{Int}(A) = A$. Puisque $\text{Int}(A)$ est ouvert (point **(3)**), A est ouvert aussi. Dans l'autre sens, nous supposons que A est ouvert. Puisque A est un ouvert contenu dans A , nous avons $A \subset \text{Int}(A)$. Mais comme $\text{Int}(A) \subset A$, nous avons l'égalité.

□

7.1.5.1 Adhérence et fermeture

7.18.

Les mots « adhérence » et « fermeture » sont synonymes. Dans le Frido, nous allons utiliser les notations $\text{Adh}(A)$ et $\bar{A}$ de façon opportuniste. La notation $\bar{z}$ définissant le complexe conjugué de z , si A est une partie de $\mathbb{C}$, il est plus sûr d'écrire $\text{Adh}(A)$ pour la fermeture, plutôt que $\bar{A}$.

Au contraire, pour éviter une quantité excessive de parenthèses, nous écrirons $\overline{B(a, r)}$ pour la boule fermée.

DEFooSVWMooLpAVZR

Définition 7.19.

Soient un espace topologique X et une partie A de X . Un point $x \in X$ est **adhérent** à A si tout ouvert de X contenant x a une intersection non vide avec A . L'ensemble des points d'adhérence de A est noté $\text{Adh}(A)$ ou $\bar{A}$.

LEMooILNCooOFZaTe

Lemme 7.20.

À propos d'adhérence.

- (1) L'adhérence de A est l'intersection de tous les fermés de X contenant A .
- (2) Nous avons l'égalité

$$\text{Int}(A)^c = \text{Adh}(A^c). \quad (7.13)$$

Démonstration. Commençons par prouver la dernière égalité d'ensembles. On a les équivalences entre les affirmations suivantes, pour tout $x \in X$:

- x n'est pas dans $\text{Int}(A)$;
- il n'y a aucun ouvert contenant x et inclus dans A ;
- tout ouvert contenant x a une intersection non-vide avec A^c ;
- x est dans $\text{Adh}(A^c)$.

Nous allons à présent montrer l'égalité d'ensembles $\text{Int}(A)^c = \text{Adh}(A^c)$ en prouvant la double inclusion.

- (1) Si $\text{Int}(A)^c \subset \text{Adh}(A^c)$ Soit $x \in \text{Int}(A)^c$. Nous devons prouver que $x \in \text{Adh}(A^c)$. Soit un ouvert $\mathcal{O}$ contenant x . Vu que x n'est pas dans l'intérieur de A , l'ouvert $\mathcal{O}$ est pas inclus dans A , et donc $\mathcal{O} \cap A^c$ est non vide.

Nous avons montré que tout ouvert contenant x intersecte A^c . Autrement dit : $x \in \text{Adh}(A^c)$.

- (2) $\text{Adh}(A^c) \subset \text{Int}(A)^c$

Soit $x \in \text{Adh}(A^c)$. Tout ouvert contenant x intersecte A^c , et ne peut donc pas être inclus dans A . Si aucun ouvert contenant x n'est inclus dans A , alors x n'est pas dans $\text{Int}(A)$.

□

PROPooTTWBooOyxWzr

Proposition 7.21 ([1]).

Soient un espace topologique X , et une partie $A \subset X$. Nous avons

$$X = \text{Int}(A) \cup \overline{X \setminus A}, \quad (7.14)$$

et cette union est disjointe.

Démonstration. En deux parties.

- (1) **Disjoint** Si $x \in \text{Int}(A)$, alors il existe un ouvert U vérifiant $x \in U \subset A$. Autrement dit, $U \cap (X \setminus A) = \emptyset$. Donc x n'est pas dans $\overline{X \setminus A}$
- (2) **Union** Soit $x \in X$. Il y a deux possibilités : soit il existe un ouvert U vérifiant $x \in U \subset A$, soit ça n'existe pas. Si ça existe, alors $x \in \text{Int}(A)$. Sinon, ça veut dire que tout ouvert contenant x intersecte $X \setminus A$, et donc $x \in \overline{X \setminus A}$.

□

RemAdhFerre

Remarque 7.22.

Comme corolaire du lemme 7.20, et grâce aux remarques faites pour les intérieurs, on obtient que pour $A \subset X$:

- (1) l'ensemble $\bar{A}$ est fermé : c'est en effet le complémentaire d'un ouvert, précisément l'intérieur de A^c ;
- (2) A est fermé si et seulement si $\bar{A} = A$: en effet, A est fermé si et seulement si A^c est ouvert, si et seulement si l'intérieur de A^c est A^c lui-même ; or, l'intérieur de A^c est le complémentaire de $\bar{A}$ par le lemme 7.20, si bien que A est fermé si et seulement si $(\bar{A})^c = A^c$, ou encore... ce qu'on affirmait au début.

7.1.5.2 Densité

DefEnsembleDense

Définition 7.23.

Soit X un espace topologique. Un sous-ensemble A de X est **dense** dans X si $\bar{A} = X$.

LEMooITBVooBUypve

Lemme 7.24 ([1]).

Soit un espace topologique X . Soient $A \subset X$ et un ouvert non vide $U \in \tau_X$. Si $U \subset \text{Adh}(A)$ alors $U \cap A \neq \emptyset$.

Démonstration. Soit $x \in U$. Vu que $x \in \text{Adh}(A)$, tout ouvert contenant x intersecte A . La partie U est un de ces ouverts. Donc $U \cap A \neq \emptyset$.

□

PROPooTKHVooMderxm

Proposition 7.25 ([1]).

Soient un espace topologique X , une partie A et $Q \subset A$. Si Q est fermé dans X et dense dans A , alors $Q = A$.

Démonstration. Soit $a \in A$. Nous supposons que a n'est pas dans Q , c'est-à-dire que $a \in Q^c$. Vu que Q est fermé, le complémentaire est ouvert, et il existe un ouvert $U \in \tau_X$ tel que $a \in U \subset Q^c$. Cela contredit la densité de Q dans A parce que tout ouvert contenant un élément de A devrait intersecter Q .

□

DEFooQUNJooWZasqV

Définition 7.26.

Une partie A d'un espace topologique X est **discrète** si pour tout $a \in A$, il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de X tel que $\mathcal{O} \cap A = \{a\}$.

7.1.5.3 Topologie induite

DefVLrgWDB

Proposition-Définition 7.27 (Topologie induite[215]).

Soit un espace topologique (X, τ_X) , et soit $Y \subset X$. Nous définissons

$$\tau_Y = \{Y \cap \mathcal{O} \text{ tel que } \mathcal{O} \in \tau_X\}. \quad (7.15)$$

L'ensemble τ_Y est une topologie sur Y .

Elle est la **topologie induite**.

Démonstration. Il s'agit de vérifier les conditions de la définition 7.1.

- (1) $Y \in \tau_Y$ Parce que $Y = X \cap Y$ et que X est un ouvert de X .
- (2) $\emptyset \in \tau_Y$ Parce que $\emptyset = Y \cap \emptyset$ et que $\emptyset$ est un ouvert de X .
- (3) Union quelconque Soient des ouverts A_i de X . Nous avons

$$\bigcup_{i \in I} Y \cap A_i = Y \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right). \quad (7.16)$$

EQooJUYHooJugQXG

Comme les A_i sont des ouverts de X , leur union est encore un ouvert de X . Donc (7.16) est encore dans τ_Y .

- (4) Intersection finie Nous avons

$$\bigcap_{i \in I} Y \cap A_i = Y \cap \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right). \quad (7.17)$$

□

LemBWSUooCCGvax

Lemme 7.28 ([1]).

Soit (X, τ_X) un espace topologique et $S \subset X$, un fermé de X sur lequel nous considérons la topologie induite τ_S . Si F est un fermé de (S, τ_S) alors F est fermé de (X, τ_X) .

Démonstration. Nous savons que $F \subset S$ et que le complémentaire de F dans S est un ouvert de (S, τ_S) : il existe un ouvert $\Omega \in \tau_X$ tel que $S \setminus F = S \cap \Omega$. Si maintenant nous considérons le complémentaire de F dans X nous avons

$$F^c = (S \setminus F) \cup (X \setminus S) = (S \cap \Omega) \cup S^c = (S \cap \Omega) \cup (S^c \cap \Omega) \cup S^c = \Omega \cup S^c. \quad (7.18)$$

Puisque Ω et S^c sont des ouverts de X , l'union est un ouvert. Donc $F^c \in \tau_X$ et F est un fermé de X . □

DEFooEXHFooKIKcQD

Définition 7.29 ([216]).

Si X est un espace topologique, un **sous-espace topologique** de X est une partie de X munie de la topologie induite⁵.

PROPooQFIMooYmgjhA

Proposition 7.30 ([1]).

Soit une partie $\mathcal{O}$ de l'espace topologique X . Les fermés de $\mathcal{O}$ sont les parties de la forme $F \cap \mathcal{O}$ où F est fermé de X .

Démonstration. En deux parties.

5. Définition 7.27.

- (1) **Dans un sens** Soit un fermé A de $\mathcal{O}$. La partie $\mathcal{O} \setminus A$ est ouverte dans $\mathcal{O}$, de telle sorte qu'il existe un ouvert S de X satisfaisant $\mathcal{O} \setminus A = S \cap \mathcal{O}$. La partie $F = X \setminus S$ est fermée dans X , et nous allons prouver que $A = (X \setminus S) \cap \mathcal{O}$. D'abord nous avons

$$(X \setminus S) \cap \mathcal{O} = \mathcal{O} \setminus S. \quad \text{EQooORVBooCvgCgw} \quad (7.19)$$

Nous avons l'union disjointe $\mathcal{O} = (\mathcal{O} \setminus S) \cup (\mathcal{O} \cap S)$. Tenant compte du fait que $\mathcal{O} \cap S = \mathcal{O} \setminus A$, nous avons l'union disjointe

$$\mathcal{O} = (\mathcal{O} \setminus S) \cup (\mathcal{O} \setminus A). \quad \text{EQooXKFPVooMoYECB} \quad (7.20)$$

Par ailleurs, vu que $A \setminus \mathcal{O}$, nous avons également l'union disjointe

$$\mathcal{O} = A \cup (\mathcal{O} \setminus A) \quad \text{EQooQEMTooLEZwuy} \quad (7.21)$$

En comparant (7.20) avec (7.21), nous trouvons $A = \mathcal{O} \cap S$.

En repartant de (7.19), nous avons maintenant

$$F \cap \mathcal{O} = (X \setminus S) \cap \mathcal{O} = \mathcal{O} \setminus S = A. \quad (7.22)$$

- (2) **Dans l'autre sens** Soit un fermé F de X . Montrons que $F \cap \mathcal{O}$ est fermé dans $\mathcal{O}$. Pour cela nous prouvons que le complémentaire (dans $\mathcal{O}$) est ouvert dans $\mathcal{O}$. Nous avons :

$$\mathcal{O} \setminus (F \cap \mathcal{O}) = \mathcal{O} \cap (X \setminus F). \quad (7.23)$$

Comme F est fermé, $X \setminus F$ est ouvert.

□

PROPooNZTTTooTrKoVF

Proposition 7.31 ([1]).

Soient un espace topologique X et une partie $A \subset X$. Nous notons τ_X la topologie de X et τ_A la topologie induite de X vers A . Si (A, τ_A) est un espace topologique compact, alors A est compact dans X .

Démonstration. Soit un recouvrement $\{U_i\}_{i \in I}$ de A par des ouverts de X . La famille $\{U_i \cap A\}_{i \in I}$ sont des ouverts de τ_A recouvrant A . Donc il existe une partie finie $I_0 \subset I$ telle que $\{U_i \cap A\}_{i \in I_0}$ recouvre A . Dans ce cas, la famille $\{U_i\}_{i \in I_0}$ recouvre également A . □

PROPooBKPEooQupIUx

Proposition 7.32 ([1]).

Soient un espace topologique X , et une partie $M \subset X$. Nous notons τ_X la topologie de X et τ_M la topologie induite de X vers M . Soit un τ_X -compact $K \subset M$. Alors K est τ_M -compact.

Démonstration. Soient des τ_M -ouverts $\{A_i\}_{i \in I}$ recouvrant K . Par définition de la topologie induite nous avons $A_i = M \cap U_i$ avec $U_i \in \tau_X$. Les parties $\{U_i\}_{i \in I}$ recouvrent K et il existe donc une partie finie $I_0 \subset I$ telle que $\{U_i\}_{i \in I_0}$ recouvre K .

Donc $\{U_i \cap M\}_{i \in I_0}$ recouvre également K . Donc $\{A_i\}_{i \in I_0}$ recouvre K qui est donc bien τ_M -compact. □

PROPooHqHWooFHHAXP

Proposition 7.33 ([1]).

Soient un espace topologique (X, τ_X) , une partie A ainsi que $x \in A$. Si $\mathcal{B}$ est une base de topologie τ_X autour de x , alors $\{B \cap A \text{ tel que } B \in \mathcal{B}\}$ est une base de la topologie induite τ_A autour de x .

LEMooCXHEooKNmLma

Lemme 7.34 ([1]).

Soient un espace topologique X ainsi que $U \subset X$ (pas spécialement ouvert). Soit $A \subset U$. Nous avons

$$\text{Adh}_U(A) = \text{Adh}_X(A) \cap U \quad (7.24)$$

Si F est fermé dans U , alors

$$F = \text{Adh}_X(F) \cap U. \quad \text{EQooMZOOooKHfZTk} \quad (7.25)$$

Démonstration. En deux inclusions.

- (1) **Sens direct** Soit $x \in \text{Adh}_U(A)$. Par définition nous avons $x \in U$. Nous devons prouver que $x \in \text{Adh}_X(A)$. Pour cela nous considérons un ouvert $\mathcal{O} \in \tau_X$ contenant x . La partie $\mathcal{O} \cap U$ est un ouvert de U contenant x . Vu que $x \in \text{Adh}_U(A)$, nous avons $(\mathcal{O} \cap U) \cap A \neq \emptyset$. À fortiori nous avons $\mathcal{O} \cap A \neq \emptyset$.
- (2) **L'autre sens** Soit $x \in \text{Adh}_X(A) \cap U$. Pour prouver que $x \in \text{Adh}_U(A)$ nous considérons $\mathcal{O} \in \tau_U$ contenant x , et nous prouvons que $\mathcal{O} \cap A \neq \emptyset$. Comme $\mathcal{O}$ est un ouvert de U , il existe un ouvert $\mathcal{O}' \in \tau_X$ tel que $\mathcal{O} = \mathcal{O}' \cap U$.
Donc $\mathcal{O}'$ est un ouvert de X vérifiant $x \in \mathcal{O}'$. Vu que $x \in \text{Adh}_X(A)$ nous avons aussi $\mathcal{O}' \cap A \neq \emptyset$. Il existe donc un y vérifiant

$$y \in \mathcal{O}' \cap A \subset \mathcal{O}' \cap U = \mathcal{O}. \quad (7.26)$$

Nous avons donc aussi $y \in \mathcal{O} \cap A$, comme il le fallait.

La formule (7.25) est la même, en tenant compte du fait que $\text{Adh}_U(F) = F$ lorsque F est fermé dans U . □

LEMooXCNDooDkbaip

Lemme 7.35 ([1, 217]).

Soient un espace topologique X un ouvert $U \in \tau_X$. Nous considérons $A \in \bar{\tau}_U$ ⁶ tel que $\text{Int}_U(A) = \emptyset$. Alors

$$\text{Int}_X(\text{Adh}_X(A)) = \emptyset. \quad (7.27)$$

Démonstration. Nous considérons $U_1 \in \tau_X$ tel que $U_1 \subset \text{Adh}_X(A)$. Le but est de prouver que $U_1 = \emptyset$. Nous avons

- (1) $U_1 \cap U \in \tau_X$ en tant qu'intersection d'ouverts.
- (2) $U_1 \cap U \in \tau_U$ par définition de la topologie induite.

De plus en utilisant le lemme 7.34,

$$U_1 \cap U \subset \text{Adh}_X(A) \cap U = \text{Adh}_U(A) = A. \quad (7.28)$$

Donc $U_1 \cap U$ est un ouvert de U contenu dans A dont l'intérieur dans U est vide. Bref : $U_1 \cap U = \emptyset$.

Nous supposons par l'absurde que $U_1 \neq \emptyset$. Alors le lemme 7.24 dit que $U_1 \cap A \neq \emptyset$. Soit $x \in U_1 \cap A$. Nous avons :

$$x \in U_1 \cap A \subset U_1 \cap U. \quad (7.29)$$

Et comme nous avons déjà prouvé que $U_1 \cap U = \emptyset$, nous avons une contradiction. □

LEMooLKHEooRqrqkA

Lemme 7.36 ([1]).

Soit un espace topologique X . Soient A ouvert dans X et $S \subset X$. Si $A \cap S = \emptyset$, alors $A \cap \bar{S} \neq \emptyset$

Démonstration. Supposons par l'absurde que $x \in A \cap \bar{S}$. Vu que A est ouvert, il existe un voisinage V de x contenu dans A (théorème 7.8). Étant donné que $x \in \bar{S}$, l'intersection $V \cap S$ est non vide. Tout élément de $V \cap S$ est dans $A \cap S$. □

PROPooRRWQooASUUIr

Proposition 7.37 ([1]).

Soit une bijection continue $f: X \rightarrow Y$. Soient $A \subset X$ et $B = f(A) \subset Y$ sur lesquels nous considérons les topologies induites. Alors la restriction $f: A \rightarrow B$ est continue.

Démonstration. Soit un ouvert $\mathcal{O}$ dans B . Il existe un ouvert $\mathcal{O}'$ de Y tel que $\mathcal{O} = \mathcal{O}' \cap B$. Vu que f est continue, la partie $f^{-1}(\mathcal{O}')$ est ouverte dans X . Vu que f est une bijection nous avons de plus

$$f^{-1}(\mathcal{O}) = f^{-1}(\mathcal{O}' \cap B) \quad (7.30a)$$

$$= f^{-1}(\mathcal{O}') \cap f^{-1}(B) \quad (7.30b)$$

$$= f^{-1}(\mathcal{O}') \cap A. \quad (7.30c)$$

Donc $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de A . □

6. $\bar{\tau}_U$ est l'ensemble des fermés de U .

LEMooPONCooJbuBMI

Lemme 7.38 ([1]).

Soient deux espaces topologiques X et Y . Soit $Q \subset X$ sur lequel nous considérons la topologie induite depuis X . Soient encore $a \in X$ et une base $\mathcal{B}$ de voisinages⁷ de X autour de a .

Nous considérons une application $f: Y \rightarrow Q$ telle que $f^{-1}(Q \cap B)$ est ouvert pour tout $B \in \mathcal{B}$. Alors f est continue en a .

Démonstration. Soit un voisinage ouvert W de $f(a)$ dans Q . Nous devons trouver un voisinage ouvert V de a tel que $f(V) \subset W$.

Vu que W est ouvert autour de $f(a)$ pour Q , il existe un ouvert W' de X tel que $W = W' \cap Q$. Et comme W' est un ouvert contenant $f(a)$, il existe un élément $B \in \mathcal{B}$ tel que $f(a) \in B \subset W'$. Par hypothèse la partie $f^{-1}(B \cap Q)$ est ouverte. Donc en posant $V = f^{-1}(B \cap Q)$ on est bon. $\square$

LEMooGANPooUJZmnM

Lemme 7.39 ([1]).

Soient deux espaces topologiques U et V . Nous supposons avoir :

- (1) Une bijection continue d'inverse continue⁸ $f: U \rightarrow V$
- (2) Un fermé $H \subset V$ sur lequel nous considérons la topologie induite de V ,
- (3) Un ferme $\mathcal{H} \subset U$ sur lequel nous considérons la topologie induite de U ,
- (4) $f(\mathcal{H}) \subset H$
- (5) Une partie $A \subset \mathcal{H}$ telle que $f(A)$ est ouverte dans H .

Alors

ITEMooIYGLooTrxugS

- (1) A est ouvert dans $\mathcal{H}$.
- (2) L'application $f: A \rightarrow f(A)$ est un homéomorphisme.

ITEMooDZHUooFJRRfi

Démonstration. Vu que $f(A)$ est ouvert dans H , il existe un ouvert W de V tel que $f(A) = H \cap W$. À partir de là, nous prouvons plusieurs choses.

- (1) $A \subset \mathcal{H} \cap f^{-1}(W)$ Nous avons $A \subset \mathcal{H}$ par définition. De plus $f(A) = H \cap W$, donc $f(A) \subset W$ et donc

$$A = f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(W). \quad (7.31)$$

- (2) $\mathcal{H} \cap f^{-1}(W) \subset A$ Soit $x \in \mathcal{H} \cap f^{-1}(W)$. Vu que $f(\mathcal{H}) \subset H$, nous avons $f(x) \in H$. Mais évidemment $f(x) \in f(f^{-1}(W)) = W$. Donc $f(x) \in W$. Donc

$$f(x) \in H \cap W = f(A). \quad (7.32)$$

Vu que f est une bijection, nous en déduisons que $x \in A$.

- (3) **Conclusion** Nous avons prouvé que

$$A = \mathcal{H} \cap f^{-1}(W) \quad (7.33)$$

Étant donné que W est ouvert dans U et que f est continue, $f^{-1}(W)$ est ouvert de U . Donc A est ouvert de $\mathcal{H}$.

Cela conclut la preuve de notre point (1).

En ce qui concerne le point (2), c'est la proposition 7.37 qui fait le boulot. $\square$

7.1.6 Topologie sur $\mathbb{Q}$

Si A est un ouvert de X , on pourrait croire que la topologie induite n'a rien de spécial. Il est vrai que B sera ouvert dans A si et seulement si il est ouvert dans X , mais certaines choses surprenantes se produisent tout de même.

7. définition 7.5.

8. C'est à dire un homéomorphisme.

LEMooIGQCooOrroHT

Lemme 7.40.

La partie $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est d'intérieur vide, et sa fermeture est $\mathbb{R}$.

ExloeyoR

Exemple 7.41.

Prenons $X = \mathbb{R}$ et $A =]0, 1[$. Si $B =]\frac{1}{2}, 1[$, alors la fermeture de B dans A sera $\tilde{B} = [\frac{1}{2}, 1[$ et non $[\frac{1}{2}, 1]$ comme on l'aurait dans $\mathbb{R}$. $\triangle$

Prendre la topologie induite de $\mathbb{R}$ vers un fermé de $\mathbb{R}$ donne des boules un peu spéciales comme le montre l'exemple suivant.

ExKYZwYxn

Exemple 7.42.

Quid de la boule ouverte $B(1, \epsilon)$ dans le fermé $[0, 1]$? Par définition c'est

$$B(1, \epsilon) = \{x \in [0, 1] \text{ tel que } |x - 1| < \epsilon\} =]1 - \epsilon, 1]. \quad (7.34)$$

Oui, c'est *ouvert* dans $[0, 1]$. C'est d'ailleurs un des ouverts de la topologie induite de $\mathbb{R}$ sur $[0, 1]$.

Donc pour la topologie de $[0, 1]$, toutes les boules ouvertes $B(x, \delta)$ avec $x \in [0, 1]$ sont incluses dans $[0, 1]$. Bref, vous pouvez écrire

$$B(\frac{1}{2}, 10) \subset [0, 1], \quad (7.35)$$

mais vous avez intérêt à être très clair sur la topologie sous-entendue. $\triangle$

7.1.6.1 Points d'accumulation et isolés

DEFooGHUUooZKTJRi

Définition 7.43.

Soient un espace topologique X et une partie A de X . Un point $s \in X$ est un **point d'accumulation** de A si tout ouvert de X contenant s contient au moins un élément de $A \setminus \{s\}$.

Quelle est la différence entre un point d'accumulation et un point d'adhérence ? La différence est que tous les points de A sont des points d'adhérence de A , parce que tout voisinage de $a \in A$ contient au moins a lui-même, alors que certains points de A peuvent ne pas être des points d'accumulation de A . Voir l'exemple 7.297.

Notons qu'un point d'accumulation de A dans X n'est pas spécialement dans A .

DEFooXIOWooWUKJhN

Définition 7.44.

Soient un espace topologique X et une partie A de X . Un point $s \in A$ est un **point isolé** de A si il existe un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de s dans X tel que $A \cap \mathcal{O} = \{s\}$.

7.1.7 Applications continues

La définition suivante est la définition de la continuité dans tous les cas.

DefOLNtrxB

Définition 7.45 (Application continue[218]).

Deux définitions :

ITEMooXARPooNzsWLR

- (1) Soient une application $f: X \rightarrow Y$ entre les espaces topologiques X et Y et un point $a \in X$. Nous disons que f est **continue en** a si pour tout ouvert W contenant $f(a)$, il existe un voisinage V de a dans X tel que $f(V) \subset W$.

ITEMooEHGWooDdITRV

- (2) Une fonction $f: X \rightarrow Y$ est **continue** sur X si pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de Y , l'ensemble

$$f^{-1}(\mathcal{O}) = \{x \in X \text{ tel que } f(x) \in \mathcal{O}\} \quad (7.36)$$

defFminuslofaset

est ouvert dans X .

PROPooOVKEooCkJmmO

Proposition 7.46 ([1]).

Une application $f: X \rightarrow Y$ entre deux espaces topologiques est continue sur X si et seulement si elle est continue en chacun des points de X .

Démonstration. Dans les deux sens.

- (1) $\Rightarrow$ Nous supposons que $f: X \rightarrow Y$ est continue. Soit $a \in X$. Si W est un ouvert contenant $f(a)$, alors $V = f^{-1}(W)$ est un ouvert contenant a et vérifiant $f(V) \subset W$.
- (2) $\Leftarrow$ Nous supposons que $f: X \rightarrow Y$ est continue en chaque point de X . Soit un ouvert $\mathcal{O}$ de Y . Pour $a \in f^{-1}(\mathcal{O})$, la partie $\mathcal{O}$ est un ouvert contenant $f(a)$. Donc il existe un ouvert V_a contenant a et tel que $f(V_a) \subset \mathcal{O}$.

Nous posons à présent $V = \bigcup_{a \in f^{-1}(\mathcal{O})} V_a$. C'est un ouvert comme union d'ouverts. Ensuite nous avons $V = f^{-1}(\mathcal{O})$. En effet d'une part nous avons $f(V_a) \subset \mathcal{O}$, donc $V_a \subset f^{-1}(\mathcal{O})$ pour tout $a \in X$. Donc $V \subset f^{-1}(\mathcal{O})$.

D'autre part, pour chaque $a \in f^{-1}(\mathcal{O})$ nous avons $a \in V_a$, et donc $f^{-1}(\mathcal{O}) \subset V$. □

LEMooYTLSooKhetml

Lemme 7.47.

Soient deux espaces topologiques X et Y et une application $f: X \rightarrow Y$. Soit une base de topologie $\{A_i\}_{i \in I}$ de Y . Si $f^{-1}(A_i)$ est ouvert dans X pour tout $i \in I$ alors f est continue.

Exemple 7.48 ([1]).

Un truc bien avec la définition 7.45(1) est que la continuité de f en un point est définie pour tout point du domaine ; pas seulement les points d'accumulation. Soit par exemple une fonction simple

$$\begin{aligned} f: \{a\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ a &\mapsto 4. \end{aligned} \tag{7.37}$$

Si W est un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 4, nous avons l'ouvert $V = \{a\}$ tel que $f(V) \subset W$. Donc f est continue au point 4.

Mais f est également continue sur $\{4\}$ en tant qu'espace topologique. En effet, si W est un ouvert de $\mathbb{R}$, l'ensemble $f^{-1}(W)$ est soit $\emptyset$ soit $\{a\}$. Dans les deux cas c'est un ouvert. △

LEMooATLRooEKnlro

Lemme 7.49.

Une application $f: X \rightarrow Y$ est continue si et seulement si pour tout fermés F de Y , la partie $f^{-1}(F)$ est fermée dans X .

Démonstration. Supposons que f est continue. Si F est fermé dans Y , alors F^c est ouvert et donc $f^{-1}(F^c) = f^{-1}(F)^c$ est ouvert. Donc $f^{-1}(F)$ est fermé.

Dans l'autre sens, si $\mathcal{O}$ est ouvert dans Y , alors $f^{-1}(\mathcal{O})^c = f^{-1}(\mathcal{O}^c)$ est fermé, de telle sorte que $f^{-1}(\mathcal{O})$ est ouvert. L'application f est alors continue. □

PROPooXGBEooZRVkSc

Proposition 7.50 ([219]).

Une application $f: X \rightarrow Y$ entre espaces topologiques est continue si et seulement si $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ pour toute partie $A \subset X$.

Démonstration. En deux parties.

- (1) $\Rightarrow$ Nous supposons que f est continue. Nous considérons un élément de $f(\bar{A})$, c'est-à-dire $f(a)$ avec $a \in \bar{A}$. Nous considérons un ouvert $\mathcal{O}$ autour de $f(a)$. La partie $f^{-1}(\mathcal{O})$ est ouverte dans X et contient $a \in \bar{A}$. Donc $f^{-1}(\mathcal{O})$ intersecte A . Nous en concluons que $\mathcal{O}$ intersecte A . Nous avons montré que tout ouvert autour de $f(a)$ intersecte $f(A)$. Donc $f(a) \in \overline{f(A)}$.
- (2) $\Leftarrow$ Nous supposons que $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ pour toute partie $A \subset X$. Pour prouver la continuité de f , nous utilisons le critère du lemme 7.49 qui dit que f est continue si et seulement si $f^{-1}(F)$ est fermé pour tout fermé F .

Soit donc un fermé $F \subset Y$. Nous posons $D = f^{-1}(F)$. Nous avons

$$f(\bar{D}) \subset \overline{f(D)} = \overline{f(f^{-1}(F))} = \bar{F} = F. \tag{7.38}$$

Nous prenons ensuite f^{-1} des deux côtés : $\bar{D} \subset f^{-1}(F) = D$. Donc $\bar{D} \subset D$; donc $\bar{D} = D$ et D est fermé. □

7.1.7.1 Isomorphismes

DEFooYPGQooMAObTO

Définition 7.51 (Isomorphisme d'espaces topologiques).

Un **isomorphisme** d'espaces topologiques est une application bijective continue⁹ entre deux espaces topologiques dont la réciproque est continue. On dit également **homéomorphisme**.

Un isomorphisme d'un espace avec lui-même est un **automorphisme**.

LEMooMJSHooOszteq

Lemme 7.52 ([1]).

Si $f: X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme¹⁰ et si F est fermé dans X , alors $f(F)$ est fermé dans Y .

Démonstration. Le complémentaire F^c est ouverte. Vu que f^{-1} est continue, la partie $f(F^c)$ est ouverte. Comme f est une bijection, nous avons $f(F^c) = f(F)^c$. D'où le fait que $f(F)^c$ est ouvert, et donc que $f(F)$ est fermé. $\square$

LEMooNMPGooRlgppQ

Lemme 7.53.

Soient un isomorphisme d'espaces topologiques $\varphi: X \rightarrow Y$ ainsi qu'une partie $S \subset X$. Alors

$$\varphi(\bar{S}) = \overline{\varphi(S)}. \quad (7.39)$$

Démonstration. Nous prouvons que $\overline{\varphi(S)} \subset \varphi(\bar{S})$; pour l'inclusion inverse, la lectrice fera elle-même.

Soit $x \in \overline{\varphi(S)}$. Nous allons prouver que $x \in \varphi(\bar{S})$, c'est-à-dire que $\varphi^{-1}(x) \in \bar{S}$. Pour cela nous considérons un ouvert $\mathcal{O}$ autour de $\varphi^{-1}(x)$. La partie $\varphi(\mathcal{O})$ est un ouvert contenant x . Donc $\varphi(\mathcal{O}) \cap \varphi(S) \neq \emptyset$, et donc $\mathcal{O} \cap S \neq \emptyset$, ce qui prouve que $\varphi^{-1}(x) \in \bar{S}$. $\square$

7.54.

Note qu'en général, il n'est pas vrai que $f(\bar{S}) = \overline{f(S)}$ lorsque f est seulement continue. Nous avons par exemple[219] ceci :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned} \quad (7.40)$$

et $S = \{(x, 1/x) \text{ tel que } x \neq 0\}$. Nous avons $S = \bar{S}$ et donc $f(S) = f(\bar{S}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Mais $\overline{f(S)} = \mathbb{R}$.

La réalité est la proposition 7.50 qui dit que f est continue si et seulement si $f(\bar{S}) \subset \overline{f(S)}$ pour toute partie S .

7.2 Topologie rendant continue (topologie initiale)

PROPooGOEVooZBAOQh

Proposition-Définition 7.55 (Topologie initiale[220, 1]).

Soient un ensemble X , des espaces topologiques $(Y_i, \tau_i)_{i \in I}$, et des applications $\varphi_i: X \rightarrow Y_i$. Nous notons

$$\Lambda = \{(i, \omega_i) \text{ tel que } i \in I, \omega_i \in \tau_i\}, \quad (7.41)$$

et $P(\Lambda)$ l'ensemble des parties finies de Λ . Pour chaque $\lambda \in P(\Lambda)$, nous posons

$$\Phi_\lambda = \bigcap_{(i, \omega_i) \in \lambda} \varphi_i^{-1}(\omega_i). \quad (7.42)$$

Enfin nous posons¹¹

$$\tau_I = \left\{ \bigcup_{\lambda \in \Gamma} \Phi_\lambda \right\}_{\Gamma \subset P(\Lambda)}. \quad (7.43)$$

EQooUAZMooJuvinM

Nous avons :

(1) τ_I est une topologie sur X .

9. Application continue, définition 7.45.

10. Définition 7.51.

11. Juste pour être explicite : dans (7.43), Γ est un ensemble de parties finies de Λ . Donc chaque λ est une partie finie de Λ .

(2) Toutes les applications φ_i sont continues¹² pour cette topologie.

(3) La topologie τ_I est la plus faible topologie sur X pour laquelle toutes les φ_i sont continues.

La topologie ainsi définie est souvent référée comme la plus petite topologie qui rend les applications φ_i continues. Elle est aussi appelée **topologie initiale** des φ_i .

Démonstration. En plein de parties.

(1) **τ_I est une topologie** Vérification des conditions de la définition 7.1.

(1a) **$\emptyset$ et X sont dans τ_I** Pour $\emptyset$, il suffit de prendre $\Gamma = \emptyset$. Pour X , nous prenons un i quelconque et nous choisissons $\omega_i = Y_i$. Alors $\varphi_i^{-1}(\omega_i) = X$ et en prenant $\Gamma = \{(i, \omega_i)\}$ on est bon.

(1b) **Union quelconques** Nous avons $\bigcup_{\lambda \in \Gamma_1} \Phi_\lambda \cup \bigcup_{\lambda \in \Gamma_2} \Phi_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2} \Phi_\lambda$. Les éléments de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ sont des parties finies de Λ .

(1c) **Intersection finie** D'abord, de la définition $\Phi_\alpha = \bigcap_{(i, \omega_i) \in \alpha} \varphi_i^{-1}(\omega_i)$, nous voyons que

$$\Phi_\alpha \cap \Phi_\beta = \bigcap_{(i, \omega_i) \in \alpha \cup \beta} \varphi_i^{-1}(\omega_i) = \Phi_{\alpha \cup \beta}. \quad (7.44)$$

En utilisant le lemme 1.46, nous avons alors

$$\left(\bigcup_{\alpha \in \Gamma_\alpha} \Phi_\alpha \right) \cap \left(\bigcup_{\nu \in \Gamma_2} \Phi_\nu \right) = \bigcup_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2} (\Phi_\alpha \cap \Phi_\beta) = \bigcup_{(\alpha, \beta) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2} \Phi_{\alpha \cup \beta} = \bigcup_{\sigma \in \Gamma} \Phi_\sigma \quad (7.45)$$

où $\Gamma = \{\alpha \cup \beta \text{ tel que } (\alpha, \beta) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2\}$. Notez l'utilisation de la proposition 1.206(1) : chacun des $\alpha \cup \beta$ est fini.

(2) **Les φ_i sont continues** Soit un ouvert $\omega \subset Y_i$. Nous avons $\varphi_i^{-1}(\omega) = \Phi_\lambda$ avec $\lambda = \{(i, \omega)\}$. Mais $\Phi_\lambda \in \tau_I$. Donc $\varphi_i^{-1}(\omega)$ est ouvert dans (X, τ_I) .

(3) **Topologie minimale** Une topologie τ_X sur X telle que tous les φ_i soient continues. Elle doit contenir tous les $\varphi_i^{-1}(\omega)$ avec $\omega \in \tau_i$. Comme une topologie doit contenir toutes les intersections finies, tous les Φ_λ sont dans τ_X . Comme τ_X doit contenir toutes les unions d'éléments de τ_X , elle doit contenir en particulier toutes les unions de parties de la forme Φ_λ . Donc $\tau_I \subset \tau_X$.

□

La topologie quotient d'un espace topologique par une relation d'équivalence est définie comme la plus petite topologie rendant continue la projection. Voir la définition 7.67.

LEMooVRGFooNgbwKu

Lemme 7.56 ([220, 221]).

Soient des espaces topologiques $\{(Y_i, \tau_i)\}_{i \in I}$, et X , un ensemble. Pour chaque i nous considérons une base de topologie $\mathcal{B}_i$ de τ_i . Nous considérons des applications $\varphi_i: X \rightarrow Y_i$.

L'ensemble

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{j=1}^n \varphi_{\alpha_j}^{-1}(U_j) \text{ tel que } n \in \mathbb{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in I, U_k \in \mathcal{B}_k \right\} \quad (7.46)$$

est une base de la topologie initiale¹³ des φ_i .

PROPOoOPJCooAIUXCW

Proposition 7.57 ([1]).

Soient un espace topologique (Y, τ_Y) et une application $f: X \rightarrow Y$. Soient $x_0 \in X$ et $y_0 = f(x_0)$. Si $\{B_i\}_{i \in I}$ est une base de voisinages de y_0 , alors $\{f^{-1}(B_i)\}_{i \in I}$ est une base de voisinages de x_0 pour la topologie initiale¹⁴ de f .

12. Application continue, définition 7.45.

13. Proposition 7.55.

14. Définition 7.55.

Démonstration. Soit un ouvert $\mathcal{O}$ autour de x_0 pour la topologie initiale de f . En adaptant le lemme 7.56 au cas d'une seule application,

$$\mathcal{B} = \{f^{-1}(U) \text{ tel que } U \in \tau_Y\} \quad (7.47)$$

est une base de topologie sur X . Donc $\mathcal{O}$ est une union de la forme¹⁵

$$\mathcal{O} = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(U_\alpha) \quad (7.48)$$

avec $U_\alpha \in \tau_Y$. Soit $\alpha \in A$ tel que $x_0 \in f^{-1}(U_\alpha)$. Nous avons $y_0 = f(x_0) \in U_\alpha$. Vu que U_α est un ouvert contenant y_0 , et vu que $\{B_i\}_{i \in I}$ est une base de voisinages de y_0 , nous avons un $i \in I$ tel que

$$y_0 \in B_i \subset U_\alpha. \quad (7.49)$$

Donc nous avons aussi

$$f^{-1}(B_i) \subset f^{-1}(U_\alpha) \subset \mathcal{O}. \quad (7.50)$$

Donc tout voisinage de x_0 contient un élément de $\{f^{-1}(B_i)\}_{i \in I}$. Cela prouve que ce dernier est une base des voisinages de x_0 . $\square$

PROPOOSEQRoOZoQPbZ

Proposition 7.58 ([222]).

Soient des applications $\{f_i: X \rightarrow Y_i\}_{i \in I}$ où les Y_i sont des espaces topologiques séparés. La topologie initiale τ_I sur X est séparée si et seulement si les f_i séparent les points de X .

Démonstration. En deux parties.

- (1) $\Rightarrow$ Par contraposée, nous supposons avoir $x \neq y$ dans X tels que $f_i(x) = f_i(y)$ pour tout $i \in I$. Nous posons

$$\tau_0 = \{U \subset X \text{ tel que } x, y \in U \text{ ou } x, y \notin U\}. \quad (7.51)$$

C'est à dire que τ_0 contient les parties de X qui contiennent soit x et y soit aucun des deux.

Ce τ_0 est une topologie sur X . Voyons que les f_i sont continues. Si $A \subset Y_i$, alors soit $f_i(x) \in A$ et alors $x, y \in f_i^{-1}(A)$. Dans ce cas $f_i^{-1}(A) \in \tau_0$. Soit $f_i(x) \notin A$ et alors ni x ni y ne sont dans $f_i^{-1}(A)$. Dans ce cas $f_i^{-1}(A) \in \tau_0$. Bref, pour tout $i \in I$ et pour tout partie A de Y_i nous avons $f_i^{-1}(A) \in \tau_0$. Donc f_i est continue.

Donc τ_0 est une topologie rendant continue toutes les f_i . Elle est donc au moins aussi grande que la topologie initiale τ_I . Étant donné que τ_0 ne sépare pas les points x et y , la topologie τ_I ne les sépare pas non plus. Nous avons donc démontré que τ_i n'est pas séparé.

- (2) $\Leftarrow$ Nous supposons maintenant que les f_i séparent les points de X , et nous devons en déduire que (X, τ_I) est séparé. Soient $x, y \in X$. Nous considérons $i \in I$ tel que $f_i(x) \neq f_i(y)$. Étant donné que Y_i est séparé, nous pouvons considérer des voisinages ouverts disjoints W_1 de $f_i(x)$ et W_2 de $f_i(y)$ dans Y_i .

Vu que f_i est continue, les parties $f_i^{-1}(W_1)$ et $f_i^{-1}(W_2)$ sont ouvertes. Elles sont de plus disjointes parce que si $z \in f_i^{-1}(W_1) \cap f_i^{-1}(W_2)$, alors $f_i(z) \in W_1 \cap W_2 = \emptyset$.

Donc τ_I sépare x et y . $\square$

LEMooZLZKooHElBOs

Lemme 7.59 ([1]).

Soit un ensemble A . Nous considérons $\text{Fun}(A, \mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les applications $A \rightarrow \mathbb{R}$. Pour chaque $x \in A$ nous posons

$$\begin{aligned} \pi_x: \text{Fun}(A, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto f(x). \end{aligned} \quad (7.52)$$

Si τ_I est la topologie initiale de A pour les $\{\pi_x\}_{x \in A}$, alors (A, τ_I) est séparé.

15. Définition 7.2(1).

Démonstration. En vertu de la proposition 7.58, il suffit de vérifier que les π_x séparent les points dans $\text{Fun}(A, \mathbb{R})$. Pour cela nous considérons $f \neq g$ dans $\text{Fun}(A, \mathbb{R})$. Il existe donc $x \in A$ tel que $f(x) \neq g(x)$. Dans ce cas nous avons $\pi_x(f) \neq \pi_x(g)$. Donc f et g sont bien séparés. $\square$

LEMooADPLooYyINsj

Lemme 7.60 ([220]).

Soient des espaces topologiques $\{(Y_i, \tau_i)\}_{i \in I}$, et X , un ensemble. Nous considérons des applications $\varphi_i: X \rightarrow Y_i$ ainsi que τ , la topologie minimale sur X telle que les applications φ_i soient continues.

Soit une suite (x_n) dans X . Nous avons $x_n \xrightarrow{\tau} x$ si et seulement si $\varphi_i(x_n) \xrightarrow{\tau_i} \varphi_i(x)$ pour tout $i \in I$.

Démonstration. Dans le sens direct, c'est seulement le fait que les φ_i sont continues.

Dans le sens réciproque, nous supposons que $\varphi_i(x_n) \xrightarrow{\tau_i} \varphi_i(x)$ pour tout i et nous devons prouver que $x_n \xrightarrow{\tau} x$.

Soit un voisinage U de x . Vue la base de topologie donnée dans le lemme 7.56, il existe un J fini dans I ainsi que des ouverts $\{V_j\}_{j \in J}$ tels que

$$x \in W = \bigcap_{j \in J} \varphi_j^{-1}(V_j) \subset U \quad (7.53)$$

Par hypothèse, $\varphi_i(x_n) \rightarrow \varphi_i(x)$. Mais V_j est un ouvert qui contient $\varphi_j(x)$. Donc il existe $N_j \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi_j(x_n) \in V_j$ pour tout $n \geq N_j$. En posant ¹⁶ $N = \max\{N_j\}_{j \in J}$, nous avons que $\varphi_j(x_n) \in V_j$ pour tout $n \geq N$ et pour tout $j \in J$.

Dans ce cas nous avons aussi $x_n \in W \subset U$. La convergence est prouvée. $\square$

PROFoooCBPEoooCuaLUk

Proposition 7.61 ([220]).

Soient des espaces topologiques (Y_i, τ_i) , un ensemble X , et des applications $\varphi_i: X \rightarrow Y_i$. Nous considérons sur X la plus petite topologie rendant continues ¹⁷ les φ_i .

Soit un espace topologique Z . Une application $\psi: Z \rightarrow (X, \tau_I)$ est continue si et seulement si les applications $\varphi_i \circ \psi: Z \rightarrow Y_i$ sont continues pour tout $i \in I$.

Démonstration. Le sens direct est une simple composée de fonctions continues. Pour l'autre sens, nous supposons que les $\varphi_i \circ \psi$ sont continues, nous considérons $U \in \tau_I$ et nous devons montrer que $\psi^{-1}(U)$ est un ouvert de Z .

En posant

$$\Lambda = \{(i, \omega) \text{ tel que } i \in I, \omega \in \tau_i\}, \quad (7.54)$$

il existe un ensemble Γ de parties finies de Λ tel que

$$U = \bigcup_{\lambda \in \Gamma} \bigcap_{(i, \omega) \in \lambda} \varphi_i^{-1}(\omega). \quad (7.55)$$

Nous avons donc

$$\psi^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda \in \Gamma} \bigcap_{(i, \omega_i) \in \lambda} (\psi \circ \varphi_i^{-1})(\omega_i). \quad (7.56)$$

Vu que $\psi \circ \varphi_i^{-1}$ est continue, chacun des $(\psi \circ \varphi_i^{-1})(\omega)$ est ouvert. Donc $\psi^{-1}(U)$ est ouvert comme intersection finie et union arbitraire d'ouverts. $\square$

7.2.1 Topologie produit

DEFoooJHXKoooQAptQ

Définition 7.62 (Topologie produit[223]).

Soit une famille d'espaces topologiques $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$. La **topologie produit** sur $\prod_{i \in I} X_i$ est la topologie initiale ¹⁸ des projections $p_k: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_k$.

16. Notez l'utilisation du lemme 1.211 pour justifier que le maximum existe.

17. Proposition 7.55.

18. Définition 7.55.

DefIINHooAAjTdY

Proposition 7.63 (Produit d'espaces topologiques, thème 27).

Soient $\{(X_i, \tau_i)\}_{i=1, \dots, n}$ des espaces topologiques. La topologie produit¹⁹ sur $X = \prod_{i=1}^n X_i$ est donnée par

$$\mathcal{T} = \{\mathcal{O} \subset X \text{ tel que } \forall x \in U, \exists U_i \in \tau_i \text{ tel que } x \in U_1 \times \dots \times U_n \subset \mathcal{O}\}. \quad (7.57)$$

EQooVECGooKLukTy

Démonstration. Nous devons montrer que les p_i sont continues pour $\mathcal{T}$ et que toute topologie rendant les p_i continues doit contenir $\mathcal{T}$.

- (1) **Les p_i sont continues pour $\mathcal{T}$** Soit un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathcal{T}$. Nous devons montrer que $p_i^{-1}(\mathcal{O}) \in \tau_i$. Soit $a \in p_i^{-1}(\mathcal{O})$. Soit $x \in \mathcal{O}$ tel que $p_i(a) = x$. Il existe des ouverts $U_j \in \tau_j$ tels que

$$x \in U_1 \times \dots \times U_n \subset \mathcal{O}. \quad (7.58)$$

Nous avons alors $p_i^{-1}(U_1 \times \dots \times U_n) = U_i$. Et donc $a \in U_i \subset p_i^{-1}(\mathcal{O})$.

- (2) **Si les p_i sont continues pour $\mathcal{T}_0$** Soit une topologie $\mathcal{T}_0$ pour laquelle toutes les projections sont continue. Soient des ouverts $U_i \in \tau_i$. Nous devons prouver que $U_1 \times \dots \times U_n \in \mathcal{T}_0$. Vu que p_i est continue et que U_i est un ouvert, nous devons avoir $p_i^{-1}(U_i) \in \tau_0$. Et par stabilité d'une topologie pour les intersections,

$$\bigcap_{i=1}^n p_i^{-1}(U_i) = U_1 \times \dots \times U_n \quad (7.59)$$

doit encore être dans $\mathcal{T}_0$. Donc $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_0$.

□

Dans le cas d'espaces normés, nous verrons dans le lemme 7.282 que la topologie produit est la même que celle obtenue par la norme produit.

Proposition 7.64 (Convergence composante par composante).

Soient des espaces topologiques X_i ($i = 1, \dots, n$) et une suite $(a_k^{(1)}, \dots, a_k^{(n)})$ dans $X_1 \times \dots \times X_n$. Nous avons la convergence

$$(a_k^{(1)}, \dots, a_k^{(n)}) \xrightarrow{X_1 \times \dots \times X_n} (a^{(1)}, \dots, a^{(n)}) \quad (7.60)$$

si et seulement si $a_k^{(i)} \rightarrow a^{(i)}$ pour chaque i .

Démonstration. En deux parties.

- (1) **Sens direct** Soient des ouverts $\mathcal{O}_i$ autour de $a^{(i)}$ dans X_i . Puisque $\mathcal{O}_1 \times \dots \times \mathcal{O}_n$ est un ouvert autour de $(a^{(1)}, \dots, a^{(n)})$, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que si $k \geq K$ nous avons $(a_k^{(1)}, \dots, a_k^{(n)}) \in \mathcal{O}_1 \times \dots \times \mathcal{O}_n$. Pour ce K nous avons séparément $a_k^{(i)} \in \mathcal{O}_i$ pour chaque i .
- (2) **Sens inverse** Une prébase de la topologie sur $X_1 \times \dots \times X_n$ est donnée par les $\mathcal{O}_1 \times \dots \times \mathcal{O}_n$ où $\mathcal{O}_i$ est un ouvert de X_i . Voir la définition 7.63 de la topologie produit et la définition 7.13 de ce qu'est une prébase.

La proposition 7.15 nous permet de ne vérifier la convergence de $(a_k^{(1)}, \dots, a_k^{(n)})$ que sur la prébase. Soit donc $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \times \dots \times \mathcal{O}_n$ avec $(a^{(1)}, \dots, a^{(n)}) \in \mathcal{O}$. Puisque $(a_k^{(i)})_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow a^{(i)}$, pour chaque i , il existe $K_i \in \mathbb{N}$ tel que si $k \geq K_i$ alors $a_k^{(i)} \in \mathcal{O}_i$.

En posant $K = \max_i(K_i)$, nous avons $(a_k^{(1)}, \dots, a_k^{(n)}) \in \mathcal{O}_1 \times \dots \times \mathcal{O}_n$ pour tout $k \geq K$.

La proposition 7.15 permet de conclure.

□

19. Définition 7.62.

7.2.2 Topologie de la convergence simple

DEFooOKYYooBbowQC

Définition 7.65.

Soient un ensemble X et un espace topologique Y . Pour $x \in X$ et $V \in \tau_Y$, nous posons

$$W(x, V) = \{f: X \rightarrow Y \text{ tel que } f(x) \in V\}. \quad (7.61)$$

La **topologie de la convergence simple** sur $\text{Fun}(X, Y)$ est la topologie engendrée²⁰ par les parties $\{W(x, V)\}_{\substack{x \in X \\ V \in \tau_Y}}$.

PROPooWLWYooBWCajp

Proposition 7.66.

Soient un ensemble X et un espace topologique Y . La topologie de la convergence simple²¹ et la topologie produit²² sur $\text{Fun}(X, Y) = \prod_{x \in X} Y$ sont identiques.

7.2.3 Topologie quotient

DEFooHWSYooZZLXQU

Définition 7.67 ([224]).

Soit un espace topologique X ainsi qu'une relation d'équivalence $\sim$ sur X . La **topologie quotient** sur l'ensemble $X/\sim$ est la plus petite topologie qui rend continue²³ la projection canonique $p: X \rightarrow X/\sim$.

PROPooDRPLooONCwYs

Proposition 7.68.

Soit un espace topologique X muni d'une relation d'équivalence $\sim$. Une partie $\mathcal{O} \in X/\sim$ est ouverte²⁴ si et seulement si $p^{-1}(\mathcal{O})$ est ouverte dans X .

DEFooBXGJooOBQaNw

Définition 7.69 (Passage d'une application aux classes).

Soient deux ensembles X et E ainsi qu'une relation d'équivalence $\sim$ sur X . Nous disons qu'une application $f: X \rightarrow E$ **passse aux classes** si f est constante sur chaque classe d'équivalence de X . Dans ce cas nous considérons l'**application quotient**

$$\begin{aligned} \tilde{f}: X/\sim &\rightarrow E \\ [x] &\mapsto f(x). \end{aligned} \quad (7.62)$$

LEMooKTINooKDjNeX

Lemme 7.70 ([225]).

Soient deux espaces topologiques X et Y . Soit une relation d'équivalence $\sim$ sur X . Nous considérons une application continue²⁵ $f: X \rightarrow Y$ capable de descendre aux classes²⁶. Alors l'application quotient $\tilde{f}: X/\sim \rightarrow Y$ est continue.

Démonstration. Nous considérons la projection canonique $p: X \rightarrow X/\sim$. Soit un ouvert $\mathcal{O}$ dans Y . La partie $\tilde{f}^{-1}(\mathcal{O})$ sera ouverte si $p^{-1}(\tilde{f}^{-1}(\mathcal{O}))$ est ouverte (proposition 7.68). Nous avons

$$p^{-1}(\tilde{f}^{-1}(\mathcal{O})) = (\tilde{f} \circ p)^{-1}(\mathcal{O}). \quad (7.63)$$

Mais $\tilde{f} \circ p = f$ parce que $(\tilde{f} \circ p)(x) = \tilde{f}([x]) = f(x)$. Donc

$$p^{-1}(\tilde{f}^{-1}(\mathcal{O})) = (\tilde{f} \circ p)^{-1}(\mathcal{O}) = f^{-1}(\mathcal{O}) \quad (7.64)$$

qui est ouvert parce que f est continue. □

LEMooIGLQooIMSWYg

Lemme 7.71 ([225]).

Soient deux espaces topologiques X et Y ainsi qu'une relation d'équivalence $\sim$ sur X . Nous considérons une application continue $g: X/\sim \rightarrow Y$. Alors

20. Définition 7.13.

21. Définition 7.65.

22. Produit en tant que ensemble des application, définition 1.22, et topologie produit 7.63.

23. Définition 7.55.

24. La topologie est définie en 7.67.

25. Définition 7.45.

26. Voir la définition 7.69.

(1) L'application $g \circ p$ est continue.

(2) Si nous posons $f = g \circ p$, alors f descend aux classes et $\tilde{f} = g$.

Démonstration. La projection p est toujours continue par définition de la topologie quotient. Donc $g \circ p$ est continue par composition d'applications continues.

Voyons que f descend aux classes. Si $x \sim y$, alors $p(x) = p(y)$ et donc $f(x) = f(y)$. En ce qui concerne l'application $\tilde{f}$, nous avons

$$\tilde{f}([x]) = (g \circ p)(x) = g([x]), \quad (7.65)$$

donc $\tilde{f} = g$ et le lemme est démontré. □

PROpooYKLBooQuqnfA

Proposition 7.72 ([224]).

Soient des espaces topologiques X et Y ainsi qu'une relation d'équivalence $\sim$ sur X . Soit la projection canonique $p: X \rightarrow X/\sim$. Une application $f: X/\sim \rightarrow Y$ est continue si et seulement si l'application composée $f \circ p: X \rightarrow Y$ est continue.

7.3 Espace séparable

Notons que l'on a parlé d'une limite de suite jusqu'à présent : en effet, si il existe deux éléments distincts x et y tels que tout ouvert contenant x contient y , alors la définition 7.14 dit que toute suite convergeant vers y converge aussi vers x ...

EXooSHKAooZQEVLB

Exemple 7.73.

Oui, il y a moyen de converger vers plusieurs points distincts si l'espace n'est pas super cool. Nous pouvons par exemple [226] considérer la droite réelle munie de sa topologie usuelle et y ajouter un point $0'$ (qui clone le réel 0) dont les voisinages sont les voisinages de 0 dans lesquels nous remplaçons 0 par $0'$. Dans cet espace, la suite $(1/n)$ converge à la fois vers 0 et $0'$.

En fait, on « voit » le problème : on ne peut pas distinguer d'un point de vue topologique le 0 et le $0'$. △

Nous posons la définition suivante, qui nous permettra de donner une assez grande classe d'espaces topologiques dans lesquels nous avons unicité de la limite²⁷.

DefYFmfjjm

Définition 7.74 (Espace topologique Hausdorff).

Si deux points distincts admettent toujours deux voisinages disjoints²⁸, nous disons que l'espace est **séparé** ou **de Hausdorff**.

Attention, cette notion est à ne pas confondre avec :

DefUADooqilFK

Définition 7.75 (Espace topologique séparable).

Un espace topologique est **séparable** si il possède une partie dénombrable²⁹ dense³⁰.

LEMooXNSCooQYkmAN

Lemme 7.76 ([1]).

Un singleton d'un espace Hausdorff³¹ est fermé.

Démonstration. Soit un espace topologique séparé X . Nous prouvons que $X \setminus \{a\}$ est ouvert. Soit $x \in X \setminus \{a\}$. Vu que X est séparé, il existe un voisinage V de a et U de x tels que $V \cap U = \emptyset$. En particulier $U \subset X \setminus \{a\}$. Donc $X \setminus \{a\}$ contient un voisinage de chacun de ses points et est donc ouvert. □

27. Voir la proposition 7.138.

28. Définition 1.7.

29. Définition 1.212.

30. Définition 7.23.

31. Hausdorff et séparé sont synonymes, définition 7.75.

7.4 Suites et convergence

7.77.

À propos de notations. La pire notation possible pour une suite est $(a_n)_n$. Mais que vient faire le second indice n ? Il peut être raisonnable d'écrire $(a_n)_{n \in I}$ lorsqu'on veut dire dans quel ensemble se déplace n . Si nous parlons de *suite*, il faut une sérieuse raison de prendre autre chose que $\mathbb{N}$ comme ensemble d'indices.

Une suite étant une fonction, de la même façon qu'on ne devrait pas dire « la fonction $f(x)$ », mais « la fonction f » ou « la fonction $x \mapsto f(x)$ », nous devrions simplement écrire a pour désigner la suite dont les éléments sont a_n .

Par conséquent, il est parfaitement légal, et même conseillé, d'écrire « $a + b$ » pour la somme des suites a et b . Et il est tout aussi légal d'écrire « $\lim a$ » au lieu de $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Le hic est que nous écrivons souvent x la limite de la suite $n \mapsto x_n$. Dans ce cas, nous sommes évidemment obligé d'écrire l'indice n pour parler de la suite.

Tout cela pour dire qu'il faut être souple avec les notations.

7.4.1 Convergence dans un fermé

PROPooBBNSooCjrtRb

Proposition 7.78 ([1]).

Une suite contenue dans un fermé ne peut converger³² que vers un élément de ce fermé.

Démonstration. Soient un espace topologique X et un fermé F dans X . Nous supposons que la suite (x_k) soit contenue dans F . Nous allons prouver qu'aucun élément de F^c ne peut être limite.

Soit $a \in F^c$. Puisque le complémentaire de F est un ouvert, et d'après le théorème 7.8, il existe un ouvert $\mathcal{O}_a$ contenant a , et contenu dans F^c . Le voisinage $\mathcal{O}_a$ de a ne contient donc aucun élément de la suite (x_k) , qui ne peut donc pas converger vers a . $\square$

CorLimAbarA

Corolaire 7.79.

Soit A un sous-ensemble d'un espace topologique X . Toute suite d'éléments de A qui converge, admet pour limite un élément de $\text{Adh}(A)$.

Démonstration. Une fois la suite (x_n) fixée, il suffit de remarquer que tous les x_n sont dans $\text{Adh}(A)$, et puis d'appliquer la proposition 7.78. $\square$

PROPooEXUMooAFbpVJ

Proposition 7.80 ([1]).

Soit un espace topologique X , et une partie $A \subset X$. Nous supposons que pour toute suite convergente $x_n \xrightarrow{X} x$ telle que $x_n \in A$, nous avons $x \in A$.

Alors A est fermé.

Démonstration. Soit $a \in \text{Adh}(A)$. Il existe une suite convergente $x_n \xrightarrow{X} a$ avec $x_n \in A$. Par hypothèse nous avons alors $a \in A$. Cela prouve que $\text{Adh}(A) \subset A$, et donc que A est fermé. $\square$

LemPESaiVw

Lemme 7.81.

Soit $A \subset X$ muni de la topologie induite de X et (x_n) une suite dans A . Si (x_n) converge vers un élément x dans A , alors elle converge aussi vers x dans X .

Démonstration. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert autour de x dans X . Alors $A \cap \mathcal{O}$ est un ouvert autour de x dans A et il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, alors $x_n \in A \cap \mathcal{O} \subset \mathcal{O}$. $\square$

7.4.2 Pour des limites uniques : séparabilité

PropUniciteLimitePourSuites

Proposition 7.82.

Dans un espace topologique séparé, si une suite converge, alors sa limite est unique.

32. Définition 7.14.

Démonstration. Supposons que la suite (x_k) converge vers deux éléments distincts x et y . L'espace étant séparé, il existe deux ouverts $\mathcal{O}_x$ et $\mathcal{O}_y$, disjoints, contenant respectivement x et y . La suite convergeant à la fois vers x et y , il existe k_x et k_y , tels que, si $k \geq \max\{k_x, k_y\}$, l'élément x_k est (à la fois) dans $\mathcal{O}_x$ et $\mathcal{O}_y$. Cela est en contradiction avec le fait que ces deux ensembles sont disjoints. $\square$

7.83.

Donc, on pourra parler, avec des espaces séparés, de « la limite d'une suite ». On notera $x_n \rightarrow a$, ou $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, pour signifier que la suite (x_n) converge vers a .

LEMooMDTNooThIHJI

Lemme 7.84 ([1]).

Soit $a \neq 0$ dans un espace vectoriel topologique³³ Hausdorff³⁴. Il existe un voisinage V de 0 tel que $a \notin \bar{V}$.

Démonstration. Étant donné que l'espace topologique est Hausdorff, nous pouvons considérer des voisinages V de 0 et W de a tels que $V \cap W = \emptyset$.

Dans ce cas nous avons $a \notin \bar{V}$ (voir la définition 7.19 de la fermeture de V). $\square$

PROPooNRRIooCPesgO

Proposition 7.85 ([1]).

La convergence de suite pour la topologie de l'espace produit³⁵ est équivalente à la convergence des suites « composante par composante ».

Démonstration. En deux parties

- (1) **Sens direct** Pour simplifier les notations, nous allons considérer le produit de deux espaces. Soit donc $(x_k, y_k) \xrightarrow{X \times Y} (x, y)$ et des ouverts $\mathcal{O}_1$ dans X autour de x et $\mathcal{O}_2$ autour de y dans Y .

La partie $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ est ouverte dans $X \times Y$. Donc il existe K tel que $k \geq K$ implique $(x_k, y_k) \in \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$.

Nous avons prouvé que pour tout ouvert $\mathcal{O}_1$ autour de x il existe K tel que $k \geq K$ implique $x_k \in \mathcal{O}_1$. Donc $x_k \xrightarrow{X} x$. Idem pour y .

- (2) **Dans l'autre sens** Nous considérons l'espace produit³⁶ $X = \prod_{i=1}^n X_i$. Nous supposons pour chaque i , avoir une suite convergente $(x_i)_k \xrightarrow{X_i} x_i$.

Nous allons prouver que

$$((x_1)_k, \dots, (x_n)_k) \xrightarrow{X} (x_1, \dots, x_n). \quad (7.66)$$

Soit un ouvert $\mathcal{O}$ de X autour de $(x_1, \dots, x_n)$. Nous considérons des ouverts U_i de X_i tels que $x_i \in U_i$ et $U_1 \times \dots \times U_n \subset \mathcal{O}$.

Vu que $(x_i)_k \xrightarrow{X_i} x_i$, il existe $K_i \in \mathbb{N}$ tel que $k > K_i$ implique $(x_i)_k \in U_i$. Si $k \geq \max_i\{K_i\}$, alors $(x_i)_k \in U_i$ pour tout i et nous avons

$$((x_1)_k, \dots, (x_n)_k) \in U_1 \times \dots \times U_n \subset \mathcal{O}. \quad (7.67)$$

 $\square$

LEMooSJKMooKSiEGq

Lemme 7.86 ([1]).

Soit un espace topologique X . Soient dans X une suite (x_n) et un élément x tels que toute sous-suite de (x_n) contient une sous-suite convergente vers x . Alors $x_n \rightarrow x$.

Démonstration. Supposons que (x_n) ne converge pas vers x . Il existe alors un ouvert $\mathcal{O}$ autour de x tel que pour tout $N > 0$, il existe $n \geq N$ tel que x_n n'est pas dans $\mathcal{O}$.

Cela nous permet de construire une sous-suite de (x_n) composée d'éléments hors de $\mathcal{O}$. Aucune sous-suite de cette sous-suite ne peut converger vers x . $\square$

33. Définition 7.219.

34. Définition 7.74

35. Définition 7.63.

36. Pour les notations, ça va être le sport : $(x_i)_k$ désigne une suite dans X_i , mais x_i désigne la limite de cette suite.

7.4.3 Topologie induite

PROPooAHIMooYhOwUf

Proposition 7.87 ([1]).

Soient un espace topologique X et une partie $A \subset X$. Nous munissons A de la topologie induite depuis X .

ITEMooLXGWooYgPqoT

(1) Si X est Hausdorff³⁷, alors A est Hausdorff.

ITEMooOQZDooGztljW

(2) Si X est à base dénombrable de topologie³⁸, alors A est à base dénombrable.

Démonstration. En deux parties.

(1) **Pour (1)** Soient $a, b \in A$. Vu que X est Hausdorff, il existe des voisinages ouverts $\mathcal{O}_1$ de a et $\mathcal{O}_2$ de b tels que $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. Les parties $A \cap \mathcal{O}_1$ et $A \cap \mathcal{O}_2$ sont des ouverts disjoints de A .

(2) **Pour (2)** Soit une base $\{B_i\}_{i \in I}$ de la topologie de X . Nous supposons que I est dénombrable. Nous démontrons que $\{B_i \cap A\}_{i \in I}$ est une base de la topologie de A .

En effet soit $a \in A$ et un ouvert S de A tel que $a \in S$. Il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de X tel que $S = \mathcal{O} \cap A$. Vu que $\{B_i\}_{i \in I}$ est une base de la topologie de X , il existe $i \in I$ tel que $a \in B_i \subset \mathcal{O}$.

Vu que $\mathcal{O} \subset B_i$, nous avons

$$a \in S = A \cap \mathcal{O} \subset B_i \cap \mathcal{O}. \quad (7.68)$$

□

7.4.4 Fonctions équivalentes

DEFooWDSAooKXZsZY

Proposition-Définition 7.88 ([227]).

Soit un espace topologique X et $D \subset X$. Soient encore des fonctions $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ et un point $a \in \text{Adh}(D)$ ³⁹.

Nous définissons sur $\text{Fun}(D, \mathbb{C})$ la relation $f \sim g$ lorsque qu'il existe un voisinage V de a dans X et une fonction $\alpha: V \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

(1) $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$,

(2) pour tout $x \in (V \cap D) \setminus \{a\}$,

$$f(x) = (1 + \alpha(x))g(x). \quad (7.69)$$

EQooQXKYooSDPpNg

Cette relation est une relation d'équivalence.

Lorsque $f \sim g$, nous disons que f et g sont **équivalentes** en a .

Démonstration. Nous devons prouver les trois conditions de la définition 1.50 de relation d'équivalence.

(1) **Réflexive** Il suffit de poser $\alpha(x) = 0$.

(2) **Symétrique** Si $f \sim g$, il existe une fonction α vérifiant ce qu'il faut telle que

$$f(x) = (1 + \alpha(x))g(x). \quad (7.70)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$, il y a un voisinage de a sur lequel $|\alpha(x)| < 1$; il n'y a donc pas de problème de dénominateur en écrivant

$$g(x) = \frac{1}{1 + \alpha(x)} f(x). \quad (7.71)$$

Nous posons alors $\beta(x) = -\alpha(x)/(1 + \alpha(x))$. Cela vérifie

$$g(x) = (1 + \beta(x))f(x). \quad (7.72)$$

37. Définition 7.74.

38. Base de topologie, proposition 7.2.

39. Adhérence ou fermeture, c'est la même chose. Voir la définition 7.19 et le lemme 7.20.

Et

$$\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0 \quad (7.73)$$

parce que $\lim_{x \rightarrow a} (1 + \alpha(x)) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow a} -\alpha(x) = 0$.

(3) **Transitive** Soit $f \sim g$ et $g \sim h$. Sur un voisinage V de a nous avons

$$f(x) = (1 + \alpha(x))g(x), \quad (7.74)$$

sur un voisinage W de a nous avons

$$g(x) = (1 + \beta(x))h(x). \quad (7.75)$$

Sur le voisinage $V \cap W$ nous avons

$$f(x) = (1 + \beta(x) + \alpha(x) + (\alpha\beta)(x))h(x). \quad (7.76)$$

Donc la fonction $\gamma(x) = \beta(x) + \alpha(x) + (\alpha\beta)(x)$ fait l'affaire.

□

Notons que la notion d'équivalence de fonctions, de même que la notion de limite, ne dépend pas des valeurs exactes atteintes par les fonctions au point.

Lemme 7.89.

Si f et g sont équivalentes en a , et si g ne s'annule pas sur un voisinage de a , alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe r tel que

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in B(1, \epsilon) \quad (7.77)$$

pour tout $x \in B(a, r)$.

Démonstration. Nous considérons un voisinage V de a sur lequel en même temps :

- la fonction α de la définition d'équivalence est définie,
- $|\alpha(x)| < \epsilon$ pour tout $x \in V$,
- $g(x) \neq 0$, pour tout $x \in V$.

Ensuite nous considérons $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset V$. En divisant la condition (7.69) par $g(x)$ nous trouvons

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \alpha(x). \quad (7.78)$$

Donc

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right| = |\alpha(x)| \leq \epsilon, \quad (7.79)$$

ce qu'il fallait prouver.

□

7.5 Espace topologique normal et complètement normal

DEFooNNKVooLtzImT

Définition 7.90.

Un **espace topologique normal** est un espace topologique séparé dont les ouverts séparent strictement les fermés disjoints.

Autrement dit, si F_1 et F_2 sont des fermés disjoints de X , alors il existe des ouverts disjoints $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ tels que $F_1 \subset \mathcal{O}_1$ et $F_2 \subset \mathcal{O}_2$.

PROPooWSKZooHKvuob

Proposition 7.91.

L'espace topologique $\mathbb{R}^n$ est normal.

⚠ Avertissement/question au lecteur !! 7.92

J'ai écrit le lemme 7.93 de façon adhoc pour une utilisation dans le théorème d'Urysohn. J'avoue n'être pas certain qu'il soit vrai. Si vous en trouvez une preuve, écrivez-moi.

LEMooVVASooEXYKOZ

Lemme 7.93 ([1]).

Soit un espace topologique normal X . Si $\mathcal{O}$ est ouvert dans X et si F est un fermé contenu dans $\mathcal{O}$, alors il existe un ouvert U tel que

$$F \subset U \subset \bar{U} \subset \mathcal{O}. \quad (7.80)$$

DEFooTLVHooYWvDIu

Définition 7.94 ([228]).

Un espace topologique X est **complètement normal** si pour toutes parties $A, B \subset X$ telles que $A \cap \bar{B} = B \cap \bar{A} = \emptyset$, il existe deux ouverts U, V tels que

- (1) $A \subset U$
- (2) $B \subset V$
- (3) $U \cap V = \emptyset$.

7.6 Connexité

L'idée de la connexité, c'est de s'assurer qu'un ensemble est « d'un seul tenant ».

PROPooNLXDooVTZLan

Proposition-Définition 7.95 (Espace topologique connexe[229]).

Soit un espace topologique X . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) X n'est pas la réunion de deux ouverts non vides disjoints.
- (2) X n'est pas la réunion de deux fermés non vides disjoints.
- (3) Les seuls ouverts-fermés de X sont X et $\emptyset$.
- (4) Toute application continue $X \rightarrow \{1, 2\}$ (munie de la topologie discrète) est constante.

Quand un espace topologique vérifie ces conditions, nous disons que X est **connexe**.

DEFooQGESooKSVtmt

Définition 7.96 (Partie connexe[229]).

Une partie d'un espace topologique est **connexe** si elle est connexe pour la topologie induite.

DEFooJYCDooGNEDoC

Définition 7.97 (Partie n-connexe[1]).

Une partie Q d'un espace topologique X est **n-connexe** si pour tout ouverts A, B tels que

- (1) $Q \subset A \cup B$
- (2) $A \cap Q \neq \emptyset$ et $B \cap Q \neq \emptyset$,

nous avons $A \cap B \neq \emptyset$.

PROPooQHJXooMNRxOJ

Proposition 7.98 ([1]).

Tout connexe est n-connexe.

Démonstration. Soient un espace topologique (X, τ_X) ainsi qu'une partie $Q \subset X$ munie de la topologie induite τ_Q . Nous supposons que Q n'est pas n-connexe, et nous montrons que Q n'est pas connexe.

Si Q n'est pas n-connexe, il existe $A, B \in \tau_X$ tels que $Q \subset A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cap Q \neq \emptyset \neq B \cap Q$.

Les parties $A \cap Q$ et $B \cap Q$ sont des ouverts de (Q, τ_Q) . Elles sont disjointes, non vides et recouvrent Q . Donc Q n'est pas connexe. $\square$

PROPooAHWNooXhrqnd

Proposition 7.99 ([230]).

Dans un espace complètement normal⁴⁰, tout n-connexe est connexe.

Démonstration. Soient un espace topologique complètement normal X , et une partie $Q \in X$.

- (1) **Contraposée** Par contraposée nous supposons que Q n'est pas connexe : il existe $G_0, G_1 \in \tau_Q$ tels que

40. Définition 7.94.

$$(1a) \quad Q = G_0 \cup G_1$$

$$(1b) \quad G_0 \neq \emptyset \neq G_1$$

$$(1c) \quad G_0 \cap G_1 \neq \emptyset$$

Par définition de la topologie induite τ_Q , il existe des ouverts $U_0, U_1 \in \tau_X$ tels que $G_0 = U_0 \cap Q$ et $G_1 = U_1 \cap Q$.

(2) $U_0 \cap G_1 = \emptyset$ Nous avons

$$U_0 \cap G_1 = U_0 \cap U_1 \cap Q \subset U_0 \cap Q = G_0. \quad (7.81)$$

Donc un élément de $U_0 \cap G_1$ serait dans $G_0 \cap G_1$, ce qui n'est pas possible.

(3) **Fermeture** Vu que U_0 est ouvert dans X et que $U_0 \cap G_1 = \emptyset$, le lemme 7.36 dit que $U_0 \cap \text{Adh}_X(G_1) = \emptyset$. Et comme $G_0 \subset U_0$,

$$G_0 \cap \text{Adh}_X(G_1) = \emptyset. \quad (7.82)$$

De même

$$G_1 \cap \text{Adh}_X(G_0) = \emptyset. \quad (7.83)$$

(4) **Complètement normal** Vu que X est complètement normal, il existe des ouverts disjoints $V_0, V_1 \in \tau_X$ tels que $G_0 \subset V_0$ et $G_1 \subset V_1$.

(5) **Conclusion** Nous concluons que Q n'est pas n -connexe parce que $\{V_0, V_1\}$ est un recouvrement disjoint de Q par des ouverts de X .

□

⚠ Avertissement/question au lecteur !! 7.100

Il y a peut-être une réciproque. J'ai entendu à quelques endroits sur internet que si tous les n -connexes sont connexes, alors l'espace est complètement normal. Voici une tentative de démonstration, pas complète. Si vous pouvez donner une démonstration complète ou un contre-exemple (un espace non complètement normal dans lequel tous les n -connexes sont connexes), écrivez-moi.

THOooMULNooNYeHAj

pseudo-théorème 7.101 ([230, 231]).

Un espace topologique dans lequel tous les n -connexes sont connexes est complètement normal.

Démonstration. Soient des parties $A, B \subset X$ telles que $A \cap \bar{B} = B \cap \bar{A} = \emptyset$. Nous notons $Q = A \cup B$.

(1) **B est ouvert dans $Q = A \cup B$** Nous savons que $X \setminus \bar{B}$ est ouvert dans X . Vu que $B \cap \bar{A} = \emptyset$ nous avons $B \subset Q \cap (X \setminus \bar{A})$, et donc $B \subset X \setminus \bar{A}$ et donc $B = Q \cap (X \setminus \bar{A})$. La partie B est donc bien l'intersection entre Q et un ouvert de X . Donc B est ouvert dans Q .

Donc $A \cup B$ est l'union de deux ouverts disjoints (pour sa topologie induite), et n'est donc pas connexe.

(2) **Utilisation de l'hypothèse** Vu que Q n'est pas connexe, il n'est pas non plus n -connexe. Il existe des ouverts U et V tels que

$$(2a) \quad Q \subset U \cup V$$

$$(2b) \quad U \cap Q \neq \emptyset \neq V \cap Q$$

$$(2c) \quad U \cap V = \emptyset.$$

Ce serait bien que $A \subset U$ et que $B \subset V$. Mais rien n'est moins sûr. Nous considérons donc quelques cas possibles.

(3) **Si A est connexe** Dans ce cas, $\{U, V\}$ est un recouvrement de A par des ouverts disjoints. Donc $A \subset U$ et $A \cap V = \emptyset$ (ou le contraire).

- (4) **Si A a un nombre fini de composantes connexes** Soient $\{C_i\}_{i=1,\dots,n}$ les composantes connexes⁴¹ de A . Pour chaque i nous avons $C_1 \cap \bar{B} = B \cap \bar{C}_i = \emptyset$ et donc (en reprenant toute la démonstration jusqu'ici avec C_i au lieu de A), nous avons des ouverts U_i et V_i tels que $C_i \subset U_i$, $B \subset V_i$ et $U_i \cap V_i = \emptyset$.

Nous posons alors $U = \bigcup_{i=1}^n C_i$ et $V = \bigcap_{i=1}^n V_i$.

- (4a) $V \cap U = \emptyset$ En effet si $x \in V \cap U$ nous avons $V \in C_i$ pour un certain i . Pour ce même i nous avons $x \in V_i$ (c'est pour ça qu'on a dit que V serait l'intersection). Or $V_i \cap U_i = \emptyset$; un tel x ne peut pas exister.

- (4b) $V \neq \emptyset$ Parce que chacun des V_i contient B .

- (4c) **V est ouvert** Parce que c'est une intersection finie d'ouverts⁴².

- (5) **Le problème** Si A et B ont tous les deux un nombre infini de composantes connexes, on ne peut pas déduire que U et V sont ouverts. Donc la démonstration coince dans ce cas.

Bref. Preuve pas terminée. Écrivez-moi si vous êtes capable de terminer.

□

DefIRKNooJlmiD

Définition 7.102.

Lorsque X est un espace topologique, nous disons qu'un sous-ensemble A est **non connexe** quand on peut trouver des ouverts O_1 et O_2 disjoints tels que

$$A = (A \cap O_1) \cup (A \cap O_2), \quad (7.84)$$

EqDefinCon

et tels que $A \cap O_1 \neq \emptyset$, et $A \cap O_2 \neq \emptyset$. Si un sous-ensemble n'est pas non-connexe, alors on dit qu'il est **connexe**.

Une autre façon d'exprimer la condition (7.84) est de dire que A n'est pas connexe quand il est contenu dans la réunion de deux ouverts disjoints qui intersectent tous les deux A .

PROPooBCFXooRlMvch

Proposition 7.103 ([232]).

Soit un espace topologique X . Soient $(C_i)_{i \in I}$ des connexes de X tels que $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$. Alors $\bigcup_{i \in I} C_i$ est connexe.

Démonstration. Nous notons $C = \bigcup_{i \in I} C_i$. Soient des ouverts disjoints $A, B \in \tau_C$ recouvrant C . Nous devons démontrer que soit $A \cap C$ soit $B \cap C$ est vide. Par définition de la topologie induite τ_C , il existe des ouverts $A', B' \in \tau_X$ tels que $A = C \cap A'$ et $B = C \cap B'$.

Nous notons $A_i = C_i \cap A$ et $B_i = C_i \cap B$. Les parties A_i et B_i recouvrent C_i et nous avons $A_i \cup B_i = C_i$. De plus

$$A_i = C_i \cap^C A' = C_i \cap A', \quad (7.85)$$

donc A_i est ouvert dans C_i . Vu que C_i est ouvert, soit A_i soit B_i est vide.

Par hypothèse, $\bigcap_{i \in I} C_i$ est non vide. Soit x un élément de cette intersection. Soit $x \in A$ et alors $x \in A_i$ pour tout i ; soit $x \in B$ et alors $x \in B_i$ pour tout i .

Dans le premier cas, $x \in A_i$ pour tout i , de telle sorte que $B_i = \emptyset$ pour tout i . Nous avons alors

$$\emptyset = \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (C_i \cap B) = B \cap C. \quad (7.86)$$

Dans le second cas nous obtenons de même que $A \cap C = \emptyset$.

□

DEFooFHXNooJGUPPn

Proposition-Définition 7.104 ([233]).

Soient un espace topologique X et un point $x \in X$.

ITEMooBZAQooNwuzas

- (1) La réunion de toutes les parties connexes de X contenant x est connexe.
- (2) Cette réunion est la plus grande (au sens de la relation d'inclusion) de toutes les parties connexes de X contenant x .

41. Définition 7.104.

42. C'est la propriété 7.1(3).

La réunion de toutes les parties connexes de X contenant x est nommée **composante connexe** de x dans X .

Démonstration. La réunion de toutes les parties connexes contenant x est connexe par la proposition 7.103.

Nous notons C la réunion de toutes les parties connexes contenant x . Si D est un connexe contenant x , alors $D \subset C$ parce que C est une union de tous les connexes, y compris D . $\square$

PropHSJcIr

Proposition 7.105 ([1]).

Soit X un espace topologique. Les conditions suivantes sont équivalentes.

ITEMooXHIKooGqrgTs

(1) $L'espace X$ est connexe.

ITEMooRTNPooADKVnw

(2) Si $X = O_1 \cup O_2$ avec O_1 et O_2 des ouverts disjoints, alors soit $O_1 = \emptyset$ soit $O_2 = \emptyset$.

ITEMooOEZYooFBNaOZ

(3) Si $X = F_1 \cup F_2$ avec F_1 et F_2 fermés disjoints dans X , alors $F_1 = \emptyset$ ou $F_2 = \emptyset$.

ITEMooNIPZooIDPmEf

(4) Si $A \subset X$ avec A ouvert et fermé en même temps, alors $A = \emptyset$ ou $A = X$.

Démonstration. En quatre parties.

- (1) **(1) implique (2)** Par rapport à la définition 7.102, nous prenons la partie X de l'espace X . Supposons que O_1 et O_2 sont tout deux non vides. Dans ce cas nous avons

$$X = O_1 \cup O_2 = (O_1 \cap X) \cup (O_2 \cap X), \quad (7.87)$$

ce qui prouverait que X est non connexe. Contradiction. Un des O_i est vide.

- (2) **(2) implique (3)** Soit une union disjointe de fermés $X = F_1 \cup F_2$. Puisque l'union est disjointe, nous avons $F_1 = X \setminus F_2$ et $F_2 = X \setminus F_1$, ce qui fait que F_1 et F_2 sont également ouverts. Nous en déduisons que $X = F_1 \cup F_2$ est une union disjointe d'ouverts. L'hypothèse indique que $F_1 = \emptyset$ ou $F_2 = \emptyset$.
- (3) **(3) implique (4)** Soit A une partie ouverte et fermée de X . Nous supposons que A est ouvert et fermé, donc $X \setminus A$ est également ouvert et fermé : c'est la définition 7.3 d'un fermé. Nous avons évidemment l'union $X = A \cup (X \setminus A)$ qui est une union disjointe de fermés. Par hypothèse nous avons soit $A = \emptyset$ soit $X \setminus A = \emptyset$.
- (4) **(4) implique (1)** Supposons que X ne soit pas connexe. Il existe donc des ouverts disjoints O_1 et O_2 tels que $X = O_1 \cup O_2$. Étant donné que $O_1 = X \setminus O_2$, la partie O_1 est fermée comme complémentaire d'ouvert. Donc O_1 est fermé et ouvert (et O_2 aussi d'ailleurs). Par hypothèse nous concluons que O_1 est soit X soit $\emptyset$.

 $\square$

Nous verrons plus tard (proposition 7.270) une autre caractérisation de la connexité basée sur la continuité des fonctions $X \rightarrow \mathbb{Z}$.

PROPooSCKNooRbewdv

Proposition 7.106 ([1]).

Soient un espace topologique X ainsi que $S \subset X$. Si $U \subset X$ est connexe⁴³ et si $U \subset S \subset \bar{U}$, alors S est connexe.

Démonstration. Supposons que S ne soit pas connexe. Il existe des ouverts disjoints A et B tels que $S \subset A \cup B$ et $S \cap A \neq \emptyset$, $S \cap B \neq \emptyset$. Nous prouvons que ces ouverts fonctionnent aussi pour prouver que U est non connexe (donc on aura une contradiction).

D'abord A et B recouvrent U parce que $U \subset S \subset A \cup B$. Ensuite prouvons que $U \cap A \neq \emptyset$. Soit $x \in S \cap A$. Vu que $x \in S \subset \bar{U}$, tout voisinage de x intersecte U (c'est la définition 7.19 de l'adhérence). De plus $x \in A$ et A est ouvert. Soit donc un voisinage V de x contenu dans A . Nous avons $V \subset A$ et $V \cap U \neq \emptyset$. Donc $A \cap U \neq \emptyset$.

Le même raisonnement tient pour B . $\square$

43. Définition 7.102.

PropIWIDzzH

Proposition 7.107.*Stabilité de la connexité par union.*

ITEMooLVSSooTGstBz

- (1) Une union quelconque de connexes ayant une intersection non vide est connexe.
- (2) Pour tout $n \in \mathbb{N}, n > 0$, si $A_1, \dots, A_n$ sont des connexes de X avec $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$, alors l'union $\bigcup_{i=1}^n A_i$ est connexe.

Démonstration. Point par point.

- (1) Soient $\{C_i\}_{i \in I}$ un ensemble de connexes et un point p dans l'intersection : $p \in \bigcap_{i \in I} C_i$. Supposons que l'union ne soit pas connexe. Alors nous considérons A et B , deux ouverts disjoints recouvrant tous les C_i et ayant chacun une intersection non vide avec l'union. Supposons pour fixer les idées que $p \in A$ et prenons $x \in B \cap \bigcup_{i \in I} C_i$. Il existe un $j \in I$ tel que $x \in C_j$. Avec tout cela nous avons
 - (1a) $C_j \subset A \cup B$ parce que $A \cup B$ recouvre tous les C_i ,
 - (1b) $C_j \cap A \neq \emptyset$ parce que p est dans l'intersection,
 - (1c) $C_j \cap B \neq \emptyset$ parce que x est dans cette intersection.
 Cela contredit le fait que C_j soit connexe.
- (2) Pour la seconde partie nous procédons de proche en proche⁴⁴. D'abord $A_1 \cup A_2$ est connexe par la première partie, ensuite $(A_1 \cup A_2) \cup A_3$ est connexe parce que les connexes $A_1 \cup A_2$ et A_3 ont un point d'intersection par hypothèse, et ainsi de suite.

□

7.7 Compacité

La compacité est le thème 33.

7.7.1 Définition et notions connexes

Soit E , un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Nous pouvons considérer les ouverts suivants :

$$\mathcal{O}_x = B(x, 1) \quad (7.88)$$

pour chaque $x \in E$. Évidemment,

$$E \subseteq \bigcup_{x \in E} \mathcal{O}_x. \quad (7.89)$$

Cette union contient en général de nombreuses redondances. Si par exemple $E = [-10, 10]$, l'élément $3 \in E$ est contenu dans $\mathcal{O}_{3.5}$, $\mathcal{O}_{2.7}$ et bien d'autres. Pire : même si on enlève par exemple $\mathcal{O}_2$ de la liste des ouverts, l'union de ce qui reste continue à être tout E . La question est : *est-ce qu'on peut en enlever suffisamment pour qu'il n'en reste qu'un nombre fini ?*

Définition 7.108.

Soit E , un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Une collection d'ouverts $\mathcal{O}_i$ est un **recouvrement** de E si $E \subseteq \bigcup_i \mathcal{O}_i$.

DefJJVsEqS

Définition 7.109.

Une partie A d'un espace topologique est **compacte** si elle vérifie la propriété de Borel-Lebesgue : pour tout recouvrement de A par des ouverts (c'est-à-dire une collection d'ouverts dont la réunion contient A) on peut extraire un recouvrement fini.

Remarque 7.110.

Certaines sources (dont [wikipédia](#)) disent que pour être compact il faut aussi être séparé⁴⁵. Pour ces sources, un espace qui ne vérifie que la propriété de Borel-Lebesgue est alors dit **quasi-compact**.

44. Parce qu'on a la flemme de rédiger correctement une récurrence.

45. Définition 7.74.

7.111.

La définition 7.109 en cache deux. En effet, si la partie A est l'espace topologique lui-même, cela définit un espace topologique compact. Un espace topologique est compact *en soi* lorsque de tout recouvrement par des ouverts, nous pouvons extraire un sous-recouvrement fini. Dans ce cas, si X est l'espace et si $\{A_i\}_{i \in I}$ est le recouvrement, nous avons $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ et non une simple inclusion $X \subset \bigcup_{i \in I} A_i$.

LEMooVYTRooKTIYdn

Lemme 7.112.

Si K est une partie compacte de l'espace topologique X , alors K est un espace topologique compact pour la topologie induite⁴⁶ de X .

Démonstration. Nous notons τ la topologie de X et τ_K la topologie induite de X vers K , c'est-à-dire

$$\tau_K = \{\mathcal{O} \cap K \text{ tel que } \mathcal{O} \in \tau\}. \quad (7.90)$$

Soient des ouverts $A_i \in \tau_K$ ($i \in I$ où I est un ensemble quelconque) tels que $\bigcup_i A_i = K$. Pour chaque $i \in I$, il existe un $\mathcal{O}_i \in \tau$ tel que $A_i = K \cap \mathcal{O}_i$. Nous avons

$$K = \bigcup_{i \in I} (K \cap \mathcal{O}_i) \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i. \quad (7.91)$$

Donc les $\mathcal{O}_i$ forment un recouvrement de K par des ouverts de X . Puisque K est une partie compacte de X , il existe un sous-ensemble fini J de I tel que

$$K \subset \bigcup_{j \in J} \mathcal{O}_j. \quad (7.92)$$

Nous avons donc aussi

$$K \subset \bigcup_{j \in J} K \cap \mathcal{O}_j = \bigcup_{j \in J} A_j. \quad (7.93)$$

Nous avons prouvé que $\{A_j\}_{j \in J}$ est un recouvrement fini de K par des ouverts de K . Donc K est un espace topologique compact. $\square$

PROPooOXKSooEDzCRZ

Proposition 7.113 ([234]).

Soit K compact dans $\mathbb{C}$. Si $\mathcal{O}$ est une composante connexe⁴⁷ de $\mathbb{C} \setminus K$, alors $\partial \mathcal{O} \subset K$.

Démonstration. Supposons que $\partial \mathcal{O}$ n'est pas inclus dans K , et considérons $w \in \partial \mathcal{O} \setminus K$. Nous posons $A = \mathcal{O} \cup \{w\}$. Vu que $w \in \partial \mathcal{O}$, nous avons $w \in \bar{\mathcal{O}}$. Donc

$$\mathcal{O} \subset A \subset \bar{\mathcal{O}}. \quad (7.94)$$

La proposition 7.106 fait que A est connexe parce que $\mathcal{O}$ est connexe. Donc A est un connexe de $\mathbb{C} \setminus K$ contenant strictement $\mathcal{O}$. Impossible parce que $\mathcal{O}$ est une composante connexe de $\mathbb{C} \setminus K$. Contradiction.

Nous en déduisons que $\partial \mathcal{O} \subset K$. $\square$

7.7.2 Autres compacité

DEFooTVDOooZbwOFK

Définition 7.114 (Séquentiellement compact).

Nous disons qu'un espace topologique est **séquentiellement compact** si toute suite admet une sous-suite convergente.

DEFooSOLWooWISiUn

Définition 7.115 ([235]).

Un espace topologique est **σ -compact** si il est union dénombrable de sous-espaces compacts.

On dit aussi **dénombrable à l'infini**.

46. Définition 7.27.

47. Définition 7.104.

Définition 7.116.

Une famille $\mathcal{A}$ de parties de X a la **propriété d'intersection finie non vide** si tout sous-ensemble fini de $\mathcal{A}$ a une intersection non vide.

PropXKUMiCj

Proposition 7.117.

Soient X un espace topologique et $K \subset X$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

ItemXYmGHFaie

(1) K est compact.

ItemXYmGHFaie

(2) Si $\{F_i\}_{i \in I}$ est une famille de fermés telle que $\bigcap_{i \in I} F_i \cap K = \emptyset$, alors il existe une partie finie non vide A de I tel que $\bigcap_{i \in A} F_i \cap K = \emptyset$.

ItemXYmGHFaie

(3) Si $\{F_i\}_{i \in I}$ est une famille de fermés telle que pour tout choix de A fini dans I nous ayons $\bigcap_{i \in A} F_i \cap K \neq \emptyset$, alors l'intersection complète est non vide : $\bigcap_{i \in I} F_i \cap K \neq \emptyset$.

ItemXYmGHFaiv

(4) Toute famille de fermés de X , à laquelle K est joint, et qui a la propriété d'intersection finie non vide, a une intersection non vide.

Démonstration. Les propriétés (3) et (2) sont équivalentes par contraposition. De plus le point (4) est une simple⁴⁸ reformulation en français de la propriété (3).

Prouvons (1) $\Rightarrow$ (2). Soit $\{F_i\}_{i \in I}$ une famille de fermés tels que $K \cap \bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$. Les complémentaires $\mathcal{O}_i$ de F_i dans X recouvrent K et donc on peut en extraire un sous-recouvrement fini :

$$K \subset \bigcup_{i \in A} \mathcal{O}_i \quad (7.95)$$

pour un certain sous-ensemble fini A de I . Pour ce même choix A , nous avons alors aussi

$$\bigcap_{i \in A} F_i \cap K = \emptyset. \quad (7.96)$$

L'implication (2) $\Rightarrow$ (1) est la même histoire de passage aux complémentaires. $\square$

Le théorème 7.351 est en général celui qu'on nomme « théorème des fermés emboîtés », mais le corolaire suivant en mériterait également le nom.

CORooQABLooMPSUBf

Corolaire 7.118 ([1]).

Soient un espace topologique compact X et une suite $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de fermés emboîtés⁴⁹ dans X telle que

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} F_i = \emptyset. \quad (7.97)$$

Alors il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que $F_i = \emptyset$ pour tout $i \geq j_0$.

Démonstration. La proposition 7.117 nous dit qu'il existe une partie finie non vide J de $\mathbb{N}$ telle que $\bigcup_{j \in J} F_j = \emptyset$. Si $j_0 = \min(J)$, alors $F_j \subset F_{j_0}$ pour tout $j \in J$ et nous avons

$$\emptyset = \bigcap_{j \in J} F_j = F_{j_0}. \quad (7.98)$$

Dès que $F_{j_0} = \emptyset$, tous les suivants sont également vides. $\square$

7.7.3 Quelques propriétés

LemOWVooZKndbI

Lemme 7.119.

Une partie K d'un espace topologique est compacte si et seulement si de tout recouvrement par des ouverts d'une base de topologie nous pouvons extraire un sous-recouvrement fini.

Remarquons que la partie qui est réellement à prouver est que, si « ça marche » pour des ouverts d'une base de topologie, alors « ça marche » pour tous types d'ouverts.

48. Enfin, simple... il faut remarquer que dans la formulation de (4), les intersections peuvent ne pas faire intervenir K , mais, au final, on s'en moque.

49. C'est-à-dire que $F_{i+1} \subset F_i$.

Démonstration. Soit K une partie d'un espace topologique et $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ un recouvrement de K par des ouverts. Chacun des $\mathcal{O}_i$ est une union d'éléments de la base de topologie par la proposition 7.2 : disons $\mathcal{O}_i = \bigcup_{j \in J_i} A_{(i,j)}$. Soit $J = \{j = (i, j_i) | i \in I, j_i \in J_i\}$; alors nous obtenons $\bigcup_{j \in J} A_j = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$.

Par hypothèse nous pouvons extraire un ensemble fini $J_0 \subset J$ tel que $K \subset \bigcup_{j \in J_0} A_j$. Par construction chacun des A_j est inclus dans (au moins) un des $\mathcal{O}_i$. Le choix d'un élément de I pour chacun des éléments de J_0 donne une partie finie I_0 de I telle que $K \subset \bigcup_{j \in J_0} A_j \subset \bigcup_{i \in I_0} \mathcal{O}_i$. $\square$

Exemple 7.120 (Un compact non fermé).

En général, un compact n'est pas toujours fermé. Si nous prenons par exemple un ensemble X de plus de deux points muni de la topologie grossière $\{\emptyset, X\}$. Toutes les parties de cet espace sont compactes, mais les seuls fermés sont $\{\emptyset, X\}$. Toutes les autres parties sont alors compactes et non fermées. $\triangle$

LemnAeACf

Lemme 7.121 (Compacts et fermés[236]).

À propos de parties fermées dans un compact.

ITEMooNKAkooQoNddr

(1) Une partie fermée d'un compact est compacte.

ITEMooAZWVooLyPDeY

(2) Tout compact d'un espace topologique séparé est fermé.

Démonstration. En deux parties.

- (1) **Pour (1)** Soient F fermé dans un compact K et $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ un recouvrement de F par des ouverts. Puisque F est fermé, F^c est ouvert et $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I} \cup \{K \setminus F\}$ est un recouvrement de K par des ouverts. Si nous en extrayons un sous-recouvrement fini, c'est un recouvrement de F , et en supprimant éventuellement l'ouvert $K \setminus F$, ça reste un sous-recouvrement fini de F tout en étant extrait de $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$.
- (2) **Pour (2)** Soient X un espace séparé et K compact dans X . Nous considérons $y \in K^c$ et, par hypothèse de séparation, pour chaque $x \in K$ nous considérons un voisinage ouvert V_x de x et un voisinage ouvert⁵⁰ W_x de y tels que $V_x \cap W_x = \emptyset$. Bien entendu les V_x forment un recouvrement de K par des ouverts dont nous pouvons extraire un sous-recouvrement fini : soit S fini dans K tel que

$$K \subset \bigcup_{x \in S} V_x. \quad (7.99)$$

L'ensemble $W = \bigcap_{x \in S} W_x$ est une intersection finie d'ouverts autour de y et est donc un ouvert autour de y .

Montrons que $W \cap K = \emptyset$. Soit $a \in K$; par définition de S , il existe $s \in S$ tel que $a \in V_s$. Par conséquent, a n'est pas dans W_s et donc pas non plus dans W .

L'ouvert W prouve que y est dans l'intérieur du complémentaire de K , et comme y est arbitraire, nous concluons que le complémentaire de K est ouvert (théorème 7.8), en d'autres termes, que K est fermé. $\square$

CORooSSFFooNkNmIS

Corolaire 7.122 ([237, 238]).

Dans un espace topologique, une intersection d'un compact avec un fermé est compacte.

Démonstration. Soit un espace topologique X . Soient K compact dans X et F fermé dans X . Soit un recouvrement $\{U_i\}_{i \in I}$ de $K \cap F$ par des ouverts de X . Vu que $K = (K \cap F) \cup (K \setminus F)$, la famille

$$\{\{U_i\}_{i \in I}, X \setminus F\} \quad (7.100)$$

recouvre K . Par compacité de K , nous pouvons en extraire un sous-recouvrement fini. Il existe une partie finie $I_0 \subset I$ tel que

$$\{\{U_i\}_{i \in I_0}, X \setminus F\} \quad (7.101)$$

50. Oui, la notation du voisinage peut surprendre, mais elle est quand même pratique pour ce qu'on veut en faire.

recouvre K . Cette famille recouvre donc aussi $K \cap F$. Mais comme $X \setminus F$ n'intersecte sûrement pas $K \cap F$, la famille $\{U_i\}_{i \in I_0}$ recouvre $K \cap F$. Nous avons donc bien extrait un sous-recouvrement fini pour $K \cap F$. $\square$

PROPooFXCXooXNeXWI

Proposition 7.123 (Théorème des compacts emboîtés[239]).

Soit un espace topologique séparé X . Soient des compacts emboîtés non vides $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors l'intersection est compacte et non vide.

Démonstration. En deux parties.

- (1) **L'intersection est non vide** Nous utilisons la proposition 7.117(3). Vu que K_0 est compact, nous considérons la famille de fermés⁵¹ $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Si I est fini dans $\mathbb{N}$, alors

$$K_{\max(I)+1} \subset \bigcap_{i \in I} K_i, \quad (7.102)$$

de telle sorte que $\bigcap_{i \in I} K_i$ est non vide. La proposition 7.117(3) dit alors que l'intersection $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i$ est non vide.

- (2) **L'intersection est compacte** Nous posons $K = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i$. Soit un recouvrement $\{A_i\}_{i \in I}$ de K par des ouverts.

- (2a) **$X \setminus K$ est ouvert** Vu que K_i est compact, il est fermé et $X \setminus K_i$ est ouvert. Le lemme 1.41(5) dit que

$$X \setminus K = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (X \setminus K_i). \quad (7.103)$$

Donc $X \setminus K$ est ouvert en tant que union d'ouverts.

- (2b) **Un recouvrement pour K_0** Nous avons :

$$K_0 = (K_0 \cap K) \cup (K_0 \setminus K) \quad (7.104a)$$

$$\subset K \cup (K_0 \setminus K) \quad (7.104b)$$

$$\subset \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cup (X \setminus K). \quad (7.104c)$$

Donc $\{A_i, X \setminus K\}$ est un recouvrement de K_0 par des ouverts. Il existe donc un J fini dans $\mathbb{N}$ tel que

$$K_0 \subset \left(\bigcup_{j \in J} A_j \right) \cup (X \setminus K). \quad (7.105)$$

- (2c) **Le recouvrement fini de K** Si $x \in K$, alors $x \in K_0$, mais x n'est pas dans $X \setminus K$. Donc $x \in \bigcup_{j \in J} A_j$. Nous avons démontré que $\{A_j\}_{j \in J}$ était un recouvrement fini de K . $\square$

LEMooFJZDooSxYVWVW

Lemme 7.124 ([1]).

Toute union finie de compacts est compacte.

Démonstration. Soient $(K_i)_{i=1, \dots, n}$ des compacts dans X . Si $\{\mathcal{O}_s\}_{s \in S}$ est un recouvrement de $\bigcup_{i \in I} K_i$ par des ouverts, à fortiori, ce sera un recouvrement de chacun des K_i . Pour chaque i , il existera donc une partie finie S_i de S telle que $\{\mathcal{O}_s\}_{s \in S_i}$ recouvre K_i .

L'union finie de parties finies S_i est une partie finie de S , et nous avons

$$\bigcup_i K_i \subset \bigcup_{s \in \bigcup_i S_i} \mathcal{O}_s. \quad (7.106)$$

$\square$

51. Tout compact d'un espace séparé est fermé, lemme 7.121(2).

PROPooQWHSooXeJOkT

Proposition 7.125 ([240]).

Dans un espace séparé, toute intersection de compacts est compacte.

Démonstration. Soit un espace topologie séparé X et des compacts $\{K_i\}_{i \in I}$ dans X (I est un ensemble quelconque). Chacun des K_i est fermé par le lemme 7.121(2). Donc l'intersection

$$K = \bigcap_{i \in I} K_i \quad (7.107)$$

est un fermé de X par le lemme 7.6(1). Soit i dans I . Nous avons $K \subset K_i$. Donc K est un fermé dans le compact K_i ; il est donc compact par le lemme 7.121. $\square$

Exemple 7.126 (Intersection de compacts non compacte[240]).

Un exemple d'intersection de compacts qui n'est pas compacte. Vu la proposition 7.125, il va falloir chercher un espace non séparé. Soit $X = \mathbb{N} \cup \{x_1, x_2\}$ où x_1 et x_2 sont deux éléments distincts hors de $\mathbb{N}$. Nous définissons une topologie sur X en disant que les ouverts sont les parties suivantes :

- les parties de $\mathbb{N}$,
- la partie $\mathbb{N} \cup \{x_1\}$,
- la partie $\mathbb{N} \cup \{x_2\}$,
- la partie $\mathbb{N} \cup \{x_1, x_2\}$.

Nous considérons les parties $K_1 = \mathbb{N} \cup \{x_1\}$ et $K_2 = \mathbb{N} \cup \{x_2\}$.

- (1) K_i est compact Soit $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ un recouvrement de K_1 par des ouverts de X . Alors il existe $i_0 \in I$ tel que $x_1 \in \mathcal{O}_{i_0}$. Vue la liste des ouverts, $\mathcal{O}_{i_0}$ est soit $\mathbb{N} \cup \{x_1\}$ soit $\mathbb{N} \cup \{x_1, x_2\}$. Dans les deux cas, $\{\mathcal{O}_{i_0}\}$ est un sous-recouvrement fini de K_1 .
- (2) $K_1 \cap K_2 = \mathbb{N}$ C'est immédiat parce que x_1 et x_2 sont distincts.
- (3) $\mathbb{N}$ n'est pas compact Il peut être recouvert par les ouverts $\{\{i\}\}_{i \in \mathbb{N}}$ dont on ne peut pas extraire de sous-recouvrements finis.

△

PropGBZUooRKaOxy

Proposition 7.127.

Si V est une partie de l'espace topologique X muni de la topologie induite⁵² τ_V de celle de X , et si K est un compact de (V, τ_V) alors K est un compact de (X, τ_X) .

Démonstration. Soient $\{\mathcal{O}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ des ouverts de X recouvrant K . Alors les ensembles $V \cap \mathcal{O}_\alpha$ recouvrent également K , mais sont des ouverts de V . Donc il en existe un sous-recouvrement fini. Soient donc $\{V \cap \mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ recouvrant K avec I un sous-ensemble fini de A . Les ensembles $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ recouvrent encore K et sont des ouverts de X . $\square$

Proposition 7.128 ([1]).

Soient des espaces topologiques X et Y . Nous considérons des ouverts A de X et B de Y . Soit un compact M dans $A \times B$ ⁵³. Il existe des compacts K et L dans A et B tels que $M \subset K \times L$.

Démonstration. Nous considérons les « projections » de M sur A et B :

$$K = \{a \in A \text{ tel que } \exists b \in B \text{ tel que } (a, b) \in M\}, \quad (7.108)$$

et

$$L = \{b \in B \text{ tel que } \exists a \in A \text{ tel que } (a, b) \in M\}. \quad (7.109)$$

Nous avons $M \subset K \times L$; il reste à montrer que K et L sont des compacts de leurs espaces respectifs. Soit un recouvrement $\{U_i\}_{i \in I}$ de K par des ouverts de X et $\{V_j\}_{j \in J}$ de L par des ouverts de Y . Alors

$$\{U_i \times V_j\}_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \quad (7.110)$$

52. Définition 7.27.

53. Topologie produit, définition 7.63

est un recouvrement de M par des ouverts de $X \times Y$. Puisque M est un compact de $X \times Y$, nous pouvons en extraire un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire I_0 fini dans I et J_0 fini dans J tels que

$$\{U_i \times V_j\}_{\substack{i \in I_0 \\ j \in J_0}} \quad (7.111)$$

soit encore un recouvrement de $K \times L$. Nous prouvons à présent que $\{U_i\}_{i \in I_0}$ est un recouvrement de K , ce qui montrera que K est un compact.

Soit $a \in K$. Il existe $b \in B$ tel que $(a, b) \in M$. Donc il existe $i_0 \in I_0$ et $j_0 \in J_0$ tels que $(a, b) \in U_{i_0} \times V_{j_0}$. En particulier $a \in U_{i_0}$.

Le même raisonnement montre que $\{V_j\}_{j \in J_0}$ est un recouvrement de L . $\square$

7.7.4 Espace relativement compact

DEFooBODRooEFhzeT

Définition 7.129 (Partie relativement compacte[241]).

Une partie d'un espace topologique est **relativement compact** si elle est contenue dans un compact.

PROPooXKBXooUIwTiO

Proposition 7.130 ([241]).

Une partie d'un espace séparé est relativement compacte si et seulement si sa fermeture est compacte.

LEMooJXGUooXDGIXG

Lemme 7.131 (Union finie de relativement compacts[1]).

Dans un espace séparé⁵⁴, une union finie de parties relativement compactes⁵⁵ est relativement compacte.

Démonstration. Soit des parties relativement compactes A_i . Notre objectif est de prouver que $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i}$ est compact. La partie $\bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$ est compacte comme union finie de compacts (lemme 7.124); elle est donc fermée par le lemme 7.121(2) :

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i. \quad (7.112)$$

Nous avons donc

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i. \quad (7.113)$$

Autrement dit, la partie $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i}$ est un fermé dans un compact. Elle est donc compacte par le lemme 7.121(1). $\square$

LEMooNIJEooMdvkuA

Lemme 7.132 ([1]).

Soit un espace topologique Hausdorff X . Nous supposons que $K \subset U$ avec K compact et U ouvert. Si $a \notin U$, alors il existe un voisinage A de a tel que $A \cap K = \emptyset$.

Démonstration. Pour chaque k dans K , nous séparons k et a par des ouverts : A_k est un ouvert autour de a et B_k est un ouvert autour de k tels que $A_k \cap B_k = \emptyset$. Vu que $\{B_k\}_{k \in K}$ est un recouvrement du compact K par des ouverts, nous extrayons un sous-recouvrement fini $\{B_k\}_{k \in I}$, et nous posons $A = \bigcap_{k \in I} A_k$.

En tant qu'intersection finie d'ouverts, A est un ouvert. De plus $a \in A$. Nous avons $A \cap K = \emptyset$; en effet supposons que $s \in K$. Nous avons $s \in B_k$ pour un certain $k \in I$. Dans ce cas nous avons

$$A \cap B_k \subset A_k \cap B_k = \emptyset. \quad (7.114)$$

$\square$

54. Séparé et Hausdorff sont synonymes, définition 7.74.

55. Définition 7.129.

7.7.5 Propriété d'intersection finie

DEFooCESGooZkACqs

Définition 7.133 (Propriété d'intersection finie[242]).

Soit un ensemble X . Une famille non vide $\mathcal{A}$ de parties de X a la **propriété d'intersection finie** si toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{A}$ est non vide.

THOooCQSQooDuaqo

Théorème 7.134 ([242]).

Un espace est compact si et seulement si toute famille de parties fermées ayant la propriété d'intersection finie⁵⁶ a une intersection non vide.

7.8 Limite de fonction

DefYNVoWBx

Définition 7.135 (Limite d'une fonction, thème 29[243]).

Soient des espaces topologiques X et Y ainsi que $\Omega \subset X$ et $a \in \text{Adh}(\Omega)$. Soit une application $f: \Omega \rightarrow Y$. Nous disons que l'élément ℓ de Y est une **limite** de f en a lorsque pour tout ouvert V contenant ℓ , il existe un voisinage ouvert U de a tel que

$$f\left((U \cap \Omega) \setminus \{a\}\right) \subset V. \quad (7.115)$$

EQooXLJJooZDcOqU

Si un tel élément est unique⁵⁷, alors nous disons que cet élément est la **limite** de f et nous notons

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell. \quad (7.116)$$

7.136.

Il aurait été tout aussi bien de définir la limite d'une fonction $f: X \rightarrow Y$ définie sur tout X , puis de considérer Ω avec la topologie induite depuis X .

Dans ce cas, nous aurions écrit (7.115) sous la forme

$$f\left(U \setminus \{a\}\right) \subset V \quad (7.117)$$

en disant que U est un voisinage de a , et en laissant le lecteur deviner que ici, « voisinage » signifie « voisinage au sens de la topologie induite ». Vu que nous considérons la fonction f uniquement définie sur Ω , c'est la seule interprétation possible, et il n'y aurait pas eu d'ambiguïté[244]. Mais bon... si ça va sans dire, ça va encore mieux en le disant.

Remarque 7.137.

Nous ne saurions trop insister sur le fait que la valeur de f en a n'intervient pas dans la définition de la limite de f en a . Il n'est même pas nécessaire que f soit définie en a pour que l'on puisse parler de limite de f en a . Par exemple nous avons

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2, \quad (7.118)$$

alors que la fonction n'est pas définie en $x = 1$.

Plus généralement, un peu par principe, toutes les fois que la notion de limite apporte une information, le point où l'on prend la limite est spécial. Sinon on ne calculerait pas la limite, mais on regarderait directement la valeur de la fonction. Cela est typiquement le cas lorsque nous aborderons les dérivées. En effet, regardons (en faisant semblant d'anticiper) la définition (10.268). Dans la formule

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad (7.119)$$

la fonction sur laquelle nous prenons la limite n'est *jamais* définie en $x = a$.

56. Définition 7.133.

57. Rappelons que ce n'est pas toujours le cas, mais que ça l'est si l'espace topologique est séparé – définition 7.74.

PropFObayrf

Proposition 7.138 (Unicité de la limite pour un espace séparé).

Soient X un espace topologique, A une partie de X et Y un espace topologique séparé⁵⁸. Nous considérons une fonction $f: A \rightarrow Y$. Si $a \in \text{Adh}(A)$, alors f admet au plus une limite en a .

Démonstration. Soient y et y' des limites de f en a , ainsi que des voisinages V et V' de y et y' . Nous prenons également les voisinages W et W' correspondants :

$$\begin{cases} f(W \cap A) \subset V \\ f(W' \cap A) \subset V'. \end{cases} \quad \begin{matrix} (7.120a) \\ (7.120b) \end{matrix}$$

Quitte à prendre des sous-ensembles nous pouvons supposer que W et W' sont ouverts. Il s'ensuit alors que :

- l'ensemble $W \cap W'$ est un ouvert contenant a et intersecte donc A ;
- l'ensemble $(W \cap W') \cap A$ est donc non vide;
- et donc, $f(W \cap W' \cap A)$ est, lui aussi, non vide.

Mais

$$f(W \cap W' \cap A) \subset f(W \cap A) \subset V, \quad (7.121)$$

et

$$f(W \cap W' \cap A) \subset f(W' \cap A) \subset V', \quad (7.122)$$

d'où V et V' ont une intersection. Puisque ces ensembles sont arbitraires, nous avons prouvé que tout voisinage de y et tout voisinage de y' ont une intersection non vide; étant donné que Y est séparé, nous devons avoir $y = y'$. $\square$

7.9 Topologie, distances et normes

Certains ensembles ont plus de structures qu'une topologie. Nous fixons quelques bases maintenant, et nous détaillerons certains résultats plus tard.

7.9.1 Distance et topologie métrique

DefMVNVFsX

Définition 7.139.

Si E est un ensemble, une **distance** sur E est une application $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x, y \in E$,

- (1) $d(x, y) \geq 0$
- (2) $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$,
- (3) $d(x, y) = d(y, x)$
- (4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

La dernière condition est l'**inégalité triangulaire**.

Un couple (E, d) formé d'un ensemble et d'une distance est un **espace métrique**.

DEFooGLTUooJjaSmI

Définition 7.140 (Espace vectoriel topologique métrisable^[245]).

Un espace topologique est **métrisable** si il existe une distance⁵⁹ compatible avec la topologie.

Le lemme suivant est similaire à la proposition 7.213.

LEMooXCXHooVtrkvl

Lemme 7.141.

Si (E, d) est un espace métrique et si $x, y, z \in E$, nous avons

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y). \quad (7.123)$$

⁵⁸. Définition 7.74.

⁵⁹. Distance, définition 7.139.

La définition-théorème suivante donne une topologie sur les espaces métriques en partant des boules.

ThoORdLYUu

Théorème-Définition 7.142 (Topologie métrique).

Soit (E, d) un espace métrique. Nous définissons les **boules ouvertes** par

$$B(a, r) = \{x \in E \text{ tel que } d(a, x) < r\}. \quad (7.124)$$

EQooYCWSooIhbyd

pour tout $a \in E$ et $r > 0$. Alors en posant

$$\tau_d = \{\mathcal{O} \subset E \text{ tel que } \forall a \in \mathcal{O}, \exists r > 0 \text{ tel que } B(a, r) \subset \mathcal{O}\} \quad (7.125)$$

EqGDVVooDZfwSf

nous définissons une topologie sur E .

Cette topologie sur E est la **topologie métrique** de (E, d) . En présence d'une distance, sauf mention explicite du contraire, c'est toujours cette topologie-là que nous utiliserons.

Démonstration. D'abord $\emptyset \in \tau_d$ parce que tout élément de l'ensemble vide ...heu ...enfin parce que, d'accord hein⁶⁰. Ensuite si les $\{A_i\}_{i \in I}$ sont des éléments de τ_d et si $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ alors il existe $k \in I$ tel que $x \in A_k$. Par hypothèse il existe une boule $B(x, r) \subset A_k \subset \bigcup_{i \in I} A_i$.

Enfin si les $\{A_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ sont des éléments de $\mathcal{T}$ alors pour tout i il existe $r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subset A_i$. En prenant $r = \min\{r_i\}_{i=1, \dots, n}$ nous avons $B(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^n A_i$. $\square$

PROPooZXTXooEMLgMn

Proposition 7.143.

La topologie sur un espace métrique⁶¹ est la topologie engendrée⁶² par ses boules ouvertes.

Démonstration. Nous notons (E, d) l'espace métrique. Nous notons τ_d la topologie métrique, et τ_B celle engendrée par les boules ouvertes.

(1) $\tau_d \subset \tau_B$ Soit $a \in \tau_d$. Pour tout $a \in A$, nous avons une boule $B(a, r_a)$ incluse dans A , et donc

$$A = \bigcup_{a \in A} B(a, r_a) \in \tau_B. \quad (7.126)$$

(2) $\tau_B \subset \tau_d$ Soient $a_i \in E$ et $r_i > 0$.

(2a) $\bigcap_{i=1}^n B(a_i, r_i) \in \tau_d$ Soit $x \in \bigcap_{i=1}^n B(a_i, r_i)$. Pour chaque i , nous avons $d(x, a_i) < r_i$. Il existe donc $\alpha_i > 0$ tel que $d(x, a_i) < \alpha_i < r_i$. En posant $\epsilon_i < r_i - \alpha_i$ nous avons $B(x, \epsilon_i) \subset B(a_i, r_i)$. En posant $\epsilon < \min_i(\epsilon_i)$ nous avons

$$B(x, \epsilon) \subset \bigcap_{i=1}^n B(a_i, r_i). \quad (7.127)$$

(2b) **Et donc** Nous avons prouvé que

$$\bigcap_{i=1}^n B(a_i, r_i) \in \tau_d. \quad (7.128)$$

Tout élément de τ_B est une union de tels éléments. Vu que τ_d est stable par union, nous avons $\tau_B \subset \tau_d$. $\square$

Proposition 7.144.

À propos de séparation.

(1) Tout espace métrique⁶³ est séparé.

(2) Si une suite dans un espace métrique possède une limite, alors elle est unique.

60. Pour qui ne serait pas d'accord, ajoutez $\emptyset$ dans la définition des ouverts et puis c'est tout.

61. Définition 7.142.

62. Définition 7.13

63. Définition 7.139.

Démonstration. Si deux éléments x et y sont distincts, alors en posant $r = d(x, y)/3 > 0$, les boules $B(x, r)$ et $B(y, r)$ sont disjointes.

En ce qui concerne les limites, ce sont les propositions 7.82 et 7.138. $\square$

7.145.

Nous allons maintenant voir deux résultats disant que si une fonction est continue, alors elle peut être permutée avec une limite de suite. Dans le cas des espaces métriques, la proposition 7.157 montrera la réciproque : si pour toute suite $x_n \rightarrow a$, nous avons $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y$, alors f a une limite en a qui vaut y .

fContEstSeqCont

Proposition 7.146 (Permuter limite et fonction continue[1]).

Soient deux espaces topologiques X et Y ainsi qu'une fonction $f: X \rightarrow Y$. Soit $a \in X$ et $\ell \in Y$. Si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell, \quad (7.129)$$

alors, pour toute suite (x_k) telle que $x_k \rightarrow a$, on a

$$\lim f(x_k) = \ell. \quad (7.130)$$

Démonstration. Nous considérons une suite (x_k) qui converge vers a dans X . Soient V un voisinage de ℓ et W un voisinage de a tels que $f(W) \subset V$ (définition 7.135 de la continuité en un point). Par la convergence $x_k \rightarrow a$, il existe N tel que pour tout $k \geq N$, $x_k \in W$, et donc tel que $f(x_k) \in V$, ce qui donne la continuité séquentielle de f . $\square$

7.9.2 Précompact

DEFooLZDTooZlAtdL

Définition 7.147.

Une partie A d'un espace topologique métrique⁶⁴ est **précompact** si pour tout $\epsilon > 0$, il peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ϵ .

PROPooDWUDooGrgZpP

Proposition 7.148 ([246]).

L'adhérence d'un précompact est précompacte.

Démonstration. Soit un précompact A ; fixons $\epsilon > 0$. La partie A peut être recouverte par les boules $\{B(a_i, \epsilon)\}_{i=1, \dots, n}$. Soit maintenant $x \in \text{Adh}(A)$. Il existe $a \in A$ tel que $d(a, x) < \epsilon$. De plus a est dans une des boules; c'est-à-dire que il existe $i = 1, \dots, n$ tel que $d(a_i, a) < \epsilon$. Nous avons donc

$$d(a_i, x) \leq d(a_i, a) + d(a, x) \leq 2\epsilon. \quad (7.131)$$

Donc les boules $\{B(a_i, 2\epsilon)\}_{i=1, \dots, n}$ recouvrent $\text{Adh}(A)$. $\square$

PROPooZRXDooUyFBFG

Proposition 7.149.

Soient un espace topologique X ainsi que $A \subset X$. Si A est précompact et complet, alors A est compact.

7.9.3 Caractérisations séquentielles

7.9.3.1 Continuité séquentielle

DefENioICV

Définition 7.150.

Si X et Y sont deux espaces topologiques, une fonction $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ est **séquentiellement continue** en un point a si pour toute suite convergente $x_n \rightarrow a$ dans X nous avons $f(x_n) \rightarrow f(a)$ dans Y .

64. Topologie métrique, définition 7.142.

7.9.4 Suites et espaces métriques

Proposition 7.151 (Caractérisation séquentielle de la limite^[1]).

Soient deux espaces métriques X et Y ainsi qu'une fonction $f: X \rightarrow Y$. Soit $a \in X$ et $\ell \in Y$. On a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell, \quad (7.132)$$

si et seulement si, pour toute suite (x_k) telle que $x_k \rightarrow a$, on a

$$\lim f(x_k) = \ell. \quad (7.133)$$

Par ailleurs, l'une des deux limites existe si et seulement si l'autre existe.

Démonstration. Le sens direct est la proposition 7.146. Pour la réciproque, nous passons par la contraposée. C'est-à-dire que nous supposons que ℓ n'est pas une limite de f pour $x \rightarrow a$. Il existe un ϵ tel que pour tout δ , il existe un x vérifiant $d_X(x; a) < \delta$ et $d_Y(f(x); \ell) > \epsilon$.

Nous construisons à présent une suite de la manière suivante. Pour $\delta = \frac{1}{n}$ nous considérons x_n tel que $d_X(x_n; a) < \delta$ et $d_Y(f(x_n); \ell) > \epsilon$. Cette suite converge vers a , mais la suite $f(x_n)$ ne converge manifestement pas vers ℓ : elle ne rentre jamais dans la boule $B(\ell, \epsilon)$. $\square$

Une fonction continue est séquentiellement continue. Dans les espaces métriques la proposition suivante montre que la réciproque est également vraie et la continuité est équivalente à la continuité séquentielle. Cela n'est cependant pas vrai pour n'importe quel espace topologique.

Corolaire 7.152 (Caractérisation séquentielle de la continuité en un point^[1]).

Si X et Y sont des espaces métriques, alors une fonction $f: X \rightarrow Y$ est continue en un point si et seulement si elle est séquentiellement continue en ce point.

Démonstration. Paraphrasons la preuve précédente. Nous supposons que X et Y sont métriques. Si f n'est pas continue en a , il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe x tel que $\|x - a\| \leq \delta$ et $\|f(x) - f(a)\| > \epsilon$. Nous considérons un tel ϵ et pour chaque $n \geq 1 \in \mathbb{N}$ nous considérons un x_n correspondant à $\delta = \frac{1}{n}$. Cela nous donne une suite $x_n \rightarrow a$ dans X mais $\|f(x_n) - f(a)\|$ reste plus grand que ϵ . Cela montre que f n'est pas non plus séquentiellement continue. $\square$

Définition 7.153 (Fermeture séquentielle^[247]).

Une partie F d'un espace topologique X est dit **séquentiellement fermé** si la convergence d'une suite (x_n) de F vers x implique que x appartient à F .

Les espaces métriques ont une propriété importante que la fermeture séquentielle est équivalente à la fermeture.

Proposition 7.154 (Caractérisation séquentielle d'un fermé).

Soient X un espace métrique⁶⁵ et $F \subset X$. L'ensemble F est fermé si et seulement si toute suite contenue dans F et convergeant dans X converge vers un élément de F .

Démonstration. Une suite contenue dans un fermé ne peut converger que vers un élément de ce fermé : c'était la proposition 7.78. Le point le plus important est donc l'autre sens : si toute suite d'éléments de F converge dans F alors F est fermé.

Par contraposée, supposons que $X \setminus F$ ne soit pas ouvert. Alors il existe $x \in X \setminus F$ pour lequel tout voisinage intersecte F . En prenant $x_k \in B(x, \frac{1}{k})$, nous construisons une suite contenue dans F , convergeant vers x qui n'est pas dans F . $\square$

Le lemme suivant est précisément la version « espace métrique » du corolaire 7.79 ; mais, donnons-en une preuve tout de même.

65. Définition 7.139.

LemLimAbarA

Lemme 7.155.

Soit X un espace métrique⁶⁶, et soit (x_n) une suite convergente contenue dans un ensemble $A \subset X$. Alors la limite x_n appartient à $\bar{A}$.

Démonstration. Supposons que nous ayons une partie A de X , et une suite (x_n) dont la limite ℓ se trouve hors de $\bar{A}$. Dans ce cas, il existe un $r > 0$ tel que⁶⁷ $B(\ell, r) \cap A = \emptyset$. Si tous les éléments x_n de la suite sont dans A , il n'y en a donc aucun tel que $d(x_n, \ell) < r$. Cela contredit la notion de convergence $x_n \rightarrow \ell$. $\square$

CorAdhEstLim

Corolaire 7.156.

Soit X un espace métrique, $A \subset X$ et $a \in \bar{A}$. Alors il existe une suite d'éléments dans A qui converge vers a .

Démonstration. Si $a \in A$, alors nous pouvons prendre la suite constante $x_n = a$. Si a n'est pas dans A , alors a est dans ∂A , et pour tout n , il existe un point de A dans la boule $B(a, \frac{1}{n})$. Si nous nommons x_n ce point, la suite ainsi construite est une suite contenue dans A et qui converge vers a (ce dernier point est laissé à la sagacité de la lectrice.). $\square$

En termes savants, ce corolaire signifie que la fermeture $\bar{A}$ est composé de A plus de toutes les limites de toutes les suites contenues dans A .

PropXIAQsXr

Proposition 7.157 (Caractérisation séquentielle de la continuité[1]).

Soient X et Y deux espaces topologiques séparés. Nous supposons que X est métrisable⁶⁸. Une application $f: X \rightarrow Y$ est continue sur X si et seulement si elle est séquentiellement continue sur X .

Démonstration. En deux parties dont une déjà faite.

(1) $\Rightarrow$ C'est la proposition 7.146.

(2) $\Leftarrow$ Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de Y ; nous allons voir que le complémentaire de $f^{-1}(\mathcal{O})$ est fermé dans X . Pour cela nous considérons une suite convergente $x_k \xrightarrow{X} x$ avec $x_k \in X \setminus f^{-1}(\mathcal{O})$ pour tout k . Nous allons montrer que $x \in X \setminus f^{-1}(\mathcal{O})$ et la caractérisation séquentielle⁶⁹ de la fermeture conclura que $X \setminus f^{-1}(\mathcal{O})$ est fermé.

Pour tout k , nous avons $f(x_k) \in X \setminus \mathcal{O}$, et $f(x_k) \xrightarrow{Y} f(x)$ parce que f est séquentiellement continue. Vu que $f(x_k)$ est une suite dans le fermé $Y \setminus \mathcal{O}$, la limite est également dans $Y \setminus \mathcal{O}$. Nous en déduisons que $f(x) \in Y \setminus \mathcal{O}$, de telle sorte que $x \in X \setminus f^{-1}(\mathcal{O})$. $\square$

PropCJGIooZNpnGF

Proposition 7.158.

Si X et Y sont deux espaces métriques et $f, g: X \rightarrow Y$ sont deux fonctions continues égales sur une partie dense de X alors $f = g$.

Démonstration. Les fonctions f et g sont séquentiellement continues (proposition 7.152). Soient A un ensemble dense dans X sur lequel f et g sont égales, et $x \notin A$. Vu que A est dense, il existe une suite a_n dans A telle que $a_n \rightarrow x$. La séquentielle continuité de f et g donnent

$$f(a_n) \rightarrow f(x) \quad (7.134a)$$

$$g(a_n) \rightarrow g(x), \quad (7.134b)$$

mais pour tout n , $f(a_n) = g(a_n)$. Par unicité de la limite⁷⁰ dans Y , $f(x) = g(x)$. $\square$

66. Définition 7.139.

67. Une autre manière de dire la même chose : si $\ell \notin \bar{A}$, alors $d(\ell, A) > 0$.

68. Définition 7.140 : il existe une distance compatible avec la topologie.

69. Proposition 7.154, valable parce que la topologie de X provient d'une métrique.

70. Proposition 7.138.

7.9.5 Continuité de la distance

PROPooSZMLooNdtLLj

Proposition 7.159 ([1]).

Soit un espace métrique (E, d) . L'application $d: E \times E \rightarrow E$ est continue.

NORMooJBMXooLHfAJK

7.160.

Si vous avez un peu de temps, vous pouvez vérifier que si $\mathbb{K}$ est un corps totalement ordonné, alors avec toutes les définitions de 1.481, en posant $d(x, y) = |x - y|$ nous avons une distance sur $\mathbb{K}$.

De plus, les boules définies en 1.481 sont alors les mêmes que celles définies en (7.124), ce qui donne à tout corps totalement ordonné une structure d'espace topologique.

PROPooUXDJooCrWBbd

Proposition 7.161 ([1]).

Soient un espace métrique (E, d) , ainsi qu'une suite convergente $a_n \xrightarrow{d} \ell$. Il existe $r > 0$ tel que pour tout n nous ayons $d(\ell, a_n) < r$.

Démonstration. Soit $r_1 > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ implique $d(\ell, a_n) < r_1$. Ensuite nous posons $r_2 = \max\{d(\ell, a_n)\}_{n=0, \dots, N}$.

Pour tout n nous avons $d(a_n, \ell) \leq r_1 + r_2$. □

PROPooNOHQooTqBQLk

Proposition 7.162 ([1]).

Soient un espace topologique X , un espace topologique normé⁷¹ Y . Soit une application continue $f: X \rightarrow Y$. Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert de x sur lequel f est bornée.

Démonstration. Soit $\delta > 0$. Nous considérons dans Y la boule $B(f(x), \delta)$. Par continuité de f , la partie $f^{-1}(B(f(x), \delta))$ est ouverte dans X . Si y est dans cette partie, alors

$$f(y) \in B(f(x), \delta). \quad (7.135)$$

L'application f y est donc bornée. □

7.9.6 Topologie métrique et induite

LEMooKDMYooMlcFRI

Lemme 7.163.

Soit un espace vectoriel normé $(V, \|\cdot\|)$ muni d'un sous-espace vectoriel M . La topologie induite de M depuis V est la même que la topologie de la norme induite $(M, \|\cdot\|)$.

7.9.7 Intérieur, adhérence et frontière

7.164.

Choses déjà faites :

- Intérieur, définition 7.16.
- Adhérence, qui est la même chose que fermeture, définition 7.19, et précisé par le lemme 7.20.

Dans le cas de $\mathbb{R}^n$ dans lequel les boules forment une base de la topologie nous pouvons encore préciser de la façon suivante :

$$x \in \text{Adh } A \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \epsilon > 0, B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset \quad (7.136)$$

Proposition 7.165.

Pour $A \subset \mathbb{R}^n$, nous avons

$$\text{Int } A \subseteq A \subseteq \text{Adh } A \quad (7.137)$$

DEFooACVLooRwehTI

Définition 7.166.

La **frontière** ou le **bord** de A est défini par $\partial A = \text{Adh } A \setminus \text{Int } A$.

71. Topologie en 7.142.

LEMooMPZWooGrqYIX

Lemme 7.167.

Une partie A d'un espace topologique est ouverte si $A = \text{Int } A$, et fermée si $A = \text{Adh } A$.

PROPooFHURooGXcekV

Proposition 7.168 ([1]).

Un ouvert n'intersecte pas sa frontière.

Démonstration. Soit un ouvert A . Nous avons $\partial(A) = \bar{A} \setminus \text{Int}(A)$. Oh mais comme A est ouvert, $\text{Int}(A) = A$. Donc les éléments de A sont exclus de ∂A . $\square$

PROPooTHOPooCOGmZD

Proposition 7.169 ([1]).

Toute frontière est fermée. Plus précisément : si S est une partie de l'espace topologique X , nous avons :

ITEMooCIG'TooOyNTYt

$$(1) \quad \partial S = \bar{S} \cap \overline{E \setminus S}.$$

ITEMooCSHKooHibSre

$$(2) \quad \partial S \text{ est fermée.}$$

Démonstration. Pour (1), nous utilisons la proposition 7.21 : $\overline{X \setminus S} = X \setminus \text{Int}(S)$. Donc

$$\bar{S} \cap \overline{X \setminus S} = \bar{S} \cap (X \setminus \text{Int}(S)) = \bar{S} \setminus \text{Int}(S) = \partial(S). \quad (7.138)$$

Nous avons utilisé le lemme 1.41(4).

En ce qui concerne (2), ∂S est fermé en tant qu'intersection de deux fermés. $\square$

PROPooYHIGooMDVKNy

Proposition 7.170 ([1]).

Soit une partie S d'un espace topologique X . Soit un ouvert $A \subset S$. Si $A \cap \partial S = \emptyset$, alors $\bar{A} \subset S$.

LEMooEUYEooYcUfKr

Lemme 7.171 (Caractérisation équivalente de la frontière).

Soient X un espace topologique et $S \subset X$. Un point $x \in X$ est dans ∂S si et seulement si tout voisinage de x contient un point de S et un point de S^c .

Démonstration. Supposons que tout voisinage de x contienne un point de S et un point de S^c . Alors $x \in \text{Adh}(S)$ (définition 7.19), mais pas dans l'intérieur de S parce que x ne possède pas de voisinage contenu dans S . Donc $x \in \partial S$.

À l'inverse, si $x \in \partial S$ alors x est dans l'adhérence de S et tout voisinage de x contient un point de S . Mais x n'est pas dans l'intérieur de S et tout voisinage de x contient un point qui n'est pas dans S , aka un point de S^c . $\square$

Corolaire 7.172.

Un ensemble et son complémentaire ont même frontière.

Démonstration. Conséquence du lemme 7.171. Les points de $\partial(S^c)$ sont caractérisés par le fait que tout voisinage contient un point de S^c et un point de $(S^c)^c = S$. $\square$

Exemple 7.173.

Soit $X = [0, 1]$ muni de la topologie de la distance $|x - y|$ (définition 7.142). Les points 0 et 1 ne sont pas dans la frontière de X . En effet une boule ouverte autour de 1 est un ensemble de la forme

$$B(1, r) = \{x \in X \text{ tel que } |x - 1| < r\} =]1 - r, 1] \quad (7.139)$$

où nous avons supposé $r < 1$.

Les points 0 et 1 sont par contre sur la frontière de $[0, 1]$ lorsque cet ensemble est vu comme partie de l'espace métrique $\mathbb{R}$. $\triangle$

LEMooLKWEEooItGnkP

Lemme 7.174 (Passage de douane[248, 249]).

Dans un espace topologique, toute partie connexe qui rencontre à la fois une partie A et son complémentaire rencontre nécessairement la frontière de A .

Démonstration. Nommons C la partie connexe qui intersecte A et A^c . Les ouverts $\text{Int}(A)$ et $X \setminus \bar{A}$ ne peuvent pas recouvrir C parce que ce sont deux ouverts disjoints alors que C est connexe (voir la définition 7.102 de la connexité). Donc C doit contenir des points qui sont dans $\bar{A}$ mais pas dans $\text{Int}(A)$. C'est-à-dire des points de ∂A . $\square$

On vérifiera que les notations et les dénominations sont cohérentes en prouvant la proposition suivante.

Proposition 7.175.

Pour $\epsilon > 0$,

- (1) l'adhérence de $B(x, \epsilon)$ est $\bar{B}(x, \epsilon)$,
- (2) l'intérieur de $\bar{B}(x, \epsilon)$ est $B(x, \epsilon)$,
- (3) la boule ouverte $B(x, \epsilon)$ est un ouvert,
- (4) la boule fermée $\bar{B}(x, \epsilon)$ est un fermé.

Nous avons également les liens suivants entre intérieur, adhérence, ouvert, fermé et passage au complémentaire (noté ^{c}) :

Proposition 7.176.

Si $A \subset \mathbb{R}^n$ et $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$, nous avons

- (1) $(\text{Int } A)^c = \text{Adh}(A^c)$ et $(\text{Adh } A)^c = \text{Int}(A^c)$,
- (2) A est ouvert si et seulement si A^c est fermé,
- (3) $\text{Int } A$ est le plus grand ouvert contenu dans A ,
- (4) $\text{Adh } A$ est le plus petit fermé contenant A ,

ExBFLoUNyvbw

Exemple 7.177.

Il n'est en général pas vrai que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$. Par exemple si $A = [0, 1[$ et $B =]1, 2]$. Dans ce cas, $A \cap B = \emptyset$ alors que $\bar{A} \cap \bar{B} = \{1\}$. $\triangle$

7.9.8 Boules ouvertes, fermées, sphères

DEFooPDSJooFcUqKH

Définition 7.178.

Soit un espace métrique (E, d) .

- (1) Nous nommons **boule fermée** la fermeture de la boule ouverte, c'est-à-dire les parties de la forme $\bar{B}(a, r)$.
- (2) La **sphère** de centre $a \in E$ et de rayon $r \in \mathbb{R}^+$ est la frontière⁷² de la boule : $S(a, r) = \partial B(a, r)$.

7.179.

Les différences entre boules ouvertes, fermées et sphères sont très importantes. D'abord, les boules sont pleines tandis que la sphère est creuse. En comparant à une pomme, la boule ouverte serait la pomme « sans la peau », la boule fermée serait « avec la peau » tandis que la sphère serait seulement la peau.

LEMooDYYYooHZitMZ

Lemme 7.180.

Quelques liens entre les boules et les sphères.

- (1) La sphère est donnée par $S(a, r) = \{x \in V \text{ tel que } d(x, a) = r\}$.
- (2) La fermeture de la boule est $\overline{B(a, r)} = \{x \in V \text{ tel que } d(x, a) < r\}$;
- (3) Nous avons $\overline{B(a, r)} = B(a, r) \cup S(a, r)$.

72. Frontière, définition 7.166.

7.9.9 Espace localement compact

DefEIBYooAWoESf

Définition 7.181.

Un espace topologique est **localement compact** si tout élément possède un voisinage compact.

LEMooAXESooYyvesg

Lemme 7.182.

Si X est un espace topologique localement compact et si K est compact dans X , il existe un ouvert V tel que $K \subset V$ et $\bar{V}$ est compact.

LEMooKYMKooPxZjWN

Lemme 7.183.

Soient un espace localement compact X , un compact K et un ouvert $\mathcal{O}$ tel que $K \subset \mathcal{O}$. Il existe un ouvert relativement compact V tel que

$$K \subset V \subset \bar{V} \subset \mathcal{O}. \quad (7.140)$$

PROPooVLOZooLIYNNa

Proposition 7.184 ([250, 251, 252]).

Soit un espace topologique séparé X . Les faits suivants sont équivalents :

ITEMooZLNUooHcTakl

(1) X est localement compact⁷³.

ITEMooYMKMooUkcNzd

(2) Tout éléments de X a un voisinage compact.

ITEMooXYHooTCZMJr

(3) Tout point de X possède une base de voisinages formés d'ouverts à fermeture compactes.

ITEMooBFECoDDsTuo

(4) Tout point de X possède un voisinage ouvert à fermeture compacte.

Démonstration. Nous avons (1) $\Leftrightarrow$ (2) parce que c'est la définition de localement compact. À part ça, on va faire un plusieurs parties.

(1) (2) $\Rightarrow$ (4) Soit $x \in X$. Par (2) nous avons un ouvert A et un compact K tels que $x \in A \subset K$. La partie $\bar{A}$ est un fermé dans le compact K et est donc compacte par le lemme 7.121(1).

(2) (4) $\Rightarrow$ (2) Soit $x \in X$. Si A est le voisinage ouvert à fermeture compacte, alors $\bar{A}$ est un voisinage compact.

(3) (2) $\Rightarrow$ (3) Soit un ouvert U contenant x . Nous allons montrer qu'il existe un ouvert A autour de x tel que $\bar{A}$ est compact et $A \subset U$. Soit un point $x \in X$. Par (2), il possède un voisinage compact K .

Nous considérons la frontière $\partial(U \cap K)$. C'est une partie fermée de X par la proposition 7.169(2). Et comme $\partial(U \cap K)$ est contenu dans K , il est un fermé dans un compact. Donc $\partial(U \cap K)$ est compact.

Si $y \in \partial(U \cap K)$, alors $y \neq x$ parce que U est un ouvert et n'intersecte pas sa frontière⁷⁴. Étant donné que X est séparé, pour chaque $y \in \partial(U \cap K)$, nous trouvons des voisinages ouverts V_y de y et W_y de x tels que $V_y \cap W_y = \emptyset$.

Notons que $K \cap U$ contient un ouvert autour de x parce que K en contient un et que U en est un. Nous pouvons donc choisir $W_y \subset K \cap U$. L'ensemble de parties $\{V_y\}_{y \in \partial(U \cap K)}$ est un recouvrement du compact $\partial(U \cap K)$ par des ouverts. Nous pouvons donc choisir $y_1, \dots, y_n \in \partial(U \cap K)$ tel que

$$\partial(U \cap K) \subset \bigcup_{k=1}^n V_{y_k}. \quad (7.141)$$

Donc $A = W_{y_1} \cap \dots \cap W_{y_n}$ est un voisinage de x qui :

(3a) est inclut dans $U \cap K$,

(3b) n'intersecte aucun des V_{y_i} ,

(3c) n'intersecte donc pas $\partial(U \cap K)$.

La proposition 7.170 dit que la fermeture $\bar{A} = \overline{W_{y_1} \cap \dots \cap W_{y_n}}$ est encore dans $U \cap K$. Et comme $U \cap K$ est compact, nous déduisons que $\bar{A}$ est compact.

(4) (3) $\Rightarrow$ (4) Si on a une base de voisinages, à fortiori, on a un voisinage.

□

73. Définition 7.181.

74. Proposition 7.168.

7.9.10 Compactifié d'Alexandrov

PROPooHNOZooPSzKIN

Proposition-Définition 7.185 ([253]).

Soit un espace topologique séparé localement compact⁷⁵ X . Nous considérons un élément $\omega \notin X$ et l'ensemble $\hat{X} = X \cup \{\omega\}$. Nous nommons « ouverts de $\hat{X}$ » les parties suivantes :

- les ouverts de X ,
- les parties de la forme $A \cup \{\omega\}$ avec $X \setminus A$ compact dans X .

Alors $\hat{X}$ est un espace topologique compact (cela justifie le nom « ouvert » donné aux parties sus-définies).

Démonstration. La première chose à faire est de prouver que $\hat{X}$ est bien un espace topologique (définition 7.1). Nous notons τ la topologie sur X et $\hat{\tau}$ l'ensemble des « ouverts » de $\hat{X}$. Le but est de prouver que $\hat{\tau}$ est une topologie.

- (1) **L'espace lui-même** $\hat{X} \in \hat{\tau}$ parce que $\hat{X} = X \cup \{\omega\}$ et que $X \setminus X = \emptyset$ est compact.
- (2) **Le vide** $\emptyset \in \tau \subset \hat{\tau}$.
- (3) **Union quelconque** Soient A_i ($i \in I$) des éléments de $\hat{\tau}$. Nous posons $I_1 = \{i \in I \text{ tel que } A_i \subset X\}$ et $I_2 = I \setminus I_1$. Nous avons

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \left(\bigcup_{i \in I_1} A_i \right) \cup \left(\bigcup_{i \in I_2} A_i \right) = B \cup \left(\bigcup_{i \in I_2} B_i \cup \{\omega\} \right) \quad (7.142)$$

où B et les B_i sont des ouverts de X tels que $X \setminus B_i$ est compact dans X . Nous récrivons ça sous la forme

$$\bigcup_{i \in I} A_i = B \cup \left(\bigcup_{i \in I_2} B_i \right) \cup \{\omega\}. \quad (7.143)$$

La question est de savoir si

$$X \setminus \left(B \cup \left(\bigcup_{i \in I_2} B_i \right) \right) \quad (7.144)$$

est compact dans X . Un peu de réécriture :

$$X \setminus \left(B \cup \left(\bigcup_{i \in I_2} B_i \right) \right) = (X \setminus B) \cap X \setminus \left(\bigcup_{i \in I_2} B_i \right) = (X \setminus B) \cap \left(\bigcap_{i \in I_2} (X \setminus B_i) \right). \quad (7.145)$$

La partie $X \setminus B$ est fermée dans X parce que B est ouverte. La proposition 7.125 dit qu'une intersection de compacts est compacte (parce que X est séparé). Nous sommes donc en présence de l'intersection entre un compact et un fermé.

Tout compact d'un espace séparé est fermé⁷⁶. Donc nous sommes en présence de l'intersection de deux fermés. Donc $(X \setminus B) \cap \left(\bigcap_{i \in I_2} (X \setminus B_i) \right)$ est fermé. Mais c'est contenu dans le compact $\bigcap_{i \in I_2} (X \setminus B_i)$. Fermé dans un compact, donc compact (lemme 7.121).

- (4) **Intersection finie** Nous considérons les « ouverts » $(A_i)_{i=1, \dots, n}$ de $\hat{X}$. Si ce sont tous des ouverts de X , l'intersection est un ouvert de X et on est bon.

Supposons que tous les A_i soient de la forme $A_i = B_i \cup \{\omega\}$ avec $X \setminus B_i$ compact. Alors

$$\bigcap_{i=1}^n (B_i \cup \{\omega\}) = \left(\bigcap_{i=1}^n B_i \right) \cup \{\omega\} \quad (7.146)$$

Mais le lemme 1.41 (appliqué un nombre fini de fois) donne

$$X \setminus \left(\bigcap_{i=1}^n B_i \right) = \bigcup_{i=1}^n (X \setminus B_i) \quad (7.147)$$

⁷⁵. Définition 7.181.

⁷⁶. Lemme 7.121(2).

qui est compact en tant qu'union finie de compacts⁷⁷.

Enfin, nous supposons que les A_i sont un mélange des deux types, nous les séparons entre ceux qui sont directement des ouverts de X et les autres :

$$A_i = \begin{cases} B_i & \text{si } i \leq q \\ C_i \cup \{\omega\} & \text{si } q < i \leq n \end{cases} \quad (7.148)$$

où B_i sont ouverts et C_i sont des parties de X telles que $X \setminus C_i$ est compacte.

Nous avons

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \left(\bigcap_{i=1}^q B_i \right) \cap \left(\bigcap_{i=q+1}^n (C_i \cup \{\omega\}) \right) \quad (7.149a)$$

$$= B \cap \left(\bigcap_{i=q+1}^n C_i \right). \quad (7.149b)$$

Justifications.

— Nous avons posé B est l'intersection des B_i .

— Vu que ω n'est pas dans B , nous pouvons l'oublier dans les $C_i \cup \{\omega\}$.

C'est le moment d'étudier $E = \bigcap_{i=q+1}^n C_i$. Nous avons

$$X \setminus E = X \setminus \left(\bigcap_{i=q+1}^n C_i \right) = \bigcup_{i=q+1}^n (X \setminus C_i). \quad (7.150)$$

Vu que $X \setminus C_i$ est compact, il est fermé⁷⁸. La partie $X \setminus E$ est donc fermée comme union finie de fermés⁷⁹. Et donc E est ouvert. Et finalement

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = B \cap E \quad (7.151)$$

est un ouvert de X comme intersection d'ouverts. C'est donc aussi un ouvert de $\hat{X}$.

Nous avons fini de prouver que $(\hat{X}, \hat{\tau})$ est un espace topologique. Nous montrons à présent que $\hat{X}$ est compact.

Soit $\{A_i\}_{i \in I}$ un recouvrement de $\hat{X}$ par des ouverts. Pour au moins un $i_0 \in I$ nous avons $\omega \in A_{i_0}$. Nous posons $A_{i_0} = B \cup \{\omega\}$ avec $X \setminus B$ compact dans X .

Les ouverts $\{A_i\}_{i \in I}$ forment un recouvrement de $X \setminus B$ par des ouverts. Nous pouvons en extraire un sous-recouvrement fini :

$$X \setminus B \subset \bigcup_{i \in I_1} A_i. \quad (7.152)$$

Nous avons alors

$$\hat{X} \subset \bigcup_{i \in I_1 \cup \{i_0\}} A_i. \quad (7.153)$$

Et voilà que $\hat{X}$ est recouvert par un nombre fini des A_i . Notez que (7.153) est une égalité, mais nous n'en avons pas besoin. $\square$

7.186.

Oh bien entendu, les plus fêrus de questions embarrassantes demanderont, si X est l'espace considéré, où prendre ce ω ? Quel « objet » existe en-dehors de X ? Qui m'assure que X n'est pas tellement grand que tout est dedans? Le fait est qu'il n'existe pas d'ensemble contenant tous les ensembles (c'est le corolaire 1.81). Nous pouvons donc toujours trouver un ensemble ω qui n'est pas dans X .

77. Lemme 7.124.

78. Par le lemme 7.121(2) et le fait que nous considérons un espace séparé.

79. Par le lemme 7.6(2).

En ce qui concerne $\mathbb{R}$ auquel nous pouvons attacher deux infinis ($+\infty$ et $-\infty$), ce sera la définition 12.26.

Pour $\mathbb{C}$, nous donnerons une caractérisation de la limite en ∞ dans le lemme 12.87.

7.9.11 Continuité séquentielle

PropFnContParSuite

Corolaire 7.187 (Caractérisation séquentielle de la continuité en un point[1]).

Une application entre deux espaces topologiques continue en un point y est séquentiellement continue.

Démonstration. Soit une application $f: X \rightarrow Y$ entre les espaces topologiques X et Y . Nous supposons que f est continue en $a \in X$. Soit une suite convergente $x_k \xrightarrow{X} a$. Nous devons prouver que $f(x_k) \rightarrow f(a)$.

Soit un voisinage V de $f(a)$ dans Y . Le fait que f soit continue en a signifie⁸⁰ que $f(a)$ est une limite de f en a , c'est-à-dire⁸¹ qu'il existe un voisinage W de a tel que $f(W \setminus \{a\}) \subset V$.

Puisque $x_k \rightarrow a$, il existe N tel que $x_k \in W$ pour tout $k \geq N$. Pour ces valeurs de k , nous avons $f(x_k) \in V$.

Nous avons prouvé que pour tout voisinage V de $f(a)$ dans Y , il existe N tel que $f(x_k) \in V$ dès que $k \geq N$. Cela signifie exactement que $f(x_k) \rightarrow f(a)$. $\square$

7.9.11.1 Les boules, une base de topologie

PropNBSoooraAFr

Proposition 7.188.

Un espace métrique séparable⁸² accepte une base de topologie⁸³ dénombrable.

Soit A dense et dénombrable dans l'espace métrique séparable (E, d) . Si $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est une énumération de A et $\{r_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une énumération de $\mathbb{Q}$, alors

$$\mathcal{B} = \{B(a_i, r_j)\}_{i,j \in \mathbb{N}} \quad (7.154)$$

est une base de la topologie⁸⁴ de E .

Démonstration. Soient $x \in E$ et V un voisinage de x . Ce dernier contient une boule $B(x, r)$ et quitte à prendre r un peu plus petit nous supposons que $r \in \mathbb{Q}$ (existence d'un tel rationnel par le lemme 1.544).

Soit $a \in A$ avec $\|a - x\| < \frac{r}{3}$ (existe par densité de A dans E); nous avons $B(a, \frac{2r}{3}) \subset B(x, r)$ parce que si $y \in B(a, \frac{2r}{3})$ alors

$$\|y - x\| \leq \|y - a\| + \|a - x\| < \frac{2}{3}r + \frac{1}{3}r = r. \quad (7.155)$$

La seconde inégalité est stricte parce que les boules sont ouvertes. Le tout montre que $y \in B(x, r)$. Par ailleurs $x \in B(a, \frac{2}{3}r)$ et nous avons trouvé un élément de $\mathcal{B}$ contenant x tout en étant inclus dans V . Cela prouve que $\mathcal{B}$ est bien une base de la topologie de E . $\square$

RemIPVLooHUXyeW

Remarque 7.189.

Il est vite vu que les cubes ouverts forment aussi une base de la topologie de $\mathbb{R}^n$. Cela est à mettre en rapport avec le fait que toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$ (proposition 10.57).

Voir aussi le corolaire 14.274 qui donnera tout ouvert comme union de pavés presque disjoints.

DefEnsembleBorne

Définition 7.190.

*Soit (X, d) un espace métrique. Un sous-ensemble $A \subset X$ est **borné** si il existe une boule de X contenant A .*

80. C'est la définition 7.45 de la continuité en un point.

81. Définition 7.135 d'une limite.

82. Qui possède une partie dense dénombrable, définition 7.75.

83. Base de topologie, définition 7.2.

84. Définition 7.2.

PROPooJIOAooWqzKMu

Proposition 7.191.

Toute réunion finie de parties bornées est bornée. Toute partie d'un ensemble borné est un ensemble borné.

Démonstration. Soient des parties bornées $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$. Si m_i est un majorant de A_i , alors $M = \max\{m_i\}_{i=1,\dots,n}$ est un majorant de $\bigcup_{i=1}^n A_i$. Notons que M est bien défini par le lemme 1.208.

Pour la seconde affirmation, si A est borné (notons m un majorant de A) et si $B \subset A$, alors m est un majorant de B . $\square$

7.9.12 Continuité et compacité

Un résultat important dans la théorie des fonctions sur les espaces vectoriels normés est qu'une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes. Ce résultat sera énormément utilisé pour trouver des maximums et minimums de fonctions. Le théorème exact est le suivant.

LemQFXOWyx

Lemme 7.192 (de Lebesgue[254]).

Soit (X, d) un espace métrique tel que toute suite ait une sous-suite convergente à l'intérieur de l'espace. Si $\{V_i\}$ est un recouvrement par des ouverts de X , alors il existe ϵ tel que pour tout $x \in X$, nous ayons $B(x, \epsilon) \subset V_i$ pour un certain i .

Démonstration. Par l'absurde, nous supposons que pour tout n , il existe un $x_n \in X$ tel que la boule $B(x_n, \frac{1}{n})$ n'est contenue dans aucun des V_i . De ces x_n , nous extrayons une sous-suite convergente (que nous nommons encore (x_n)) et nous posons $x_n \rightarrow x$. Pour n assez grand ($\frac{1}{n} < \epsilon$) nous avons $x_n \in B(x, \epsilon)$, donc tous les x_n suivants sont dans le V_i qui contient x . $\square$

LemMGQqgDG

Lemme 7.193 ([254]).

Soit (X, d) un espace métrique tel que toute suite possède une sous-suite convergente. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un ensemble fini $\{x_i\}_{i \in I}$ tel que les boules $B(x_i, \epsilon)$ recouvrent X .

Démonstration. Soit par l'absurde un $\epsilon > 0$ contredisant le lemme. Il n'existe pas de parties finies de X autour des points desquels les boules de taille ϵ recouvrent X .

Nous construisons par récurrence une suite ne possédant pas de sous-suite convergente. Le premier terme, x_0 est pris arbitrairement dans X . Ensuite si nous avons déjà N termes de la suite, nous savons que les boules de rayon ϵ centrées sur les points $\{x_i\}_{i=1,\dots,N}$ ne recouvrent pas X . Donc nous prenons x_{N+1} hors de l'union de ces boules.

Ainsi nous avons une suite (x_n) dont tous les termes sont à distance plus grande que ϵ les uns des autres. Une telle suite ne peut pas contenir de sous-suite convergente. Contradiction. $\square$

ThoBWFTXAZNH

Théorème 7.194 (Bolzano-Weierstrass[254], thème 33).

Un espace métrique est compact si et seulement si toute suite admet une sous-suite qui converge à l'intérieur de l'espace.

Démonstration. Soient X un espace métrique compact et (x_n) une suite dans X . Nous considérons la suite de fermés emboîtés

$$X_n = \overline{\{x_k \text{ tel que } k > n\}}. \quad (7.156)$$

Ce sont des fermés ayant la propriété d'intersection finie non vide, et donc la proposition 7.117 nous dit qu'ils ont une intersection non vide. Un élément de cette intersection est automatiquement un point d'accumulation de la suite⁸⁵.

Nous passons à l'autre sens. Nous supposons que toute suite dans X contient une sous-suite convergente, et nous considérons $\{V_i\}_{i \in I}$, un recouvrement de X par des ouverts. Par le lemme 7.192, nous considérons un ϵ tel que pour tout x , il existe un $i \in I$ avec $B(x, \epsilon) \subset V_i$. Par le lemme 7.193, nous considérons un ensemble fini $\{y_i\}_{i \in A}$ tel que les boules $B(y_i, \epsilon)$ recouvrent X .

85. Définition 7.43.

Par construction, chacune de ces boules $B(y_i, \epsilon)$ est contenue dans un des ouverts V_i . Nous sélectionnons donc parmi les V_i le nombre fini qu'il faut pour recouvrir les $B(y_i, \epsilon)$ et donc pour recouvrir X . $\square$

ExEFYoTILPDk

Exemple 7.195 (Non compacité de la boule unité en dimension infinie).

Le théorème de Bolzano-Weierstrass permet de voir tout de suite que la boule unité n'est pas compacte dans un espace vectoriel de dimension infinie : la suite des vecteurs de base ne possède pas de sous-suite convergente. $\triangle$

Le théorème de Bolzano-Weierstrass 7.194 a l'importante conséquence suivante.

ThoWeistrassRn

Théorème 7.196 (Weierstrass).

Une fonction continue à valeurs réelles définie sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration. Soient K un compact et $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Nous désignons par A l'ensemble des valeurs prises par f sur K :

$$A = f(K) = \{f(x) \text{ tel que } x \in K\}. \quad (7.157)$$

Nous considérons le supremum $M = \sup A = \sup_{x \in K} f(x)$ avec la convention suivante : si A n'est pas borné supérieurement, nous posons $M = \infty$ (voir définition 1.567).

Nous allons maintenant construire une suite (x_n) de deux façons différentes selon que $M = \infty$ ou non.

- (1) Si $M = \infty$, nous choisissons, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, un $x_n \in K$ tel que $f(x_n) > n$. C'est certainement possible parce que si A n'est pas borné, nous pouvons y trouver des nombres aussi grands que nous voulons.
- (2) Si $M \neq \infty$, nous savons que pour tout ε , il existe un $y \in A$ tel que $y > M - \varepsilon$. Pour chaque n , nous choisissons donc $x_n \in K$ tel que $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$.

Quel que soit le cas dans lequel nous sommes, la suite (x_n) est une suite dans K qui est compact, et donc nous pouvons en extraire une sous-suite convergente à l'intérieur de K par le théorème de Bolzano-Weierstrass 7.194. Afin d'alléger la notation, nous allons noter (x_n) la sous-suite convergente. Nous avons donc

$$x_n \rightarrow x \in K. \quad (7.158)$$

Par la proposition 7.187, nous savons que f prend en x la valeur

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n). \quad (7.159)$$

Donc $f(x) < \infty$. Évidemment, si nous avions été dans le cas où $M = \infty$, la suite x_n aurait été choisie pour avoir $f(x_n) > n$ et donc il n'aurait pas été possible d'avoir $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) < \infty$. Nous en concluons que $M < \infty$, et donc que f est bornée sur K .

Afin de prouver que f atteint sa borne, c'est-à-dire que $M \in A$, nous considérons les inégalités

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M. \quad (7.160)$$

En passant à la limite $n \rightarrow \infty$, ces inégalités deviennent

$$M \leq f(x) \leq M, \quad (7.161)$$

et donc $f(x) = M$, ce qui prouve que f atteint sa borne M au point $x \in K$. $\square$

LEMooQLVAooICaPvR

Lemme 7.197 ([1]).

Soient des compacts A, B et une fonction continue $f: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$. Alors

$$\sup_{(x,y) \in A \times B} |f(x,y)| = \sup_{x \in A} \left(\sup_{y \in B} |f(x,y)| \right). \quad (7.162)$$

Démonstration. Pour chaque $x \in A$, la fonction $f_x: B \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f_x(y) = |f(x, y)|$ est continue et atteint donc sa borne⁸⁶ en $y_M(x)$. Notons que cela ne définit pas de façon univoque $y_M(x)$ parce que f_x peut atteindre son maximum en plusieurs points. L'important est que pour tout x , le nombre $|f(x, y_M(x))|$ ne dépend pas du choix de $y_M(x)$ parmi les y qui réalisent le maximum.

Notons (x_0, y_0) un point de $A \times B$ sur lequel $|f|$ réalise son maximum⁸⁷ :

$$\sup_{(x,y) \in A \times B} |f(x, y)| = |f(x_0, y_0)|. \quad \text{EQooDDXDooVsnIKG} \quad (7.163)$$

Nous avons d'une part

$$\sup_{x \in A} \left(\sup_{y \in B} |f(x, y)| \right) = \sup_{x \in A} |f(x, y_M(x))| \leq |f(x_0, y_0)| \quad (7.164)$$

Et d'autre part, quelques calculs avec justifications en-dessous :^{SUBEQooPYJPooBJyEgN}

$$\sup_{x \in A} \left(\sup_{y \in B} |f(x, y)| \right) \leq \sup_{x \in A} \sup_{y \in B} |f(x_0, y_0)| \quad \text{SUBEQooAKPOooPdkvMJ} \quad (7.165a)$$

$$= |f(x_0, y_0)| \quad (7.165b)$$

$$\leq |f(x_0, y_M(x_0))| \quad \text{SUBEQooDYVPooUgQpfD} \quad (7.165c)$$

$$\leq \sup_{x \in A} |f(x, y_M(x))| \quad \text{SUBEQooVOFAooNtzSpt} \quad (7.165d)$$

$$\leq \sup_{x \in A} \left(\sup_{y \in B} |f(x, y)| \right). \quad (7.165e)$$

Justifications.

- Pour (7.165a). Le point (x_0, y_0) est un maximum de $|f|$.
- Pour (7.165c). y_M est définie pour maximiser, en fonction de x , la quantité $|f(x, y_M(x))|$.
- Pour (7.165d). Au lieu de conserver la valeur x_0 fixé, nous prenons le maximum sur tous les x possibles.

Vu que les premiers et derniers termes des inégalités (7.165) sont égaux, toutes les inégalités sont en réalité des égalités. En particulier, en reprenant (7.163),

$$\sup_{(x,y) \in A \times B} |f(x, y)| = |f(x_0, y_0)| = \sup_{x \in A} \left(\sup_{y \in B} |f(x, y)| \right). \quad (7.166)$$

□

7.9.13 Distance à un ensemble

DEFooGNNUooFUZINs

Définition 7.198.

Si A est une partie de l'espace métrique (X, d) , et si $b \in X$, nous définissons

$$d(b, A) = \inf_{y \in A} d(b, y). \quad (7.167)$$

Lemme 7.199 ([1]).

LEMooEQIZooLpsbOe

Soit un fermé F de l'espace métrique (X, d) . Si $a \in X$ vérifie $d(a, F) = 0$, alors $a \in F$.

Démonstration. Supposons que $d(a, F) = 0$, c'est-à-dire que $\inf_{x \in F} d(a, x) = 0$. Il existe donc une suite (x_k) dans F telle que $d(a, x_k) \rightarrow 0$.

Cela signifie que $x_k \xrightarrow{(X,d)} a$. La proposition 7.78 nous dit alors que $a \in F$. □

Exemple 7.200 (Pas avec un ouvert).

En prenant l'ouvert $A =]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$ nous avons $d(0, A) = 0$, alors que 0 n'est pas dans A . △

86. Théorème 7.196.

87. Encore une fois, ce point n'est pas déterminé de façon unique par cette propriété.

LEMooJNRTooZyKiFC

Lemme 7.201 ([1]).

Soient un espace métrique (X, d) ainsi qu'une partie $A \subset X$. Soit $r > 0$. La partie

$$\mathcal{O} = \{x \in X \text{ tel que } d(x, A) < r\} \quad (7.168)$$

est ouverte.

Démonstration. Soit $y \in \mathcal{O}$; nous avons $d(y, A) < r$. Autrement dit,

$$\inf_{a \in A} d(y, a) < r \quad (7.169)$$

et donc il existe $a \in A$ tel que $d(y, a) < r$. Soit $\delta = d(y, a) < r$. Nous montrons à présent que $B(y, r - \delta)$ est dans $\mathcal{O}$. En effet si $z \in B(y, r - \delta)$, alors

$$d(z, a) \leq d(z, y) + d(y, a) < r - \delta + \delta = r. \quad (7.170)$$

□

PROPooTXYMooDGnfKB

Proposition 7.202 (Inégalité triangulaire point-partie[255]).

Soit un espace métrique⁸⁸ (X, d) et soit une partie non vide $A \subset X$. Pour tout $x, y \in A$ nous avons :

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A) \quad (7.171)$$

Démonstration. Par l'inégalité triangulaire pour tout $a \in A$ nous avons $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$ et en arrangeant :

$$d(y, a) \geq d(x, a) - d(x, y). \quad (7.172)$$

Et maintenant on peut calculer deux secondes :

$$d(y, A) = \sup_{a \in A} d(y, a) \quad (7.173a)$$

$$\geq \sup_{a \in A} (d(x, a) - d(x, y)) \quad (7.173b)$$

$$= \left(\sup_{a \in A} d(x, a) \right) - d(x, y) \quad (7.173c)$$

$$= d(x, A) - d(x, y). \quad (7.173d)$$

□

LEMooCFGTooIfdcfk

Lemme 7.203 ([1, 256]).

Soit une partie A de l'espace métrique (X, d) . Alors

ITEMooDXSHooPhCXIR

(1) Pour tout $x, y \in X$ nous avons

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y). \quad (7.174)$$

ITEMooGNSEooDVZrFp

La fonction

$$\begin{aligned} f: X &\rightarrow [0, \infty[\\ x &\mapsto d(x, A) \end{aligned} \quad (7.175)$$

est continue.

Démonstration. Nous utilisons l'inégalité triangulaire point-partie 7.202. D'abord $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$ que nous récrivons

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y). \quad (7.176)$$

EQooCJKBooXdbzts

Ensuite $d(y, A) \leq d(x, y) + d(x, A)$ que nous récrivons

$$d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y). \quad (7.177)$$

EQooKHPCooDSsfTh

88. Espace métrique, définition 7.139.

Notez que les équations (7.176) et (7.177) sont de la forme

$$\begin{cases} u - v \leq \alpha \\ v - u \leq \alpha, \end{cases} \quad \begin{matrix} (7.178a) \\ (7.178b) \end{matrix}$$

dont nous déduisons $|u - v| \leq \alpha$. Bref, nous avons

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y). \quad \text{E} \text{Q} \text{o} \text{o} \text{N} \text{A} \text{Q} \text{C} \text{o} \text{o} \text{J} \text{z} \text{m} \text{F} \text{o} \text{j} \quad (7.179)$$

Voilà qui prouve déjà (1).

Pour prouver 7.203, nous considérons $x_n \xrightarrow{X} x$, et écrivons (7.179) pour x et x_n : pour tout n nous avons

$$|d(x_n, A) - d(x, A)| \leq d(x_n, x). \quad (7.180)$$

Vu que $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, en prenant la limite $n \rightarrow \infty$, à droite nous avons zéro⁸⁹ et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |d(x_n, A) - d(x, A)| = 0, \quad (7.181)$$

ou encore

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n) - f(x)| = 0, \quad (7.182)$$

ce qui signifie que f est continue en x parce que la continuité séquentielle implique la continuité par la proposition 7.157. $\square$

7.9.14 Espace métrisable

Proposition 7.204 ([257]).

Soit un espace topologique métrisable⁹⁰ X .

- (1) Tout fermé de X est une intersection dénombrable d'ouverts.
- (2) Tout ouvert de X est une union dénombrable de fermés.

Démonstration. Soit une métrique d compatible avec la topologie de X et un fermé A . Nous posons

$$V_n = \{x \in X \text{ tel que } d(x, A) < \frac{1}{n}\}. \quad (7.183)$$

Et juste pour faire simple nous notons $V_0 = X$.

- (1) **Les parties V_n sont ouvertes** Soit $x \in V_n$. Trouvons un voisinage de x contenu dans V_n afin de pouvoir encore invoquer le théorème 7.8. D'abord, vu que $x \in V_n$, il existe $a \in A$ tel que $d(x, a) < \frac{1}{n}$ (ici les inégalités strictes sont importantes).

Soient $\epsilon > 0$ que nous fixerons plus bas, et $y \in B(x, \epsilon)$. L'inégalité triangulaire donne

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < \epsilon + \frac{1}{n}. \quad (7.184)$$

Nous pouvons donc choisir ϵ de telle sorte que $d(y, a) < 1/n$. Avec ce ϵ , nous avons, pour tout $y \in B(x, \epsilon)$:

$$d(y, A) \leq d(y, a) < \frac{1}{n} \quad (7.185)$$

et donc $y \in V_n$.

- (2) **A est l'intersection des V_n** Nous avons évidemment $A \subset V_n$ pour tout n . Et d'autre part, si $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$ alors $d(a, A) < \frac{1}{n}$ pour tout n . Cela implique $d(a, A) = 0$, et donc $a \in A$ par le lemme 7.199.

89. Parce que d est continue, proposition 7.159.

90. Définition 7.140.

Ceci démontre le point (1).

En ce qui concerne la seconde partie, nous appliquons la première partie au complémentaire. Si $\mathcal{O}$ est ouvert, $\mathcal{O}^c$ est fermé et

$$\mathcal{O}^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n, \quad (7.186)$$

ce qui donne immédiatement

$$\mathcal{O} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n^c \quad (7.187)$$

où les V_n^c sont fermés. □

CORooTWFYooCNMeM

Corolaire 7.205.

Si X est un espace topologique métrisable, alors X accepte une base dénombrable de topologie autour de chaque point.

Démonstration. Il s'agit seulement de remarquer que les singletons sont fermés et d'appliquer la proposition 7.204. □

7.9.15 Connexité

PROPooUQNTooAegKwA

Proposition 7.206 ([1]).

Tout espace métrique⁹¹ est complètement normal.

Démonstration. Soient un espace métrique (X, d) ainsi que deux parties $A, B \subset X$ telles que $A \cap \bar{B} = B \cap \bar{A} = \emptyset$. Vu que $A \cap \bar{B} = \emptyset$, pour chaque $a \in A$, il existe une boule $B(a, r_a)$ telle que $B(a, r_a) \cap B = \emptyset$. Même histoire pour $b \in B$.

Nous posons $U = \bigcup_{a \in A} B(a, r_a/2)$ et $V = \bigcup_{b \in B} B(b, r_b/2)$. Les parties U et V sont ouvertes comme union d'ouverts. Nous avons évidemment $A \subset U$ et $B \subset V$.

Pour voir que $U \cap V = \emptyset$, supposons $x \in U \cap V$. Il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que $x \in B(a, r_a/2) \cap B(b, r_b/2)$. Remarquons que $d(a, b) > r_a$ et $d(a, b) > r_b$: nous avons choisit r_a et r_b pour cela. Nous avons le calcul

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) \leq \frac{r_a + r_b}{2} < d(a, b). \quad (7.188)$$

Cela est une contradiction. □

PROPooBMFBooIQJMNC

Proposition 7.207 ([1]).

Tout n -connexe⁹² d'un espace métrique est connexe⁹³.

Démonstration. Une espace métrique est complètement normal (proposition 7.206) et tout n -connexe d'un espace complètement normal est connexe (proposition 7.99). □

7.9.16 Convexité

DEFooQQEOooAFKbcQ

Définition 7.208 (Partie convexe).

Une partie A d'un espace vectoriel est **convexe** si pour tout $a, b \in A$ et pour tout $t \in [0, 1]$, le point $ta + (1 - t)b$ est dans A .

Autrement dit, une partie est convexe lorsqu'elle contient tous les segments joignant ses points.

PROPooJOCEooUKhkqQ

Proposition 7.209 ([258]).

Toute intersection de convexes est convexe.

91. Définition 7.139.

92. Définition 7.97

93. Définition 7.95

Démonstration. Soit un espace vectoriel E ainsi que des parties convexes $\{C_i\}_{i \in I}$ indexées par un ensemble quelconque I . Nous prouvons que $C = \bigcap_{i \in I} C_i$ est convexe.

Soient $x, y \in C$, ainsi que $i \in I$. Nous avons $x, y \in C_i$ et donc $\{tx + (1-t)y\}_{t \in [0,1]} \subset C_i$. Vu que cela est vrai pour tout i , nous avons

$$\{tx + (1-t)y\}_{t \in [0,1]} \subset \bigcap_{i \in I} C_i, \quad (7.189)$$

et donc le résultat attendu. $\square$

PROPooJOXUooEZElna

Proposition 7.210 ([259]).

Si A et B sont des convexes d'un espace vectoriel topologique, alors $A - B$ est convexe.

Démonstration. Soient $a_1, a_2 \in A$ et $b_1, b_2 \in B$. Nous devons prouver que $t(a_1 - b_1) + (1-t)(a_2 - b_2)$ est dans $A - B$. C'est un simple calcul :

$$t(a_1 - b_1) + (1-t)(a_2 - b_2) = \underbrace{ta_1 + (1-t)a_2}_{\in A} - \underbrace{(tb_1 + (1-t)b_2)}_{\in B} \in A - B. \quad (7.190)$$

$\square$

LEMooEFCCooOuStrb

Lemme 7.211.

L'intérieur d'un convexe est convexe.

Démonstration. Pas de preuve pour le moment. Vous pouvez aider en m'envoyant une preuve. $\square$

7.9.17 Norme

DefNorme

Définition 7.212 ([260], thème 25).

Soit E un espace vectoriel (pas spécialement de dimension finie) sur le corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une **norme** sur E est une application $N: E \rightarrow [0, \infty[$ telle que

- (1) $N(x) \geq 0$
- (2) $N(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$;
- (3) $N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$
- (4) $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

ItemDefNormeii

ItemDefNormeiii

pour tout $x, y \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

La propriété (4) est appelée **inégalité triangulaire**.

Un espace vectoriel muni d'une norme est un **espace vectoriel normé**.

En prenant $\lambda = -1$ dans la propriété (3), nous trouvons immédiatement que $N(-x) = N(x)$.

PropNmNNm

Proposition 7.213.

Toute norme N sur l'espace vectoriel E vérifie l'inégalité

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) \quad (7.191)$$

pour tout $x, y \in E$.

Démonstration. Nous avons, en utilisant le point (4) de la définition 7.212,

$$N(x) = N(x - y + y) \leq N(x - y) + N(y), \quad (7.192a)$$

$$N(y) = N(y - x + x) \leq N(y - x) + N(x). \quad (7.192b)$$

subEqNNNxxvyva

subEqNNNxxvyvb

Supposons d'abord que $N(x) \geq N(y)$. Dans ce cas, en utilisant (7.192a),

$$|N(x) - N(y)| = N(x) - N(y) \leq N(x - y) + N(y) - N(y) = N(x - y). \quad (7.193)$$

Si par contre $N(x) \leq N(y)$, alors nous utilisons (7.192b) et nous trouvons

$$|N(x) - N(y)| = N(y) - N(x) \leq N(y - x) + N(x) - N(x) = N(y - x) = N(x - y). \quad (7.194)$$

Dans les deux cas, nous avons retrouvé l'inégalité annoncée. $\square$

Cette proposition signifie aussi que

$$-N(x-y) \leq N(x) - N(y) \leq N(x+y). \quad (7.195)$$

Le lemme suivant dit que nous pouvons remplacer l'inégalité triangulaire par la convexité de la boule unité dans la définition de norme.

Lemme 7.214 ([261]).

Soit une application $N: E \rightarrow [0, \infty[$ telle que

- (1) $N(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$,
- (2) $N(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$,
- (3) $N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$.

Alors N est une norme si et seulement si la partie

$$B = \{x \in E \text{ tel que } N(x) \leq 1\} \quad (7.196)$$

est convexe⁹⁴.

Démonstration. Dans les deux sens.

- (1) $\Rightarrow$ Nous supposons que N est une norme et nous prouvons que la boule B est convexe. Soient $x, y \in B$ et $\lambda \in [0, 1]$. Nous avons

$$N(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq N(\lambda x) + N((1-\lambda)y) \quad (7.197a)$$

$$= \lambda N(x) + (1-\lambda)N(y) \quad (7.197b)$$

$$\leq \lambda + (1-\lambda) \quad (7.197c)$$

$$= 1. \quad (7.197d)$$

Nous avons utilisé diverses propriétés de la norme, ainsi que la majoration $N(x), N(y) \leq 1$.

- (2) $\Leftarrow$ Nous supposons que B est convexe, et nous prouvons que N vérifie l'inégalité triangulaire. Soient $x, y \in E$ que nous choisissons tous deux non nuls (sinon c'est trop facile). Nous posons

$$z = \frac{x+y}{N(x)+N(y)} \quad (7.198)$$

et la subtilité sera d'écrire z de telle sorte à être une somme de deux éléments de B . L'astuce est de poser

$$\lambda = \frac{N(x)}{N(x)+N(y)}. \quad (7.199)$$

Une simple vérification montre qu'alors

$$z = \lambda \frac{x}{N(x)} + (1-\lambda) \frac{y}{N(y)}. \quad (7.200)$$

Nous avons évidemment $x/N(x) \in B$ (et de même avec y). Puisque B est convexe, nous avons $z \in B$. Exprimons le fait que $z \in B$ à partir de la définition (7.198) :

$$\frac{N(x+y)}{N(x)+N(y)} \leq 1. \quad (7.201)$$

Cela signifie exactement $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

□

94. Définition 7.208.

7.215.

Afin de suivre une notation proche de celle de la valeur absolue, à partir de maintenant, la norme d'un vecteur v sera notée $\|v\|$ au lieu de $N(v)$. La proposition 7.213 s'énoncera donc

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|. \quad (7.202)$$

Un espace vectoriel E muni d'une norme est, on l'a déjà dit, un **espace vectoriel normé**; on le notera $(E, \|\cdot\|)$ pour distinguer la norme fixée.

Une autre inégalité utile de temps en temps.

CORooDFBGooAqVRfS

Corolaire 7.216.

Si a et b sont dans un espace vectoriel normé, alors

$$|\|a - b\| - \|b\|| \leq \|a\|. \quad (7.203)$$

Démonstration. Il s'agit seulement de la proposition 7.213 avec $x = a - b$ et $y = b$. $\square$

LEMooWGBJooYTDYIK

Lemme-Définition 7.217 (Distance induite par une norme).

Soit un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. Nous posons

$$d(x, y) = \|x - y\|. \quad (7.204)$$

EQooZYJRooAHpsIG

Alors

ITEMooLITDooPeReOk

(1) d est invariante par translations : $d(a, b) = d(a + u, b + u)$

(2) d est une distance⁹⁵ sur E .

C'est la **distance induite** par la norme.

Démonstration. Le fait que la formule (7.204) soit invariante par translations est immédiat. En ce qui concerne le fait que ce soit une distance, le seul point délicat à vérifier est l'inégalité triangulaire. Mais, pour tous $x, y, z \in E$, on a

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y). \quad (7.205)$$

 $\square$ **7.9.18 Topologie**

DEFooPMVFooPSYVNQ

Définition 7.218.

La topologie associée à une norme est celle associée à la distance donnée en 7.217 par le théorème 7.142.

7.10 Espaces vectoriels topologiques

DefEVTologique

Définition 7.219.

Un espace vectoriel V sur le corps valué⁹⁶ $\mathbb{K}$ muni d'une topologie est un **espace vectoriel topologique** si

(1) la somme de deux vecteurs est une application continue $V \times V \rightarrow V$; et

(2) la multiplication par un scalaire est une application continue $\mathbb{K} \times V \rightarrow V$.

Ici, sur $V \times V$ et sur $\mathbb{K} \times V$ nous avons la topologie produit.

Dans toute la suite, nous supposons que $\mathbb{K}$ est un corps avec une topologie métrique.

95. Définition 7.139.

96. Définition 1.108.

On le redit quand même : le corps⁹⁷ lui-même doit avoir sa topologie. Dans la grande majorité des cas, ce corps est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni de la topologie usuelle.

Mine de rien, le fait que les deux opérations usuelles soient continues a de belles conséquences sur la topologie de l'espace...

PROPooDXLFooFghbWk

Proposition 7.220 ([262]).

Soit un espace vectoriel topologique V . Pour $x \in V$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$ fixés, les fonctions T_x et M_λ définies par :

$$T_x : V \rightarrow V \quad \text{et} \quad M_\lambda : V \rightarrow V \quad (7.206)$$

$$y \mapsto x + y \quad y \mapsto \lambda y \quad (7.207)$$

sont des automorphismes⁹⁸ de l'espace topologique V .

Démonstration. Ce sont des bijections continues, dont les inverses sont respectivement T_{-x} et $M_{1/\lambda}$. $\square$

PROPooJYLVooPpLWFX

Proposition 7.221.

Soit un espace vectoriel topologique X . Si $\mathcal{O}$ est un ouvert dans X , alors pour tout $x \in X$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, les parties $\mathcal{O} + x$ et $\lambda\mathcal{O}$ sont des ouverts.

LEMooEZIYooBBxdJj

Lemme 7.222 ([1]).

Soit un espace vectoriel topologique V sur le corps $\mathbb{K}$. Si $\mathcal{O}$ est un ouvert autour de 0 dans V et si $\lambda \neq 0 \in \mathbb{K}$, il existe un ouvert U autour de 0 tel que $\lambda U \subset \mathcal{O}$.

Démonstration. La réponse est $U = \lambda^{-1}\mathcal{O}$. En effet par définition d'un espace vectoriel topologique, la fonction donnée par $f(x) = \lambda x$ est continue ; donc $U = f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert. De plus $\lambda U = \mathcal{O}$. $\square$

PROPooHKGZooDaNaHU

Proposition 7.223 ([1]).

Une application linéaire entre espaces vectoriels topologiques est continue si et seulement si elle est continue en 0.

Démonstration. Soient deux espaces vectoriels topologiques. Soit une application linéaire $f: E \rightarrow F$. Nous supposons qu'elle est continue en 0 (définition 7.45(1)), et nous montrons qu'elle est alors continue en $a \in E$.

Soit un voisinage W de $f(a)$ dans F . Alors la proposition 7.221 dit que $W - f(a)$ est un voisinage de $0 = f(0)$ dans F . Vu que f est continue en 0, il existe un voisinage V de 0 dans E tel que $f(V) \subset W - f(a)$. Alors

$$f(V + a) = f(V) + f(a) \subset W, \quad (7.208)$$

et le voisinage $V + a$ de a dans E fait l'affaire.

Nous avons prouvé que f est continue en chaque point de E . La proposition 7.46 dit que f est alors continue sur E . $\square$

7.10.1 De complexe à réel

Si E est un espace topologique sur $\mathbb{C}$, nous aurons besoin de le voir comme espace topologique sur $\mathbb{R}$.

PROPooAIMVooYtZVJV

Proposition 7.224 ([1]).

Soit un espace topologique complexe (X, τ, m_X, s_X) où τ est la topologie sur X , $m_X: \mathbb{C} \times X \rightarrow X$ est la multiplication et $s_X: X \times X \rightarrow X$ est la somme.

97. Définition 1.378

98. Définition 7.51.

Alors en posant $E = X$ (comme ensembles) ainsi que

$$\begin{aligned} s_E: E \times E &\rightarrow E \\ (x, y) &\mapsto s_X(x, y), \end{aligned} \quad (7.209)$$

et

$$\begin{aligned} m_E: \mathbb{R} \times E &\rightarrow E \\ (\lambda, x) &\mapsto m_X(\lambda, x), \end{aligned} \quad (7.210)$$

la quadruplet (E, τ, m_E, s_E) est un espace topologique.

PROPooQMGXooBnJblx

Proposition 7.225 ([1]).

Soit X un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{C}$. Si $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$ -linéaire, nous posons

$$\phi(x) = f(x) - if(ix). \quad (7.211)$$

Alors

- (1) L'application ϕ est $\mathbb{C}$ -linéaire.
- (2) Nous avons $\|\phi\| = \|f\|$.
- (3) Si f est continue, alors ϕ est continue.

7.10.2 Base de topologie

Toute base de voisinage de 0 se transporte en tout point de l'espace vectoriel topologique.

PropInvarianceTopologie

Corolaire 7.226 (Invariance de la topologie[262]).

Soit un espace vectoriel topologique (X, τ) . Si $\mathcal{B}_0$ est une base de topologie en 0, alors $\mathcal{B}_0 + a$ est une base de topologie en a .

Démonstration. Soit un ouvert U contenant a . Alors $U - a$ est un ouvert contenant 0 (proposition 7.221). Il existe donc $B \in \mathcal{B}_0$ tel que $0 \in B \subset U - a$. Nous avons alors $a \in B + a \subset U$. $\square$

7.10.2.1 Somme directe topologique

PropKZDqTR

Proposition-Définition 7.227 ([263, 264, 1]).

Soit V un espace vectoriel topologique et une décomposition en somme directe⁹⁹ $V = V_1 \oplus V_2$. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes.

ITEMooMUELooWdJQeW

- (1) La bijection

$$\begin{aligned} \psi: V_1 \times V_2 &\rightarrow V \\ (x_1, x_2) &\mapsto x_1 + x_2 \end{aligned} \quad (7.212)$$

est un homéomorphisme¹⁰⁰.

ITEMooDKOYooUpEFOR

- (2) Les parties V_1 et V_2 sont fermées dans V et la projection $s: V_2 \rightarrow V/V_1$ est un homéomorphisme.

ITEMooFSSMooCQzTic

- (3) Les parties V_1 et V_2 sont fermées dans V et la projection $\pi_2: V \rightarrow V_2$ est continue.

Lorsqu'une décomposition en somme directe vérifie ces conditions, nous disons que la décomposition est **topologique**.

Démonstration. Avant de commencer, nous rappelons les topologies.

- Sur V_1 et V_2 nous avons la topologie induite, définition 7.27.
- La topologie produit sur $V_1 \times V_2$ est la définition 7.63.
- La topologie quotient sur V/V_1 est la définition 7.67.

99. Définition 4.149.

100. C'est à dire isomorphisme d'espaces vectoriels : bijection continue de réciproque continue. En ce qui concerne la topologie sur $V_1 \times V_2$, elle est donné par la définition 7.63.

Voici quelques points qui ne dépendent pas des hypothèses (1), (2) ou (3).

- (1) **La projection $p: V \rightarrow V/V_1$ est continue** La projection est toujours continue pour la topologie quotient ; c'est la définition même, voir 7.67.
- (2) **ψ est une bijection continue** Le fait que ψ soit continue fait partie de la définition 7.219 d'un espace vectoriel topologique. Pour que ce soit une bijection, c'est le lemme 4.150.
- (3) **s est injective** Soient $v, w \in V_2$ tels que $s(v) = s(w)$. Alors $\{v + x_1\}_{x_1 \in V_1} = \{w + y_1\}_{y_1 \in V_1}$. En particulier $v \in \{w + y_1\}_{y_1 \in V_1}$. Il existe donc $y_1 \in V_1$ tel que $v = w + y_1$. Donc $v - w \in V_1$. Mais comme V_2 est un espace vectoriel, nous avons aussi $v - w \in V_2$. Donc $v - w \in V_1 \cap V_2 = \{0\}$.
- (4) **s est surjective** Soit $x \in V$. Nous devons trouver $v \in V_2$ tel que $s(v) = [x]$. Nous savons qu'il existe $x_1 \in V_1$ et $x_2 \in V_2$ tels que $x = x_1 + x_2$. Nous avons alors $[x] = s(x_2)$.
- (5) **s est continue** Soit un ouvert $\mathcal{O}$ de V/V_1 . La partie $p^{-1}(\mathcal{O})$ est ouverte dans V (proposition 7.68), et donc

$$s^{-1}(\mathcal{O}) = p^{-1}(\mathcal{O}) \cap V_2 \quad (7.213)$$

est ouvert dans V_2 parce que la topologie sur V_2 est celle induite¹⁰¹ de la topologie de V .

Et maintenant on prouve les équivalences.

- (1) **Si (1) alors V_1 est fermé** La partie $V_1 \times \{0\}$ est fermée dans $V_1 \times V_2$. Vu que ψ^{-1} est continue, nous en déduisons que $\psi(V_1 \times \{0\})$ est fermée dans V par le lemme 7.52. Mais comme $\psi(V_1 \times \{0\}) = V_1$, nous avons que V_1 est fermé dans V .
- (2) **(1) $\Rightarrow$ (3)** Nous supposons que $\psi: V_1 \times V_2 \rightarrow V$ est un homéomorphisme. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \sigma: V_1 \times V_2 &\rightarrow V_1 \times V_2 \\ (x, y) &\mapsto (0, y). \end{aligned} \quad (7.214)$$

Cette application est continue et permet d'écrire π_2 sous la forme $\pi_2 = \psi \circ \sigma$. En tant que composée d'applications continues, l'application π_2 est continue.

- (3) **(3) $\Rightarrow$ (2)** L'application $\pi: V \rightarrow V_2$ est constante sur les classes (modulo V_1). Donc elle descend aux classes¹⁰² en l'application

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}: V/V_1 &\rightarrow V_2 \\ [x] &\mapsto \pi(x). \end{aligned} \quad (7.215)$$

Cette application est continue parce que π l'est et parce que le lemme 7.70 le dit. Le point à remarquer est que $s^{-1} = \tilde{\pi}$ parce que pour tout $x \in V_2$ nous avons

$$s(\tilde{\pi}([x])) = s(\pi(x)) = s(x) = [x] \quad (7.216)$$

parce que $\pi(x) = x$ du fait que $x \in V_2$. Vu que $\tilde{\pi}$ est continue, l'application s^{-1} est également continue.

- (4) **(2) $\Rightarrow$ (1)** Nous pouvons écrire la projection $\pi_2: V \rightarrow V_2$ comme composée $\pi_2 = s^{-1} \circ p$. En effet pour $v_1 \in V_1$ et $v_2 \in V_2$ nous avons $(s^{-1} \circ p)(v_1 + v_2) = s^{-1}([v_2]) = v_2 = \pi_2(v_1 + v_2)$. Nous savons que p est continue (construction de la topologie et tout ça), et que s^{-1} est également continue par hypothèse. Donc π_2 est continue. Étant donné que $\pi_1 + \pi_2 = \text{Id}$ et que l'identité est continue, nous déduisons que π_1 est également continue.

□

7.228 ([265]).

Si V est normé, il existe une façon plus directe (mais pas spécialement plus simple) de prouver l'implication (1) $\Rightarrow$ (2), et en particulier la continuité de s^{-1} . Voyez 10.89.

101. Topologie induite, définition 7.27.

102. Voir la définition 7.69.

Si V est de Banach, la continuité de s^{-1} peut venir du théorème d'isomorphisme de Banach 27.1 parce que s est une bijection continue entre espaces de Banach. Attention toutefois à vérifier que V/V_1 est de Banach ¹⁰³.

CORooJHSGooUkGepQ

Corolaire 7.229 ([1]).

Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel topologique de dimension finie est fermé.

7.10.2.2 Limite dans un espace vectoriel topologique

LEMooAHIGooJhpPvo

Lemme 7.230 (Changement de variables).

Soient un espace vectoriel topologique ¹⁰⁴ X ainsi qu'un espace séparé Y et une application $f: X \rightarrow Y$. Nous supposons que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$. Alors $\lim_{x \rightarrow b} f(x + a - b)$ existe et vaut ℓ .

Démonstration. Soit un voisinage V de ℓ dans Y . Il existe un voisinage U de a tel que $f(U) \subset V$. Nous posons $U' = U - a + b$. C'est un voisinage de b . En posant $g(x) = f(x + a - b)$ nous avons

$$g(U') = f(U - a + b + a - b) = f(U) \subset V. \quad (7.217)$$

Donc $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = \ell$. C'est cette égalité qui signifie $\lim_{x \rightarrow b} f(x + a - b)$. $\square$

PROPooXWNDooGHDXTa

Proposition 7.231 ([1]).

Soient un espace vectoriel topologique X , un espace topologique Y et une application $f: X \rightarrow Y$. Si

$$\lim_{x \rightarrow b} f(a + x) = l, \quad (7.218)$$

EQooMUQJooLClnMP

alors $\lim_{x \rightarrow a+b} f(x)$ existe et vaut l .

Démonstration. Soit un voisinage V de l . Nous devons prouver qu'il existe un voisinage U de $a + b$ tel que $f(U) \subset V$. Par (7.218), il existe un voisinage U' de b tel que $f(a + u) \in V$ pour tout $u \in U'$. La partie $U = U' + a$ est un voisinage de $a + b$ (parce que c'est un ouvert et qu'il contient $a + b$). Et si $x \in U$, alors $x = a + u$ pour un certain $u \in U'$. Nous avons $f(x) = f(a + u) \in V$.

Cela prouve que $f(U) \subset V$ comme nous le voulions. $\square$

PROPooFGWXooFjvTYj

Proposition 7.232 (Limite de fonction composée[266]).

Soient des fonctions $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\lim_{y \rightarrow l} f(y) = z \quad (7.219a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l. \quad (7.219b)$$

Nous supposons qu'il existe un intervalle ouvert I contenant l tel que $g(x) \neq l$ sur $I \setminus \{a\}$.

Alors

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = \lim_{y \rightarrow l} f(y) = z. \quad (7.220)$$

PROPooKNVHooXlQyVA

Proposition 7.233 (Limite de fonction composée[266]).

Soient des fonctions $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\lim_{y \rightarrow l} f(y) = z \quad (7.221a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l. \quad (7.221b)$$

Nous supposons que f est continue en l .

Alors

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = \lim_{y \rightarrow l} f(y) = z. \quad (7.222)$$

PROPooBEHTooBrLWuh

Proposition 7.234.

Toute application linéaire entre espaces vectoriels topologiques de dimension finie est continue.

¹⁰³. Je ne l'ai pas fait, et au doigt mouillé je dirais que ça m'étonnerais que ce soit vrai pour tout choix de sous-espace vectoriel V_1 . À vos risques et périls. Écrivez-moi si vous avez une idée.

¹⁰⁴. Définition 7.219.

7.10.3 Corps topologique

Définition 7.235 (Anneau topologique^[267]).

Un **anneau topologique** est un anneau¹⁰⁵ muni d'une topologie dans laquelle l'addition et la multiplication sont continues¹⁰⁶.

Proposition-Définition 7.236.

Si $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ est un corps totalement ordonné avec sa valeur absolue usuelle¹⁰⁷, alors l'application

$$\begin{aligned} d: \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\mapsto |x - y| \end{aligned} \quad (7.223)$$

est une distance¹⁰⁸.

Un corps valué muni de sa topologie métrique¹⁰⁹ est un corps topologique¹¹⁰.

Démonstration. Il s'agit des différentes propriétés du lemme 1.112. □

7.10.4 Voisinage symétrique et équilibré

Définition 7.237 (Partie symétrique^[262]).

Une partie U d'un espace vectoriel topologique est **symétrique** si $x \in U$ implique $-x \in U$.

Définition 7.238 (Partie équilibrée^[262]).

Une partie U d'un espace vectoriel topologique V est **équilibrée** si pour tout $|\alpha| \leq 1$ dans $\mathbb{K}$, $\alpha U \subset U$.

Définition 7.239 (Partie absorbante^[268]).

Soit un espace vectoriel X . Une partie U est **absorbante** si pour tout $x \in X$, il existe $\rho_x > 0$ tel que $\lambda x \in U$ pour tout $|\lambda| \leq \rho_x$.

Définition 7.240 (Partie absolument convexe).

Une partie est **absolument convexe** si elle est convexe et équilibrée.

Lemme 7.241.

Si A est équilibré ou absorbant, alors $0 \in A$.

Démonstration. En deux parties.

- (1) **Si A est équilibré** Pour tout $|\alpha| < 1$, nous avons $\alpha A \subset A$. En particulier pour $\alpha = 0$ nous voyons que $0 \in A$.
- (2) **Si A est absorbant** Si $x \in X$, alors il existe ρ tel que $\lambda x \in A$ pour tout $|\lambda| < \rho$. En particulier avec $\lambda = 0$ nous avons encore $0 \in A$.

Lemme 7.242 (^[269]).

Dans un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, tout ouvert contenant 0 est absorbant¹¹¹.

Démonstration. Soient un ouvert U contenant 0 et $x_0 \in X$. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} m: \mathbb{K} \times X &\rightarrow X \\ (t, x) &\mapsto tx \end{aligned} \quad (7.224)$$

105. Définition 1.90.

106. Définition 7.45(2).

107. Définition 1.111.

108. Distance, définition 7.139.

109. Définition 7.142.

110. Définition 7.235.

111. Définition 7.239.

qui est continue par définition 7.219. La partie $m^{-1}(U) \subset \mathbb{K} \times X$ est un ouvert contenant $(0, x_0)$. Par définition 7.63 de la topologie produit, il existe un $r > 0$ et un ouvert B de X contenant x_0 tels que

$$(0, x_0) \in B(0, r) \times B \subset m^{-1}(U). \quad (7.225)$$

Si $\lambda < r$, alors nous avons

$$\lambda x_0 = m(\lambda, x_0) \in m(B(0, r), B) \subset U. \quad (7.226)$$

□

LEMooKBRlooUAAPXV

Lemme 7.243.

Si A est équilibré et si $\xi \neq 0$ (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), alors

$$\xi A = |\xi|A \quad (7.227)$$

Démonstration. Vu que le corps $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il existe $s \in \mathbb{K}$ tel que $|s| = 1$ et $\xi = s|\xi|$ (prendre $s = \xi/|\xi|$). Vu que $|s| = 1$ et que A est équilibré, $sA \subset A$ et donc $\xi A = s|\xi|A \subset |\xi|A$.

Pour l'inclusion dans l'autre sens, nous savons que $|s^{-1}| = 1$ et donc que $|\xi|A = s^{-1}\xi A \subset \xi A$. □

LEMooYSWXooNqAcOQ

Lemme 7.244 ([262, 1]).

Soit un espace vectoriel topologique.

ITEMooSWWQooTreWIE

(1) Soit un ouvert A autour de 0 dans l'espace vectoriel topologique V . Il existe $\delta > 0$ dans le corps $\mathbb{K}$ et un voisinage ouvert W de 0 tel que $\lambda W \subset A$ pour tout $|\lambda| < \delta$.

ITEMooXZNHooGVplpu

(2) Tout voisinage de 0 contient un ouvert équilibré.

ITEMooRLVSooGihcLc

(3) Tout voisinage de 0 contient un ouvert équilibré et symétrique.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1)** Nous savons que $0 \cdot 0 = 0$ et que l'application

$$\begin{aligned} f: \mathbb{K} \times V &\rightarrow V \\ \lambda, x &\mapsto \lambda x \end{aligned} \quad (7.228)$$

est continue. La partie $f^{-1}(A)$ contient $(0, 0)$. Il existe donc un voisinage ouvert S de 0 dans $\mathbb{K}$ et un voisinage ouvert W de 0 dans V tel que $S \times W \subset f^{-1}(A)$.

Puisque $\mathbb{K}$ est un corps dont la topologie est métrique ¹¹², il existe une boule $S' = B(0, \delta) \subset S$. Donc nous avons $f(S' \times W) \subset A$ et pour tout $|\lambda| < \delta$, $\lambda W \subset A$.

(2) **Pour (2)** Soit un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de 0 dans V . Par le point (1), nous considérons un voisinage W de 0 et un $\delta > 0$ tel que $\lambda W \subset \mathcal{O}$ pour tout $|\lambda| < \delta$.

Nous posons

$$U = \{\lambda w \mid \text{tel que } |\lambda| < \delta, w \in W\}. \quad (7.229)$$

Nous avons $U \subset \mathcal{O}$ par définition de W . De plus U est équilibré parce que si $|\mu| < 1$, et si $x \in U$, il existe $|\lambda| < \delta$ et $w \in W$ tels que $x = \lambda w$. Alors $\mu x = \mu \lambda w$. Nous avons $|\mu \lambda| < \delta$ et donc $\mu \lambda w \in U$.

(3) **Pour (3)** Nous considérons U équilibré comme dans (2). Ensuite nous posons $U' = U \cap (-U)$. La partie U' est symétrique, elle est ouverte (intersection d'ouverts). Et elle est équilibrée parce que si $x \in U'$ et $|\lambda| < 1$ alors :

- $x \in U$ et U est équilibré, donc $\lambda x \in U$.
- $x \in -U$ et U est équilibré, donc il existe $y \in U$ tel que $x = -y$. Pour ce y nous avons $\lambda y \in U$ et donc $\lambda x = -\lambda y \in -U$. Donc $\lambda x \in -U$.
- Au final, $\lambda x \in U \cap (-U) = U'$ et U' est équilibré.

¹¹². Le corps $\mathbb{K}$ est un corps valué, et donc métrique par la définition 7.236.

□

LEMooQEFRoOHAxOys

Lemme 7.245 ([270]).

Soit un espace vectoriel topologique V ainsi qu'un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de 0 dans V . Il existe des voisinages ouverts U_1 et U_2 de 0 dans V tels que

$$U_1 + U_2 \subset \mathcal{O}. \quad (7.230)$$

Démonstration. Par définition d'un espace vectoriel topologique, l'application

$$\begin{aligned} f: V \times V &\rightarrow V \\ x, y &\mapsto x + y \end{aligned} \quad (7.231)$$

est continue. Donc la partie $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de $V \times V$ (c'est la définition 7.45(2) de la continuité). La définition 7.63 de la topologie produit, appliquée au point $(0, 0) \in V \times V$ implique qu'il existe des voisinages U_1 et U_2 de 0 dans V tels que

$$U_1 \times U_2 \subset f^{-1}(\mathcal{O}). \quad (7.232)$$

Donc $f(U_1 \times U_2) \subset \mathcal{O}$ et en particulier $U_1 + U_2 \subset \mathcal{O}$. □

PROPSommeTopologique

Proposition 7.246 ([262, 1]).

Soit V un espace vectoriel topologique, et $\mathcal{O}$ un voisinage ouvert de 0 . Il existe un voisinage ouvert U de 0 tel que

- (1) U est symétrique¹¹³,
- (2) U est équilibré¹¹⁴
- (3) U vérifie $U + U \subset \mathcal{O}$.
- (4) U vérifie $U + U + U + U \subset \mathcal{O}$.

Démonstration. En plusieurs petits pas.

- (1) **Le point de départ** Le lemme 7.245 donne des voisinages ouverts U_1 et U_2 de 0 dans V tels que $U_1 + U_2 \subset \mathcal{O}$.
- (2) **Symétrique** En posant $U' = U_1 \cap U_2 \cap (-U_1) \cap (-U_2)$, on a un sous-ensemble symétrique de U_1 et U_2 qui vérifie $U' + U' \subset U_1 + U_2 \subset \mathcal{O}$. De plus U' est encore un voisinage ouvert de 0 dans V .
- (3) **équilibré** C'est le moment d'utiliser le lemme 7.244. La partie U' contient un voisinage ouvert U'' de 0 qui est symétrique et équilibré. Ce U'' vérifie encore $U'' + U'' \subset \mathcal{O}$.
- (4) **En 4 parties** Maintenant nous ré-appliquons tout ce que nous venons de faire à U'' pour obtenir un voisinage symétrique et équilibré de 0 tel que $U + U \subset U'$. Nous avons alors $U + U + U + U \subset \mathcal{O}$.

Notons que ce U vérifie à fortiori $U + U \subset \mathcal{O}$. □

LEMooKLOKooEfKhgN

Lemme 7.247 ([268, 271]).

Soit une partie B d'un espace vectoriel topologique.

- (1) Si B est équilibré, alors la fermeture $\bar{B}$ est équilibrée.
- (2) Si B est équilibré et si $0 \in \text{Int}(B)$, alors $\text{Int}(B)$ est équilibré.

ITEMooLZZEooAqoQVO

Démonstration. Pas de preuve pour le moment. Vous pouvez aider en m'envoyant une preuve. □

113. Définition 7.237.

114. Définition 7.238.

7.10.5 Espace topologique localement convexe

DefPJokvAa

Définition 7.248 ([268]).

Un espace topologique est **localement convexe** il admet une base de voisinages de l'origine dont les éléments sont des parties convexes.

PROPooCZJGooRlyEOV

Proposition 7.249 ([272]).

Soit un espace topologique X . Nous avons équivalence entre les points suivants :

- (1) X est localement convexe¹¹⁵.
- (2) Pour tout ouvert U de X , les composantes connexes de U sont des ouverts de X .
- (3) Les ouverts connexes forment une base des ouverts de E .

LEMooWGOCooHSoCzb

Lemme 7.250 ([273]).

Soit un espace topologique localement connexe X . Soient un fermé F de X , et D , une composante connexe de $X \setminus F$. Alors la frontière de D est dans F :

$$\partial D \subset F. \quad (7.233)$$

Démonstration. En plusieurs parties.

- (1) ∂D est fermé Par définition, $\partial D = \bar{D} \setminus D$. Utilisant 1.44(5) nous écrivons

$$X \setminus \partial D = (X \setminus \bar{D}) \cap D. \quad (7.234)$$

Vu que $\bar{D}$ est fermé, $X \setminus \bar{D}$ est ouvert. De plus D est ouvert par la proposition 7.249. Donc $X \setminus \partial D$ est ouvert.

- (2) Par l'absurde Supposons qu'il existe $p \in \partial D \setminus F$. Vu que F est fermé, il existe $r > 0$ tel que $B(p, r) \cap F = \emptyset$. Étant donné que $p \in \partial D$, tout voisinage de p contient un point de D : il existe $x \in B(p, r) \cap D$.

Donc $B(p, r)$ et D sont des ouverts connexes qui ont une intersection non vide. La proposition 7.107 nous indique que $D \cup B(p, r)$ est un ouvert connexe strictement plus grand que D .

Cela contredit la maximalité de D en tant que composante connexe.

□

PROPooOAXHooOGhRbu

Proposition 7.251 ([268]).

Un espace vectoriel topologie localement convexe a une base de voisinage constituée d'éléments qui sont :

- (1) ouverts
- (2) absorbants
- (3) convexes
- (4) équilibrés

Démonstration. Soit un voisinage N de 0 dans l'espace vectoriel topologique X . Vu que X est localement convexe, il existe un voisinage convexe W de 0 contenu dans N . Par le lemme 7.244, W contient un ouvert équilibré U . Nous considérons enfin l'enveloppe convexe $S = \text{Conv}(U)$ de U , et nous montrons que l'intérieur $\text{Int}(S)$ vérifie tout ce qu'il faut.

ouvert Parce que c'est un intérieur.

convexe L'intérieur d'un convexe est convexe par le lemme 7.211.

absorbant Tout ouvert contenant 0 est absorbant par le lemme 7.242

contient 0 La partie U contient 0 parce qu'elle est équilibrée et le lemme 7.241. Vu que U est ouvert, il contient un voisinage de tout ses points. Donc 0 est dans l'intérieur de U . Il est donc également dans l'intérieur de son enveloppe convexe.

115. Définition 7.248.

équilibré Par le lemme 7.247(2) parce que c'est un ouvert contenant 0.

contenu dans N Nous avons les inclusions $U \subset W \subset N$. Étant donné que W est convexe, nous avons aussi $\text{Conv}(U) \subset W$, et donc

$$\text{Int}(S) \subset S = \text{Conv}(U) \subset W \subset N. \quad (7.235)$$

□

THOooPTLOooJLaHGE

Théorème 7.252 ([268]).

Soit un espace vectoriel topologique localement convexe¹¹⁶. Il existe une base de voisinages $\mathcal{B}$ de 0 tels que :

- (1) les éléments sont absorbants et absolument convexes¹¹⁷.
- (2) pour tout $A, B \in \mathcal{B}$, il existe $W \in \mathcal{B}$ tel que $W \subset A \cap B$,
- (3) pour tout $A \in \mathcal{B}$, et pour tout $\rho > 0$, il existe $W \in \mathcal{B}$ tel que $W \subset \rho A$.

Démonstration. Pas de preuve pour le moment. Vous pouvez aider en m'envoyant une preuve. □

Voici une réciproque du théorème 7.252.

THOooKNXGooEebnXI

Théorème 7.253 ([268]).

Soit en espace vectoriel X et une collection $\mathcal{B}$ de parties de X vérifiant

- (1) les éléments sont absorbants et absolument convexes.
- (2) pour tout $A, B \in \mathcal{B}$, il existe $W \in \mathcal{B}$ tel que $W \subset A \cap B$,
- (3) pour tout $A \in \mathcal{B}$, et pour tout $\rho > 0$, il existe $W \in \mathcal{B}$ tel que $W \subset \rho A$.

Alors il existe une unique topologie τ sur X telle que

- (1) τ est compatible avec la structure vectorielle de X ,
- (2) (X, τ) est localement convexe
- (3) la collection $\mathcal{B}$ est une base de voisinages de 0

PROPooUQLUooDQfYLT

Proposition 7.254.

Soit un espace vectoriel normé¹¹⁸ $(V, \|\cdot\|)$. Pour tout $a \in V$ et $r > 0$, la boule $B(a, r)$ est convexe¹¹⁹. La boule fermée $\overline{B(a, r)}$ également.

Démonstration. En deux parties.

- (1) **La boule centrée en zéro** Soient $x, y \in B(0, r)$ et $\lambda \in]0, 1[$. Alors

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| \leq |\lambda|\|x\| + |1 - \lambda|\|y\| < (|\lambda| + |1 - \lambda|)r \leq r \quad (7.236)$$

où nous avons utilisé le fait que $|\lambda| = \lambda$ et $|1 - \lambda| = 1 - \lambda$.

Cela prouve que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in B(0, r)$. Notez l'inégalité stricte due au fait que $\|x\| < r$ et $\|y\| < r$. Dans le cas de la boule fermée, nous avons une inégalité large.

- (2) **La boule centrée autre part**

Soient $x, y \in B(a, r)$. Alors $x - a$ et $y - a$ sont dans $B(0, r)$, de telle sorte que

$$\lambda(x - a) + (1 - \lambda)(y - a) \in B(0, r) \quad (7.237)$$

par la première partie. En développant et simplifiant,

$$\lambda x + (1 - \lambda)y - a \in B(0, r), \quad (7.238)$$

ce qui signifie que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in B(a, r)$.

116. Définition 7.248.

117. Absolument convexe : convexe et équilibré.

118. Définition 7.212.

119. Définition 7.208.

□

PROPooBVWlooZoeH

Proposition 7.255.

Tout espace métrique est localement convexe¹²⁰.

Démonstration. Les boules ouvertes forment une base de topologie par 7.143. La proposition 7.254 dit que ces boules sont convexes. □

7.10.6 Limite de suites

PROPooTJQPooMHtOAv

Proposition 7.256 ([1]).

Soit une suite (x_k) dans l'espace vectoriel topologique X . L'élément x est une limite de (x_k) si et seulement si 0 est une limite de $(x - x_k)$.

Démonstration. En deux parties.

- (1) $\Rightarrow$ Supposons que x est une limite de (x_k) . Soit un ouvert $\mathcal{O}$ autour de 0. La partie $\mathcal{O} + x$ est un ouvert autour de x (proposition 7.256). Donc il existe N tel que si $n \geq N$, alors $x_n \in \mathcal{O} + x$. Pour ces valeurs de n nous avons $x_n - x \in \mathcal{O}$.
- (2) $\Leftarrow$ Soit un ouvert $\mathcal{O}$ autour de x . La partie $\mathcal{O} - x$ est un ouvert autour de 0. À partir de là la preuve fonctionne comme dans l'autre sens.

□

PROPooQIQSooHbNkIy

Proposition 7.257 ([1]).

Soient deux suites (x_k) et (y_k) dans l'espace vectoriel topologique X . Si x est une limite¹²¹ de (x_k) et si y est une limite de (y_k) , alors $x + y$ est une limite de $(x_k + y_k)$.

Démonstration. En deux parties

- (1) **Le cas $x = y = 0$** Nous commençons avec $x = y = 0$. Soit un ouvert A autour de 0. La proposition 7.246 nous permet de considérer un voisinage U de 0 tel que $U \subset A$ et $U + U \subset A$. Vu que 0 est une limite de (x_k) , il existe N tel que $x_n \in U$ pour tout $n \geq N$. Quitte à prendre le maximum, nous supposons aussi que $y_n \in U$ pour $n \geq N$. Avec ça, $x_n + y_n \in U + U \subset A$. Cela montre que 0 est une limite de $(x_k + y_k)$.
- (2) **Le cas général** Nous supposons que x est une limite de (x_k) et que y est une limite de (y_k) . La proposition 7.256 nous dit que 0 est une limite de $x - x_k$ et de $y - y_k$. La première partie dit alors que 0 est une limite de

$$k \mapsto x - x_k + y - y_k = x_k + y_k - (x + y). \quad (7.239)$$

La proposition 7.256, prise dans l'autre sens nous dit alors que $x + y$ est une limite de $k \mapsto x_k + y_k$.

□

7.10.7 Limite de suites

Si (x_n) est une suite dans un espace vectoriel topologique, rien ne garantit qu'elle ait une limite, ni qu'elle soit unique. Donc lorsque nous écrivons

$$x_n \xrightarrow{V} x, \quad (7.240)$$

nous sous-entendons seulement que x est une limite.

De même, dans la proposition 7.259, nous montrerons que $x_n + y_n \xrightarrow{V} x + y$ et $\lambda x_n \xrightarrow{V} \lambda x$. Cela signifie que si x et y sont des limites de (x_n) et (y_n) , alors $x + y$ est une limite de $(x_n + y_n)$ et que λx est une limite de (λx_n) .

120. Définition 7.248.

121. Limite de suite, définition 7.14.

Si V est un espace vectoriel topologique dans lequel il n'y a pas unicité de la limite ¹²², nous ne pouvons pas exactement dire que le processus de limite est une opération linéaire sur l'ensemble des suites convergentes.

LEMooJDJVooHUKdSe

Lemme 7.258.

Soient un espace vectoriel topologique V ainsi qu'une suite (x_n) dans V . Nous avons

$$x_n \xrightarrow{V} x \quad (7.241)$$

si et seulement si

$$x_n - x \xrightarrow{V} 0. \quad (7.242)$$

Dans la proposition 7.259, nous considérons un espace vectoriel topologique. Il n'y a pas de produit. Pour la convergence

$$x_k y_k \xrightarrow{xy}, \quad (7.243)$$

voir la proposition 9.28.

PROPooZRCBooKiJhDg

Proposition 7.259 ([1]).

Soit V , un espace vectoriel topologique. Soient deux suites convergentes $x_n \xrightarrow{V} x$ et $y_n \xrightarrow{V} y$ ainsi que $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

ITEMooSHPAooQyEkgT

(1)

$$x_n + y_n \xrightarrow{V} x + y. \quad (7.244)$$

ITEMooYHHYooYATzWE

(2)

$$\lambda x_n \xrightarrow{V} \lambda x. \quad (7.245)$$

Démonstration. En deux parties.

(1) **(1)** Nous allons montrer que $x_n + y_n - (x + y) \xrightarrow{V} 0$; ce sera suffisant par le lemme 7.258.

Soit un ouvert $\mathcal{O}$ autour de 0. Soient des ouverts U_1 et U_2 autour de 0 tels que $U_1 + U_2 \subset \mathcal{O}$ (lemme 7.245).

Vues les convergences de (x_n) et de (y_n) , il existe un N tel que $n \geq N$ implique $x_n - x \in U_1$ et $y_n - y \in U_2$. Dans ce cas, $x_n + y_n - (x + y) \in U_1 + U_2 \subset \mathcal{O}$.

Donc pour $n \geq N$ nous avons bien $x_n + y_n - (x + y) \in \mathcal{O}$, ce qui signifie que $x_n + y_n \xrightarrow{V} x + y$.

(2) **(2)** En plusieurs étapes.

(2a) $x_n - x \xrightarrow{V} 0$ C'est le lemme 7.258.

(2b) $\lambda x_n - \lambda x \xrightarrow{V} 0$ Soit un ouvert $\mathcal{O}$ autour de 0. Par le lemme 7.222, il existe un ouvert U autour de 0 tel que $\lambda U \subset \mathcal{O}$. Comme $x_n - x \xrightarrow{V} 0$, il existe N tel que $n \geq N$ implique $x_n - x \in U$.

Pour ces N et n nous avons aussi $\lambda(x_n - x) \in \lambda U \subset \mathcal{O}$. Nous avons donc démontré que $\lambda x_n - \lambda x \xrightarrow{V} 0$.

(2c) **Conclusion** Encore le lemme 7.258 nous permet de déduire que $\lambda x_n \xrightarrow{V} \lambda x$.

□

7.11 Applications continues

7.11.1 Continuité

La définition de la continuité d'une fonction est donnée en 7.45.

122. La proposition 7.82 dit qu'il y a unicité de la limite dans les espaces topologiques séparés.

7.260.

Lorsque nous écrivons $f: X \rightarrow Y$, nous entendons que f est définie sur tout X , mais pas qu'elle soit surjective sur Y . En particulier, pour que f soit continue en a , il faut que a soit dans le domaine de définition de f .

Dans le cas de fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, l'espace X sera la partie de $\mathbb{R}$ sur laquelle f sera définie, et la topologie sera la topologie induite de $\mathbb{R}$.

PROPooOXBCooIzLaPe

Proposition 7.261 ([274]).

Soient deux espaces topologiques X et Y . Une application $f: X \rightarrow Y$ est continue¹²³ si et seulement si pour tout $x \in X$ et pour tout voisinage¹²⁴ V de $f(x)$, la partie $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x dans X .

Démonstration. En deux parties.

- (1) $\Rightarrow$ Soient $x \in X$ et un voisinage V de $f(x)$ dans Y . Il existe alors un ouvert $\mathcal{O}$ de Y tel que $f(x) \in \mathcal{O} \subset V$.

La partie $f^{-1}(\mathcal{O})$ vérifie :

- $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de X parce que f est continue.
- $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$
- $f^{-1}(\mathcal{O}) \subset f^{-1}(V)$.

Donc $f^{-1}(V)$ contient un ouvert contenant x . Donc $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x dans X .

- (2) $\Leftarrow$ Soit un ouvert $\mathcal{O}$ de Y . Nous devons prouver que $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de X . Pour cela nous prouvons que $f^{-1}(\mathcal{O})$ contient un ouvert autour de chacun de ses éléments et utilisons le théorème 7.8.

Soit donc $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$. La partie $\mathcal{O}$ est un voisinage de $f(x)$. Donc $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un voisinage de x . Il existe donc un ouvert V de X tel que

$$x \in V \subset f^{-1}(\mathcal{O}). \quad (7.246)$$

Nous en déduisons que $f^{-1}(\mathcal{O})$ contient bien un ouvert autour de chacun de ses points.

□

La proposition 7.350 donnera des détails sur ce qu'il se passe lorsque l'espace est métrique.

ThoESCaraB

Théorème 7.262.

Une fonction $f: X \rightarrow Y$ est une fonction continue si et seulement si elle est continue en chacun des points de X .

Démonstration. En deux parties.

- (1) $\Rightarrow$ Nous supposons que f est une fonction continue. Soient $a \in X$ et W un voisinage de $f(a)$. Nous considérons $\mathcal{O}$, un voisinage ouvert de $f(a)$ contenu dans W ; l'ensemble $f^{-1}(\mathcal{O})$ est alors un ouvert contenant a , et l'image de $f^{-1}(\mathcal{O})$ par f est bien entendu contenue dans W .

- (2) $\Leftarrow$ Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de Y . Pour prouver que $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de X , nous allons considérer un élément $a \in f^{-1}(\mathcal{O})$ et montrer qu'il existe un voisinage ouvert de a contenu dans $f^{-1}(\mathcal{O})$; le théorème 7.8 nous assurera alors que $f^{-1}(\mathcal{O})$ est ouvert.

L'ensemble $\mathcal{O}$ est un voisinage ouvert de $f(a)$ parce que a a été choisi dans $f^{-1}(\mathcal{O})$. Donc la continuité de f en a nous assure qu'il existe un voisinage W de a tel que $f(W) \subset \mathcal{O}$. En prenant un ouvert contenant a à l'intérieur de W nous avons un voisinage ouvert de a contenu dans $f^{-1}(\mathcal{O})$.

□

123. Définition 7.45.

124. Définition 7.4

Remarque 7.263.

À cause de l'éventuelle non unicité de la limite, deux fonctions continues et égales sur un sous-ensemble dense ne sont pas spécialement égales. Ce sera vrai sur les espaces métriques et plus généralement pour les espaces séparés. Voir l'exemple 7.73 et la proposition 7.138.

LEMooCQWooVSAWiy

Lemme 7.264 ([1]).

Soient une fonction $f: X \rightarrow Y$, et un point d'accumulation $a \in X$ ¹²⁵. La fonction f est continue en a si et seulement si $f(a)$ est une limite de f en a .

Démonstration. En deux parties.

- (1) $\Rightarrow$ Nous supposons que f est continue en $a \in X$. Soit un ouvert V de Y contenant $f(a)$. Par continuité de f au point¹²⁶ a , il existe un voisinage U de a tel que $f(U) \subset V$. À fortiori, $f(U \setminus a) \subset V$ comme le demande la définition de la limite.
- (2) $\Leftarrow$ Nous supposons que $f(a)$ est une limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a . Si W est un ouvert de Y contenant $f(a)$, il existe un voisinage V de a dans X tel que $f(V \setminus a) \subset W$. Mais puisque $f(a) \in W$, nous avons $f(V) \subset W$.

□

LEMooQFISooYWkzPR

Lemme 7.265 ([1]).

Soient des espaces topologiques X et Y ainsi qu'une application continue $f: X \rightarrow Y$. Soient

- (1) $a \in X$ et $b = f(a) \in Y$.
- (2) Un voisinage ouvert V de b dans Y .

Alors il existe un voisinage ouvert U de a tel que $f(U) \subset V$.

7.11.1.1 Composition

PROPooCNTBooTkOJuK

Proposition 7.266 (Composée d'application continues[1]).

Soient des espaces topologiques X, Y, Z ainsi que des applications continues $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow Z$. Alors l'application $g \circ f: X \rightarrow Z$ est continue.

Démonstration. Soit un ouvert $\mathcal{O}$ de Z . Nous avons

$$(g \circ f)^{-1}(\mathcal{O}) = (f^{-1} \circ g^{-1})(\mathcal{O}) = f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{O})). \quad (7.247)$$

Vu que f est continue, la partie $g^{-1}(\mathcal{O})$ est ouverte dans Y . Et comme f est continue, $f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{O}))$ est ouvert dans X . □

7.11.2 Continuité et topologie induite

PROPooNPLBooPfmym

Proposition 7.267 ([1]).

Soit une fonction $f: X \rightarrow Y$, continue sur l'ouvert A de X au sens où elle est continue en chaque point de A . Alors la fonction restriction $\tilde{f}: A \rightarrow Y$ est également continue pour la topologie sur A , induite¹²⁷ de X .

Démonstration. Soit $a \in A$, et montrons que $\tilde{f}$ est continue en a , c'est-à-dire que $\tilde{f}(a) = f(a)$ soit une limite de $\tilde{f}$ en a . Soit un voisinage V de $\tilde{f}(a)$ dans Y . Par la continuité de f , nous avons un ouvert W de X tel que

$$f(W \setminus \{a\}) \subset V. \quad (7.248)$$

125. Un point d'accumulation de X n'est pas spécialement dans X , si X est un sous-espace d'un autre. Par exemple 0 est un point d'accumulation de $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$. Ici nous supposons que $a \in X$, sinon il n'y a de toute façon pas de continuité en a .

126. Continuité en un point, définition 7.45(1).

127. Définition 7.27.

La partie $W \cap A$ est un voisinage de a pour la topologie de A , et vérifie

$$f(W \cap A \setminus \{a\}) \subset V. \quad (7.249)$$

donc $f(a)$ est une limite de $\tilde{f}$ pour $x \rightarrow a$. La fonction $\tilde{f}: A \rightarrow Y$ est continue en chaque point de A . $\square$

Au niveau de la notion de continuité, il n'y a pas trop de changements en passant de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{Q}$ muni de la topologie induite.

EXooHWIIooYYbfGE

Exemple 7.268.

Que signifie d'être continue pour une fonction $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$? D'après le théorème 7.262, il s'agit d'être continue en chaque point de $\mathbb{Q}$. Il s'agit donc, par la définition 7.45 que pour tout $q \in \mathbb{Q}$, le nombre $f(q)$ soit une limite de f pour $x \rightarrow q$.

L'espace d'arrivée étant $\mathbb{R}$, un voisinage de $f(q)$ est pris comme une boule de taille ϵ . La continuité de f exige qu'il y ait un voisinage W de q dans $\mathbb{Q}$ tel que pour tout $q' \in W$ (différent de q), $|f(q) - f(q')| < \epsilon$.

Qu'est-ce qu'un ouvert dans $\mathbb{Q}$? D'après la définition 7.27 de la topologie induite, ce sont les ensembles $\mathbb{Q} \cap \mathcal{O}$ avec $\mathcal{O}$ ouvert dans $\mathbb{R}$. Tout cela pour dire que pour tout $\epsilon > 0$, il doit exister $\delta > 0$ tel que pour tout $q' \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < |q - q'| < \delta$, nous ayons $|f(q) - f(q')| < \epsilon$.

Bref, c'est exactement le mécanisme usuel de la continuité sur $\mathbb{R}$, sauf qu'il ne faut considérer que les rationnels. $\triangle$

LEMooHAODooYSPmvH

Lemme 7.269 (Application partielle[1]).

Soient trois espaces topologiques X_1 , X_2 et Y . Nous considérons une fonction continue $f: X_1 \times X_2 \rightarrow Y$ ainsi que $x_1 \in X_1$. Alors l'application

$$\begin{aligned} g: X_2 &\rightarrow Y \\ x_2 &\mapsto f(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (7.250)$$

est continue.

Démonstration. Soit un ouvert $\mathcal{O}$ de Y ; par hypothèse sur f , la partie $f^{-1}(\mathcal{O})$ est ouverte dans $X_1 \times X_2$. Notre but est de prouver que $g^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de X_2 . Nous avons :

$$g^{-1}(\mathcal{O}) = \{x_2 \in X_2 \text{ tel que } (x_1, x_2) \in f^{-1}(\mathcal{O})\}. \quad (7.251)$$

Nous considérons $x_2 \in g^{-1}(\mathcal{O})$ et nous prouvons qu'il existe dans X_2 un voisinage de x_2 entièrement contenu dans $g^{-1}(\mathcal{O})$.

Étant donné que (x_1, x_2) est dans $f^{-1}(\mathcal{O})$ qui est ouvert, la définition 7.63 de la topologie sur $X_1 \times X_2$ nous donne des ouverts A_1 dans X_1 et A_2 dans X_2 tels que

$$(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2 \subset f^{-1}(\mathcal{O}). \quad (7.252)$$

Nous montrons à présent que $A_2 \subset g^{-1}(\mathcal{O})$. Soit $y_2 \in A_2$. Par construction $(x_1, y_2) \in A_1 \times A_2 \subset f^{-1}(\mathcal{O})$, donc

$$g(y_2) = f(x_1, y_2) \in \mathcal{O}. \quad (7.253)$$

Cela termine la démonstration. $\square$

7.11.3 Continuité et connexité

PropConnexiteViaFonction

Proposition 7.270.

Un espace topologique X est connexe si et seulement si toute application continue¹²⁸ $X \rightarrow \mathbb{Z}$ est constante.

¹²⁸. La topologie sur $\mathbb{Z}$ est celle de l'ensemble des parties. C'est également la topologie induite de $\mathbb{R}$, mais ça n'a aucune importance pour l'instant.

Démonstration. En deux parties.

- (1) $\Rightarrow$ Soit une fonction continue $f: X \rightarrow \mathbb{Z}$. Supposons qu'elle ne soit pas constante. Nous allons en déduire que X n'est pas connexe. En effet supposons que $f(a) = u$ et $f(b) = v$ avec $u \neq v$. Nous posons

$$\begin{aligned} A &= f^{-1}(u) \\ B &= X \setminus A. \end{aligned} \tag{7.254}$$

La partie A est ouverte parce que $\{u\}$ est ouvert dans $\mathbb{Z}$. La partie B est également ouverte parce que c'est une union d'ouverts : $B = \bigcup_{n \neq u} f^{-1}(n)$. La partie A contient a , et B contient b .

Voilà. Ce sont deux parties ouvertes non vides, disjointes qui recouvrent X . Donc X n'est pas connexe.

- (2) $\Leftarrow$ Encore par l'absurde nous supposons que X n'est pas connexe. Soient deux ouverts A et B qui font ce qu'il faut. Alors en définissant

$$\begin{aligned} f: X &\rightarrow \mathbb{Z} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ 1 & \text{si } x \in B, \end{cases} \end{aligned} \tag{7.255}$$

nous avons une fonction continue non constante sur X à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

□

NORMooSCAWooPFnrVj

7.271.

Pour mettre les idées au clair, dire qu'une partie A n'est pas connexe¹²⁹ signifie qu'il existe des ouverts $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ vérifiant

ITEMooRACDooKLaVXP

$$(1) \quad \mathcal{O}_i \cap A \neq \emptyset$$

ITEMooNCQVooNjAYCT

$$(2) \quad \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$$

ITEMooPIHJooNJYpQo

$$(3) \quad A \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2.$$

LemConncontconn

Lemme 7.272.

L'image d'un connexe par une application continue est connexe.

Démonstration. Soit une application continue $f: X \rightarrow Y$ entre deux espaces topologiques.

Nous allons prouver la contraposée. Soit A une partie de Y telle que $f(A)$ ne soit pas connexe. Nous allons prouver que A elle-même n'est pas connexe. Vu que $f(A)$ n'est pas connexe, il existe des ouverts disjoints $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ recouvrant $f(A)$ et intersectant tous deux A . Nous prouvons que A n'est pas connexe en considérant les parties $A_1 = f^{-1}(\mathcal{O}_1)$ et $A_2 = f^{-1}(\mathcal{O}_2)$, et en vérifiant les propriétés de 7.271.

- (1) **A_i est ouvert** Les parties A_i sont ouvertes parce qu'elles sont images inverses d'ouverts par une fonction continue (définition 7.45(2)).
- (2) **Pour (1)** Nous devons prouver que $A_i \cap A \neq \emptyset$, c'est-à-dire qu'il existe un $x \in f^{-1}(\mathcal{O}_i) \cap A$. Nous commençons par considérer $y \in \mathcal{O}_i \cap f(A)$. Nous avons d'une part $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(\mathcal{O}_i) = A_i$. D'autre part, vu que $y \in f(A)$, nous avons $f^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset$. Nous prenons donc $x \in f^{-1}(y) \cap A$.
Ce x vérifie $x \in f^{-1}(y) \cap A \subset A_i \cap A$.
- (3) **Pour (2)** Si $x \in f^{-1}(\mathcal{O}_1) \cap f^{-1}(\mathcal{O}_2)$, alors $f(x) \in \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$, ce qui contredirait le fait que $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ sont disjoints. Il n'y a donc pas d'éléments dans l'intersection de $f^{-1}(\mathcal{O}_1)$ et de $f^{-1}(\mathcal{O}_2)$.
- (4) **Pour (3)** Si $f^{-1}(\mathcal{O}_1)$ et $f^{-1}(\mathcal{O}_2)$ ne recouvrent pas A , il existe un x dans A qui n'est dans aucun des deux. Dans ce cas, $f(x)$ est dans $f(A)$, mais n'est ni dans $\mathcal{O}_1$, ni dans $\mathcal{O}_2$, ce qui contredirait le fait que ces deux derniers recouvrent $f(A)$.

129. Connexe, définition 7.102.

Nous déduisons que A n'est pas connexe. Et donc le lemme. $\square$

Une application de ce lemme sera le théorème des valeurs intermédiaires 9.95.

Exemple 7.273.

Les espaces topologiques $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes. $\triangle$

Démonstration. Supposons par l'absurde que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ soit un homéomorphisme. Nous posons $E = f(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ et $z_0 = f(0)$. Puisque f est bijective nous avons

$$E = \mathbb{R}^2 \setminus \{z_0\}, \quad (7.256)$$

qui est connexe.

Comme E est connexe et que f^{-1} est continue, le lemme 7.272 nous dit que $f^{-1}(E)$ est connexe. Mais par définition, $f^{-1}(E) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ qui n'est pas connexe. $\square$

7.11.4 Continuité et compacité

La proposition 7.346 dira que l'image d'un compact par une application continue est compacte. Nous démontrons ici en général.

ThoImCompCotComp

Théorème 7.274.

L'image d'un compact¹³⁰ par une fonction continue est un compact.

Démonstration. Soit $K \subset X$, un ensemble compact, et étudions $f(K)$; en particulier, nous considérons Ω , un recouvrement de $f(K)$ par des ouverts. Nous avons

$$f(K) \subseteq \bigcup_{\mathcal{O} \in \Omega} \mathcal{O}. \quad (7.257)$$

Par construction, nous avons aussi

$$K \subseteq \bigcup_{\mathcal{O} \in \Omega} f^{-1}(\mathcal{O}), \quad (7.258)$$

en effet, si $x \in K$, alors $f(x)$ est dans un des ouverts de Ω , disons $f(x) \in \mathcal{O}$, et évidemment, $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$. Les $f^{-1}(\mathcal{O})$ recouvrent le compact K , et donc on peut en choisir un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire un choix de $\{f^{-1}(\mathcal{O}_1), \dots, f^{-1}(\mathcal{O}_n)\}$ tels que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(\mathcal{O}_i). \quad (7.259)$$

Dans ce cas, nous avons

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}_i, \quad (7.260)$$

ce qui prouve la compacité de $f(K)$. $\square$

7.11.5 Distance uniforme

PROPooNSCCooJuqOQe

Proposition 7.275 ([275]).

Soient un compact K et un espace métrique¹³¹ (E, d) . Nous notons $C(K, X)$ l'ensemble des applications continues¹³² de K vers X . Alors l'application

$$\begin{aligned} d_\infty: C(K, E) \times C(K, E) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\mapsto \sup_{x \in K} d(f(x), g(x)) \end{aligned} \quad (7.261)$$

est une distance.

130. Définition 7.109.

131. Définition 7.139.

132. Pour la topologie métrique 7.142.

7.11.6 Continuité de la réciproque sur un compact

LEMooNEEVooSeHYzx

Lemme 7.276.

Soit un espace compact K et un espace topologique séparé X . Si $f: K \rightarrow X$ est une bijection continue, alors f est un isomorphisme d'espaces topologiques.

LEMooPLGTooATIGov

Lemme 7.277 ([276]).

Soit une application continue et bijective $f: K \rightarrow X$ où K est compact et X est métrique. Alors la réciproque $f^{-1}: X \rightarrow K$ est continue.

Démonstration. Nous allons montrer que si F est fermé dans K , alors $(f^{-1})^{-1}(F)$ est fermé dans X . Le lemme 7.49 conclura. Si F est fermé dans K , alors F est compact (lemme 7.121(1)). Le théorème 7.274 dit que l'image d'un compact par une application continue est compacte. Donc $f(F)$ est compact dans X . Mais comme X est métrique, tout compact est fermé (lemme 7.121(2)). Bref, $f(F)$ est fermé. $\square$

LEMooKSDKooDbKKeB

Lemme 7.278 ([1]).

Soit un espace vectoriel normé V ainsi qu'une application continue $f: [a, b] \rightarrow V$. Nous supposons que $f: [a, b[\rightarrow V$ est injective.

Alors en posant $S = f([a, b[)$, l'application réciproque

$$f^{-1}: S \rightarrow [a, b[\quad (7.262)$$

est continue.

Démonstration. Pour tout $x \in [a, b]$ nous notons $V_x = f([a, x])$.

Par hypothèse d'injectivité, l'existence de f^{-1} sur V_b est assurée. En ce qui concerne sa continuité, pour chaque $x \in]a, b[$, l'application $f: [a, x] \rightarrow V_x$ vérifie le lemme 7.277. Donc l'application réciproque $f^{-1}: V_x \rightarrow [a, x]$ est continue.

Le théorème 7.262 dit alors que l'application f^{-1} est donc continue en chaque point de V_x pour tout $a < x < b$. Elle est donc continue en chaque point de $f([a, b[)$ parce que chacun de ces point est dans un V_x . Le théorème 7.262 (dans l'autre sens) montre alors que $f^{-1}: S \rightarrow [a, b[$ est continue. $\square$

7.11.7 Espace vectoriel topologique

PROPooHUWQooPWYBUu

Proposition 7.279 ([1]).

Soient un espace vectoriel topologique E et une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, V)$ où V est un espace vectoriel normé. Si f est bornée sur un voisinage de 0, alors f est continue.

Démonstration. En plusieurs parties.

- (1) **f est continue en 0** Nous vérifions la définition 7.45(1) d'une fonction continue en un point. Soit un ouvert $\mathcal{O}$ de V contenant $f(0) = 0$. Vu que V est normé, il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset \mathcal{O}$. Comme f est bornée sur un voisinage de 0, nous pouvons considérer un voisinage U de 0 dans E tel que $f(U) \subset B(0, m)$. Si nous prenons $\delta < r/m$, alors

$$f(\delta U) = \delta f(U) \subset \delta B(0, m) = B(0, \delta m) = B(0, r) \subset \mathcal{O}. \quad (7.263)$$

Donc le voisinage δU ¹³³ de 0 fait fonctionner la définition 7.45(1).

- (2) **Continue partout** C'est la proposition 7.223.

 $\square$

7.12 Produit fini d'espaces vectoriels normés

sec_prod

Dans cette section nous parlons de produits finis d'espaces. Cela ne signifie pas que chacun des espaces soient séparément de dimension finie.

133. C'est un voisinage par la proposition 7.221.

7.12.1 Distance et norme produit

DefZTHxrHA

Proposition-Définition 7.280 (Distance produit).

Si $(E_1, d_1), \dots, (E_n, d_n)$ sont des espaces métriques alors la formule

$$d(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} d_i(x_i, y_i) \quad (7.264)$$

définit une distance sur le produit cartésien $E = E_1 \times \dots \times E_n$. Elle est la **distance produit**.

La définition de la norme sur un produit d'espaces vectoriels normés découle immédiatement de la définition de la distance 7.280 :

DefFAJgTCE

Lemme-Définition 7.281 ([277]).

Soient V et W deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Si (v_1, w_1) et (v_2, w_2) sont des éléments de $V \times W$ et si λ est un élément de $\mathbb{K}$, alors les opérations suivantes donnent une structure d'espace vectoriel au produit $V \times W$:

- $(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$
- $\lambda(v_1, w_1) = (\lambda v_1, \lambda w_1)$.

Démonstration. Il faut seulement faire les vérifications d'usage. □

LEMooFQMSooLmdIvD

Lemme-Définition 7.282 (Norme produit).

Soient deux espaces vectoriels normés V et W .

(1) *L'opération*

$$\|(v, w)\|_{V \times W} = \max\{\|v\|_V, \|w\|_W\}. \quad (7.265)$$

EqNormeVxWmax

est une norme¹³⁴ sur $V \times W$.

(2) La topologie de cette norme¹³⁵ est la même que la topologie produit¹³⁶ sur $V \times W$.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Norme** On doit vérifier les trois conditions de la définition 7.212.

- Soit (v, w) dans $V \times W$ tel que $\|(v, w)\|_{V \times W} = \max\{\|v\|_V, \|w\|_W\} = 0$. Alors $\|v\|_V = 0$ et $\|w\|_W = 0$, donc $v = 0_V$ et $w = 0_W$. Cela implique $(v, w) = (0_v, 0_w) = 0_{V \times W}$.
- Pour tout a dans $\mathbb{R}$ et (v, w) dans $V \times W$, la norme $\|a(v, w)\|_{V \times W}$ se calcule de la façon suivante :

$$\|a(v, w)\|_{V \times W} = \max\{\|av\|_V, \|aw\|_W\} = |a| \max\{\|v\|_V, \|w\|_W\} = |a| \|(v, w)\|_{V \times W}. \quad (7.266)$$

- Soient (v_1, w_1) et (v_2, w_2) dans $V \times W$.

$$\begin{aligned} \|(v_1, w_1) + (v_2, w_2)\|_{V \times W} &= \max\{\|v_1 + v_2\|_V, \|w_1 + w_2\|_W\} \\ &\leq \max\{\|v_1\|_V + \|v_2\|_V, \|w_1\|_W + \|w_2\|_W\} \\ &\leq \max\{\|v_1\|_V, \|w_1\|_W\} + \max\{\|v_2\|_V, \|w_2\|_W\} \\ &= \|(v_1, w_1)\|_{V \times W} + \|(v_2, w_2)\|_{V \times W}. \end{aligned} \quad (7.267)$$

(2) **Équivalence**

Dans cette preuve, nous considérons la « topologie de $V \times W$ » comme étant la topologie produit et « la topologie métrique de $V \times W$ » la topologie de la norme produit.

134. Définition 7.212.

135. Topologie associée à une norme : c'est la topologie associée à la distance correspondante, définition 7.218.

136. Topologie produit, définition 7.63.

- (2a) **Dans un sens** La définition 7.63 de la topologie produit dit qu'une prébase de $V \times W$ est donnée par

$$\{B(v, r) \times B(w, s) \text{ tel que } v \in V; w \in W; r, s > 0\}. \quad (7.268)$$

Nous prouvons maintenant que la partie $S = B(v_0, r) \times B(w_0, s)$ est un ouvert de l'espace $(V \times W, \|\cdot\|_{V \times W})$. Pour cela nous prouvons que tout élément de S contient un voisinage métrique contenu dans S .

Soit $(v_1, w_1) \in S$. Nous posons

$$d((v_1, w_1), (v_0, w_0)) = \delta < \max\{r, s\}. \quad (7.269)$$

Nous considérons $\epsilon > 0$ et nous montrons que si ϵ est assez petit, $B((v_1, w_1), \epsilon) \subset S$. Pour cela nous considérons $(v, w) \in B((v_1, w_1), \epsilon)$ et nous calculons un tout petit peu :

$$d((v, w), (v_0, w_0)) \leq d((v, w), (v_1, w_1)) + d((v_1, w_1), (v_0, w_0)) \quad (7.270a)$$

$$< \epsilon + \delta. \quad (7.270b)$$

Si ϵ est assez petit, le tout reste plus petit que $\max\{r, s\}$.

Donc S est bien un ouvert métrique par le théorème 7.8. Vu que la topologie métrique contient une prébase de la topologie produit, tout ouvert de la topologie produit est un ouvert de la topologie métrique.

- (2b) **Dans l'autre sens** Soient un ouvert métrique $\mathcal{O}$ ainsi que $(v_0, w_0) \in \mathcal{O}$; il existe $r > 0$ tel que

$$B((v_0, w_0), r) \subset \mathcal{O}. \quad (7.271)$$

Nous affirmons que $B(v_0, r) \times B(w_0, r)$ est contenu dans $\mathcal{O}$, de telle sorte que $\mathcal{O}$ soit un ouvert de la topologie produit. Pour $(v_1, w_1) \in B(v_0, r) \times B(w_0, r)$ nous avons

$$d((v_1, w_1), (v_0, w_0)) = \max\{\|v_1 - v_0\|, \|w_1 - w_0\|\} < r \quad (7.272)$$

parce que $v_1 \in B(v_0, r)$ et $w_1 \in B(w_0, r)$.

Donc tout élément de $\mathcal{O}$ admet un voisinage « produit » contenu dans $\mathcal{O}$; donc $\mathcal{O}$ est ouvert pour la topologie produit.

□

7.283.

En particulier, pour la topologie de la norme maximum, la convergence d'une suite implique la convergence « composante par composante » par la proposition 7.85.

On remarque tout de suite que la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ est la norme de l'espace produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. En outre cette définition nous permet de trouver plusieurs nouvelles normes dans les espaces $\mathbb{R}^p$. Par exemple, si nous écrivons $\mathbb{R}^4$ comme $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ on peut munir $\mathbb{R}^4$ de la norme produit

$$\|(x_1, x_2, x_3, x_4)\|_{\infty, 2} = \max\{\|(x_1, x_2)\|_\infty, \|(x_3, x_4)\|_2\}.$$

Les applications de projection de l'espace produit $V \times W$ vers les espaces «facteurs», V et W sont notées proj_V et proj_W et sont définies par

$$\begin{aligned} \text{proj}_V: V \times W &\rightarrow V \\ (v, w) &\mapsto v \end{aligned} \quad (7.273)$$

et

$$\begin{aligned} \text{proj}_W: V \times W &\rightarrow W \\ (v, w) &\mapsto w. \end{aligned} \quad (7.274)$$

Les inégalités suivantes sont évidentes

$$\begin{aligned}\|\text{proj}_V(v, w)\|_V &\leq \|(v, w)\|_{V \times W} \\ \|\text{proj}_W(v, w)\|_W &\leq \|(v, w)\|_{V \times W}.\end{aligned}\tag{7.275}$$

La topologie de l'espace produit est induite par les topologies des espaces «facteurs». La construction est faite en deux passages : d'abord nous disons que une partie $A \times B$ de $V \times W$ est ouverte si A et B sont des parties ouvertes de V et de W respectivement. Ensuite nous définissons que une partie quelconque de $V \times W$ est ouverte si elle est une intersection finie ou une réunion de parties ouvertes de $V \times W$ de la forme $A \times B$.

Ce choix de topologie donne deux propriétés utiles de l'espace produit

- (1) Les projections sont des **applications ouvertes**. Cela veut dire que l'image par proj_V (respectivement proj_W) de toute partie ouverte de $V \times W$ est une partie ouverte de V (respectivement W).
- (2) Pour toute partie A de V et B de W , nous avons $\text{Int}(A \times B) = \text{Int } A \times \text{Int } B$.^{PgovlABeqbAbB}

Une propriété moins facile à prouver est que pour toute partie A de V et B de W nous avons $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. Voir la proposition 10.91.

Ce que nous avons dit jusqu'ici est valable pour tout produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels normés. En particulier, pour tout $m > 0$ l'espace $\mathbb{R}^m$ peut être considéré comme le produit de m copies de $\mathbb{R}$.

Exemple 7.284.

Si V et W sont deux espaces vectoriels, nous pouvons considérer le produit $E = V \times W$. Les projections proj_V et proj_W , définies dans la section 7.12, sont des applications linéaires.

En effet, la projection $\text{proj}_V: V \times W \rightarrow V$ est donnée par $\text{proj}_V(v, w) = v$. Alors,

$$\begin{aligned}\text{proj}_V((v, w) + (v', w')) &= \text{proj}_V((v + v'), (w + w')) \\ &= v + v' \\ &= \text{proj}_V(v, w) + \text{proj}_V(v', w'),\end{aligned}\tag{7.276}$$

et

$$\text{proj}_V(\lambda(v, w)) = \text{proj}_V((\lambda v, \lambda w)) = \lambda v = \lambda \text{proj}_V(v, w).\tag{7.277}$$

Nous laissons à la lectrice le soin d'adapter ces calculs pour montrer que proj_W est également une projection¹³⁷. △

PropDXR_KbaLC

Proposition 7.285.

Si $\mathcal{O}$ est un voisinage de (a, b) dans $V \times W$ alors $\mathcal{O}$ contient un ouvert de la forme $B(a, r) \times B(b, r)$.

Démonstration. Puisque $\mathcal{O}$ est un voisinage, il contient un ouvert et donc une boule

$$B((a, b), r) = \{(v, w) \in V \times W \text{ tel que } \max\{\|v - a\|, \|w - b\|\} < r\}.\tag{7.278}$$

Évidemment l'ensemble $B(a, r) \times B(b, r)$ est dedans. □

CORooMWCUooKyoyZV

Corolaire 7.286.

Un espace vectoriel normé¹³⁸ est un espace vectoriel topologique : en d'autres mots, l'addition et la multiplication par un élément du corps sont continues.

Démonstration. Nous nommons $\mathbb{K}$ le corps de base, qui est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour rappel, la topologie produit et la topologie de la norme produit sont identiques par le lemme 7.282. Nous allons donc considérer cette topologie sur $E \times E$ et sur $\mathbb{K} \times E$.

¹³⁷. Écrivez-moi si ça pose un problème.

¹³⁸. Rappel que la définition 7.212 ne définit les espaces vectoriels normés que dans le cas où le corps de base est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(1) Pour l'addition

Soit

$$\begin{aligned} s: E \times E &\rightarrow E \\ (x, y) &\mapsto x + y, \end{aligned} \quad (7.279)$$

et prouvons que s est continue. Soit un ouvert A de E ; nous montrons que $s^{-1}(A)$ est ouvert dans $E \times E$. Pour cela nous considérons $(a, b) \in s^{-1}(A)$. Vu que A est ouvert et que $a + b \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B(a + b, r) \subset A$. Nous allons trouver $\epsilon > 0$ tel que

$$s(B(a, \epsilon) \times B(b, \epsilon)) \subset A. \quad (7.280)$$

Notez que le produit de boules est ouvert pour la définition 7.63 de la topologie produit. Si $x \in B(a, \epsilon)$, il existe $\delta \in E$ tel que $x = a + \delta$ avec $\|\delta\| < \epsilon$ et si $y \in B(b, \epsilon)$, nous avons $y = b + \mu$ avec $\|\mu\| < \epsilon$. Nous avons

$$s(x, y) = x + y = a + b + \delta + \mu \quad (7.281)$$

et donc ¹³⁹

$$\|(a + b) - s(x, y)\| = \|\delta + \mu\| \leq \|\delta\| + \|\mu\| < 2\epsilon. \quad (7.282)$$

Il suffit donc de prendre $\epsilon < r/2$.

(2) Pour la multiplication Nous prouvons à présent que

$$\begin{aligned} m: \mathbb{K} \times E &\rightarrow E \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda x \end{aligned} \quad (7.283)$$

est continue. Soit A ouvert dans E , soit $(\lambda, a) \in m^{-1}(A)$. Nous cherchons comme avant un $\epsilon > 0$ tel que

$$m(B(\lambda, \epsilon) \times B(a, \epsilon)) \subset A. \quad (7.284)$$

Soient $\lambda + \mu \in B(\lambda, \epsilon)$ et $a + x \in B(a, \epsilon)$. Nous avons

$$\|m(\lambda + \mu, a + x) - m(\lambda, a)\| = \|\lambda x + \mu a + \mu x\| \quad (7.285a)$$

$$\leq |\epsilon|(|\lambda| + \|a\| + |\epsilon|). \quad (7.285b)$$

Nous considérons donc $r > 0$ tel que $B(\lambda a, r) \subset A$, puis $\epsilon > 0$ assez petit pour que

$$\epsilon(|\lambda| + \|a\| + |\epsilon|) < r. \quad (7.286)$$

□

PROPOoYMCUooERvDpk

Proposition 7.287.

La norme est une application continue sur un espace vectoriel normé.

Plus précisément, si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé ¹⁴⁰, alors l'application

$$\begin{aligned} f: E &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned} \quad (7.287)$$

est continue.

Démonstration. Soit la boule $B(a, r)$ dans $\mathbb{R}$. Nous montrons que $f^{-1}(B(a, r))$ est un ouvert de E pour la topologie métrique. Soit $x_0 \in f^{-1}(B(a, r))$. Nous prenons $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $|\|x_0\| - a| < \alpha < r$. Et nous considérons la boule $B_E(x_0, \epsilon)$ avec ϵ que nous allons fixer plus tard.

Pour tout $x \in B_E(x_0, \epsilon)$, nous avons

$$|\|x\| - a| \leq |\|x\| - \|x_0\|| + |\|x_0\| - a| \quad (7.288a)$$

$$< \alpha + \epsilon. \quad (7.288b)$$

En prenant ϵ tel que $\alpha + \epsilon < r$ nous avons $f(x) \in B(a, r)$. □

¹³⁹. En utilisant 7.212(4).

¹⁴⁰. Dont la topologie métrique est donnée par 7.142.

Proposition 7.288.

La norme sur un espace vectoriel normé est une fonction de classe C^∞ .

PROPooQUAZooGXskwF

Lemme 7.289.

Soient un espace vectoriel normé $(V, \|\cdot\|)$ ainsi qu'une isométrie $f: V \rightarrow V$. Si A est une partie de V telle que $f(A) \subset A$, alors

$$\bar{A} = f(\bar{A}). \quad (7.289)$$

LEMooSCHooRyRrHA

Proposition 7.290 ([1]).

Soient des espaces vectoriels normés v et w . Nous considérons des suites convergentes $v_k \xrightarrow{V} v$ et $w_k \xrightarrow{W} w$. Alors nous avons

$$(v_k, w_k) \xrightarrow{V \times W} (v, w). \quad (7.290)$$

PROPooMHAVooRgJjMB

L'espace $V \times W$ est l'espace vectoriel normé muni de la topologie de la norme produit.

Nous étudierons plus en détail les espaces vectoriels topologiques à partir de la définition 7.219.

7.13 Topologie réelle en dimension n

Nous considérons sur $\mathbb{R}$ la topologie donnée par la valeur absolue, et sur $\mathbb{R}^n$ celle de la topologie produit ou du maximum, qui sont identiques par le lemme 7.282.

En particulier, nous n'avons pas encore la norme donnée par $\|x\| = \sqrt{\sum_i x_i^2}$, parce qu'elle demande la racine carrée, définie en 9.100.

7.13.1 Ouverts et fermés

La proposition suivante est évidemment à mettre en rapport avec le théorème 7.8.

PROPooEQYJooBbPiAj

Proposition 7.291.

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est ouverte si et seulement si pour tout $a \in A$ il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$.

Démonstration. C'est la définition 7.125 de la topologie métrique. □

LemMESSExh

Lemme 7.292.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $r > 0$ la boule¹⁴¹ $B(x, r)$ est ouverte.

Démonstration. Afin de prouver que la boule est ouverte, nous prenons un point $p \in B(x, r)$, et nous allons montrer qu'il existe une boule autour de p qui est contenue dans $B(x, r)$.

Étant donné que $p \in B(x, r)$, nous avons $d(p, x) < r$. Prouvons que la boule $B(p, r - d(p, x))$ est contenue dans $B(x, r)$. Pour cela, nous prenons $p' \in B(p, r - d(p, x))$, et nous essayons de prouver que $p' \in B(x, r)$. En effet, en utilisant l'inégalité triangulaire,

$$d(x, p') \leq d(x, p) + d(p, p') \leq d(x, p) + r - d(p, x) = r. \quad (7.291)$$

□

7.13.2 Point d'accumulation, point isolé

Les définitions de point d'accumulation et de point isolé sont 7.43 et 7.44. Nous voyons maintenant ce que ces définitions donnent dans le cas de l'espace topologique $\mathbb{R}$.

Lemme 7.293.

Soit $D \subset \mathbb{R}$. Un point $a \in D$ est isolé dans D si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$[a - \varepsilon, a + \varepsilon] \cap D = \{a\}. \quad (7.292)$$

Autrement dit, il existe un intervalle autour de a dans lequel a est le seul élément de D .

¹⁴¹. Définition 7.142.

Lemme 7.294.

Un point $a \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation de D si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$([a - \varepsilon, a + \varepsilon] \setminus \{a\}) \cap D \neq \emptyset. \quad (7.293)$$

Autrement dit, quel que soit l'intervalle autour de a que l'on considère, le point a n'est pas tout seul dans D .

Exemple 7.295.

Prenons $D = [0, 1[\cup]2, 3]$. Cet ensemble n'a pas de point isolé, et l'ensemble de ses points d'accumulation est $[0, 1] \cup [2, 3]$.

Notez que les points 1 et 2 sont des points d'accumulation de D qui ne font pas partie de D . Il est possible d'être un point d'accumulation de D sans être dans D , mais pour être un point isolé dans D , il faut être dans D . $\triangle$

Exemple 7.296.

Soit $D = \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Tous les points de cet ensemble sont des points isolés (vérifier!). Aucun point de D n'est point d'accumulation. Cependant 0 est un point d'accumulation. $\triangle$

EXooWOYQooJolaTV

Exemple 7.297.

Soit $D =]1, 2[\cup \{12\}$. Le point 12 est adhérence, mais pas d'accumulation parce que le voisinage $]9, 14[$ n'intersectionne pas $D \setminus \{12\}$. $\triangle$

7.13.3 Limite de suite

Définition 7.298 (Limite d'une suite dans $\mathbb{R}^m$).

Une suite de points (x_n) dans $\mathbb{R}^m$ est dite **convergente** si il existe un élément $\ell \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \|x_n - \ell\| < \varepsilon. \quad (7.294) \quad \text{EqCondLimSuite}$$

Dans ce cas, nous disons que ℓ est la **limite** de la suite (x_n) et nous écrivons $\lim x_n = \ell$ ou plus simplement $x_n \rightarrow \ell$.

Remarque 7.299.

Nous n'écrivons pas « $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ » parce que, lorsqu'on parle de suites, la limite est *toujours* lorsque n tend vers l'infini. Il n'y a aucun intérêt à chercher par exemple $\lim_{n \rightarrow 4} x_n$ parce que cela vaudrait x_4 et rien d'autre.

Ceci est une différence importante avec les limites de fonctions.

Lemme 7.300 (Unicité de la limite).

Il ne peut pas y avoir deux nombres différents qui satisfont à la condition (7.294). En d'autres termes, si ℓ et ℓ' sont deux limites de la suite (x_n) , alors $\ell = \ell'$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Nous considérons N tel que

$$\|x_n - \ell\| < \varepsilon \quad (7.295)$$

pour tout $n \geq N$, et $N' > 0$ tel que

$$\|x_n - \ell'\| < \varepsilon \quad (7.296)$$

pour tout $n > N'$. Maintenant, nous prenons n plus grand que N et N' de telle façon que les deux équations pour x_n soient vérifiées en même temps. Alors

$$\|\ell - \ell'\| = \|\ell - x_n + x_n - \ell'\| \leq \|\ell - x_n\| + \|x_n - \ell'\| < 2\varepsilon. \quad (7.297)$$

Cela prouve que $\|\ell - \ell'\| = 0$. $\square$

Le théorème de Bolzano-Weierstrass 7.194 dit que dans le cas métrique, la compacité séquentielle est équivalente à la compacité.

7.14 Topologie et distance

Lemme 7.301.

Soient (X_1, d_1) et (X_2, d_2) des espaces métriques séparables. Alors $X_1 \times X_2$ admet une base dénombrable de topologie constituée de produits de boules de X_1 par des boules de X_2 . Plus précisément si A_i est dénombrable et dense dans X_i alors l'ensemble des produits

$$\left\{ B(y_1, r_1) \times B(y_2, r_2) \right\}_{\substack{y_i \in A_i \\ r_i \in \mathbb{Q}^+}} \quad (7.298)$$

est une base de topologie pour $X_1 \times X_2$.

Démonstration. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $X_1 \times X_2$ et $(x_1, x_2) \in \mathcal{O}$. Par définition de la topologie produit ¹⁴², il existe $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}^+$ tels que $B(x_1, r_1) \times B(x_2, r_2) \subset \mathcal{O}$. Les parties A_i étant denses, il existe $y_i \in B(x_i, r_i/2) \cap A_i$. Avec ces choix nous avons $x_i \in B(y_i, \frac{r_i}{2})$. Nous avons donc

$$(x_1, x_2) \in B(y_1, \frac{r_1}{2}) \times B(y_2, \frac{r_2}{2}). \quad (7.299)$$

Il est facile de voir que $B(y_i, r_i/2) \subset B(x_i, r_i)$. En effet si $z_i \in B(y_i, r_i/2)$ alors

$$d_i(z_i, x_i) \leq d(z_i, y_i) + d(y_i, x_i) \leq \frac{r_i}{2} + \frac{r_i}{2} = r_i. \quad (7.300)$$

Au final,

$$(x_1, x_2) \in B(y_1, \frac{r_1}{2}) \times B(y_2, \frac{r_2}{2}) \subset \mathcal{O}. \quad (7.301)$$

□

Définition 7.302.

Si (X, d_X) et (Y, d_Y) sont des espaces métriques, une **isométrie** est une application bijective $f: X \rightarrow Y$ telle que pour tout $x, y \in X$ nous ayons

$$d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y). \quad (7.302)$$

Remarque 7.303.

Une application vérifiant (7.302) est automatiquement injective. En pratique, il ne faut donc vérifier que la surjectivité.

Exemple 7.304 (Manque de surjectivité).

Si $X = [0, \infty[$ et $f(x) = x + 1$ alors f vérifie (7.302) pour la distance $d(x, y) = |x - y|$, mais n'est pas surjective. $\triangle$

Proposition-Définition 7.305 (Groupe des isométries).

Si (X, d) est un espace métrique,

- (1) l'ensemble des isométries de X , noté $\text{Isom}(X)$ est un groupe pour la composition.
- (2) Ce groupe agit fidèlement ¹⁴³ sur X .

PropLYMgVMJ

Proposition 7.306.

Une isométrie entre deux espaces métriques est continue.

Démonstration. Soient $f: X \rightarrow Y$ une application isométrique et $\mathcal{O}$ un ouvert de Y . Soit $a \in f^{-1}(\mathcal{O})$; si $d(a, b) < r$, alors $d(f(a), f(b)) < r$ et donc $b \in f^{-1}(B(f(a), r))$. Donc autour de chaque point de $f^{-1}(\mathcal{O})$ nous pouvons trouver une boule ouverte contenue dans $f^{-1}(\mathcal{O})$, ce qui prouve que $f^{-1}(\mathcal{O})$ est ouvert. $\square$

142. Définition 7.63.

143. Si vous ne savez pas ce que c'est, alors vous avez zappé la définition 2.31.

Exemple 7.307.

Si X est un ensemble, nous pouvons écrire la **distance discrète** :

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases} \quad (7.303)$$

La topologie résultante est la topologie discrète, côtoyée dans l'exemple 7.10¹⁴⁴.

Pour cette métrique, le groupe des isométries est le groupe symétrique de X , c'est-à-dire le groupe de toutes les bijections de X sur lui-même. $\triangle$

7.14.0.1 Distance point-ensemble**Définition 7.308.**

Si A est une partie de l'espace métrique (X, d) et si $x \in X$, nous disons que la **distance** entre A et x est le nombre

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a). \quad (7.304)$$

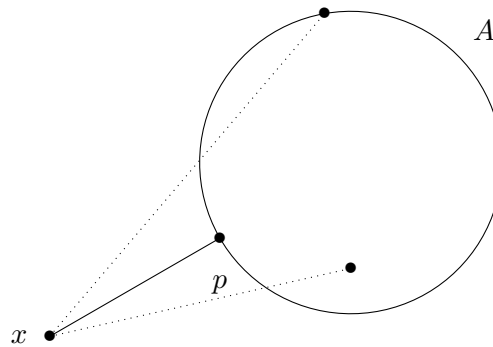


FIGURE 7.1: La distance entre x et A est donnée par la distance entre x et p . Les distances entre x et les autres points de A sont plus grandes que $d(x, p)$.

7.15 Suites de Cauchy, métrique et espaces complets**7.15.1 Généralités**

Définition 7.309 (Suite de τ -Cauchy, espace vectoriel topologique[259, 262]).

Soit E un espace vectoriel topologique. Une suite (x_k) dans E est une **suite τ -Cauchy** si pour tout voisinage $\mathcal{U}$ de 0 il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_k - x_l \in \mathcal{U}$ pour tout $k, l \geq N$.

Définition 7.310 (Espace τ -complet).

Nous disons qu'une partie A d'un espace vectoriel topologique est **τ -complet** si toute suite τ -Cauchy d'éléments de A converge¹⁴⁵ vers un élément de A .

Définition 7.311 (Suite de Cauchy, espace métrique).

Une suite (a_k) dans un espace métrique (V, d) est **de Cauchy** si pour tout $\epsilon > 0$ dans $\mathbb{R}$, il existe N tel que si $n, m \geq N$ alors $d(a_n, a_m) < \epsilon$.

Notons qu'ici, même si l'espace V n'a rien à voir avec $\mathbb{R}$, nous prenons ϵ dans $\mathbb{R}$ et la distance à valeurs dans $\mathbb{R}$. Cela semble une évidence, mais il faut se rendre compte que $\mathbb{R}$ commence à prendre une place centrale dans nos constructions. Ce n'était pas le cas du temps où nous parlions de suites de Cauchy et de complétude dans des corps totalement ordonnés (définitions 1.481). Dans ce contexte, le ϵ était pris dans le corps lui-même.

144. Vérifiez-le tout de même!

145. Définition 7.14.

DEFooHBAVooKmqrL

Définition 7.312 (Métrique complète).

Soit (E, d) un espace métrique. Nous disons que la métrique d est **complète** si toute suite de Cauchy dans (E, d) converge dans E .

7.313.

Ces définitions méritent quelques remarques.

- (1) Dans le cas des espaces vectoriels topologiques, nous définissons les notions de suite τ -Cauchy et d'espace topologique τ -complet. Nous ajoutons le préfixe τ pour indiquer que ce sont des notions topologiques.
- (2) Dans le cas des espaces métriques, nous définissons la notion de *métrique* complète. C'est bien la métrique qui est complète, et non l'espace. En effet nous allons voir dans l'exemple 7.316 que le même espace topologique peut accepter plusieurs distances différentes (donnant la même topologie) donnant lieu à des suites de Cauchy différentes.
- (3) Si un espace vectoriel a une topologie issue d'une distance, rien ne dit que ses suites τ -Cauchy et ses suites de Cauchy sont les mêmes. Ce sont deux notions à priori séparées. Si V est un espace vectoriel topologique que l'on peut munir de deux distances d_1, d_2 donnant toutes deux la topologie, dire que V est τ -complet, dire que d_1 est complète et dire que d_2 est complète sont trois choses différentes. Même si les trois topologies sont identiques.
- (4) Nous allons bien entendu voir que dans de larges gammes d'exemples, les notions de suite de Cauchy et τ -Cauchy coïncident.

PROPooTGCKooRsmoLx

Proposition 7.314 ([1]).

Tout compact d'un espace métrique est complet.

7.15.2 Espace de Banach

DefVKuyYpQ

Définition 7.315 (espace de Banach, algèbre de Banach[278]).

Un **espace de Banach** est un espace vectoriel normé complet¹⁴⁶ pour la topologie de la norme.

Une **algèbre de Banach** est une algèbre commutative et associative qui est un espace vectoriel normé complet.

EXooNMNVooXyJSDm

Exemple 7.316 (La complétude n'est pas une propriété topologique[279]).

Le fait pour un espace d'être complet n'est pas une propriété topologique, mais une propriété métrique. Plus exactement, il existe des espaces topologiques isomorphes, mais dont l'un est complet et l'autre non.

Nous considérons la distance suivante sur $\mathbb{N}$:

$$d_1(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|. \quad (7.305)$$

Pour vérifier que cette formule définit bien une distance (définition 7.139), le seul point non immédiat est l'inégalité triangulaire :

$$d_1(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \leq \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{z} \right| + \left| \frac{1}{z} - \frac{1}{y} \right| = d_1(x, z) + d_1(z, y). \quad (7.306)$$

Au niveau de la topologie induite par cette distance, c'est la topologie discrète. En effet, soit $x \in \mathbb{N}$ et $\epsilon > 0$; nous voulons déterminer la boule $B(x, \epsilon)$ en résolvant l'équation

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| < \epsilon \quad (7.307)$$

146. Définition 7.312.

pour $y \in \mathbb{N}$. Nous trouvons que $\frac{1}{y} > \frac{1}{x} - \epsilon$ et $\frac{1}{y} < \frac{1}{x} + \epsilon$, soit

$$\left\{ \begin{array}{l} y > \frac{1}{\frac{1}{x} + \epsilon} \\ y < \frac{1}{\frac{1}{x} - \epsilon} \end{array} \right. \quad (7.308a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y > \frac{1}{\frac{1}{x} + \epsilon} \\ y < \frac{1}{\frac{1}{x} - \epsilon} \end{array} \right. \quad (7.308b)$$

Si ϵ est assez petit, la seule solution entière est $y = x$. Les ouverts sont donc toutes les parties parce que tous les singletons sont ouverts.

L'espace topologique associé à $(\mathbb{N}, d_1)$ est donc la topologie discrète¹⁴⁷.

Si nous considérons par contre la distance usuelle sur $\mathbb{N}$, à savoir $d(x, y) = |x - y|$, nous obtenons encore la topologie discrète. Nous avons donc un isomorphisme d'espaces topologiques

$$(\mathbb{N}, d) \simeq (\mathbb{N}, d_1). \quad (7.309)$$

Nous pouvons même donner un isomorphisme explicite : $f(n) = n$.

La suite $(x_n) = n$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbb{N}, d_1)$ parce que si $\epsilon > 0$ est donné, il suffit de prendre N assez grand pour avoir $\frac{1}{N} < \epsilon$ (possible par le lemme 1.544) nous avons, pour $n, m > N$:

$$\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon. \quad (7.310)$$

Or cette suite ne converge pas. Soit en effet un candidat limite k . Calculons

$$d_1(x_n, k) = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{k} \right| \rightarrow \frac{1}{k} \neq 0. \quad (7.311)$$

L'espace $(\mathbb{N}, d_1)$ n'est pas complet.

Notons que cette suite n'est pas de Cauchy dans $(\mathbb{N}, d)$.

En résumé :

- (1) Les espaces topologiques $(\mathbb{N}, d)$ et $(\mathbb{N}, d_1)$ sont isomorphes.
- (2) Ils ont les mêmes notions de suites convergentes : une suite convergente pour l'un est convergente pour l'autre.
- (3) Ils n'ont pas les mêmes notions de suites de Cauchy.
- (4) Dans $(\mathbb{N}, d_1)$, il existe des suites de Cauchy qui ne convergent pas (pas complet).
- (5) L'espace $(\mathbb{N}, d)$ est complet, mais $(\mathbb{N}, d_1)$ n'est pas complet.
- (6) Le fait pour un espace topologique métrique d'être complet n'est pas intrinsèque à sa topologie : la complétude est une propriété de la distance. La complétude est une propriété de la métrique, et non de la topologie qui s'en suit.

△

LemCAIPooPMNbXg

Lemme 7.317.

Si E et F sont des espaces de Banach¹⁴⁸, l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ est également de Banach.

Démonstration. Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$; si $x \in E$ il existe N tel que si $l, m > N$ alors $\|u_l - u_m\| < \epsilon$, c'est-à-dire que pour tout $\|x\| = 1$ on a $\|u_l(x) - u_m(x)\| < \epsilon$. Cela signifie que $u_n(x)$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet F . Cette suite converge et nous pouvons définir l'application $u : E \rightarrow F$ par

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x). \quad (7.312)$$

Il suffit maintenant de prouver que u est linéaire, ce qui est une conséquence directe de la linéarité de la limite :

$$u(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha u_n(x) + \beta u_n(y)). \quad (7.313)$$

□

147. Celle dont toutes les parties sont des ouverts.

148. Je crois qu'il ne faut pas que E soit complet.

PROPooUNVAooRDxkyI

Proposition 7.318.

Tout sous-espace fermé d'un espace de Banach est de Banach pour la norme induite.

PROPooOVGGooNfWJW

Proposition 7.319 ([280]).

Le dual¹⁴⁹ d'un espace de Banach¹⁵⁰ est de Banach.

PROPooAPVCooFyMigL

Proposition 7.320 ([1]).

Soit un espace de Banach E . Soient $v_k \in E$. Si $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ converge, alors $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est borné.

7.15.3 Espace topologique métrique

Dans les espaces vectoriels topologiques métriques, il n'y a pas d'ambiguïté.

PropooUEEOooLeHmr

Proposition 7.321 (Caractérisations avec la distance d).

Soit (E, d) un espace vectoriel topologique métrique.

ItemooROYMooAQCXnj

- (1) Une suite (x_n) dans E est convergente¹⁵¹ vers x si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ il existe N_ϵ tel que pour tout $n \geq N_\epsilon$ nous avons $d(x_n, x) \leq \epsilon$.
- (2) Une suite (x_n) dans E est de Cauchy¹⁵² si pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}$, il existe un N_ϵ tel que si $p, q \geq N_\epsilon$, nous avons $d(x_p, x_q) \leq \epsilon$.

Démonstration. En ce qui concerne la convergence :

(1) **Sens direct**

Nous supposons que $x_k \rightarrow x$ dans E . Soit $\epsilon > 0$; vu que $B(x, \epsilon)$ est un ouvert contenant x , il existe un $N_\epsilon > 0$ tel que $k > N_\epsilon$ implique $x_k \in B(x, \epsilon)$. Cela signifie $d(x, x_k) \leq \epsilon$.

(2) **Réciproque**

Nous supposons que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N_\epsilon > 0$ tel que si $k > N_\epsilon$ alors $x_k \in B(x, \epsilon)$. Soit un ouvert $\mathcal{O}$ autour de x . Nous sommes dans un espace métrique ; ergo la topologie est donnée par le théorème 7.142 et en particulier la liste des ouverts est donnée par (7.125). Il existe donc une boule $B(x, \epsilon)$ incluse à $\mathcal{O}$. Pour tout $k > N_\epsilon$ nous avons alors $x_k \in B(x, \epsilon) \subset \mathcal{O}$.

En ce qui concerne les suites de Cauchy :

- (1) **Sens direct** Si (x_n) est une suite de Cauchy et si $\epsilon > 0$ est donné, alors $B(0, \epsilon)$ est un voisinage de 0 et il existe N_ϵ tel que si $p, q \geq N_\epsilon$ alors $x_p - x_q \in B(0, \epsilon)$. Posons $u = x_p - x_q$; en utilisant l'invariance par translation (lemme 7.217(1)) nous avons

$$d(u, 0) = d(x_p - x_q, 0) = d(x_p, x_q). \quad (7.314)$$

Par conséquent $d(x_p, x_q) \leq \epsilon$.

- (2) **Réciproque** Soit $\mathcal{O}$ un voisinage de 0. Il existe ϵ tel que $B(0, \epsilon) \subset \mathcal{O}$. Par hypothèse il existe N_ϵ tel que $d(x_p, x_q) \leq \epsilon$ dès que $p, q \geq N_\epsilon$. En utilisant encore l'invariance par translation nous avons

$$d(x_p, x_q) = d(x_p - x_q, 0), \quad (7.315)$$

et comme cela est plus petit que ϵ , nous avons $x_p - x_q \in B(0, \epsilon) \subset \mathcal{O}$.

□

PROPooZZNWooHghltd

Proposition 7.322 ([281]).

Toute suite convergente dans un espace métrique est de Cauchy.

149. Définition 4.135.

150. Définition 7.315.

151. Définition 7.14.

152. Définition 7.309.

Démonstration. Nous utilisons les caractérisations de la proposition 7.321 des suites convergentes et de Cauchy.

Soit un espace métrique (X, d) et $x_n \rightarrow \ell$ une suite convergente. Si $\epsilon > 0$, la proposition 7.321(1), dit qu'il existe N tel que pour tout $n > N$ nous ayons $d(x_n, \ell) < \epsilon$. Par conséquent si $n, m > N$ alors

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, \ell) + d(\ell, x_m) \leq 2\epsilon. \quad (7.316)$$

Cela prouve que (x_n) est une suite de Cauchy. $\square$

7.15.4 Compacts, fermés

PROPooRMAOooZigXwy

Proposition 7.323 (Séparation [262, 282]).

Soit V , un espace vectoriel topologique. Soient des parties K et F de V telles que :

- (1) K est compact,
- (2) F est fermé,
- (3) $K \cap F = \emptyset$.

Alors il existe un voisinage U de 0 tel que

$$(K + U) \cap (F + U) = \emptyset. \quad (7.317)$$

Autrement dit, la topologie d'un espace vectoriel topologique sépare les fermés des compacts.

Démonstration. Soit un élément $x \in K$. La partie F^c est un ouvert qui contient x ; donc $F^c - x$ est un voisinage ouvert de 0.

- (1) Quelque chose sans intersection avec F Par la proposition 7.246, il existe un ouvert symétrique U_x autour de 0 tel que

$$U_x + U_x + U_x + U_x \subset F^c - x. \quad (7.318)$$

En enlevant un des éléments de la somme, nous gardons la même inclusion :

$$U_x + U_x + U_x \subset F^c - x. \quad (7.319)$$

Et en passant le x de l'autre côté :

$$x + U_x + U_x + U_x \subset F^c. \quad (7.320)$$

Cela pour dire que nous avons, pour chaque $x \in K$ un voisinage ouvert U_x de 0 tel que

$$(x + U_x + U_x + U_x) \cap F = \emptyset. \quad (7.321)$$

EQooPXUVooVvUEoN

- (2) $(x + U_x + U_x) \cap (U_x + F) = \emptyset$ Supposons $z \in (x + U_x + U_x) \cap (U_x + F)$, et déduisons une contradiction. En particulier $z \in U_x + F$ et donc il existe $u \in U_x$, $f \in F$ tel que $z = u + f$. Nous avons alors (nous utilisons le fait que U_x soit symétrique)

$$f = z - u \in z + U_x \quad (7.322)$$

Mais z est aussi dans $x + U_x + U_x$. Donc

$$f \in z + U_x \subset x + U_x + U_x + U_x. \quad (7.323)$$

Cela prouve que $x + U_x + U_x + U_x \cap F \neq \emptyset$, en contradiction avec (7.321). Nous en concluons que

$$(x + U_x + U_x) \cap (U_x + F) = \emptyset. \quad (7.324)$$

EQooNLCRooWTEoys

- (3) **Un sous-recouvrement fini** Fini de rigoler. Si nous avons un compact dans les hypothèses, il fallait que ça arrive. Pour chaque $x \in K$ nous avons un voisinage ouvert U_x de 0 et donc un voisinage ouvert $x + U_x$ de x . Du coup $\{U_x + x\}_{x \in K}$ forme un recouvrement de K par des ouverts. Et hop, sous-recouvrement fini (c'est la définition 7.109 d'un compact) : nous avons $\{x_i\}_{i=1, \dots, n}$ tels que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + U_{x_i}). \quad (7.325)$$

Nous posons $U = \bigcap_{i=1}^n U_{x_i}$. Même si c'est évident, remarquez que U est un ouvert autour de 0 et que U est plus petit que chacun des U_{x_i} . Récrivons (7.324) pour chacun des x_i :

$$(x + U_{x_i} + U_{x_i}) \cap (F + U_{x_i}) = \emptyset. \quad (7.326)$$

Lorsqu'on enlève des éléments dans une intersection vide, l'intersection reste vide. Donc en remplaçant des U_{x_i} par des U dans (7.326), nous conservons une intersection vide :

$$(x + U_{x_i} + U) \cap (F + U) = \emptyset. \quad (7.327)$$

- (4) **Conclusion** Aucun ensemble de la forme $x + U_{x_i} + U$ n'intersecte $F + U$. L'union ne l'intersecte pas non plus :

$$\bigcup_{i=1}^n (x + U_{x_i}) + U \cap (F + U) = \emptyset. \quad (7.328)$$

Et donc

$$(K + U) \cap (F + U) = \emptyset, \quad (7.329)$$

comme nous le voulions. □

Définition 7.324.

Une distance d sur un espace vectoriel topologique V est dite **compatible** avec la topologie si la topologie induite¹⁵³ de d est celle de V .

Définition 7.325.

Une distance d sur un espace vectoriel V est dite **invariante** si pour tout $x, y, a \in V$ nous avons

$$d(x + a, y + a) = d(x, y). \quad (7.330)$$

Notons que lorsque nous parlons d'une distance compatible avec un espace vectoriel topologique, nous parlons de compatibilité avec la topologie, pas avec la structure vectorielle.

Lemme 7.326 ([1]).

Soit un espace vectoriel muni d'une distance invariante. Alors

$$B(a, r) + x = B(a + x, r). \quad (7.331)$$

Démonstration. Un élément de $B(a, r) + x$ est de la forme $y + x$ avec $d(a, y) < r$. Nous avons alors $d(y + x, a + x) = d(y, a) < r$, de telle sorte que $y + x \in B(a + x, r)$.

Dans le sens inverse, si $y \in V$ vérifie $d(a + x, y) < r$, alors je prétend que $y - x \in B(a, r)$. En effet $d(y - x, a) = d(y - x + x, a + x) = d(y, a + x) < r$. □

Une version plus complète du lemme suivant sera dans la proposition 10.168 et ce qui suit.

153. Définition 7.142.

LEMooIQBXooUEtdoy

Lemme 7.327.

Nous introduisons l'ensemble $\mathbb{D}_2$ des suites finies¹⁵⁴ $\mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \{0, 1\}$ ¹⁵⁵. Nous notons

$$l(x) = \max\{i \in \mathbb{N} \text{ tel que } x_i \neq 0\}. \quad (7.332)$$

L'application

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{D}_2 &\rightarrow [0, 1[\\ x &\mapsto \sum_{i=1}^{l(x)} \frac{x_i}{2^i}. \end{aligned} \quad (7.333)$$

est injective.

Démonstration. Le lemme 1.598 donne la somme partielle de la série géométrique. Dans notre cas, $q = 1/2$. Si $x \in D_n$, alors en majorant chacun des c_i par 1,

$$x \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1/2} - 1 = 1 - (1/2)^{n+1} < 1. \quad (7.334)$$

Donc c'est bon pour dire que φ prend ses valeurs dans $[0, 1[$.

Il reste à voir l'injectivité. Nous supposons que $\varphi(x) = \varphi(y)$. Quitte à allonger x ou y par des zéros, nous supposons qu'elles ont même longueur N . Enfin nous définissons n_0 le plus petit indice pour lequel $x_i \neq y_i$. Nous avons :

$$0 = \frac{1}{2^{n_0}} + \sum_{i=n_0+1}^N \frac{x_i - y_i}{2^i}. \quad (7.335) \quad \text{EQooEUKNoVgHEC}$$

Le deuxième terme est majoré de la façon suivante :

$$\left| \sum_{i=n_0+1}^N \frac{x_i - y_i}{2^i} \right| \leq \sum_{i=n_0+1}^N \frac{|x_i - y_i|}{2^i} \quad (7.336a)$$

$$\leq \sum_{i=n_0+1}^N \frac{1}{2^i} \quad (7.336b)$$

$$= \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2}\right)^i - \sum_{i=1}^{n_0} \left(\frac{1}{2}\right)^i \quad (7.336c)$$

$$= \frac{1 - (1/2)^{N+1}}{1/2} - \frac{1 - (1/2)^{n_0+1}}{1/2} \quad (7.336d)$$

$$= \frac{1}{2^{n_0}} - \frac{1}{2^N} \quad (7.336e)$$

$$< \frac{1}{2^{n_0}}. \quad (7.336f)$$

L'égalité (7.335) n'est donc pas possible. Nous déduisons que n_0 n'existe en fait pas et que $x = y$. D'où l'injectivité de φ . $\square$

Pour faire les sommes dans $\mathbb{D}_2$, nous introduisons $\mathbb{D}'_2$, l'ensemble des suites finies $\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ et

$$\begin{aligned} \varphi': \mathbb{D}'_2 &\rightarrow [0, 2[\\ x &\mapsto \sum_{i=0}^l (x)_i \frac{x_i}{2^i}. \end{aligned} \quad (7.337)$$

154. Les suites donc nous parlons sont indexées en commençant à 1, et non à 0. C'est une précision importante.

155. C'est en gros ce qui se fera dans 10.166 pour les développements de nombres dans une base donnée, sauf qu'ici nous n'avons pas besoin de subtilités sur les queues de suites.

DEFooRJSFooDvbkrx

Définition 7.328 ([1]).

Si $x, y \in \mathbb{D}_2$, nous définissons $z, r \in \mathbb{D}'_2$ par récurrence (à l'envers) de la façon suivantes¹⁵⁶. D'abord, quitte à ajouter des zéros, nous supposons que x et y aient la même longueur l .

D'abord posons $r_l = 0$.

Ensuite, pour tout k nous considérons les trois cas possibles.

Si $x_k + y_k + r_k$ **vaut 0 ou 1** Dans ce cas nous posons

- $z_k = x_k + y_k + r_k$
- $r_{k-1} = 0$

Si $x_k + y_k + r_k = 2$ Nous posons

- $z_k = 0$
- $r_{k-1} = 1$

Si $x_k + y_k + r_k = 3$ Nous posons

- $z_k = 1$
- $r_{k-1} = 1$.

Et enfin nous posons $z_0 = r_0$.

LEMooIUDHooNDIVtg

Lemme 7.329 ([1]).

Si $r_k = 1$, alors $z_k \neq x_k + y_k$.

Démonstration. Il y a seulement quelques cas à traiter.

x_k	y_k	r_k	z_k
0	0	1	$z_k = 1 \neq x_k + y_k$
0	1	1	$z_k = 0 \neq x_k + y_k$
1	0	1	$z_k = 0 \neq x_k + y_k$
1	1	1	$z_k = 1 \neq x_k + y_k$

□

PROPooGHPZooEwXqMH

Proposition 7.330 ([1]).

Soient $x, y \in \mathbb{D}_2$ ainsi que z défini par 7.328. Nous avons

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi'(z). \quad (7.338)$$

Démonstration. Nous supposons que x et y sont de longueur l , et nous faisons une récurrence à l'envers. D'abord

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \sum_{i=1}^l \frac{x_i + y_i}{2^i} = \sum_{i=1}^{l-2} \frac{x_i + y_i}{2^i} + \frac{x_{l-1} + y_{l-1}}{2^{l-1}} + \frac{x_l + y_l}{2^l}. \quad (7.339)$$

Il y a deux possibilités. Si $x_l + y_l$ vaut 0 ou 1, alors $r_{l-1} = 0$ et $z_l = x_l + y_l$, de telle sorte que

$$\frac{x_{l-1} + y_{l-1}}{2^{l-1}} + \frac{x_l + y_l}{2^l} = \frac{x_{l-1} + y_{l-1} + r_{l-1}}{2^{l-1}} + \frac{z_l}{2^l}. \quad (7.340)$$

Si $x_l + y_l = 2$, alors $r_{l-1} = 1$ et $z_l = 0$ de telle sorte que

$$\frac{x_{l-1} + y_{l-1}}{2^{l-1}} + \frac{x_l + y_l}{2^l} = \frac{x_{l-1} + y_{l-1}}{2^{l-1}} + \frac{2}{2^l} \quad (7.341a)$$

$$= \frac{x_{l-1} + y_{l-1} + 1}{2^{l-1}} + \frac{z_l}{2^l} \quad (7.341b)$$

$$= \frac{x_{l-1} + y_{l-1} + r_{l-1}}{2^{l-1}} + \frac{z_l}{2^l}. \quad (7.341c)$$

En ce qui concerne la récurrence, il faut faire les trois cas pour montrer que dans tous les cas,

$$\frac{x_k + y_k}{2^k} + \frac{x_{k+1} + y_{k+1} + r_{k+1}}{2^{k+1}} = \frac{x_k + y_k + r_k}{2^k} + \frac{z_{k+1}}{2^{k+1}}. \quad (7.342)$$

□

156. z va être la somme en binaire et r va être la suite des reports.

LEMooEAIBooMxCDFH

Lemme 7.331 ([1]).

Soit $z \in \mathbb{D}'_2$. Nous avons $\varphi'(z) < 1$ si et seulement si $z_0 = 0$.

Démonstration. D'une part, si $z_0 = 0$, alors

$$\varphi'(z) = \varphi'(0, z_1, \dots, z_l) = \varphi(z_1, \dots, z_l) \in [0, 1[. \quad (7.343)$$

D'autre part, si $z_0 \neq 0$, c'est que $z_0 = 1$. Et dans ce cas, nous avons

$$\varphi'(z) = z_0 + \sum_{i=1}^l (z_i) \frac{z_i}{2^i} \geq z_0 = 1. \quad (7.344)$$

Cela prouve que si $z_0 \neq 0$, alors $\varphi'(z) \geq 1$. □

Toujours avec l'injection φ du lemme 7.327 nous avons ceci.

LEMooVDPWooWLQzbF

Lemme 7.332 ([1]).

Soient $s, t \in \varphi(\mathbb{D}_2)$ tels que $s + t < 1$. Alors $s + t \in \varphi(\mathbb{D}_2)$.

Démonstration. Nous considérons $x, y \in \mathbb{D}_2$ tels que $s = \varphi(x)$ et $t = \varphi(y)$. En considérant $z \in \mathbb{D}'_2$ et r comme avant, la proposition 7.330 donne $\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi'(z)$. En particulier $\varphi'(z) < 1$. Le lemme 7.331 dit alors que $z_0 = 0$. En posant $z' = (z_1, \dots, z_l)$, nous avons

$$\varphi(z') = \varphi'(z) = \varphi(x) + \varphi(y). \quad (7.345)$$

Et donc z' est l'élément de $\mathbb{D}_2$ que nous cherchions : $s + t = \varphi(z')$. □

LEMooQYILooMimKHS

Lemme 7.333.

Soient $s, t \in \varphi(\mathbb{D}_2)$ tels que $s + t < 1$. Nous posons $x = \varphi^{-1}(s)$, $y = \varphi^{-1}(t)$ et $z = \varphi^{-1}(s + t)$. Si k est le plus petit entier tel que $z_k \neq x_k + y_k$, alors $x_k = y_k = 0$ et $z_k = 1$.

Démonstration. Il suffit de traiter les 8 cas possible de x_k, y_k et r_k et voir ceux qui vont. Voici le tableau à remplir :

x_k	y_k	r_k	z_k	r_{k-1}
0	0	1		
0	1	1		
1	0	1		
1	1	1		
0	0	0		
0	1	0		
1	0	0		
1	1	0		

Et voici le tableau rempli :

x_k	y_k	r_k	z_k	r_{k-1}
0	0	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
1	1	1	0	1
0	0	0	1	0
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

Par le lemme 7.329, nous voulons une ligne qui satisfait $z_k \neq x_k + y_k$ et $r_{k-1} = 0$. Cherchez un peu et vous verrez qu'il y a une seule ligne, et c'est celle qui donne $x_k = y_k = 0$, $r_k = 1$, $z_k = 1$ et $r_{k-1} = 0$. □

THOooAGBXooZnvQLK

Théorème 7.334 (Espace topologique métrisable[262, 1]).

Si V est un espace vectoriel topologique. Nous supposons :

- (1) Tout point admet une base dénombrable de topologie¹⁵⁷.
- (2) Le singleton $\{0\}$ est fermé¹⁵⁸.

Alors il existe une distance d sur V telle que

- (1) d est compatible avec la topologie de V ,
- (2) d est invariante par translation.

Démonstration. Vu que V admet une base dénombrable de topologie, nous en considérons une autour de 0 dans V : $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

- (1) **Nouvelle base de topologie** Nous construisons une nouvelle base de topologie $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ autour de 0 de la façon suivante. La proposition 7.246 donne un ouvert symétrique équilibré dans A_0 . Nous le nommons U_0 :

$$U_0 \subset A_0. \quad (7.346)$$

Pour les suivants, U_{k+1} est un ouvert symétrique équilibré dans $U_k \cap A_k$ vérifiant

$$U_{k+1} + U_{k+1} + U_{k+1} + U_{k+1} \subset A_k \cap U_k. \quad \text{EqooECMVooLIIIhu} \quad (7.347)$$

Le fait est que $A_k \cap U_k$ est un ouvert autour de 0 ; donc la proposition 7.246 permet de construire un ouvert symétrique et équilibré U_{k+1} autour de 0 ayant la propriété demandée.

- (2) **C'est bien une base** Notons d'abord que $U_k \subset A_k$. Si $\mathcal{O}$ est un ouvert autour de 0, il existe k tel que $A_k \subset \mathcal{O}$: c'est la définition 7.2 d'une base de topologie. Nous avons donc $U_k \subset A_k \subset \mathcal{O}$, et les $\{U_k\}$ forment une base dénombrable de la topologie autour de 0.
- (3) **Quelques inclusions** Notons au passage quelques inclusions. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons

$$U_{n+1} + U_{n+1} + U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n. \quad \text{EqBaseTopoMetricPfi} \quad (7.348)$$

À fortiori nous avons

$$U_{n+1} \subset U_n \quad \text{EqooARBRooOIAVhH} \quad (7.349)$$

et pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, nous obtenons alors

$$U_{n+1} + U_{n+2} + \cdots + U_{n+(k-1)} + U_{n+k} \subset U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n. \quad \text{EqBaseTopoMetricPf2} \quad (7.350)$$

- (4) **L'ensemble D** Nous considérons l'ensemble $\mathbb{D}_2$ et l'application φ du lemme 7.327. Nous notons $D = \varphi(\mathbb{D}_2) \subset [0, 1[$. L'application $\varphi: \mathbb{D}_2 \rightarrow D$ est injective, et nous pouvons donc parler de $\varphi^{-1}(r)$ pour tout $r \in D$.

- (5) **La fonction ϕ**

Nous définissons maintenant une fonction à valeurs dans la topologie τ_V de V :

$$\begin{aligned} \phi: D \cup [1, +\infty[&\rightarrow \tau_V \\ r &\mapsto \begin{cases} V & \text{si } r \geq 1; \\ \sum_i \varphi^{-1}(r)_i U_i & \text{si } r \in D. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.351)$$

La dernière somme est toujours une somme finie et est un ouvert parce que la multiplication par un scalaire et l'addition sont des ouverts.

Notez aussi que plus r est petit, plus ce sont les grands i qui tendront à avoir $\varphi^{-1}(r) \neq 0$. En effet, pour $r = 1/8$, nous avons $\varphi^{-1}(1/8) = (0, 0, 0, 1)$, et plus généralement pour $r < 1/2^N$, les N premiers termes de $\varphi^{-1}(r)$ seront nuls.

Quelques remarques sur cette fonction.

157. Définition 7.2.

158. Attention : dans [262], cela fait partie de la définition d'un espace vectoriel topologique et n'est donc pas listé dans les hypothèses de ce théorème.

(5a) Une égalité facile Si je ne me trompe pas d'un **off-by-one**, nous avons

$$\phi(1/2^N) = U_N. \quad (7.352)$$

(5b) $0 \in \phi(r)$ pour tout r En effet, $\phi(r)$ n'est jamais vide, c'est toujours un voisinage de 0.

(5c) $\phi(r) + \phi(s) \subset \phi(r+s)$ Si $r+s \geq 1$, c'est clair. Sinon, nous posons $u = \varphi^{-1}(r)$, $v = \varphi^{-1}(s)$ et $w = \varphi^{-1}(r+s)$. Dans la suite, nous prolongeons u et v pour qu'elles aient le même nombre d'éléments que nous notons N .

Deux cas se produisent : soit $w_i = u_i + v_i$ pour tout i soit non.

(5c.i) Premier cas Si $w_i = u_i + v_i$ pour tout i , alors en particulier les u_i et v_i ne peuvent pas être 1 en même temps et nous pouvons séparer clairement les termes de la somme :

$$\phi(r+s) = \sum_i w_i U_i = \sum_i u_i U_i + \sum_i v_i U_i = \phi(r) + \phi(s); \quad (7.353)$$

(5c.ii) Second cas Sinon, posons k le plus petit entier tel que $w_k \neq u_k + v_k$. Alors le lemme 7.333 dit que $u_k = v_k = 0$ et $w_k = 1$. Nous avons d'abord

$$\phi(r) = \sum_{i=1}^{k-1} u_i U_i + \sum_{i=k+1}^n u_i U_i \subset \sum_{i=1}^{k-1} u_i U_i + U_{k+1} + U_{k+1} \quad (7.354)$$

où nous avons utilisé (7.349) pour tous les derniers termes. De même nous avons :

$$\phi(s) = \sum_{i=1}^{k-1} v_i U_i + \sum_{i=k+1}^n v_i U_i \subset \sum_{i=1}^{k-1} v_i U_i + U_{k+1} + U_{k+1}. \quad (7.355)$$

En combinant, et en utilisant (7.348),

$$\phi(r) + \phi(s) = \sum_{i=1}^{k-1} u_i U_i + \sum_{i=1}^{k-1} v_i U_i + \underbrace{U_{k+1} + U_{k+1} + U_{k+1} + U_{k+1}}_{\subset U_k} \quad (7.356a)$$

$$\subset \sum_{i=1}^{k-1} w_i U_i + U_k \quad (7.356b)$$

$$= \sum_{i=1}^k w_i U_i \quad (7.356c)$$

$$\subset \phi(r+s). \quad (7.356d)$$

Pour (7.356c) nous avons utilisé le fait que $w_k = 1$. Au final nous avons bien $\phi(r) + \phi(s) \subset \phi(r+s)$.

(5d) ϕ est croissante Dans notre contexte « croissante » signifie que si $r < s$ alors $\phi(r) \subset \phi(s)$. Il suffit d'écrire

$$\phi(r) \subset \phi(r) + \phi(s-r) \subset \phi(s). \quad (7.357)$$

(6) Définition de la distance (enfin !) Nous définissons l'application

$$\begin{aligned} f: V &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \inf\{r \text{ tel que } x \in \phi(r)\}, \end{aligned} \quad (7.358)$$

et ensuite ce qui va être notre distance :

$$d(x, y) = f(y - x). \quad (7.359)$$

Notons que cet infimum est un réel, et qu'il n'est pas spécialement dans $\varphi(\mathbb{D}_2)$. Nous devons prouver que ce d est une distance invariante par translation et compatible avec la topologie.

- (7) **d est invariante par translation** Il s'agit seulement d'écrire $d(x+a, y+a)$ et de remarquer que $(y+a) - (x+a) = y-x$.

$d(x, x) = 0$ Oui, car 0 est dans $\phi(r)$, pour tout r , puisque les U_i sont des voisinages de 0.

- (8) **$d(x, y) = 0$ implique $x = y$** Nous montrons que $f(x) \neq 0$ dès que $x \neq 0$. Rappeliez-vous que nous avons posé l'hypothèse que $\{0\}$ est un fermé dans V . Vu que $\{x\}$ est un compact ¹⁵⁹, la proposition 7.323 nous indique qu'il existe un voisinage A de 0 qui ne contient pas x . Vu que les $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ forment une base de la topologie autour de 0, il existe un n_0 tel que $x \notin U_{n_0}$. Et comme $U_{k+1} \subset U_k$ nous avons

$$x \notin U_k \quad (7.360)$$

pour tout $k \geq n_0$. Nous savons aussi que ϕ est croissante et que $\phi(1/2^N) = U_N$. Donc pour tout $\epsilon < \frac{1}{2^k}$, nous avons

$$\phi(\epsilon) \subset U_k \quad (7.361)$$

et donc $x \notin \phi(\epsilon)$. Donc

$$f(x) \geq \frac{1}{2^k} > 0 \quad (7.362)$$

la dernière inégalité est stricte et c'est important.

En ce qui concerne la distance, si $d(x, y) = 0$, alors $f(y-x) = 0$. Cela signifie que $y-x = 0$ et donc que $x = y$. Ok.

- (9) **$d(x, y) = d(y, x)$** Oui, car tous les voisinages considérés sont symétriques. Donc $x-y \in \phi(r)$ si et seulement si $y-x \in \phi(r)$.
- (10) **$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$** Nous supposons que x, y et z sont trois points distincts, de telle sorte que les trois distances soient strictement positives. Soit $\epsilon > 0$. Par définition des distances comme infimums, et grâce au corolaire 1.549, il existe r et s dans $\varphi(\mathbb{D}_2)$ tels que :

$$d(x, y) < r < d(x, y) + \frac{\epsilon}{2} \quad \text{et} \quad d(y, z) < s < d(y, z) + \frac{\epsilon}{2}. \quad (7.363)$$

En sommant :

$$d(x, y) + d(y, z) < r + s < d(x, y) + d(y, z) + \epsilon. \quad (7.364)$$

Vu que ϕ est croissante, on a $y-x \in \phi(r)$ et $z-y \in \phi(s)$; donc

$$z-x = (y-x) + (z-y) \in \phi(r) + \phi(s) \subset \phi(r+s) \quad (7.365)$$

Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$d(x, z) \leq r + s < d(x, y) + d(y, z) + \epsilon. \quad (7.366)$$

- (11) **Compatibilité avec la topologie** Nous devons montrer que les d -ouverts sont les mêmes que les ouverts de la topologie de V . Nous allons utiliser la proposition 7.2.

- (11a) **Les ouverts sont des d -ouverts** Soit un ouvert $\mathcal{O}$ contenant $x \in V$. Alors $\mathcal{O} - x$ est un ouvert contenant 0, et il existe un n tel que

$$U_n \subset \mathcal{O} - x. \quad (7.367)$$

Nous avons alors

$$B(0, \frac{1}{2^n}) \subset U_n \subset \mathcal{O} - x. \quad (7.368)$$

Nous utilisant le lemme 7.326 pour additionner x dans toutes les inclusions :

$$B(x, \frac{1}{2^n}) = B(0, \frac{1}{2^n}) + x \subset \mathcal{O}. \quad (7.369)$$

Les boules forment donc une base de la topologie de V . Donc tous les ouverts de V sont des unions de boules et sont donc des d -ouverts.

159. Les singletons sont toujours des compacts dans les espaces topologiques.

(11b) **Les d -ouverts sont des ouverts**

Considérons une boule $B(0, r)$. Il existe un n tel que $B(0, 1/2^n) \subset B(0, r)$ et donc tel que

$$U_n \subset B(0, r). \quad (7.370)$$

En procédant par translations et tout ça, on en déduit que les $\{U_n + x\}_{n \in \mathbb{N}, x \in V}$ forment une base de la d -topologie. Donc les d -ouverts sont des ouverts.

□

7.15.5 Équivalence entre Cauchy et τ -Cauchy

LEMooIAHSooFkXjvr

Lemme 7.335.

Soit un espace vectoriel topologique¹⁶⁰ V et une distance $d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}^+$ compatible¹⁶¹ avec la topologie de V . Si d est invariante¹⁶², alors les suites de Cauchy pour d et les suites τ -Cauchy sont les mêmes.

Démonstration. Nous avons deux implications à prouver.

- (1) **Cauchy pour d implique τ -Cauchy** Soit (x_n) , une suite de Cauchy dans V pour d , et un voisinage U de 0. Vu que d est compatible avec la topologie de V , il existe une boule ouverte $B(0, \epsilon)$ incluse à U . Soit $N > 0$ tel que $m, n > N$ implique $d(x_n, x_m) < \epsilon$. Par invariance de la métrique, nous avons aussi

$$d(0, x_m - x_n) < \epsilon, \quad (7.371)$$

c'est-à-dire $x_m - x_n \in B(0, \epsilon) \subset U$. La suite (x_n) est donc τ -Cauchy.

- (2) **τ -Cauchy implique Cauchy pour d** Soit (x_n) , une suite τ -Cauchy dans V et $\epsilon > 0$. Vu que $B(0, \epsilon)$ est un voisinage de 0 dans V , il existe N tel que $m, n > N$ implique $x_n - x_m \in B(0, \epsilon)$. Cela signifie que $d(0, x_n - x_m) < \epsilon$ et toujours par invariance, que $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

□

Tout ceci nous mène à donner une large classe d'espaces vectoriels topologiques sur lesquelles les notions de suites de Cauchy pour une distance et τ -Cauchy coïncident.

THOooGQZSooAmQolf

Théorème-Définition 7.336.

Soit V un espace vectoriel topologique métrisable¹⁶³, alors il admet une métrique d compatible avec la topologie telle que une suite dans V est de Cauchy pour d si et seulement si elle est τ -Cauchy.

Une **suite de Cauchy** dans un espace vectoriel métrique (E, d) est une suite τ -Cauchy ou de Cauchy pour d .

Démonstration. Soit d une métrique sur V satisfaisant au théorème 7.334. Vu qu'elle est invariante par translation, les suites d -Cauchy sont exactement les suites τ -Cauchy par le lemme 7.335. □

REMooUFQYooUVCCjs

Remarque 7.337.

Même si V est métrisable, si on choisit la métrique n'importe comment, on ne peut rien espérer.

7.338.

Sur les espaces vectoriels topologiques métrisables, nous pouvons donc parler de suite de Cauchy sans préciser si nous parlons de τ -Cauchy ou de d -Cauchy, parce que nous sous-entendons avoir choisi une métrique non seulement compatible avec la topologie, mais également invariante par translation.

Il reste cependant à traiter le cas d'un espace vectoriel topologique non métrisable. Dans ce cas, il n'y a pas de métrique, et la question de l'équivalence des définitions ne se pose pas.

160. Définition 7.219.

161. Définition 7.324.

162. Définition 7.325.

163. Voir la proposition 7.334 pour une condition suffisante.

Le théorème suivant donne la complétude de $\mathbb{R}$ et le critère de Cauchy pour les définitions métriques et topologiques usuelles. Lorsqu'on dit que $\mathbb{R}$ est complet, le plus souvent nous parlons de ce théorème, et non de 1.559 qui en est un lemme indispensable mais qui parle de notions différentes, bien que très liées.

THOooNULFooYUqQYo

Théorème 7.339 (Complétude de $\mathbb{R}$, critère de Cauchy[34]).

Nous avons :

- (1) L'espace métrique $(\mathbb{R}, d)$ est complet (définition 7.312).
- (2) Une suite dans $\mathbb{R}$ est convergente (définition 7.14) si et seulement si elle est de Cauchy (définition 7.336).

ITEMooUUFCoovtGgz

Démonstration. Tout ce théorème se base sur le fait que la définition de suite de Cauchy dans $(\mathbb{R}, d)$ et de suite convergente dans $(\mathbb{R}, d)$ coïncident avec les définitions correspondantes dans $\mathbb{R}$ vu comme simple corps ordonné (définitions 1.481).

Donc si (x_n) est de Cauchy dans $(\mathbb{R}, d)$, elle est de Cauchy dans le corps ordonné $(\mathbb{R}, \leq)$. Donc le théorème 1.559 nous dit que (x_n) est convergente dans $(\mathbb{R}, \leq)$. Et donc convergente dans $(\mathbb{R}, d)$.

Toutes les autres affirmations se prouvent de la même manière. $\square$

Si vous n'êtes pas sûr ou si vous ne voulez pas étudier les notations de convergence et de suites de Cauchy dans les corps, vous pouvez simplement recopier la démonstration du théorème 1.559 en remplaçant partout $\mathbb{Q}$ par $\mathbb{R}$, et aussi en remplaçant les $|x - y|$ par $d(x, y)$.

7.340.

Nous pouvons également mettre une structure d'espace métrique sur $\mathbb{C}$ en posant

$$d(z, z') = |z - z'|. \quad (7.372)$$

PROPooOIQKooPtyXgm

Proposition 7.341.

L'espace métrique $(\mathbb{C}, d)$ est complet.

Démonstration. Commençons par nous rendre compte que pour tout $z \in \mathbb{C}$ nous avons $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$. C'est bon ? Vous vous en êtes rendu compte ? Ok. Continuons.

Soit une suite de Cauchy (z_k) dans $\mathbb{C}$ et $\epsilon > 0$. Si nous posons $x_j = \operatorname{Re}(z_j)$, nous avons

$$|x_k - x_l| = |\operatorname{Re}(z_k - z_l)| \leq |z_k - z_l|. \quad (7.373)$$

Vu que (z_k) est de Cauchy, il existe un N tel que si $k, l \geq N$,

$$|x_k - x_l| \leq |z_k - z_l| \leq \epsilon. \quad (7.374)$$

Donc la suite des parties réelles converge par la complétude de $(\mathbb{R}, d)$ du théorème 7.339. Notez que le d ici n'est pas tout à fait le même, et que la démonstration fonctionne parce que la distance prise sur $\mathbb{R}$ est la restriction à $\mathbb{R}$ de la distance prise sur $\mathbb{C}$. Notons x la limite de (x_k) .

De la même manière la suite des parties imaginaires $y_k = \operatorname{Im}(z_k)$ converge vers un réel que nous notons y . Avec tout cela, la suite z_k converge dans $\mathbb{C}$ vers $x + iy$. En effet pour ϵ donné et pour un k suffisamment grand,

$$|z_k - (x + iy)| = |\operatorname{Re}(z_k) - x + i(\operatorname{Im}(z_k) - y)| \leq |x_k - x| + |y_k - y| \leq \epsilon. \quad (7.375)$$

$\square$

7.16 Norme, espace vectoriel normé

SECooWKJNooKOqpsx

La valeur absolue est essentielle pour introduire les notions de limite et de continuité pour les fonctions d'une variable. Par exemple nous verrons dans la proposition 9.84 que la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en a si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$|x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \epsilon. \quad (7.376)$$

La quantité $|x - a|$ donne la « distance » entre x et a ; la définition de la continuité signifie que pour tout ε , il existe un δ tel que si a et x sont au plus à la distance δ l'un de l'autre, alors $f(x)$ et $f(a)$ ne seront éloignés au plus d'une distance ε .

La valeur absolue, dans $\mathbb{R}$, nous sert donc à mesurer des distances entre les nombres. Les principales propriétés de la valeur absolue sont :

- (1) $|x| = 0$ implique $x = 0$,
- (2) $|\lambda x| = |\lambda||x|$,
- (3) $|x + y| \leq |x| + |y|$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Afin de donner une notion de limite pour les fonctions de plusieurs variables, nous devons trouver un moyen de définir les notions de « taille » d'un vecteur et de distance entre deux points de $\mathbb{R}^n$, avec $n > 1$. La notion de « taille » doit satisfaire propriétés analogues à celles de la valeur absolue.

La première notion de « taille » pour un vecteur de $\mathbb{R}^2$ que nous vient à l'esprit est la longueur du segment entre l'origine et l'extrémité libre du vecteur. Cela peut être calculée à l'aide du théorème de Pythagore :

$$\text{taille de } (a, b) = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (7.377)$$

Nous pouvons introduire une notion de distance entre les éléments de $\mathbb{R}^2$ de façon similaire :

$$d((a_x, a_y), (b_x, b_y)) = \sqrt{(a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2}. \quad (7.378)$$

Cette définition a l'air raisonnable ; est-elle mathématiquement correcte ? Peut-elle jouer le rôle de la valeur absolue dans $\mathbb{R}^2$? Est-elle la seule définition possibles de « taille » et distance en $\mathbb{R}^2$?

Nous voulons formaliser les notions de « taille » et de distance dans $\mathbb{R}^n$, et plus généralement dans un espace vectoriel V de dimension finie. Pour cela nous nous inspirons des propriétés de la valeur absolue.

7.16.0.1 Critère de Cauchy

Théorème 7.342 (Bolzano-Weierstrass, thème 33).

THOooRDYOOoJHLfGq

Toute suite contenue dans un compact admet une sous-suite convergente.

Démonstration. Nous faisons la preuve par l'absurde en supposant que (x_k) n'admette pas de sous-suite convergente. Soit $a \in K$; aucune sous-suite de (x_k) ne converge vers a . En particulier, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{O}_a$ de a et une partie finie I_a de $\mathbb{N}$ tel que $x_k \in \mathcal{O}_a$ seulement pour $k \in I_a$.

Les ouverts $\mathcal{O}_a$ recouvrent K ; nous pouvons en extraire un sous-recouvrement fini (c'est la définition 7.109 de la compacité). Nous avons donc des points $a_1, \dots, a_n$ tels que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}_{a_i} \quad (7.379)$$

et tels que pour chaque $\mathcal{O}_{a_i}$, nous avons $x_k \in \mathcal{O}_{a_i}$ seulement pour $k \in I_{a_i}$. Bien entendu, toute la suite est dans K et donc dans l'union.

En conclusion, nous avons $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^n I_{a_i}$, ce qui prouve que $\mathbb{N}$ est un ensemble fini. Contradiction avec la proposition 1.201 qui dit que $\mathbb{N}$ est infini. $\square$

COOooBTIPooUYWuch

Corolaire 7.343 ([1]).

Une suite dans un compact dont toutes les sous-suites convergentes convergent vers la même limite est convergente.

Démonstration. Soient un espace topologique X , un compact K et une suite (x_k) dans K . Nous supposons que toutes les sous-suites convergentes de (x_k) convergent vers $a \in X$. Nous devons montrer que $x_k \xrightarrow{X} a$.

Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors il existe un voisinage V de a tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe k tel que $x_k \notin V$. Cela produit une sous-suite hors de V . Cette sous-suite est encore dans K et possède donc une sous(-sous)-suite convergente (théorème 7.342). Par hypothèse, cette sous-sous-suite doit converger vers a , ce qui est impossible.

Contradiction et le corolaire est prouvé. $\square$

Lemme 7.344.

Une suite de Cauchy¹⁶⁴ dans un espace vectoriel normé admettant une sous-suite convergente est elle-même convergente vers la même limite.

Démonstration. Soit (a_n) une suite de Cauchy dans un espace vectoriel normé E et ℓ la limite d'une sous-suite de (a_n) . Soit $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|a_m - a_p\| < \epsilon$ dès que $m, p \geq N$. Nous allons montrer que si $k > N$ alors $\|a_k - \ell\| < 2\epsilon$. Pour cela nous considérons un $n > N$ tel que $\|a_n - \ell\| \leq \epsilon$ et nous calculons

$$\|a_k - \ell\| \leq \|a_k - a_n\| + \|a_n - \ell\| \leq 2\epsilon. \quad (7.380)$$

$\square$

Dans le cas des espaces de dimension finie, le fait d'être complet est automatique, comme le montre la proposition suivante.

PROPooGJDTooXOoYfw

Proposition 7.345.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ qui est complet¹⁶⁵. Alors E est complet¹⁶⁶.

Pour rappel, la complétude de l'espace métrique $\mathbb{R}$ est la proposition 1.508.

Démonstration. Nous considérons une suite de Cauchy (f_n) dans E et si $\{e_\alpha\}$ est une base orthonormée de E nous définissons les coefficients $f_n = \sum_\alpha a_{n\alpha} e_\alpha$. La somme sur α est finie par hypothèse sur la dimension de E .

Nous avons

$$\|f_n - f_m\| = \left\| \sum_\alpha (a_{n\alpha} - a_{m\alpha}) e_\alpha \right\| = \sum_\alpha |a_{n\alpha} - a_{m\alpha}|^2. \quad (7.381)$$

Soit $\epsilon > 0$. Il existe N tel que si $m, n > N$ alors $\|f_n - f_m\| < \epsilon$. Avec ces conditions sur N , n et m nous avons

$$\sum_\alpha |a_{n\alpha} - a_{m\alpha}|^2 < \epsilon. \quad (7.382)$$

Pour chaque α nous avons donc $|a_{n\alpha} - a_{m\alpha}| < \sqrt{\epsilon}$.

Autrement dit, pour chaque α , la suite $(a_{n\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$ et converge donc dans $\mathbb{K}$. Soit a_α la limite et définissons $f = \sum_\alpha a_\alpha e_\alpha$. Nous avons alors

$$\|f_n - f\| = \left\| \sum_\alpha (a_{n\alpha} - a_\alpha) e_\alpha \right\|, \quad (7.383)$$

dont la limite $n \rightarrow \infty$ est bien zéro. Donc la suite (f_n) converge vers $f \in E$. L'espace E est alors complet. $\square$

PropContinueCompactBorne

Proposition 7.346.

Soient V et W deux espaces vectoriels normés. Soient K une partie compacte de V et $f: K \rightarrow W$ une fonction continue. Alors l'image $f(K)$ est compacte dans W .

Ce résultat est démontré dans un cadre plus général par le théorème 7.274.

Démonstration. Nous allons prouver que $f(K)$ est fermée et bornée.

164. Définition 7.311.

165. La définition est 1.481, mais si vous n'avez pas envie de vous embarquer trop loin, dites juste « toutes les suites de Cauchy convergent ». Typiquement c'est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

166. Définition 7.312.

- (1) **$f(K)$ est fermé** Nous allons prouver que si (y_n) est une suite convergente contenue dans $f(K)$, alors la limite est également contenue dans $f(K)$. Dans ce cas, nous aurons que l'adhérence de $f(K)$ est contenue dans $f(K)$ et donc que $f(K)$ est fermé. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le vecteur y_n appartient à $f(K)$ et donc il existe un $x_n \in K$ tel que $f(x_n) = y_n$. La suite (x_n) ainsi construite est une suite dans le fermé K et possède donc une sous-suite convergente (proposition 7.342). Notons (x'_n) cette sous-suite convergente, et a sa limite : $\lim(x'_n) = a \in K$. Le fait que la limite soit dans K provient du fait que K est fermé.

Nous pouvons considérer la suite $f(x'_n)$ dans W . Cela est une sous-suite de la suite (y_n) , et nous avons $\lim f(x'_n) = f(a)$ parce que f est continue. Par conséquent nous avons

$$f(a) = \lim f(x'_n) = \lim y_n. \quad (7.384)$$

Cela prouve que la limite de (y_n) est dans $f(K)$ et par conséquent que $f(K)$ est fermé.

- (2) **$f(K)$ est borné** Si $f(K)$ n'est pas borné, nous pouvons trouver une suite (x_n) dans K telle que

$$\|f(x_n)\|_W > n \quad (7.385) \quad \text{EqFnWgeon}$$

Mais par ailleurs, l'ensemble K étant compact (et donc fermé), nous avons une sous-suite (x'_n) qui converge dans K . Disons $\lim(x'_n) = a \in K$.

Par la continuité de f nous avons alors $f(a) = \lim f(x'_n)$, et donc

$$\|f(a)\|_W = \lim \|f(x'_n)\|_W. \quad (7.386)$$

La suite $f(x'_n)$ est alors une suite bornée, ce qui n'est pas possible au vu de la condition (7.385) imposée à la suite de départ (x_n) .

□

CorFnContinueCompactBorne

Corolaire 7.347.

Si $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue où K est une partie compacte d'un espace vectoriel normé, alors $f(K)$ est borné.

Démonstration. En effet, la proposition 7.346 montre que $f(K)$ est compact et donc borné. □

7.17 Espaces métriques

7.17.1 Espaces métrisables

Définition 7.348.

Un espace topologique est **métrisable** si il est homéomorphe à un espace métrique.

PROPOoKNVUooMbLZoy

Proposition 7.349.

Une fonction séquentiellement continue sur un espace métrisable et à valeurs dans un espace métrique est continue.

Démonstration. Soient E un espace métrique et $\phi: X \rightarrow (E, d)$ un homéomorphisme. Nous supposons que $f: X \rightarrow Y$ est séquentiellement continue. Nous considérons l'application $\tilde{f} = f \circ \phi^{-1}$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \tilde{f}: E &\rightarrow Y \\ a &\mapsto f(\phi^{-1}(a)). \end{aligned} \quad (7.387)$$

L'application ϕ^{-1} est continue et donc séquentiellement continue. De plus $\tilde{f}$ est séquentiellement continue. En effet si $a_k \xrightarrow{E} a$, alors

$$\tilde{f}(a_k) = f(\phi^{-1}(a_k)), \quad (7.388)$$

mais ϕ^{-1} est séquentiellement continue, donc $\phi^{-1}(a_k) \xrightarrow{X} \phi^{-1}(a)$, ce qui signifie que $\phi^{-1}(a_k)$ est une suite convergente dans X et donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{f}(a_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(\phi^{-1}(a_k)) = f(\phi^{-1}(a)) = \tilde{f}(a). \quad (7.389)$$

L'application $\tilde{f}$ est donc séquentiellement continue. Mais étant donné que $\tilde{f}$ est définie sur un espace métrique (E) et à valeurs dans un métrique, elle est continue par la proposition 7.157. L'application $f = \tilde{f} \circ \phi$ est donc continue en tant que composée d'applications continues. $\square$

7.17.2 Fonctions continues

La propriété suivante donne des caractérisations importantes de la continuité dans le cas des espaces métriques.

Proposition 7.350 (Continuité, ouverts et voisinages et limite[283]).

Soient $f: E \rightarrow F$ une application entre espaces métriques et $a \in E$. Alors nous avons équivalence entre les choses suivantes :

- (1) f est continue en a ,
- (2) Pour tout voisinage ouvert W de $f(a)$, il existe un voisinage ouvert V de a tel que $f(V) \subset W$.
- (3) Pour toute boule $W' = B(f(a), \epsilon)$, il existe une boule $V' = B(a, \delta)$ telle que $f(V') \subset W'$.
- (4) $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \epsilon)$.
- (5) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ où la limite est donnée par la définition 7.135,
- (6) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\|x - a\| < \delta$ implique $\|f(x) - f(a)\| < \epsilon$.

La proposition 7.400 nous montrera que ces équivalences tiennent encore lorsque l'espace a une topologie de seminormes.

Démonstration. L'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (2) est la définition 7.45. L'équivalence (3) $\Leftrightarrow$ (4) est une simple paraphrase.

Montrons (2) $\Rightarrow$ (3). Si $W' = B(f(a), \delta)$, nous avons un voisinage V de a tel que $f(V) \subset W'$. L'ensemble V contenant une boule autour de chacun de ses points¹⁶⁷, il en contient un autour de a : $V' = B(a, \delta) \subset V$. A fortiori nous avons $f(V') \subset W$.

Montrons (3) $\Rightarrow$ (2). Si W est un ouvert autour de $f(a)$, il contient une boule autour de $f(a)$: $B(f(a), \epsilon) \subset W$. Il existe donc une boule $V' = B(a, \delta)$ telle que $f(V') \subset B(f(a), \epsilon) \subset W$.

L'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (5) est la définition 7.45 de la continuité en un point couplée à l'unicité de la limite due à la proposition 7.138 parce qu'un espace métrique est séparé.

Prouvons (5) $\Rightarrow$ (6). Soient $\epsilon > 0$ et $V = B(f(a), \epsilon)$. Étant donné que $f(a)$ est une limite de f pour $x \rightarrow a$, il existe un voisinage W de a tel que $f(W) \subset V$. Soit $\delta > 0$ tel que $B(a, \delta) \subset W$; alors si $\|x - a\| < \delta$ nous avons $x \in B(a, \delta) \subset W$ et donc $f(x) \in B(f(a), \epsilon)$, c'est-à-dire $\|f(a) - f(x)\| < \epsilon$.

Enfin l'implication (2) $\Rightarrow$ (5) est une réécriture de la définition de la limite en un point. $\square$

Voici un théorème qui parle de fermés emboîtés dans un espace métrique. Le corolaire 7.118 parle du cas $\cap_i A_i = \emptyset$ dans un compact.

Théorème 7.351 (Théorème [284]).

Soit (E, d) un espace métrique. Il est complet si et seulement si toute suite décroissante de fermés non vides dont le diamètre tend vers zéro a une intersection qui se réduit à un seul point.

Démonstration. En deux parties.

¹⁶⁷ Cela est le théorème-définition 7.142 des ouverts dans un espace métrique, à ne pas confondre avec le théorème 7.8.

(1) **Condition suffisante**

Soit $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une telle suite de fermés emboîtés. Si nous choisissons des points $x_n \in F_n$, nous obtenons une suite (x_n) de Cauchy et qui est par conséquent convergente vu que l'espace est par hypothèse complet. De plus, pour chaque $N \geq n$, la queue de suite $(x_n)_{n \geq N}$ est contenue dans F_N et donc converge vers un élément de F_N (parce que ce dernier est fermé). Donc la limite de (x_n) est dans $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

De plus cette intersection a diamètre nul parce que le diamètre de $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est majoré par tous les diamètres des F_n , lesquels sont arbitrairement petits par hypothèse. Donc l'intersection est réduite à un point.

(2) **Condition nécessaire**

Soit (x_n) une suite de Cauchy. Nous considérons les ensembles

$$F_n = \overline{\{x_i \text{ tel que } i \geq n\}}. \quad (7.390)$$

Le fait que la suite soit de Cauchy implique que $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$. Par hypothèse, nous avons alors

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{a\}. \quad (7.391)$$

Pour s'assurer que a est bien la limite de (x_n) , il suffit de remarquer que

$$d(x_n, a) \leq \text{diam } F_n \rightarrow 0. \quad (7.392)$$

□

PropGULUooNzqZKj

Proposition 7.352.

Soient (X, d) un espace topologique métrique et F un fermé de X . Nous avons $d(x, F) = 0$ si et seulement si $x \in F$.

Démonstration. Si $x \in F$ alors $d(x, F) = 0$ parce que $d(x, x)$ fait partie de l'ensemble sur lequel nous prenons l'infimum.

Si réciproquement $d(x, F) = 0$, cela signifie que pour tout ϵ , il existe $x_\epsilon \in F$ tel que $d(x_\epsilon, x) \leq \epsilon$. En prenant $\epsilon = 1/k$ nous construisons une suite (x_k) d'éléments dans F vérifiant $d(x_k, x) = \frac{1}{k}$. Cela signifie que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ par la proposition 7.321(1).

Par la caractérisation séquentielle des fermés (un fermé contient les limites de toutes ses suites, proposition 7.154), la suite (x_k) étant dans F , la limite est dans F . Donc $x \in F$. □

LemooynkH

Lemme 7.353.

Soit A_n une suite décroissante de fermés non vides dans un espace métrique¹⁶⁸ compact K . Alors

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad (7.393)$$

est non vide.

Démonstration. Soit (x_n) une suite dans K telle que $x_n \in A_n$. La suite étant contenue dans A_1 , et A_1 étant compact (lemme 7.121), elle possède une sous-suite $(y_n = x_{\sigma_1(n)})$ convergente dont la limite est dans A_1 par le théorème de Bolzano-Weierstrass 7.194. Une queue de la suite y_n est dans A_2 et nous considérons donc une sous-suite convergente dans A_2 donnée par

$$z_n = y_{\sigma_2(n)} = x_{\sigma_1 \sigma_2(n)}. \quad (7.394)$$

En continuant ainsi nous construisons une suite convergente dans A_k . Nous considérons enfin la suite

$$y_n = x_{\sigma_1 \dots \sigma_n(n)}. \quad (7.395)$$

Pour tout k , une queue de cette suite est une sous-suite de $x_{\sigma_1 \dots \sigma_k(n)}$ et par conséquent cette suite converge dans A_k . La limite de cette suite est donc dans l'intersection demandée. □

¹⁶⁸. L'hypothèse métrique provient de l'utilisation de Bolzano-Weierstrass, lequel est vrai pour les espaces séquentiellement compacts, dont les espaces métriques.

Remarque 7.354.

Cette propriété est fausse pour les ouverts. Par exemple

$$\bigcap_{n>1}]0, \frac{1}{n}[= \emptyset. \quad (7.396)$$

LemK1cAbic

Lemme 7.355.

Si K est un compact dans un espace métrique et F un fermé disjoint de K , alors $d(K, F) > 0$.

Démonstration. La fonction

$$\begin{aligned} K &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto d(x, F) \end{aligned} \quad (7.397)$$

est une fonction continue sur K , et donc atteint son minimum par le théorème de Weierstrass 7.196. Soit $x_0 \in K$ un point de K qui réalise ce minimum. Si $d(x_0, F) = 0$, alors on aurait une suite (x_n) dans F qui convergerait vers x_0 , mais F étant fermé cela signifierait que x_0 serait dans F , ce qui contredirait l'hypothèse que F et K sont disjoints. $\square$

PropLHWACDU

Proposition 7.356.

Soient (X, d) un espace métrique compact et (u_n) une suite de X telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, u_{n+1}) = 0. \quad (7.398)$$

Alors l'ensemble des points d'accumulation¹⁶⁹ de (u_n) est connexe.

Démonstration. Nous notons Γ l'ensemble des points d'accumulation de la suite.

(1) Γ est compact Nous notons $A_p = \{u_n \text{ tel que } n \geq p\}$ et nous avons

$$\Gamma = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{A_p} \quad (7.399)$$

parce que si $x \in \Gamma$, alors pour tout n , il existe $m > n$ tel que $x_m \in B(x, \epsilon)$, et donc tel que $x \in B(x_m, \epsilon)$. Donc pour tout ϵ et pour tout p , l'intersection $B(x, \epsilon) \cap A_p$ est non vide.

En tant qu'intersection de fermés, Γ est fermé (lemme 7.6). En tant que fermé dans un compact, Γ est compact (lemme 7.121).

(2) Recouvrement par deux compacts

Supposons que Γ ne soit¹⁷⁰ pas connexe. Nous pouvons alors considérer S et O , deux ouverts disjoints recouvrant Γ et intersectant tous deux Γ . Nous posons alors

$$A = S \cap \Gamma \quad (7.400a)$$

$$B = O \cap \Gamma, \quad (7.400b)$$

et nous avons évidemment $\Gamma = A \cup B$. Montrons que A est fermé (B le sera aussi par le même raisonnement). Soit une suite d'éléments de $S \cap \Gamma$ convergent dans X . Alors la limite est dans $\bar{\Gamma} = \Gamma$ et donc elle est donc O ou S , mais elle est certainement dans $\bar{S}$. Cependant $\bar{S}$ n'intersecte pas O . En effet si $x \in \bar{S} \cap O$, alors tout voisinage de x intersecterait S , mais il y a des voisinages de x étant inclus dans O parce que O est ouvert ; cela donnerait une intersection entre O et S , ce qui est impossible. Donc la limite n'est pas dans O et donc elle est dans S . Au final la limite est dans $S \cap \Gamma$, ce qui prouve son caractère fermé.

Comme d'habitude, $\Gamma \cap S$ est compact parce que fermé dans un compact¹⁷¹.

169. Définition 7.43.

170. est-ce qu'il faut vraiment un subjonctif ici ?

171. Lemme 7.121.

(3) **Décomposition en trois morceaux**

Vu que A et B sont des compacts disjoints, nous avons $d(A, B) = \alpha > 0$ pour un certain α par le lemme 7.355. Nous notons

$$A' = \{x \in X \text{ tel que } d(x, A) < \frac{\alpha}{3}\} \quad (7.401a)$$

$$B' = \{x \in X \text{ tel que } d(x, B) < \frac{\alpha}{3}\} \quad (7.401b)$$

Nous avons $A' = \bigcup_{x \in A} B(x, \frac{\alpha}{3})$ et donc en tant qu'union d'ouverts, A' est ouvert (définition de la topologie). Même chose pour B' .

Enfin nous notons

$$K = X \setminus (A' \cup B') \quad (7.402)$$

qui est fermé en tant que complémentaire d'ouvert, et donc compact. Étant donné que $A \subset A'$ et $B \subset B'$, nous avons $K \cap \Gamma = \emptyset$.

L'idée est maintenant de montrer que K contient un point d'accumulation de (u_n) .

(4) **Sous-suites de (u_n)**

L'hypothèse sur la suite (u_n) nous indique qu'il existe un N_0 tel que $\forall n \geq N_0$,

$$d(u_n, u_{n+1}) < \frac{\alpha}{3}. \quad (7.403)$$

Soient $N > N_0$ et $x_0 \in A$. Étant donné que x_0 est point d'accumulation de la suite, il existe $n_1 > N$ tel que $d(x_0, u_{n_1}) < \frac{\alpha}{3}$. Même chose dans B : nous prenons $y_0 \in B$ et un naturel $n_2 > n_1$ tel que $d(y_0, u_{n_2}) < \frac{\alpha}{3}$. Nous avons $u_{n_1} \in A'$ et $u_{n_2} \in B'$.

Soit n_0 le plus petit naturel supérieur à n_1 tel que $u_{n_0} \notin A'$. Cela existe parce que $u_{n_2} \in B'$ et $B' \cap A' = \emptyset$, mais n_0 n'est pas n_2 lui-même parce que $d(A', B') \geq \frac{\alpha}{3}$ alors que nous considérons $n_0, n_1, n_2 > N_0$ et donc pour tous les i entre n_1 et n_2 (compris), $d(u_i, u_{i+1}) < \frac{\alpha}{3}$. Notons qu'ici le strict dans la condition (7.403) est important. Nous avons donc $N_0 < n_1 < n_0 < n_2$.

Nous allons maintenant montrer que u_{n_0} est dans K . C'est fait pour : il est loin en même temps de A' et de B' . En utilisant l'inégalité triangulaire à l'envers, nous avons

$$\begin{aligned} d(u_{n_0}, B) &\geq d(u_{n_0-1}, B) - d(u_{n_0-1}, u_{n_0}) \\ &\geq d(A, B) - d(u_{n_0-1}, A) - d(u_{n_0-1}, u_{n_0}) \\ &\geq \alpha - \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha}{3} \\ &= \frac{\alpha}{3}. \end{aligned} \quad (7.404)$$

Pour la dernière inégalité nous avons utilisé le fait que u_{n_0-1} n'est pas dans A' . Bref, nous avons montré que u_{n_0} n'est pas dans B' (dans la définition de ce dernier nous avons bien une inégalité stricte). Vu que par définition u_{n_0} n'est pas non plus dans A' , nous avons $u_{n_0} \in K$. Nous avons montré jusqu'à présent que pour tout $N \geq N_0$, il existe un $n_0 \geq N$ tel que $u_{n_0} \in K$. Cela nous construit donc une sous-suite (v_n) de (u_n) contenue dans K . En tant que suite dans le compact K , la suite (v_n) admet un point d'accumulation dans K . Ce point est également point d'accumulation de la suite (u_n) complète, ce qui donne un point d'accumulation de (u_n) dans K et donc une contradiction.

Nous concluons que Γ est connexe. □

Encore une petite conséquence sans ambition du théorème de Bolzano-Weierstrass.

Proposition 7.357.

Si (x_n) est une suite dans un compact telle que toute sous-suite convergente ait le même point x comme limite. Alors la suite entière converge vers x .

Démonstration. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors il existe un ϵ tel que pour tout $N > 0$, il existe $n > N$ avec $d(x_n, x) > \epsilon$. Cela nous donne une sous-suite de (x_n) composée d'éléments tous à une distance de x supérieure à ϵ . Nous la nommons (y_n) ; c'est une suite dans un compact qui admet donc une sous-suite convergente (et une telle sous-suite est une sous-suite de (x_n)) dont la limite devrait être x , mais c'est impossible par construction. $\square$

LemGDeZlOo

Lemme-Définition 7.358 ([285]).

Soit Ω un ouvert dans un espace métrique E . Il existe une suite (K_n) de compacts tels que

- (1) $K_n \subset \Omega$
- (2) $\bigcup_{n=0}^{\infty} K_n = \Omega$
- (3) $K_n \subset \text{Int}(K_{n+1})$.

Une telle suite de compacts vérifie alors

- (1) Il existe δ_n tel que pour tout $z \in K_n$, $B(z, \delta_n) \subset K_{n+1}$.
- (2) Tout compact de Ω est inclus dans $\text{Int}(K_n)$ pour un certain n .

ITEMooBPYPooEMhSmY

Une telle suite de compacts est une **suite exhaustive** de compacts pour Ω .

Démonstration. Nous considérons les ensembles

$$V_n = \{z \in E \text{ tel que } |z| \} \cup \bigcup_{a \notin \Omega} B(a, \frac{1}{n}), \quad (7.405)$$

et nous définissons $K_n = V_n^c$. Vérifions que ces ensembles vérifient tout ce qu'il faut.

- (1) $\underline{K_n \subset \Omega}$ Si $a \notin \Omega$ alors a est dans tous les V_n et donc dans aucun des K_n ; nous avons donc bien $K_n \subset \Omega$.
- (2) $\underline{\bigcup_{n=0}^{\infty} K_n = \Omega}$ Nous avons déjà prouvé que $\bigcup_{n=0}^{\infty} K_n \subset \Omega$. Pour avoir l'inclusion dans l'autre sens, soit $z \in \Omega$. Nous prenons $n_1 > |z|$ puis n_2 tel que $B(z, \frac{1}{n_2}) \subset \Omega$. Alors $z \in K_n$ avec $n > \max(n_1, n_2)$. Pour ce choix de n , nous avons $z \in K_n$. Cela prouve que $\Omega \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$.
- (3) $\underline{K_n \subset \text{Int}(K_{n+1})}$ Soit $z \in K_n$. L'élément z vérifie $d(z, \Omega^c) \geq \frac{1}{n}$. Du coup si nous prenons δ tel que

$$\frac{1}{n+1} < \delta < \frac{1}{n} \quad (7.406)$$

alors $B(z, \delta) \subset K_{n+1}$.

- (4) **Les K_n sont compacts** Enfin, les K_n sont tous compacts. En effet ils sont bornés parce que $K_n \subset B(0, n)$ et ensuite K_n est fermé en tant que complémentaire d'un ouvert (V_n est ouvert en tant qu'union d'ouverts).

Nous passons maintenant aux propriétés, qui sont indépendantes de la façon dont nous avons construit les K_n vérifiant les conditions.

- (1) Nous pouvons considérer la fonction $K_n \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $z \mapsto d(z, K_{n+1}^c)$. Vu que $K_n \subset \text{Int}(K_{n+1})$, c'est une fonction (continue sur le compact K_n) prenant des valeurs strictement positives. Elle a donc un minimum strictement positif. Si δ_n est plus petit que ce minimum nous avons $B(z, \delta_n) \subset K_{n+1}$ pour tout $z \in K_n$.
- (2) D'abord nous avons $\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} \text{Int}(K_n)$. En effet nous avons

$$\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} \text{Int}(K_{n+1}) \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} \text{Int}(K_n). \quad (7.407)$$

L'inclusion dans l'autre sens est facile.

Soit K compact dans Ω . Vu que Ω est l'union des $\text{Int}(K_n)$, nous avons

$$K \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} \text{Int}(K_n). \quad (7.408)$$

Cela donne à K un recouvrement par des ouverts dont nous pouvons extraire un sous-recouvrement fini par compacité. Les K_n étant croissants, du recouvrement fini, il suffit de prendre le plus grand (disons K_m) et nous avons $K \subset \text{Int}(K_m)$.

□

Notons qu'avec la suite de K_n telle que construite, le dernier point est réglé en prenant

$$\frac{1}{n+1} < \delta_n < \frac{1}{n}. \quad (7.409)$$

LEMooWRIXooSBHavt

Lemme 7.359 ([286]).

Soient un compact $K \subset \mathbb{R}^d$ ainsi que des ouverts $\{\Omega_i\}_{i=1,\dots,n}$ tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$.

Il existe des compacts $\{K_i\}_{i=1,\dots,n}$ tels que

- $K_i \subset \Omega_i$,
- $K \subset \bigcup_{i=1}^n K_i$.

Démonstration. Soit $x \in K$. Vu que les Ω_i recouvrent K , il existe un $k(x) \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x \in \Omega_{k(x)}$. De plus, vu que $\Omega_{k(x)}$ est ouvert, il existe un voisinage de x contenu dans $\Omega_{k(x)}$ (théorème 7.8). Autrement dit, il existe $r(x) > 0$ tel que

$$\overline{B(x, r(x))} \subset \Omega_{k(x)}. \quad (7.410)$$

Vu que l'ensemble $\{B(x, r(x))\}_{x \in K}$ est un recouvrement de K par des ouverts, nous pouvons en extraire un sous-recouvrement fini¹⁷². Soient donc $x_1, \dots, x_m \in K$ tels que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^m B(x_i, r(x_i)). \quad (7.411)$$

EQooETROooCMJlsx

Pour chaque $j = 1, \dots, n$, nous posons

$$A_j = \{l \in \{1, \dots, m\} \text{ tel que } k(x_l) = j\}. \quad (7.412)$$

Et enfin nous définissons, pour $j = 1, \dots, n$ les parties

$$K_j = \bigcup_{l \in A_j} \overline{B(x_l, r(x_l))} \quad (7.413)$$

et il nous reste à prouver que ces ensembles répondent bien à la question.

- (1) $\bigcup_{j=1}^n A_j = \{1, \dots, m\}$ est **une union disjointe** Un élément l de $A_i \cap A_j$ devrait vérifier $i = k(x_l) = j$. Si $s \in \{1, \dots, m\}$, alors $s \in A_{k(x_s)}$. Donc oui, l'union des A_j est tout $\{1, \dots, m\}$.
- (2) $\underline{K_j \subset \Omega_j}$ Nous avons

$$K_j = \bigcup_{l \in A_j} \overline{B(x_l, r(x_l))} \subset \bigcup_{l \in A_j} \Omega_{k(x_l)} = \bigcup_{l \in A_j} \Omega_j = \Omega_j. \quad (7.414)$$

- (3) $\underline{K \subset \bigcup_{i=1}^n K_i}$. Par (7.411), et vu que $\{1, \dots, m\} = \bigcup_{j=1}^n A_j$,

$$K \subset \bigcup_{i=1}^m B(x_i, r(x_i)) \quad (7.415a)$$

$$= \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{l \in A_j} B(x_l, r(x_l)) \quad (7.415b)$$

$$= \bigcup_{j=1}^n \underbrace{\bigcup_{l \in A_j} \overline{B(x_l, r(x_l))}}_{K_j} \quad (7.415c)$$

$$= \bigcup_{j=1}^n K_j. \quad (7.415d)$$

□

172. C'est la définition 7.109 d'un compact.

7.17.3 Théorème de Tykhonov

Pour des versions plus simples du théorème de Tykhonov, voir le thème 33.

ThoFWXsQOZ

Théorème 7.360 (Tykhonov).

Un produit quelconque d'espaces métriques non vides est compact si et seulement si chacun de ses facteurs est compact.

PROPooDXUIooUUmgnYN

Proposition 7.361 ([1]).

Soient des espaces topologiques $\{X_i\}_{i \in I}$ et des parties compactes $K_i \subset X_i$. Alors $\prod_{i \in I} K_i$ est compact dans $\prod_{i \in I} X_i$.

7.17.4 Ensembles enchainés

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition 7.362.

Une ϵ -**chaîne** joignant les points a et b de X est une suite finie $(u_0, \dots, u_n)$ dans X telle que $u_0 = a$, $u_n = b$ et pour tout $0 \leq i \leq n-1$ nous avons $d(u_i, u_{i+1}) \leq \epsilon$.

Une partie A de X est **bien enchainée** si pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $a, b \in A$, il existe une ϵ -chaîne joignant a et b dans A .

Lemme 7.363.

Les rationnels dans $\mathbb{R}$ sont bien enchainés.

Démonstration. Soient p et q des rationnels avec $p < q$, ainsi que $\epsilon > 0$. Le lemme 1.544 nous permet de considérer un rationnel δ vérifiant $0 < \delta < \epsilon$. Et nous définissons les rationnels

$$r_k = p + k\delta. \quad (7.416)$$

Vu que $\mathbb{Q}$ est archimédien¹⁷³, il existe K tel que $r_K > q$. D'autre part, $r_0 = p < q$. Donc il existe $N = \max\{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } r_k < q\}$.

Nous considérons la chaîne $(r_0, \dots, r_N, q)$. Elle débute à $r_0 = p$ et termine à q ; pas de problèmes avec ça. À part pour le dernier pas, nous avons

$$|r_N - r_{N-1}| = \delta < \epsilon, \quad (7.417)$$

donc c'est bien une ϵ -chaîne. Il reste à voir $|q - r_N|$. Nous avons $r_N \leq q \leq r_{N+1}$, et donc

$$0 \leq q - r_N \leq r_{N+1} - r_N = \delta \leq \epsilon. \quad (7.418)$$

Donc ok aussi pour ce dernier pas. □

PROPooBUNOooIvfugn

Proposition 7.364 ([287, 1]).

Un espace métrique connexe¹⁷⁴ est bien enchainé.

Démonstration. Soit un espace métrique X et $\epsilon > 0$. La relation $x \sim y$ si et seulement si x et y peuvent être reliés par une ϵ -chaîne est une relation d'équivalence.

Soit $x \in X$. Nous prouvons que la classe $[x]$ est ouverte. En effet soit $y \in [x]$, si $z \in B(y, \epsilon)$ nous avons $z \in [y]$, et donc $z \in [x]$. Nous en déduisons que $B(y, \epsilon) \subset [x]$, et donc que $[x]$ est ouvert par le théorème 7.8.

Donc les classes sont des ouverts.

Supposons que X n'est pas bien enchainé. Alors il existe ϵ pour lequel X possède plus qu'une classe d'équivalence. Soit $\{[x_k]\}_{k \in I}$ l'ensemble des classes d'équivalences.

173. Proposition 1.502.

174. Définition 7.102.

Nous considérons un $i_0 \in I$ quelconque, et nous définissons les ouverts $A = [x_{i_0}]$ et

$$B = \bigcup_{k \in I \setminus \{i_0\}} [x_k]. \quad (7.419)$$

Ce sont deux ouverts disjoints qui recouvrent X qui n'est donc pas connexe. $\square$

PROF00XHTWooZibddZ

Proposition 7.365.

La fermeture d'un ensemble bien enchainé dans un espace métrique compact (X, d) est connexe.

Démonstration. Soit $A \subset X$ un ensemble bien enchainé, et soient $a, b \in \bar{A}$. Nous construisons une suite (u_k) dans A de la façon suivante. Pour chaque $n > 0$ nous prenons $a' \in B(a, \frac{1}{n}) \cap A$ et $b' \in B(b, \frac{1}{n}) \cap A$. Ensuite nous considérons une $\frac{1}{n}$ -chaîne $\{v_i^{(n)}\}_{i \in I_n}$ dans A entre a' et b' . Ici l'ensemble I_n est fini. La suite (u_k) est simplement construite en mettant bout à bout les éléments $v_i^{(n)}$.

La suite ainsi construite est une suite dans A admettant a et b comme points d'accumulation (les autres points d'accumulation sont également dans $\bar{A}$) et telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} d(u_k, u_{k+1}) = 0$. Par conséquent la proposition 7.356 nous dit que l'ensemble des points d'accumulation de (u_k) est connexe dans X . Nous le notons $C_{a,b}$.

Si nous fixons $a \in \bar{A}$, alors nous avons

$$\bigcup_{x \in \bar{A}} C_{a,x} = \bar{A}. \quad (7.420)$$

Vu que le membre de gauche est une union de connexes, c'est un connexe par la proposition 7.107. $\square$

COR00SIKCooTncoQm

Corolaire 7.366.

Un espace métrique compact est connexe si et seulement si il est bien enchainé.

Démonstration. Dans le sens direct, c'est la proposition 7.364. Dans l'autre sens, si X est compact, alors X est fermé par le lemme 7.121(2). Et vu qu'il est fermé et bien enchainé, la proposition 7.365 implique qu'il est connexe. $\square$

7.17.5 Produit fini d'espaces métriques

Pour rappel, la distance sur un espace produit est donnée par la définition 7.280.

THOIYmxXuu

Théorème 7.367 ([1]).

Un produit fini d'espaces métriques non vides est compact si et seulement si chacun de ses facteurs est compact.

Démonstration. Soient $K_1, \dots, K_n$ des compacts et $K = K_1 \times \dots \times K_n$ le produit muni de sa métrique usuelle de la définition (7.280) (attention : chacun des K_i peut être de dimension infinie) :

$$d(\alpha, \beta) = \max\{d_i(\alpha_i, \beta_i)\} \quad (7.421)$$

où d_i est la distance sur K_i . Si (α_n) est une suite dans K alors la suite $(\alpha_n)_1$ est une suite dans le compact K_1 dont nous pouvons extraire une sous-suite convergente (Bolzano-Weierstrass 7.194). De la sous-suite de α correspondante nous extrayons la sous-suite pour la seconde composante, etc.

En fin de compte nous avons une sous-suite (que nous nommons α également) donc chacune des composantes est convergente. Notez que nous utilisons ici de façon cruciale le fait que nous ayons qu'un nombre fini de facteurs.

Autrement dit, pour chaque $i = 1, \dots, n$, l'application $p \mapsto (\alpha_p)_i$ est une suite dans K_i , et cette suite converge vers ℓ_i .

Soit $\epsilon > 0$ pour chaque $i = 1, \dots, n$, il existe $N_i > 0$ tel que si $p > N_i$ alors

$$d_i((\alpha_p)_i, \ell_i) \leq \epsilon. \quad (7.422)$$

En prenant $N = \max_k N_k$ et $n > N$ nous avons

$$d(\alpha_n, (\ell_1, \dots, \ell_n)) \leq \epsilon. \quad (7.423)$$

Par conséquent de la suite (α) nous avons extrait une sous-suite convergente et la partie « réciproque » de Bolzano-Weierstrass nous assure alors que K est compact.

À l'inverse si un des facteurs n'est pas compact (mettons K_1) alors nous prenons un recouvrement $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ de K_1 par des ouverts duquel il est impossible d'extraire un sous-recouvrement fini. Ensuite nous posons

$$\mathcal{P}_i = \mathcal{O}_i \times K_2 \times \dots \times K_n, \quad (7.424)$$

qui est un recouvrement de K par des ouverts (de K) d'où aucun sous-recouvrement fini ne peut être extrait. $\square$

Pour la culture générale, il y a bien entendu moyen de faire des produits dénombrables et pire d'espaces métriques.

Définition 7.368 ([288]).

Soient (E_n, d_n) des espaces métriques. Sur l'ensemble produit $E = \prod_{i=1}^{\infty} E_i$ nous définissons la métrique

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} d'_k(x_i, y_i) \quad (7.425)$$

où $d'_i = \min(d_i, 1)$.

On peut montrer que ce d est bien une distance et que (E, d) devient un espace métrique.

ThoKKBooNaZgoO

Théorème 7.369 (Tykhonov dénombrable[288]).

Un produit dénombrable d'espaces métriques non vides est compact si et seulement si chacun de ses facteurs est compact.

Note : ce résultat est encore valable pour un produit quelconque, c'est le théorème de Tykhonov 7.360.

7.17.6 Équicontinuité

DEFooDHHQDooFFHvsX

Définition 7.370 ([1, 289, 290]).

Soient un espace topologique X et un espace vectoriel topologique Y . Une famille H d'applications $X \rightarrow Y$ est **équicontinue** en $a \in X$ si pour tout voisinage V de 0 dans Y , il existe un voisinage U de a dans X tel que

$$h(U) \subset h(a) + V \quad (7.426)$$

pour tout $h \in H$.

Nous disons que H est équicontinue si elle est équicontinue en tout point.

LEMooMIHJooUhvPgM

Lemme 7.371 ([1]).

Soient un espace métrique X , un espace vectoriel normé Y ainsi qu'une famille H d'isométries linéaires $X \rightarrow Y$. Alors H est équicontinue.

Démonstration. Nous suivons la définition 7.370 de l'équicontinuité. Soient $a \in X$ et un voisinage V de 0 dans Y . Nous considérons $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset V$, et nous posons $U = B(a, r)$.

Si $x \in U$ et $h \in H$, nous avons

$$\|h(x) - h(a)\| = \|h(x - a)\| = d(x, a) < r, \quad (7.427)$$

de telle sorte que $h(x) \in h(a) + B(0, r)$.

Donc H est équicontinue en a . Vu que a est arbitraire, H est équicontinue en tout point et donc équicontinue sur X . $\square$

LEMooKEMRooYyqsBI

Lemme 7.372 ([290]).

Soit une famille de fonctions $f_i: X \rightarrow E$ indexée par un ensemble I où X est un espace topologique et E un espace métrique. Cette famille est équicontinue¹⁷⁵ en $x \in X$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage V de x tel que

$$\|f_i(x) - f_i(y)\| < \epsilon \quad (7.428)$$

pour tout i dès que $y \in V$.

La proposition suivante permet de montrer que certaines fonctions définies par une limite sont continues. Ce sera par exemple le cas de la fonction puissance, proposition 12.431.

PROPooICNNooAMjcut

Proposition 7.373 ([1, 290]).

Soit une suite équicontinue (f_i) de fonctions qui converge simplement vers f , alors f est continue.

Démonstration. Soit une suite équicontinue $f_i: X \rightarrow E$ convergeant simplement vers f . Soit $a \in X$. Nous prouvons que f est continue en a . Pour cela nous considérons $\epsilon > 0$ et, conformément à l'hypothèse équicontinuité un voisinage V de a tel que $|f_i(a) - f_i(x)| < \epsilon$ pour tout $x \in V$.

Nous avons la majoration

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(a)| + |f_i(a) - f(a)|. \quad (7.429a)$$

Plusieurs majorations.

- Vu que $f_i \rightarrow f$, il existe N_1 tel que $|f(x) - f_i(x)| < \epsilon$ pour tout $i > N_1$.
- De plus, par définition de V , nous avons aussi $|f_i(x) - f_i(a)| \leq \epsilon$.
- Vu que $f_i \rightarrow f$, il existe N_2 tel que $|f_i(a) - f(a)| < \epsilon$ pour tout $i > N_2$.

Donc en prenant $x \in V$ et $i > \max\{N_1, N_2\}$ nous avons

$$|f(x) - f(a)| \leq 3\epsilon. \quad (7.430)$$

$\square$

⚠ Avertissement/question au lecteur !! 7.374

Je n'ai pas du tout vérifié si le lemme 7.375 est correct. Sinon, il faudra trouver autre chose dans la preuve de la proposition 21.89.

LEMooSXWKooAmqec

Lemme 7.375 ([1]).

Si A est une partie fermée de $\mathbb{R}^3$, alors $\text{proj}_{\mathbb{R}^+}(A)$ est fermé dans $\mathbb{R}$.

7.17.7 Continuité uniforme

DEFooYIPXooQTscbG

Définition 7.376 ([291]).

Soient deux espaces métriques (E, d) et (E', d') . Une application $f: E \rightarrow E'$ est **uniformément continue** si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $d(x, y) \leq \delta$ implique $d'(f(x), f(y)) \leq \epsilon$.

Dans l'uniforme continuité, le α qui fait fonctionner ϵ doit le faire fonctionner pour tous les $x, y \in E$. C'est la différence avec la continuité simple dans laquelle nous pouvons choisir, pour un même ϵ , un δ différent en chaque point.

Nous parlons plus d'uniforme continuité dans la section 12.7.

175. Définition 7.370.

7.18 Partie maigre et nulle part dense

Une des caractérisations 7.417 des espaces de Baire parle de parties maigres.

Définition 7.377 (nulle part dense[292]).

Soit un espace topologique X et une partie $A \subset X$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) $\text{Int}(\bar{A}) = \emptyset$
- (2) Tout ouvert de X inclus dans $\bar{A}$ est vide.
- (3) A n'est dense dans aucun ouvert non vide de X .
- (4) Pour tout ouvert non vide U de X , il existe un ouvert V non vide tel que $V \subset U$ et $V \cap A = \emptyset$.

Une telle partie est **nulle part dense**.

Définition 7.378 ([293]).

Soient un espace topologique X et une partie A de X . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) A est une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide.
- (2) A est réunion dénombrable de parties nulle part denses¹⁷⁶

Une telle partie est dite **maigre**.

Théorème 7.379 (Baire[294]).

Une réunion dénombrable d'ensembles nulle part denses est d'intérieur vide.

Démonstration. Soient $a \in S$ et $\epsilon > 0$. Nous allons trouver un élément dans $B(a, \epsilon)$ qui n'est pas dans S . Nous commençons par choisir $x_1 \in B(a, \epsilon)$ et $r_1 < \frac{\epsilon}{2}$ tel que

$$B(x_1, r_1) \cap A_1 = \emptyset. \quad (7.431)$$

Ensuite nous choisissons $x_2 \in B(x_1, r_1)$ et $r_2 < \epsilon/4$ tel que $B(x_2, r_2) \subset B(x_1, r_1)$ et $B(x_2, r_2) \cap A_2 = \emptyset$. Notons que $B(x_2, r_2) \cap A_1 = \emptyset$ aussi, par construction.

Par récurrence nous construisons une suite d'éléments x_n et de rayons $r_n < \epsilon/2^n$ tels que

- (1) $B(x_n, r_n) \cap A_j = \emptyset$ pour tout $j \leq n$,
- (2) $\overline{B(x_n, r_n)} \subset B(x_{n-1}, r_{n-1})$.

Cette suite étant de Cauchy (parce que contenue dans des intervalles emboîtés de rayon décroissant vers zéro), elle converge¹⁷⁷ donc vers un point qui en particulier appartient à $B(a, \epsilon)$. Mais la limite n'est dans aucun des A_n et donc pas dans S . $\square$

7.19 Seminormes

Les principaux espaces topologiques construits avec des seminormes seront les espaces de fonctions de la définition 30.14. Nous verrons également la topologie *-faible sur $\mathcal{D}'(\Omega)$ en la définition 30.30.

7.19.1 Seminorme

Définition 7.380.

Si E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), une **seminorme** sur E est une application $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- (1) $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$
- (2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

pour tout $x, y \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

¹⁷⁶. Définition 7.377.

¹⁷⁷. Par la proposition 1.508

Remarque 7.381.

Deux remarques.

- (1) La seule différence avec une norme est qu'une seminorme peut s'annuler en des éléments non-nuls de l'espace.
- (2) Une seminorme prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$. En particulier pour que p soit une seminorme, il faut que $p(x) < \infty$ pour tout x .

Lemme 7.382 ([295, 268]).

Soit une seminorme¹⁷⁸ p . Nous avons

- (1) $p(0) = 0$,
- (2) $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$.
- (3) $p(x) \geq 0$ pour tout $x \in X$.
- (4) $\ker(p)$ est un sous-espace vectoriel.

Démonstration. En plusieurs parties.

- (1) **Pour (1)** Pour la première affirmation, il suffit de poser $\lambda = 0$ dans l'inégalité de définition $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$.
- (2) **Pour (2)** Nous avons d'une part $p(x + h) \leq p(x) + p(h)$ et d'autre part $p(x) \leq p(x + h) + p(-h) = p(x + h) + p(h)$. En isolant $p(x + h) - p(x)$ dans chacune de ces deux inégalités,

$$-p(h) \leq p(x + h) - p(x) \leq p(h) \quad (7.432)$$

ou encore

$$|p(x + h) - p(x)| \leq p(h) \quad (7.433)$$

qui donne le résultat demandé en posant $h = y - x$.

- (3) **Pour (3)** Soit $x \in X$. Nous appliquons le point (2) avec $y = 0$, en nous souvenant que $p(0) = 0 : |p(x) - p(0)| \leq p(x - 0)$, c'est-à-dire $0 \leq |p(x)| \leq p(x)$.
- (4) **Pour (4)** Soient $x, y \in \ker(p)$ ainsi que $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. En utilisant les points précédents,

$$0 \leq p(\alpha x + \beta y) \leq |\alpha|p(x) + |\beta|p(y) = 0. \quad (7.434)$$

Vu que les inégalités commencent par 0 et finissent par zéro, ce sont toutes les égalités, et en particulier $p(\alpha x + \beta y) = 0$.

□

Définition 7.383 ([296]).

Soit un espace vectoriel complexe X . Une application $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ est **dominée** par la seminorme p si pour tout x dans X nous avons $|f(x)| \leq p(x)$.

Si M est un sous-espace vectoriel de X , nous disons qu'une application $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ est **dominée par le dessus** par la seminorme p si $f(m) \leq p(m)$ pour tout $m \in M$.

Lemme 7.384 ([296]).

Une application linéaire est dominée par une seminorme si et seulement si sa partie réelle est dominée par le dessus¹⁷⁹.

Démonstration. Soit une application linéaire $f: X \rightarrow \mathbb{C}$. Nous la décomposons en parties réelles et imaginaires par

$$f(x) = u(x) + iv(x) \quad (7.435)$$

où u et v sont des application à valeurs réelles.

178. Définition 7.380.

179. Définition 7.383.

(1) $\Rightarrow$ Nous supposons que $|f(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in X$. Nous avons les majorations

$$u(x) \leq |u(x)| \leq |f(x)| \leq p(x). \quad (7.436)$$

(2) $\Leftarrow$ Nous supposons que $u(x) \leq p(x)$, et nous devons prouver que $|f(x)| \leq p(x)$. Nous notons $z = f(x)$. Si $z = 0$ nous avons évidemment $|z| \leq p(x)$. Nous supposons que $z \neq 0$. Nous avons ¹⁸⁰

$$f\left(\frac{|z|}{z}x\right) = \frac{|z|}{z}f(x) = |z|. \quad (7.437)$$

En particulier $f\left(\frac{|z|}{z}x\right)$ est réel et est donc donné par u :

$$f\left(\frac{|z|}{z}x\right) = u\left(\frac{|z|}{z}x\right). \quad (7.438)$$

Nous avons alors le calcul

$$r = f\left(\frac{|z|}{z}x\right) = u\left(\frac{|z|}{z}x\right) \leq p\left(\frac{|z|}{z}x\right) = \left|\frac{|z|}{z}\right|p(x) = p(x). \quad (7.439)$$

□

7.19.2 Fonctionnelle de Minkowski

DEFooJQXHooGDaJtW

Définition 7.385 ([268]).

Soient un espace vectoriel X et une seminorme p sur X . Nous posons

$$\mathring{U}_p = \{x \in X \text{ tel que } p(x) < 1\} \quad (7.440a)$$

$$U_p = \{x \in X \text{ tel que } p(x) \leq 1\}. \quad (7.440b)$$

Notez qu'il n'y a aucune raison particulière de croire que U_p serait la fermeture de $\mathring{U}_p$ parce que pour l'instant nous n'avons aucune topologie sur X .

DEFooYQYBooRkAfjG

Définition 7.386 (Fonctionnelle de Minkowski[268]).

Soient un espace vectoriel X ainsi qu'une partie $A \subset X$. La **fonctionnelle de Minkowski** de A est l'application

$$p_A: X \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \inf\{\lambda > 0 \text{ tel que } x \in \lambda A\}. \quad (7.441)$$

Nous posons aussi $p_A(x) = \infty$ si l'ensemble est vide.

LEMooEIWEooPgskd

Lemme 7.387 ([268]).

Soient un espace vectoriel X sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ainsi qu'une partie $A \subset X$ qui est non vide, absorbante ¹⁸¹ et absolument convexe ¹⁸². Alors

(1) La fonctionnelle de Minkowski p_A est une seminorme.

(2) Nous avons ¹⁸³

$$\mathring{U}_{p_A} \subset A \subset U_{p_A}. \quad (7.442)$$

Note : le lemme 7.388 donnera la même inclusion en mieux parce qu'il n'y aura pas besoin de l'absolue convexité.

Démonstration. En plusieurs parties.

_____ C'est une seminorme. _____

180. Notez que si on écrit z en coordonnées polaires $z = re^{i\theta}$, le nombre $z/|z|$ est $e^{i\theta}$. Passez par les polaires pour simplifier les notations si cela vous chante, mais remarquez que le théorème 18.63 n'arrive que dans longtemps.

181. Définition 7.239.

182. Définition 7.240.

183. Avec les notations de 7.385.

- (1) $p_A(x) < \infty$ pour tout x Nous avons supposé que A est absorbant. Soit $x \in X$. Il existe $\rho > 0$ tel que $\lambda x \in A$ pour tout $|\lambda| < \rho$. En particulier $\rho x \in A$, et donc $x \in \frac{1}{\rho}A$. L'ensemble $\{\lambda > 0 \text{ tel que } x \in \lambda A\}$ est donc non vide parce qu'il contient $1/\rho$. Nous en déduisons que $p_A(x) \leq 1/\rho < \infty$.
- (2) $p_A(0) = 0$ Le lemme 7.241 nous dit que $0 \in A$, de telle sorte que $0 \in \lambda A$ pour tout $\lambda > 0$.
Donc

$$p_A(0) = \inf\{\lambda > 0 \text{ tel que } 0 \in \lambda A\} = 0. \quad (7.443)$$

- (3) Condition pour $\xi x \in \lambda A$ Soit $x \in X$. Nous prouvons que $\xi x \in \lambda A$ si et seulement si $x \in \frac{\lambda}{|\xi|}A$. En utilisant le lemme 7.243, nous avons

$$\lambda A = \frac{\lambda}{|\xi|} |\xi| A = \frac{\lambda}{|\xi|} \xi A. \quad (7.444)$$

Donc $\xi x \in \lambda A$ si et seulement si $\xi x \in \frac{\lambda}{|\xi|} \xi A$ si et seulement si $x \in \frac{\lambda}{|\xi|} A$.

- (4) $p_A(\xi x) = |\xi| p_A(x)$ Soient $x \in X$ et $\xi \in \mathbb{K}$ avec $\xi \neq 0$. Nous avons

$$p_A(\xi x) = \inf\{\lambda > 0 \text{ tel que } \xi x \in \lambda A\} \quad (7.445a)$$

$$= \inf\{\lambda > 0 \text{ tel que } x \in \frac{\lambda}{|\xi|} A\} \quad \text{par (3)} \quad (7.445b)$$

$$= \inf\{|\xi| \frac{\lambda}{|\xi|} > 0 \text{ tel que } x \in \frac{\lambda}{|\xi|} A\} \quad (7.445c)$$

$$= |\xi| \inf\{\frac{\lambda}{|\xi|} > 0 \text{ tel que } x \in \frac{\lambda}{|\xi|} A\} \quad (7.445d)$$

$$= |\xi| \inf\{\mu > 0 \text{ tel que } x \in \mu A\} \quad \text{cf. justif. (7.445e)}$$

$$= |\xi| p_A(x). \quad (7.445f)$$

Pour (7.445e). Si λ prend toutes les valeurs strictement positives, alors $\lambda/|\xi|$ aussi.

- (5) $p_A(x + y) \leq p_A(x) + p_A(y)$ Soit $\epsilon > 0$. Nous notons $S_A(x) = \{\lambda > 0 \text{ tel que } x \in \lambda A\}$.
Vu que $p_A(x)$ et $p_A(y)$ sont définis comme des infimums, il existe $\lambda, \mu > 0$ tels que

$$\lambda \leq p_A(x) + \epsilon \quad (7.446a)$$

$$\mu \leq p_A(y) + \epsilon \quad (7.446b)$$

avec $x \in \lambda A$ et $y \in \mu A$.

Vu que A est convexe, et vu que

$$\frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} = 1, \quad (7.447)$$

pour tout $z, z' \in A$ nous avons

$$\frac{\lambda}{\lambda + \mu} z + \frac{\mu}{\lambda + \mu} z' \in A, \quad (7.448)$$

ou encore : $\lambda z + \mu z' \in (\lambda + \mu)A$. En particulier pour z et z' choisis tels que $\lambda z = x$ et $\mu z' = y$ nous avons $x + y \in (\lambda + \mu)A$. Nous avons alors

$$p_A(x + y) = \inf\{\delta > 0 \text{ tel que } x + y \in \delta A\} \leq \lambda + \mu \leq p_A(x) + p_A(y) + 2\epsilon. \quad (7.449)$$

Étant donné que ϵ est arbitraire, nous avons prouvé que $p_A(x + y) \leq p_A(x) + p_A(y)$.

- (6) p_A est une seminorme Nous avons prouvé toutes les conditions de la définition 7.380.

$$\text{----- } \mathring{U}_{p_A} \subset A \subset U_{p_A} \text{ -----}$$

- (1) **Première inclusion** Soit $x \in \mathring{U}_{p_A}$, c'est-à-dire $p_A(x) < 1$, ou encore

$$\inf\{\lambda > 0 \text{ tel que } x \in \lambda A\} < 1. \quad (7.450)$$

Donc il existe $\lambda \in [0, 1[$ tel que $x \in \lambda A$. Vu que A est équilibré (ça fait partie d'être absolument convexe) et que $\lambda < 1$, nous avons $\lambda A \subset A$. Bref,

$$x \in \lambda A \subset A. \quad (7.451)$$

Cela prouve que $x \in A$.

- (2) **Seconde inclusion** Soit $x \in A$. Nous avons $1 \in \{\lambda > 0 \text{ tel que } x \in \lambda A\}$, et donc

$$p_A(x) = \inf\{\lambda > 0 \text{ tel que } x \in \lambda A\} \leq 1, \quad (7.452)$$

ce qui signifie que $x \in U_{p_A}$.

□

LEMooFUXVooJumSeW

Lemme 7.388 ([297]).

Soit un espace vectoriel topologique X ainsi qu'une partie convexe et absorbante A . Alors

$$\{x \in X \text{ tel que } p_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X \text{ tel que } p_A(x) \leq 1\}. \quad (7.453)$$

Démonstration. Nous prouvons les deux inclusions séparément.

- (1) **Première inclusion** Soit $x \in X$ vérifiant $p_A(x) < 1$. Nous avons

$$\inf\{\lambda > 0 \text{ tel que } x \in \lambda A\} < 1. \quad (7.454)$$

Soit $\lambda \in]0, 1[$ tel que $x \in \lambda A$. En particulier $x/\lambda \in A$. Étant donné que A est convexe et que $0 \in A$ (toute partie absorbante contient 0), le segment joignant 0 à x/λ est contenu dans A . En particulier, nous avons

$$x = \lambda \left(\frac{1}{\lambda} x \right) + (1 - \lambda) 0 \in A \quad (7.455)$$

- (2) **Seconde inclusion** Soit $x \in A$. Nous avons évidemment

$$1 \in \{\lambda > 0 \text{ tel que } x \in \lambda A\}. \quad (7.456)$$

Donc $p_A(x) = \inf\{\lambda > 0 \text{ tel que } x \in \lambda A\} \leq 1$.

□

LEMooFWCIooVwGutp

Lemme 7.389 ([268]).

Soit une seminorme q sur l'espace vectoriel X . Alors

- (1) $\mathring{U}_q$ est absorbant.
- (2) $\mathring{U}_q$ est absolument convexe.
- (3) $q = p_{\mathring{U}_q}$.

Démonstration. En plusieurs points.

- (1) **$\mathring{U}_q$ est absorbant** Soit $x \in X$. Nous devons montrer l'existence de $\rho_x > 0$ tel que pour tout $|\lambda| < \rho_x$, nous ayons $\lambda x \in \mathring{U}_q$.

Si $q(x) = 0$, alors $q(\lambda x) = |\lambda|q(x) = 0 < 1$ et donc n'importe quel $\rho_x > 0$ fait l'affaire.

Si $q(x) > 0$, alors il suffit de prendre $\rho_x \in]0, 1/q(x)[$. En effet si $|\lambda| < \rho_x$, nous avons

$$q(\lambda x) = |\lambda|q(x) \leq \frac{1}{q(x)}q(x) = 1, \quad (7.457)$$

et donc $\lambda x \in \mathring{U}_q$.

(2) $\dot{U}_q$ est équilibré Soient $|\alpha| \leq 1$, et $x \in \dot{U}_q$. Nous avons

$$q(\alpha x) = |\alpha|q(x) \leq q(x) < 1. \quad (7.458)$$

Donc $\alpha x \in \dot{U}_q$.

(3) $\dot{U}_q$ est convexe Soient $x, y \in \dot{U}_q$ ainsi que $t \in [0, 1]$. Nous avons

$$q(tx + (1-t)y) \leq q(tx) + q((1-t)y) \quad (7.459a)$$

$$= |t|q(x) + |1-t|q(y) \quad (7.459b)$$

$$\leq |t| + |1-t| \quad (7.459c)$$

$$= t + (1-t) \quad (7.459d)$$

$$= 1. \quad (7.459e)$$

Donc $tx + (1-t)y \in \dot{U}_q$.

(4) $q = p_{\dot{U}_q}$ Soit $x \in X$. Nous avons

$$p_{\dot{U}_q}(x) = \inf\{\lambda > 0 \text{ tel que } x \in \lambda \dot{U}_q\} = \inf\{\lambda > 0 \text{ tel que } q(x) < \lambda\} = q(x). \quad (7.460)$$

□

LEMooQSAJooCgPNnD

Lemme 7.390 ([298]).

Soit un espace vectoriel X , ainsi qu'une seminorme p sur X . Nous posons¹⁸⁴

$$\begin{aligned} B_p(0, 1) &= \{x \in X \text{ tel que } p(x) < 1\} \\ \bar{B}_p(0, 1) &= \{x \in X \text{ tel que } p(x) \leq 1\}. \end{aligned} \quad (7.461)$$

Alors pour tout $\epsilon > 0$ nous avons

$$\begin{aligned} \epsilon B_p(0, 1) &= \{x \in X \text{ tel que } p(x) < \epsilon\} \\ \epsilon \bar{B}_p(0, 1) &= \{x \in X \text{ tel que } p(x) \leq \epsilon\}. \end{aligned} \quad (7.462)$$

PROPOoDDURooJHfHLw

Proposition 7.391 ([298, 299]).

Soit un espace vectoriel topologique X , ainsi qu'une seminorme p . Les faits suivants sont équivalents.

ITEMooCAOXooGNBeSB

(1) p est continue.

ITEMooWWUSooEPkoWU

(2) p est continue en 0.

ITEMooPKFLooTRIKwo

(3) $B_p(0, 1)$ est un voisinage de 0.

ITEMooRTFZooUXUVnA

(4) $\bar{B}_p(0, 1)$ est un voisinage de 0.

Démonstration. Nous prouvons les implications dans l'ordre cyclique (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1). Courage, c'est parti.

(1) (1) $\Rightarrow$ (3) Nous avons

$$B_p(0, 1) = \{x \in X \text{ tel que } p(x) < 1\} = p^{-1}(]-\infty, 1[). \quad (7.463)$$

Vu que p est continue et que $]-\infty, 1[$ est ouvert, la partie $B_p(0, 1)$ est un ouvert contenant 0.

(2) (3) $\Rightarrow$ (4) La partie $\bar{B}_p(0, 1)$ contient $B_p(0, 1)$ qui est un ouvert contenant 0.

184. Nous ne supposons pas de compatibilité particulière entre la topologie de X et p . Donc à priori $\bar{B}_p(0, 1)$ n'est pas la fermeture de $B_p(0, 1)$. Si ça avait été le cas, nous aurions écrit $\overline{B_p(0, 1)}$.

- (3) **(4) $\Rightarrow$ (2)** Nous vérifions la condition de la définition 7.45(1). D'abord $p(0) = 0$. Nous considérons donc un ouvert W de $\mathbb{R}$ contenant 0, et nous allons chercher un voisinage V de 0 dans X tel que $p(V) \subset W$.

Soit $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset W$. Par hypothèse $\bar{B}_p(0, 1)$ est un voisinage de 0. Comme la topologie de X est vectorielle, la partie $\epsilon \bar{B}_p(0, 1)$ est également un voisinage de 0 pour tout $\epsilon > 0$. Montrons que

$$p\left(\frac{r}{2}\bar{B}_p(0, 1)\right) \subset B(0, r) \subset W. \quad (7.464)$$

Soit $x \in \frac{r}{2}\bar{B}_p(0, 1)$. Nous avons $p(x) \leq r/2$ par le lemme 7.390, et donc $p(x) \in B(0, r) \subset W$.

Bref, en posant $V = \frac{r}{2}\bar{B}_p(0, 1)$, nous avons bien $p(V) \subset W$.

- (4) **(2) $\Rightarrow$ (1)** Nous supposons que p est continue en $0 \in X$ et nous devons prouver qu'elle est continue en $a \in X$. Soient $x \in X$, et $r > 0$. Pour prouver la continuité de p en x (définition 7.45(1)), nous devons prouver l'existence d'un voisinage V de x tel que $f(V) \subset B(p(x), r)$.

Pour $\epsilon > 0$ nous posons

$$U_\epsilon = p^{-1}(B(0, \epsilon)). \quad (7.465)$$

Cette partie est ouverte parce que p est continue en 0 et que $p(0) = 0$. Nous allons prouver que si ϵ est assez petit, alors $p(x + U_\epsilon) \subset B(p(x), r)$.

Soit $z \in U_\epsilon$. Nous avons

$$|p(x) - p(x + z)| \leq p(x - (x + y)) \quad \text{lem. 7.382} \quad (7.466a)$$

$$= p(-z) \quad (7.466b)$$

$$= p(z) \quad (7.466c)$$

$$\subset B(0, \epsilon). \quad (7.466d)$$

Donc $p(x + z) \in B(p(x), \epsilon)$ et nous avons montré que $p(x + U_\epsilon) \subset B(p(x), \epsilon)$. Donc en prenant $\epsilon \leq r$, c'est bon. □

7.20 Topologie des seminormes

Soit $(p_i)_{i \in I}$ une famille de seminormes sur E . Il existe plusieurs façons de construire une topologie sur E à partir des seminormes.

7.20.1 Topologie initiale des seminormes

La première topologie qui nous tombe sous la main est celle de la topologie initiale¹⁸⁵ des p_i .

PROPooVUYTTooJXkRYW

Proposition 7.392 ([1, 300]).

Soient un espace vectoriel X et une seminorme $p: X \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in X$. En posant

$$B_\epsilon = \{x \in X \text{ tel que } |p(x) - p(x_0)| < \epsilon\}, \quad (7.467)$$

l'ensemble $\mathcal{B} = \{B_\epsilon\}_{\epsilon > 0}$ est une base de voisinages de x_0 pour la topologie initiale de p .

Démonstration. Nous nommons τ la topologie initiale de p sur X . Posons $y_0 = p(x_0)$. Une base de voisinages de y_0 (dans $\mathbb{R}$) est $\{B(y_0, \epsilon)\}_{\epsilon > 0}$. Donc la proposition 7.57 dit qu'une base de voisinages de x_0 dans X est donnée par

$$\{p^{-1}(B(p(x_0), \epsilon))\}_{\epsilon > 0}. \quad (7.468)$$

Or nous avons

$$p^{-1}(B(p(x_0), \epsilon)) = \{x \in X \text{ tel que } p(x) \in B(p(x_0), \epsilon)\} \quad (7.469a)$$

$$= \{x \in X \text{ tel que } |p(x) - p(x_0)| < \epsilon\}. \quad (7.469b)$$

□

185. La topologie minimale rendant les p_i continue, définition 7.55.

La topologie initiale des seminormes n'est pas une bonne idée, parce qu'elle ne donne en général pas lieu à une structure d'espace vectoriel topologique¹⁸⁶.

Exemple 7.393 ([300]).

Nous considérons $\mathbb{R}$ avec la seminorme

$$\begin{aligned} p: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x|. \end{aligned} \quad (7.470)$$

Nous considérons sur $\mathbb{R}$ la topologie initiale de cette seminorme. En vertu de la proposition 7.392, une base de topologie en $x_0 \in \mathbb{R}$ est donnée par les parties

$$B_\epsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } ||x| - |x_0|| < \epsilon\}. \quad (7.471)$$

Considérons la suite constante $x_k = 1$. Le nombre 1 est évidemment une limite de (x_k) . Mais en y regardant bien, le nombre -1 est également une limite. En effet une base de voisinages autour de -1 est donnée par

$$B_\epsilon(-1) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } ||x| - 1| < \epsilon\}. \quad (7.472)$$

Et donc $1 \in B_\epsilon(-1)$ pour tout ϵ .

Si $\mathbb{R}$ muni de cette topologie était un espace vectoriel topologique, la proposition 7.221 dirait que $-1 + 1 = 0$ serait une limite de $(x_k + x_k)$. La suite $(x_k + x_k)$ est la suite constante égale à 2. Or un voisinage typique autour de 0 est

$$B_\epsilon(0) = \{x \in \mathbb{R}' \mid |x| < \epsilon\}. \quad (7.473)$$

Autant dire que la suite $(x_k + x_k) = 2$ n'y rentre pas souvent. $\triangle$

7.20.2 Topologie avec des boules

DEFooROXMooCpmTwa

Définition 7.394.

Soit un espace vectoriel E sur lequel nous avons des seminormes $\{p_i\}_{i \in I}$. Pour chaque $i \in I$ nous posons

$$B_i(x, r) = \{y \in E \text{ tel que } p_i(y - x) < r\}. \quad (7.474)$$

Si J est une partie finie de I , nous considérons les parties

$$B_J(x, r) = \{y \in E \text{ tel que } p_j(y - x) < r \forall j \in J\}. \quad (7.475)$$

LEMooCNRNooWCejjZ

Lemme 7.395.

Soit un espace vectoriel E sur lequel nous avons des seminormes $\{p_i\}_{i \in I}$. Pour chaque $a \in E$, nous considérons la translation

$$\begin{aligned} t_a: E &\rightarrow E \\ x &\mapsto x + a. \end{aligned} \quad (7.476)$$

Pour toute partie finie $J \subset I$ nous avons

$$t_a(B_J(x, r)) = B_J(x + a, r) \quad (7.477)$$

Démonstration. D'une part si $y \in B_J(x + a, r)$, nous avons $p_j(y - x - a) < r$ pour tout $j \in J$. Dans ce cas, $y - a \in B_J(x, r)$, et nous avons donc bien $y = t_a(y - a) \in t_a(B_J(x, r))$.

Pour l'inclusion dans l'autre sens, c'est le même raisonnement. $\square$

DEFooZTKAooWYUyDa

Proposition-Définition 7.396 (Topologie et seminormes[301, 302, 268]).

Soient des seminormes $\{p_i\}_{i \in I}$ sur l'espace vectoriel E . Nous posons¹⁸⁷

$$\tau_B = \{\mathcal{O} \subset E \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{O}, \exists J, r \text{ tel que } B_J(x, r) \subset \mathcal{O}\} \cup \{\emptyset\}. \quad (7.478)$$

EQooNHMNooGJSOr

186. Espace vectoriel topologique, définition 7.219.

187. Nous ajoutons explicitement l'ensemble vide parce que nous n'avons pas envie de vérifier des propriétés du genre $\forall x \in \emptyset$, blah blah... Mais bon. En principe c'est pas obligatoire parce que l'ensemble vide est obtenu avec $r = 0$.

Dans cette formule, les J sont des parties finies de I .

Pour chaque $i \in I$ et $x \in E$ nous posons

$$\begin{aligned} p_{i,x}: E &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto p_i(y - x). \end{aligned} \quad (7.479)$$

Alors

- (1) Les parties τ_B forment une topologie sur E . ITEMooQPVRooKyOBPi
- (2) Les applications $p_i: E \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues pour (E, τ_B) . ITEMooQIYWooAmPCdI
- (3) Les applications $p_{i,x}: E \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues pour τ_B . ITEMooYGNWooYhBzSa
- (4) Si τ est une topologie sur E dans laquelle tous les $p_{i,x}$ sont continus, alors $\tau_B \subset \tau$. ITEMooMUUZooBKBhsH
- (5) L'espace topologique (E, τ_B) est un espace vectoriel topologique localement convexe ¹⁸⁸. ITEMooEGVFooNqDkdN

Cette topologie est la **topologie des seminormes** sur E .

Démonstration. En plusieurs parties.

- (1) **Pour (1)** Vérifier les trois conditions de la définition 7.1. D'abord E et $\emptyset$ sont dans τ_B . Ensuite si $\{\mathcal{O}_s\}_{s \in T}$ sont des éléments de τ_B , nous considérons $x \in \bigcup_{s \in T} \mathcal{O}_s$, et nous montrons que x est contenu dans une boule contenue dans $\bigcup_{s \in T} \mathcal{O}_s$. Nous considérons $s \in T$ tel que $x \in \mathcal{O}_s$. Vu que $\mathcal{O}_s \in \tau_B$, il existe J, r tels que

$$x \in B_J(x, r) \subset \mathcal{O}_s \subset \bigcup_{s \in T} \mathcal{O}_s. \quad (7.480)$$

Enfin pour l'intersection finie, l'intersection $B_J(x, r) \cap B_{J'}(x, r')$ contient la boule $B_{J \cup J'}(x, \delta)$ avec $\delta = \min\{r, r'\}$.

- (2) **Pour (2)** Pour montrer que p_i est continue, nous montrons que l'image inverse d'un ouvert est ouverte. Soit $a \in \mathbb{R}$ ainsi que $r > 0$. Nous considérons l'ouvert $B(a, r)$ et nous montrons que $p_i^{-1}(B(a, r)) \in \tau_B$. Soit $x \in p_i^{-1}(B(a, r))$. Nous allons montrer que si δ est assez petit, alors $B_i(x, \delta) \subset p_i^{-1}(B(a, r))$.

Soit $y \in B_i(x, \delta)$. Par définition nous avons $p_i(y - x) < \delta$, et par le lemme 7.382,

$$|p_i(y) - p_i(x)| \leq p_i(x - y) < \delta. \quad (7.481)$$

D'autre part, vu que $x \in p_i^{-1}(B(a, r))$, nous avons $|p_i(x) - a| < r$. Nous considérons $s > 0$ tel que $|p_i(x) - a| < r - s$. Avec tout ça,

$$|p_i(y) - a| \leq |p_i(y) - p_i(x)| + |p_i(x) - a| \quad (7.482a)$$

$$< \delta + r - s \quad (7.482b)$$

$$< r \quad (7.482c)$$

dès que nous choisissons $\delta < s$.

Nous avons donc montré que $p_i(y) \in B(a, r)$, et donc que $p_i(x, \delta) \subset B(a, r)$. Donc p_i est continue.

- (3) **Les translations sont continues** Nous considérons les translations $t_a: E \rightarrow E$ données par $t_a(x) = x + a$. Soit un ouvert $\mathcal{O}$ dans E . Nous prouvons que $t_a^{-1}(\mathcal{O}) = t_{-a}(\mathcal{O})$ est ouvert. Pour cela nous considérons un élément $x \in t_{-a}(\mathcal{O})$ et nous prouvons qu'il existe une boule autour de x contenue dans $t_{-a}(\mathcal{O})$. Soit $y \in \mathcal{O}$ tel que $x = y - a$; vu que $\mathcal{O}$ est ouvert, il existe r, J tels que $B_J(y, r) \subset \mathcal{O}$. Nous avons alors

$$t_{-a}(B_J(y, r)) \subset t_{-a}(\mathcal{O}), \quad (7.483)$$

et donc

$$B_J(y - a, r) = t_{-a}(B_J(y, r)) \subset t_{-a}(\mathcal{O}). \quad (7.484)$$

188. Définition 7.248.

- (4) **Pour (3)** Nous avons $p_{i,x} = p_i \circ t_{-x}$. Nous avons déjà prouvé que p_i et t_{-x} sont continues.
- (5) **Pour (4)** Soit une topologie τ telle que toutes les applications $p_{i,a}$ sont continues. Nous avons

$$B_i(a, r) = \{y \in E \text{ tel que } p_i(y - a) < r\} = \{y \in E \text{ tel que } p_{i,a}(y) < r\} = p_{i,a}^{-1}(B(0, r)). \quad (7.485)$$

Étant donné que $B(0, r)$ est ouverte et que $p_{i,a}$ est continue, la partie $p_{i,a}^{-1}(B(0, r))$ est ouverte. Donc τ contient toutes les boules de la forme $B_i(a, r)$.

Vu que τ est une topologie, elle contient toutes les intersections finies d'ouvert. En particulier si J est une partie finie de I , τ doit contenir toutes les boules de la forme $B_J(a, r)$.

- (6) **Pour (5)** Le point (5), ce sont les points suivants.
- (7) **L'addition est continue** Nous prouvons que l'application

$$\begin{aligned} a: E \times E &\rightarrow E \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned} \quad (7.486)$$

est continue pour la topologie τ_B . Soit $\mathcal{O} \in \tau_B$; nous devons prouver que la partie

$$a^{-1}(\mathcal{O}) = \{(x, y) \in E \times E \text{ tel que } x + y \in \mathcal{O}\} \quad (7.487)$$

est ouvert dans $E \times E$ (topologie produit). Soit $(x_0, y_0) \in a^{-1}(\mathcal{O})$. Vu que $x_0 + y_0 \in \mathcal{O}$, il existe un r et un $i \in I$ tels que $B_i(x_0 + y_0, r) \subset \mathcal{O}$.

Nous prouvons que si ϵ est assez petit,

$$B_i(x_0, \epsilon) \times B_i(y_0, \epsilon) \subset a^{-1}(B_i(x_0 + y_0, r)) \subset a^{-1}(\mathcal{O}). \quad (7.488)$$

Nous avons

$$p_i((x + y) - (x_0 + y_0)) = p_i((x - x_0) + (y - y_0)) \quad (7.489a)$$

$$\leq p_i(x - x_0) + p_i(y - y_0) \quad \text{def. 7.380(2)} \quad (7.489b)$$

$$\leq 2\epsilon. \quad (7.489c)$$

En prenant $\epsilon < r/2$ nous avons donc $a(x, y) \in B_i(x_0 + y_0, r) \subset \mathcal{O}$.

- (8) **La multiplication est continue** Nous considérons la multiplication

$$\begin{aligned} m: \mathbb{K} \times E &\rightarrow E \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda x, \end{aligned} \quad (7.490)$$

et nous montrons que c'est une application continue. Soit un ouvert $\mathcal{O} \subset E$, nous considérons $(\lambda_0, x_0) \in m^{-1}(\mathcal{O})$, et nous allons prouver que $\mathbb{K} \times E$ contient un ouvert contenant (λ_0, x_0) et contenu dans $m^{-1}(\mathcal{O})$.

Il existe $r > 0$ et $i \in I$ tels que $B_i(\lambda_0 x_0, r) \subset \mathcal{O}$. Nous allons trouver une valeur de $\epsilon > 0$ telle que l'ouvert $B(\lambda_0, \epsilon) \times B_i(x_0, \epsilon)$ vérifie

$$(\lambda_0, x_0) \in B(\lambda_0, \epsilon) \times B_i(x_0, \epsilon) \subset m^{-1}(B_i(\lambda_0 x_0, r)) \subset m^{-1}(\mathcal{O}). \quad (7.491)$$

Soit $(\lambda, x) \in B(\lambda_0, \epsilon) \times B_i(x_0, \epsilon)$. Nous avons $|\lambda| < |\lambda_0| + \epsilon$ et le calcul suivant :

$$p_i(\lambda x - \lambda_0 x_0) = p_i(\lambda x - \lambda x_0 + \lambda x_0 - \lambda_0 x_0) \quad (7.492a)$$

$$= p_i(\lambda(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)x_0) \quad (7.492b)$$

$$\leq |\lambda|p_i(x - x_0) + |\lambda - \lambda_0|p_i(x_0) \quad (7.492c)$$

$$\leq (|\lambda_0| + \epsilon) \underbrace{p_i(x - x_0)}_{< \epsilon} + \underbrace{|\lambda - \lambda_0|p_i(x_0)}_{< \epsilon} \quad (7.492d)$$

$$< \epsilon(|\lambda_0| + \epsilon) + \epsilon p_i(x_0) \quad (7.492e)$$

$$= \epsilon^2 + \epsilon(|\lambda_0| + p_i(x_0)). \quad (7.492f)$$

Il n'y a pas de problèmes pour trouver un $\epsilon > 0$ pour que le tout soit plus petit que r .

- (9) **Espace vectoriel topologique** Nous avons prouvé que (E, τ_B) était un espace vectoriel topologique.
- (10) **Localement convexe en 0** Nous montrons que $B_i(0, r)$ est convexe. Soient $x, y \in B_i(0, r)$ ainsi que $t \in [0, 1]$. Nous avons

$$p_i(tx + (1-t)y) \leq |t|p_i(x) + |1-t|p_i(y) \quad (7.493a)$$

$$\leq tr + (1-t)r \quad (7.493b)$$

$$= r. \quad (7.493c)$$

Donc $tx + (1-t)y \in B_i(0, r)$.

- (11) **Localement convexe** Soit $a \in E$, et montrons que $B_i(a, r)$ est convexe. Si t_a est la translation de vecteur a , le lemme 7.395 donne $B_i(a, r) = t_a(B_i(0, r))$. Soient $x, y \in B_i(a, r)$. Nous avons $x - a, y - a \in B_i(0, r)$, et vu que la boule $B_i(0, r)$ est convexe,

$$t(x - a) + (1-t)(y - a) \in B_i(0, r). \quad (7.494)$$

Un tout petit peu de calcul :

$$t(x - a) + (1-t)(y - a) = tx + (1-t)y - ta - (1-t)a \quad (7.495a)$$

$$= tx + (1-t)y - a. \quad (7.495b)$$

Cela prouve que $tx + (1-t)y - a \in B_i(0, r)$, et donc que $tx + (1-t)y \in B_i(a, r)$, ce qu'il fallait.

□

PROPOoNAFAooShzixo

Proposition 7.397 ([268, 1]).

Soit un espace vectoriel X ainsi qu'un ensemble de seminormes $\{p_i\}_{i \in I}$. Il existe une unique topologie τ sur X telle que

- (1) (X, τ) est un espace vectoriel topologique localement convexe.
- (2) Une base de topologie de τ en 0 est donnée par

$$\mathcal{B}_0 = \{B_J(0, \epsilon) \text{ tel que } J \text{ est fini dans } I, \epsilon > 0\}. \quad (7.496)$$

Cette topologie est la topologie τ_B donnée en (7.478).

Démonstration. En ce qui concerne l'existence, la topologie τ_B donnée dans la proposition 7.396 fait l'affaire. Nous démontrons l'unicité. Soit une topologie τ sur X vérifiant les conditions. Nous allons prouver que $\tau = \tau_B$.

En deux inclusions.

- (1) $\tau_B \subset \tau$ La topologie τ_B a une base formée de parties de la forme $B_J(x, r)$. Nous montrons que ces parties sont dans τ . En utilisant le lemme 7.395 et la proposition 7.221, nous avons

$$B_J(x, r) = B_J(0, r) + x \subset \mathcal{B}_0 + x \subset \tau. \quad (7.497)$$

Vu que τ contient une base de la topologie τ_B , nous avons $\tau_B \subset \tau$.

- (2) $\tau \subset \tau_B$ Les $B_J(0, r)$ qui forment une base de topologie de τ en 0 sont des éléments de τ_B . Les $B_J(x, r) = B_J(0, r) + x$ forment une base de topologie de τ en x , et font aussi partie de τ_B .

□

PropQPzGKVK

Proposition 7.398.

Soit un ensemble E muni de la topologie des seminormes $\{p_i\}_{i \in I}$. Une suite (x_n) dans E converge vers x si et seulement si pour tout $i \in I$,

$$p_i(x - x_n) \rightarrow 0. \quad (7.498)$$

Démonstration. Si la suite (x_n) converge¹⁸⁹ vers x , alors pour tout ouvert $\mathcal{O}$ autour de x , il existe un N tel que si $n \geq N$, alors $x_n \in \mathcal{O}$. En particulier pour tout j et pour tout $\epsilon > 0$, il doit exister un $n \geq N_j$ tel que $x_n \in B_j(x, \epsilon)$.

Voyons l'implication inverse. Soit $\epsilon > 0$. Pour tout $i \in I$, il existe un N_i tel que $n \geq N_i$ implique $p_i(x - x_n) \leq \epsilon$. Si $\mathcal{O}$ est un ouvert, il doit contenir une boule du type $B_J(x, r)$ pour un certain ensemble fini $J \subset I$.

En prenant $N = \max\{N_j \text{ tel que } j \in J\}$, nous avons $p_j(x - x_n) \leq \epsilon$ pour tout j et donc $x_n \in B_J(x, r)$. $\square$

PROPooGXGQooLRTwvH

Proposition 7.399 ([303, 1]).

Un espace vectoriel muni de seminormes sur un corps valué est un espace vectoriel topologique¹⁹⁰.

Démonstration. Soit un espace vectoriel E muni des seminormes $\{p_i\}_{i \in I}$. Sa topologie est donnée par la définition 7.396. Sur le corps $\mathbb{K}$, nous avons la topologie métrique 7.236.

(1) **Somme**

Nous commençons par prouver que

$$\begin{aligned} f: E \times E &\rightarrow E \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned} \tag{7.499}$$

est continue. Soit un ouvert A de E ; nous allons prouver que $f^{-1}(A)$ est ouvert dans $E \times E$ en prouvant qu'il contient un ouvert autour de chacun de ses points (théorème 7.8).

Soit $(a, b) \in f^{-1}(A)$. Vu que A est ouvert dans $(E, \{p_i\}_{i \in I})$, par définition de la topologie, il existe $i \in I$ et $r > 0$ tels que $B_i(f(a, b), r) \subset A$. Il nous faut un ouvert $U \in \tau_E$ autour de a et un ouvert $V \in \tau_E$ autour de b tels que $f(U \times V) \subset A$. Posons $U = B_i(a, \epsilon)$ et $V = B_i(b, \epsilon)$, considérons $x \in U$, $y \in V$ et montrons que $f(x, y) \in B_i(f(a, b), r)$. Nous avons

$$p_i(f(x, y) - f(a, b)) = p_i((x - a) + (y - b)) \tag{7.500a}$$

$$\leq p_i(x - a) + p_i(y - b) \quad \text{def. 7.380(2)} \tag{7.500b}$$

$$< 2\epsilon. \tag{7.500c}$$

En choisissant $\epsilon < r/2$ c'est bon.

(2) **Produit** Nous nommons $\mathbb{K}$ le corps de l'espace vectoriel E . Nous devons voir que l'application

$$\begin{aligned} f: \mathbb{K} \times E &\rightarrow E \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda x \end{aligned} \tag{7.501}$$

est continue.

La topologie sur $\mathbb{K}$ est sa topologie métrique, c'est-à-dire la topologie de son unique seminorme $\lambda \mapsto |\lambda|$. La topologie sur $\mathbb{K} \times E$ est donc celle des seminormes

$$\begin{aligned} q_i: \mathbb{K} \times E &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\lambda, x) &\mapsto \max\{|\lambda|, p_i(x)\}. \end{aligned} \tag{7.502}$$

EQooFSBEooWDsHot

Nous pouvons donc reprendre le même cheminement que celui que nous avons pris pour la somme. Soit un ouvert $\mathcal{O}$ dans E ; nous considérons $(\lambda, a) \in f^{-1}(\mathcal{O})$. Vu que $f(\lambda, a) \in \mathcal{O}$, et que $\mathcal{O}$ est ouvert pour la topologie des $\{p_i\}_{i \in I}$, il existe¹⁹¹ $i \in I$ et $r > 0$ tel que $B_i(f(\lambda, a), r) \subset \mathcal{O}$.

Nous allons prouver qu'il existe $s > 0$ tel que

$$f(B_i((\lambda, a), s)) \subset B_i(f(\lambda, a), r). \tag{7.503}$$

189. Définition 7.14.

190. Définition 7.219.

191. Voir la définition 7.396.

Ici encore, à gauche B_i est la boule pour la seminorme q_i donnée en (7.502). Soit $(\mu, x) \in B_i((\lambda, a), s)$, c'est-à-dire

$$q_i((\mu, x) - (\lambda, a)) = \max\{|\lambda - \mu|, p_i(a - x)\} < s. \quad (7.504)$$

En particulier nous avons les deux inégalités

$$\begin{cases} |\lambda - \mu| < s, \\ p_i(a - x) < s. \end{cases} \quad (7.505a)$$

$$\quad (7.505b)$$

Nous avons le calcul suivant : SUBEQSooHWMSoobJsRgy

$$p_i(f(\mu, x), \lambda a) = p_i(\mu x - \lambda a) \quad (7.506a)$$

$$= p_i(\mu x - \lambda x + \lambda x - \lambda a) \quad (7.506b)$$

$$\leq p_i((\mu - \lambda)x) + |\lambda|p_i(x - a) \quad (7.506c)$$

$$= |\mu - \lambda|p_i(x) + |\lambda|p_i(x - a) \quad (7.506d)$$

$$\leq sp_i(x) + |\lambda|s. \quad (7.506e)$$

C'est le moment de chercher une majoration pour $p_i(x)$:

$$p_i(x) = p_i(a + (x - a)) \leq p_i(a) + p_i(x - a) \leq p_i(a) + s. \quad (7.507)$$

Nous pouvons continuer la majoration (7.506) tout en ne nous posant pas de questions sur le sens de l'inégalité parce que nous cherchons $s > 0$:

$$p_i(f(\mu, x), \lambda a) \leq sp_i(x) + |\lambda|s \quad (7.508a)$$

$$\leq s(p_i(a) + s) + |\lambda|s \quad (7.508b)$$

$$= s^2 + (|\lambda| + p_i(a))s. \quad (7.508c)$$

Nous devons prouver l'existence d'un $s > 0$ tel que $s^2 + (|\lambda| + p_i(a))s < r$; autrement dit nous devons résoudre l'inéquation

$$s^2 + (|\lambda| + p_i(a))s - r < 0. \quad (7.509)$$

Nous sommes en présence d'un polynôme du second degré en s qui vaut $-r < 0$ en $s = 0$. Par continuité, il existe un voisinage de $s = 0$ dans $\mathbb{R}$ sur lequel le polynôme reste strictement négatif. Il suffit de prendre un s positif dans ce voisinage.

□

La proposition suivante est pratiquement une copie de la proposition 7.350.

PropNGjQnqF

Proposition 7.400.

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow (E, p_i)_{i \in I}$ une application. Nous avons équivalence entre

ItemHNxGMpCi

(1) la fonction f est continue en $t_0 \in \mathbb{R}$,

ItemHNxGMpCii

(2) si W est un voisinage ouvert de $f(t_0)$ il existe un voisinage ouvert V de t_0 (dans $\mathbb{R}$) tel que $f(V) \subset W$,

ItemHNxGMpCiii

(3) pour tout $i \in I$ et $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$f(B(t_0, \delta)) \subset B_i(f(t_0), \epsilon). \quad (7.510)$$

Démonstration. L'équivalence (1) $\Leftrightarrow$ (2) est la définition 7.45.

Prouvons (2) $\Rightarrow$ (3). Soient $i \in I$ et $\epsilon > 0$. Considérons la boule $B_i(f(t_0), \epsilon)$, qui est un ouvert de E contenant $f(t_0)$. Il existe donc un ouvert V autour de t_0 tel que $f(V) \subset B_i(f(t_0), \epsilon)$. En particulier V contient une boule $B(t_0, \delta)$ et nous avons

$$f(B(t_0, \delta)) \subset f(V) \subset B_i(f(t_0), \epsilon). \quad (7.511)$$

Prouvons (3) $\Rightarrow$ (2). Soit W un ouvert autour de $f(t_0)$. Il existe un $i \in I$ et $\epsilon > 0$ tel que $B_i(f(t_0), \epsilon) \subset W$. Nous avons alors un $\delta > 0$ tel que

$$f(B(t_0, \delta)) \subset B_i(f(t_0), \epsilon) \subset W. \quad (7.512)$$

□

Lorsqu'on a un espace E muni d'une quantité dénombrable de seminormes $\{p_k\}_{k \in I}$ nous définissons l'écart¹⁹²

$$d(x, y) = \sup_{k \geq 1} \min \left\{ \frac{1}{k}, p_k(x - y) \right\}. \quad (7.513) \quad \text{EqAAghiUB}$$

Notons que cet écart est invariant par translation au sens où pour tout x, y, h dans E nous avons

$$d(x + h, y + h) = \sup_{k \geq 1} \min \left\{ \frac{1}{k}, p_k(x - y) \right\} = d(x, y). \quad (7.514)$$

7.20.3 Seminorme et métrisable

Définition 7.401 ([268]).

Soit un espace vectoriel topologique X . Une famille $\{p_i\}_{i \in I}$ de seminormes est **séparante** si pour tout $x \in X \setminus \{0\}$, il existe $i \in I$ tel que $p_i(x) \neq 0$.

PROPooMJEQooHtIyeX

Proposition 7.402.

Si X est un espace topologique dont la topologie est donnée par une famille dénombrable et séparante de seminormes¹⁹³, alors il est métrisable¹⁹⁴.

Démonstration. Nous utilisons le théorème 7.334. Nous considérons les seminormes $\{p_i\}_{i \in I}$ où I est dénombrable.

- (1) **Base dénombrable** Vu que I est dénombrable, l'ensemble des parties finies de I est dénombrable¹⁹⁵. Pour $a \in X$, l'ensemble des boules de la forme $B_J(a, 1/n)$ avec $n \in \mathbb{N}$ et J fini dans I est donc dénombrable et forme une base de topologie en a .
- (2) **Singleton fermé** Prouvons que $\{0\}$ est fermé. Pour cela nous prouvons que le complémentaire est ouvert. Soit $a \neq 0$. Vu que $\{p_i\}_{i \in I}$ est séparante, il existe $i \in I$ tel que $p_i(a) \neq 0$. L'application p_i est continue par 7.396(2). Donc pour tout $\epsilon > 0$, la partie $p_i^{-1}(B(p_i(a), \epsilon))$ est un ouvert contenant a .

En prenant $0 < \epsilon < p_i(a)$ et en tenant compte du fait que $p_i(0) = 0$,

$$|p_i(0) - p_i(a)| = |p_i(a)| > \epsilon, \quad (7.515)$$

et donc $p_i(0) \notin B(p_i(a), \epsilon)$ ou encore

$$0 \notin p_i^{-1}(B(p_i(a), \epsilon)). \quad (7.516)$$

Bref, l'ouvert $p_i^{-1}(B(p_i(a), \epsilon))$ contient a mais pas 0.

□

192. Dans le cas de $E = \mathcal{D}(K)$, la première seminorme est numérotée à zéro, donc il faudra poser $d(\varphi_1, \varphi_2)$ avec p_{k-1} au lieu de p_k .

193. Topologie des seminormes, proposition 7.396.

194. Métrisable, définition 7.140.

195. Lemme 1.223.

7.20.4 Boules et topologie

Proposition 7.403 ([295]).

La topologie donnée par les boules

$$B_k(a, r) = \{x \in E \text{ tel que } \forall k \leq \frac{1}{r}, p_k(x - a) < r\} \quad (7.517)$$

est la même que celle « usuelle » donnée par les seminormes. En disant « la même » nous entendons le fait que les ouverts sont les mêmes : A est ouvert pour une des deux topologies si et seulement si il est ouvert pour l'autre.

Démonstration. Pour cette démonstration nous allons préfixer par d les notions topologiques issues des boules (7.517) et par P celle des seminormes : P -continue, d -ouvert, etc.

D'abord nous avons

$$B(a, r) = \bigcap_{k \leq \frac{1}{r}} B_k(a, r). \quad (7.518)$$

Si $\mathcal{O}$ est un d -ouvert, il contient une d -boule autour de chacun de ses points. Or d'après la formule (7.518), une d -boule est une intersection finie de P -ouverts et donc est un P -ouvert par définition. Donc $\mathcal{O}$ contient un P -ouvert autour de tous ses points et est donc P -ouvert.

Inversement nous supposons que $\mathcal{O}$ est un P -ouvert. Commençons par prouver que les seminormes p_k sont d -continues. En effet soient $k \in \mathbb{N}$, $\epsilon \leq \frac{1}{k}$ et $x, y \in E$ tels que $d(x, y) \leq \epsilon$; nous avons

$$|p_k(y) - p_k(x)| \leq p_k(x - y) \quad (7.519a)$$

$$= \min\left\{\frac{1}{k}, p_k(x - y)\right\} \quad (7.519b)$$

$$\leq d(x, y) \quad (7.519c)$$

$$\leq \epsilon. \quad (7.519d)$$

Montrons à présent que $\mathcal{O}$ est d -ouverte. Si $a \in \mathcal{O}$, il existe k et r tels que $B_k(a, r) \subset \mathcal{O}$. Soit $x \in B_k(a, r)$. Montrons que si ϵ est suffisamment petit, la d -boule $B(x, \epsilon)$ est incluse à $B_k(a, r)$. Pour cela prenons $y \in B(x, \epsilon)$; nous avons

$$|p_k(a - x) - p_k(a - y)| \leq d(x, y) \leq \epsilon. \quad (7.520)$$

Par conséquent le nombre $p_k(a - y)$ est dans l'intervalle

$$p_k(a - x) \pm \epsilon \quad (7.521)$$

et il suffit de prendre $\epsilon < \frac{r - p_k(a - x)}{2}$. □

Théorème 7.404 ([304]).

Soit une famille de seminormes $\{p_i\}_{i \in I}$ sur E . Pour une seminorme q sur E , les conditions suivantes sont équivalentes.

(1) L 'application $q: E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

(2) Il existe une partie finie J de I et un nombre $M \in \mathbb{R}$ tels que

$$q(x) \leq M \max_{j \in J} p_j(x) \quad (7.522)$$

pour tout $x \in E$.

(3) L 'application q est bornée dans un voisinage de 0.

Démonstration. En trois parties.

(1) **(1) $\Rightarrow$ (3)**

C'est la proposition 7.162.

(2) **(3) $\Rightarrow$ (2)**

Soit un voisinage V de 0 sur lequel q est borné par μ . Ce voisinage contient une boule centrée en 0. Par la définition 7.396, nous avons une partie finie $J \subset I$ et $r > 0$ tels que q est bornée par μ sur $B_J(0, r)$.

Soit $x \in E$. Nous posons

$$t \in]0, \min_{j \in J} \frac{r}{p_j(x)}[. \quad (7.523)$$

Pour $l \in J$ nous avons alors

$$p_l(tx) = tp_l(x) \quad (7.524a)$$

$$< \min_{j \in J} \frac{r}{p_j(x)} p_l(x) \quad (7.524b)$$

$$< \frac{r}{p_l(x)} p_l(x) \quad (7.524c)$$

$$= r. \quad (7.524d)$$

Donc $tx \in B_J(0, r)$. En ce qui concerne q nous avons alors $tq(x) = q(tx) < \mu$ et donc

$$q(x) < \frac{\mu}{t}. \quad (7.525)$$

En utilisant la proposition 1.554,

$$q(x) < \mu \frac{1}{t} \quad (7.526a)$$

$$= \mu \frac{1}{\min_{j \in J} \frac{r}{p_j(x)}} \quad (7.526b)$$

$$= \mu \max_{j \in J} \frac{p_j(x)}{r} \quad (7.526c)$$

$$= \frac{\mu}{r} \max_{j \in J} p_j(x). \quad (7.526d)$$

En posant $M = \mu/r$ nous avons

$$q(x) \leq M \max_{j \in J} p_j(x), \quad (7.527)$$

comme demandé.

(3) **(2) $\Rightarrow$ (1)**

Nous avons une partie finie $J \subset I$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que $q(x) \leq M \max_{j \in J} p_j(x)$ pour tout $x \in E$. Soit $x \in E$. Nous prouvons que q est continue en x . Pour tout y nous avons

$$|q(y) - q(x)| \leq q(x - y) \leq M \max_{j \in J} p_j(x - y). \quad (7.528)$$

Soit $\epsilon > 0$. Si nous prenons $y \in B_J(x, \epsilon)$, alors nous avons

$$|q(y) - q(x)| \leq M\epsilon. \quad (7.529)$$

Cela prouve que q est continue en x , et donc continue sur E par la proposition 7.46.

□

CORooSLUCooRaZyYK

Corolaire 7.405 ([304]).

Soient une famille de seminormes P sur E , ainsi qu'une famille Q de seminormes sur F . Une application linéaire $f: E \rightarrow F$ est continue si et seulement si $q \circ f$ est une seminorme continue sur E pour tout $q \in Q$.

CORooGMVHooNgYOaY

Corolaire 7.406 ([304]).

Soient des seminormes $P = \{p_i\}_{i \in I}$ sur E . Soit une application linéaire $f: E \rightarrow \mathbb{K}$. Elle est continue si et seulement si il existe une partie finie $J \subset I$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que

$$|f(x)| < M \max_{j \in J} p_j(x) \quad (7.530)$$

pour tout $x \in E$.

7.20.4.1 Norme induite sur la topologie quotient

PROPooDUAVooEfrEGI

Proposition-Définition 7.407 (Norme quotient[305]).

Soient un espace vectoriel topologique normé E , et un sous-espace M . Pour $\alpha \in E/M$ nous posons

$$\|\alpha\|_{E/M} = d(\alpha, M) \quad (7.531)$$

où $d(\alpha, M)$ est la distance entre la partie α et la partie M .

Nous avons :

ITEMooQOZXooZiZdTn

(1) La formule $\|\alpha\| = \inf_{u \in \alpha} \|u\|_E$.

ITEMooFEOGooTTDgCj

(2) L'opération $\|\cdot\|$ est une seminorme¹⁹⁶ sur l'espace vectoriel E/M .

ITEMooWCCSooMeqQHL

(3) C'est une norme si et seulement si M est fermé.

Nous parlons de **(semi)norme quotient**.

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)** La définition de $\|\alpha\|$ est $\|\alpha\| = d(\alpha, M) = \inf_{\substack{u \in \alpha \\ v \in M}} \|u - v\|$. Mais

$$\{u - v \text{ tel que } u \in \alpha, v \in M\} = \alpha, \quad (7.532)$$

donc

$$d(\alpha, M) = \inf_{u \in \alpha} \|u\|. \quad (7.533)$$

(2) **Pour (2)** Nous devons vérifier les propriétés de la définition 7.380. D'abord en tant que distance, nous avons $\|\alpha\| \geq 0$ pour tout α .

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ nous avons aussi

$$\|\lambda\alpha\| = \inf_{u \in \lambda\alpha} \|u\| = \inf_{u \in \alpha} \|\lambda u\| = |\lambda| \inf_{u \in \alpha} \|u\| = |\lambda| \|\alpha\|. \quad (7.534)$$

Enfin si $\alpha, \beta \in E/M$, nous avons

$$\inf_{u \in \alpha + \beta} \|u\| \leq \inf_{\substack{u \in \alpha \\ v \in \beta}} \|u + v\| \leq \inf_{\substack{u \in \alpha \\ v \in \beta}} (\|u\| + \|v\|) = \inf_{u \in \alpha} \|u\| + \inf_{v \in \beta} \|v\| = \|\alpha\| + \|\beta\|. \quad (7.535)$$

(3) **Pour (3) en supposant que M est fermé** Nous supposons que M est fermé et nous montrons que $\|\cdot\|$ est une norme. Nous supposons donc que $d(\alpha, M) = 0$ et nous prouvons que $\alpha = 0$. Soit $x \in E$ tel que $\alpha = [x]$. Nous avons donc

$$\alpha = \{x - v \text{ tel que } v \in M\} \quad (7.536)$$

Notez qu'on a écrit $-v$ et non $+v$. De toutes façons M est vectoriel ; ça ne change rien et ça tombera mieux plus bas.

Nous avons donc

$$0 = \|\alpha\| = d(\alpha, M) = \inf_{u \in \alpha} \|u\| = \inf_{v \in M} \|x - v\|. \quad (7.537)$$

Il existe donc une suite (v_n) dans M telle que $\|x - v_n\| \rightarrow 0$. La suite est donc convergente : $v_n \rightarrow x$. Comme M est fermé, la proposition 7.154 nous indique que la limite doit être dans M . Autrement dit : $x \in M$. Par définition des classes nous avons alors $\alpha = [x] = 0$.

(4) **Pour (3) en supposant que $\|\cdot\|$ est une norme**

Supposons que M n'est pas fermé. Il ne contient donc pas son adhérence. Soit $a \in \text{Adh}(M) \setminus M$. Vu que M est vectoriel, nous supposons que $a \neq 0$.

Étant donné que a est dans l'adhérence de M nous avons $d(a, M) = 0$ et donc $\|a\| = 0$.

□

196. Définition 7.380.

ii Avertissement/question à la lectrice !! 7.408

Je ne suis pas certain de la proposition 7.409. Peut-être qu'il faut ajouter l'hypothèse que M est fermé.

PROPooKLXSooSOUZkc

Proposition 7.409.

Soient un espace vectoriel topologique normé E , et un sous-espace M . La topologie quotient¹⁹⁷ sur E/M est la même que celle de la seminorme induite¹⁹⁸.

7.20.5 Espace dual

Nous parlerons plus en détail d'espace dual d'un espace normé en la section 10.16.

DefHUelCDD

Lemme-Définition 7.410.

Soient F un espace métrique et E un espace topologique vectoriel. Pour chaque $v \in E$, l'application

$$\begin{aligned} p_v : \mathcal{L}(E, F) &\rightarrow \mathbb{R} \\ T &\mapsto \|T(v)\|_F \end{aligned} \quad (7.538)$$

est une seminorme.

La **topologie *-faible** sur $\mathcal{L}(E, F)$ est la topologie des ces seminormes.

7.411.

C'est une famille de seminormes indicées par les éléments de E . Si E est un espace métrique, c'est cette topologie qui sera considérée sur son dual topologique E' des applications continues $E \rightarrow \mathbb{R}$.

La topologie ainsi définie est, dans l'idée, celle qui sera choisie pour les espaces de distributions, voir la définition 30.30.

La proposition suivante indique qu'elle est un peu la topologie de la convergence ponctuelle.

PROPooQWOooUBhBiG

Proposition 7.412.

Soient E un espace muni de la topologie des seminormes $\{p_i\}_{i \in I}$ et F un espace métrique. Soient une suite (T_n) dans $\mathcal{L}(E, F)$ et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Nous avons $T_n \xrightarrow{*} T$ si et seulement si $T_n(v) \xrightarrow{F} T(v)$ pour tout $v \in E$.

Démonstration. Nous avons équivalence entre les lignes suivantes :

$$T_n \xrightarrow{*} T \quad (7.539a)$$

$$p_v(T_n - T) \rightarrow 0 \forall v \in E \quad \text{proposition 7.398} \quad (7.539b)$$

$$\|T_n(v) - T(v)\|_F \rightarrow 0 \forall v \in E \quad (7.539c)$$

$$T_n(v) \xrightarrow{E} T(v). \quad (7.539d)$$

□

7.20.6 Espace $C^k(\mathbb{R}, E')$

Nous revenons à nos histoires de limites de la définition 7.14.

PropRBCiHbz

Proposition 7.413 (Unicité de la limite dans un dual topologique).

Soient E un espace métrique et E' son dual topologique muni de sa topologie de la définition 7.410. Il y a unicité de l'élément de E' vers lequel une fonction $u : \mathbb{R} \rightarrow E'$ peut converger.

Démonstration. Soit T un élément vers lequel u_t converge lorsque $t \rightarrow t_0$. Soient $\epsilon > 0$ et $x \in E$. La boule $B_x(T, \epsilon)$ de E' subordonnée à la norme p_x et centrée en T est un ouvert de E' . Étant

^{197.} Topologie quotient, définition 7.67.

^{198.} Voir la définition 7.407.

donné que u converge vers T il existe $\delta > 0$ tel que $u_t \in B_x(T, \epsilon)$ dès que $|t - t_0| \leq \delta$. Nous avons donc, pour tout $x \in E$, la limite (dans $\mathbb{R}$) :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} u_t(x) = T(x). \quad (7.540)$$

Cela prouve que la convergence de u vers T implique l'existence pour tout x de la limite de $u_t(x)$ dans $\mathbb{R}$. Si T' est un autre élément vers lequel u_t converge, nous avons par le même raisonnement que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} u_t(x) = T'(x). \quad (7.541)$$

Par unicité de la limite dans $\mathbb{R}$ nous devons alors avoir $T(x) = T'(x)$ pour tout x , c'est-à-dire $T = T'$. $\square$

PropVKSNflB

Proposition 7.414.

Soit $u: \mathbb{R} \rightarrow E'$ une fonction continue. Alors

ItemLSJjfZdi

(1) pour tout $x \in E$ la fonction $t \mapsto u_t(x)$ est continue,

ItemLSJjfZdii

(2) pour tout $x \in E$ nous avons la limite dans $\mathbb{R}$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} u_t(x) = u_{t_0}(x), \quad (7.542)$$

EqWKdEPVQ

(3) nous avons la limite dans E'

ItemLSJjfZdiii

$$\lim_{t \rightarrow t_0} u_t = u_{t_0}. \quad (7.543)$$

Démonstration. Soient $x \in E$ et $\epsilon > 0$. Par la proposition 7.400 la continuité de u donne un $\delta > 0$ tel que

$$u_{B(t_0, \delta)} \subset B_x(u_{t_0}, \epsilon). \quad (7.544)$$

C'est-à-dire que si $|t - t_0| \leq \delta$ nous avons

$$|u_{t_0}(x) - u_t(x)| < \epsilon, \quad (7.545)$$

ce qui signifie bien que la fonction $t \mapsto u_t(x)$ est continue en tant que fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Cela est le point (1). Le théorème de limite et continuité dans $\mathbb{R}$ nous donne immédiatement la limite (7.542).

Nous passons à la preuve du point (3). Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de E' contenant u_{t_0} . Il existe donc un $i \in I$ et $\epsilon > 0$ tel que $B_i(u_{t_0}, \epsilon) \subset \mathcal{O}$. Étant donné que u est continue, il existe $\delta > 0$ tel que

$$u_{B(t_0, \delta)} \subset B_i(u_{t_0}, \epsilon) \subset \mathcal{O}. \quad (7.546)$$

Cela signifie bien que

$$|t - t_0| \leq \delta \Rightarrow u_t \in \mathcal{O}, \quad (7.547)$$

c'est-à-dire que nous avons la limite $\lim_{t \rightarrow t_0} u_t = u_{t_0}$ dans E' . Pour dire cela nous avons utilisé la définition 7.135 de la limite et le résultat d'unicité 7.413. $\square$

DefDZsypWu

Définition 7.415.

Si nous avons une application $u: \mathbb{R} \rightarrow E'$ nous considérons sa **dérivée** donnée par la limite

$$u'_{t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{u_t - u_{t_0}}{t - t_0}. \quad (7.548)$$

Cela est un nouvel élément de E' (pour peu que la limite existe). La fonction $u': \mathbb{R} \rightarrow E'$ ainsi définie peut être continue ou non. Cela nous permet de définir les espaces $C^k(\mathbb{R}, E')$ et $C^\infty(\mathbb{R}, E')$.

Une des principales utilisations que nous ferons de ces espaces seront les espaces de fonctions à valeurs dans les distributions tempérées dont nous parlerons dans la section 30.4.

7.21 Espaces de Baire

Lemme 7.416 ([1]).

LEMooRTXFooCMCaHC

Soit un espace topologique X . Une partie A est un ouvert dense si et seulement si $X \setminus A$ est un fermé d'intérieur vide.

Démonstration. Nous savons, par définition que le complémentaire d'un ouvert est fermé et inversement. Soient une partie $A \subset X$ ainsi que son complémentaire $F = X \setminus A$. Nous avons équivalence entre :

- F est d'intérieur vide,
- aucun ouvert non vide n'est contenu dans F
- tout ouvert non vide intersecte $X \setminus F$
- tout ouvert non vide intersecte A
- A est dense dans X .

□

DEFooYEMNooLSXLya

Proposition-Définition 7.417 (Espace de Baire[1, 306, 307]).

Soit un espace topologique X . Les propriétés suivantes sont équivalentes.

ITEMooBHOooKyToBw

(1) Toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.

ITEMooFMDAooUPaULP

(2) Toute union dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide.

ITEMooKSNYooIgzLey

(3) Le seul ouvert maigre¹⁹⁹ de X est le vide.

Quand X vérifie ces propriétés, nous disons que X est une **espace de Baire**.

Démonstration. En plusieurs parties.

- (1) **(1) implique (2)** Soient des fermés d'intérieur vide $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Nous posons $A_i = X \setminus F_i$ et nous utilisons le lemme 1.45 pour dire que

$$\bigcup_i F_i = \bigcup_i (X \setminus A_i) = X \setminus \left(\bigcap_i A_i \right). \quad (7.549)$$

Par hypothèse, $\bigcap_i A_i$ est un ouvert dense. Par le lemme 7.416 son complémentaire est un fermé d'intérieur vide.

- (2) **(2) implique (1)** Soient des ouverts denses $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$. En notant $F_i = X \setminus A_i$, nous avons

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (X \setminus F_i) = X \setminus \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i \right). \quad (7.550)$$

Par hypothèse $\bigcup_i F_i$ est un fermé d'intérieur vide. Donc son complémentaire est un ouvert dense.

- (3) **(1) implique (3)** Soient un espace de Baire X et un ouvert maigre $A \subset X$. Nous avons $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ où les A_i sont des parties nulle part denses²⁰⁰. Nous devons montrer que $A = \emptyset$.

Vu que A_i est nulle part dense, $\text{Int}(\bar{A}_i) = \emptyset$ pour tout i . Nous avons :

$$\text{Int}(A) \subset \text{Int} \left(\bigcup_i A_i \right) \subset \text{Int} \left(\bigcup_i \bar{A}_i \right) = \emptyset \quad (7.551)$$

parce que X étant de Baire, l'union de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide. Nous avons prouvé que $\text{Int}(A) = \emptyset$. Mais A étant ouvert nous avons $\text{Int}(A) = A$.

- (4) **(3) implique (1)** Nous supposons que tout ouvert maigre de X est vide. Soient des fermés $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'intérieurs vides. Nous considérons la partie $A = \text{Int} \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i \right)$.

199. Définition 7.378

200. Définition 7.377.

(4a) A est ouvert Parce que c'est l'intérieur d'une partie.

(4b) F_i est nulle part dense Vu que F_i est fermé nous avons $\bar{F}_i = F_i$ et donc $\text{Int}(\bar{F}_i) = \text{Int}(F_i) = \emptyset$.

Donc l'ouvert A est une réunion dénombrable de parties nulle part denses. C'est donc un ouvert maigre, et nous en déduisons que $A = \emptyset$.

Par 7.417 nous savons que X est de Baire.

□

PROPooGVTDooRMaEUK

Proposition 7.418 ([217, 308]).

Plusieurs choses à propos d'espaces de Baire.

ITEMooYZKYooEvcLTx

(1) Tout espace de Baire Hausdorff²⁰¹ sans point isolé est non dénombrable.

ITEMooBZCAooIYQpvO

(2) Si U est une partie ouverte d'un espace de Baire X , alors toute partie maigre dans U (topologie induite) est maigre dans X .

ITEMooGHMTooDYUicn

(3) Si U est ouvert dans l'espace de Baire X , alors U est un espace de Baire pour la topologie induite.

Démonstration. Plusieurs points.

(1) **Pour (1)** Soit un espace de Baire Hausdorff. Un singleton est fermé par le lemme 7.76 et d'intérieur vide. En effet si U est un ouvert contenant a , il contient forcément autre chose que a parce que X n'a pas de points isolés. Donc il n'y a pas d'ouverts contenus dans $\{a\}$.

Une réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide parce que X est de Baire (définition 7.417). Donc X n'est pas une union dénombrable de singletons.

(2) **Pour (2)** Soit une partie maigre M de X . Nous avons $M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$ où F_i est fermé d'intérieur vide dans U . Le lemme 7.35 nous dit que

$$\text{Int}_X(\text{Adh}_X(F_i)) = \emptyset. \quad (7.552)$$

En particulier $\text{Adh}_X(F_i) \cap U$ est nulle part dense dans X (définition 7.377(1)).

La formule (7.25) dit que $F_i = \text{Adh}_X(F_i) \cap U$, et donc

$$M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (\text{Adh}_X(F_i) \cap U) \quad (7.553)$$

est une union dénombrable de parties nulle part denses. Donc M est maigre dans X .

(3) **Pour (3)** Soit un ouvert maigre A de U . Par le point (2), A est maigre dans X et donc vide parce que X est de Baire. Cela prouve que tout ouvert maigre de U est vide et donc que U est de Baire (définition 7.417).

□

ThoBBIIjNM

Théorème 7.419 (Théorème de Baire[307, 217, 308]).

Les espaces suivants sont de Baire :

(1) les espaces topologiques localement compacts²⁰²,

(2) les espaces métriques complets (donc ceux de Banach en particulier),

(3) tout ouvert d'un espace de Baire.

Démonstration. En plusieurs parties.

201. Définition 7.74.

202. Définition 7.181.

- (1) **Espaces topologiques localement compacts** Nous allons utiliser les propriétés de 7.417. Soient un espace topologique localement compact X ainsi que des fermés F_i d'intérieurs vides. Nous posons $F = \bigcap_{i=0}^{\infty} F_i$, et nous prouvons que F est d'intérieur vide. Pour cela nous considérons un ouvert $U \subset X$ et nous prouvons que U n'est pas entièrement inclus dans F .

Par 7.184, il existe un ouvert à fermeture compacte $U_0 \subset U$. Vu que F_1 est fermé, $U_0 \setminus F_1$ est ouvert et comme F_1 est d'intérieur vide, il ne contient aucun ouvert, donc l'ouvert $U_0 \setminus F_1$ est non vide.

Si $x \in U_0 \setminus F_1$, alors $\{x\}$ est compact et le lemme 7.183 dit qu'il existe un ouvert V_1 tel que $\bar{V}_1$ est compact et tel que

$$x \in V_1 \subset \bar{V}_1 \subset U_0 \setminus F_1. \quad (7.554)$$

Maintenant V_1 étant ouvert, il n'est pas contenu dans $V_1 \setminus F_2$ qui est un ouvert non vide..

Bref, je vous laisse écrire la récurrence proprement, mais nous avons des ouverts V_n tels que $\bar{V}_n$ est compact et $\bar{V}_n \subset V_{n-1} \setminus F_n$.

Les parties $\bar{V}_n$ sont des compacts emboîtés non vides. La proposition 7.123 dit que $\bigcap_n \bar{V}_n$ est non vide. Soit $a \in \bigcap_n \bar{V}_n$. Pour tout $k \neq 1$ nous avons

$$a \in \bigcap_n \bar{V}_n \subset \bar{V}_k \subset V_{k-1} \setminus F_k. \quad (7.555)$$

Donc a n'est pas dans F_k . De plus $a \in \bar{V}_1 \subset U_0 \setminus F_1$. Donc a n'est pas non plus dans F_1 . Bref, a n'est pas dans F .

Nous devons encore voir que $a \in U_0$. Cela est facile :

$$a \in \bigcup_n \bar{V}_n \subset \bar{V}_1 \subset U_0 \setminus F_1 \subset U_0. \quad (7.556)$$

- (2) **Espaces métriques complets** Soit (E, d) un espace métrique complet. Soient V un ouvert quelconque de E et U_n une suite d'ouverts denses. Le but est de prouver que l'ensemble $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ intersecte V . Vu que V est ouvert dans un espace métrique, il contient une boule ouverte et donc une boule fermée B_0 de rayon strictement positif. L'ensemble U_1 est dense et intersecte donc un ouvert contenu dans B_0 . L'intersection est un ouvert qui contient alors une boule fermée B_1 de rayon strictement positif. Continuant ainsi nous construisons une suite de fermés emboîtés B_n telle que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \cap V \quad (7.557)$$

contient l'intersection des B_n . Par le théorème 7.351 des fermés emboîtés (que nous utilisons parce que E est métrique et complet), cette intersection est non vide.

- (3) **Ouvert d'un espace de Baire** C'est la proposition 7.418(3).

□

Parmi les applications du théorème de Baire, nous avons

- Le théorème de Banach-Steinhaus 10.175.
- Le théorème de l'application ouverte 10.184.

Chapitre 8

Espaces vectoriels (encore)

8.1 Déterminants

SecGYzHWs

8.2 Applications multilinéaires

DefFRHooKnPCT

Définition 8.1 (Application multilinéaire).

Soient des espaces vectoriels $V_1, \dots, V_k$ ainsi qu'un espace vectoriel W . Une application $T: V^k \rightarrow W$ est dite **k -linéaire** ou **k -multilinéaire** si pour tout $(v_1, \dots, v_k) \in V_1 \times \dots \times V_k$ les applications

$$\begin{aligned} T_i: V_i &\rightarrow W \\ x &\mapsto T(v_1, \dots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \dots, v_k) \end{aligned} \quad (8.1)$$

sont linéaires.

En particulier lorsque $k = 2$, nous parlons d'applications **bilinéaires**.

Nous notons $\mathcal{L}(V_1, \dots, V_k; W)$ ou $\mathcal{L}_k(V_1, \dots, V_k; W)$ l'ensemble des applications k -linéaires de $V_1 \times \dots \times V_k$ vers W . Lorsque tout les V_i sont identiques nous notons $\mathcal{L}_k(V, W)$.

DEFooZFCKooGIoYrE

Définition 8.2.

Soit E , un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Une forme multilinéaire $f: E^k \rightarrow \mathbb{K}$ est **antisymétrique** si

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_k) \quad (8.2)$$

pour tout couple (i, j) .

8.3.

Il serait une erreur¹ de noter $\mathcal{L}(V \times V, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications bilinéaires sur V . En effet, $\mathcal{L}(V \times V, \mathbb{R})$ est l'ensemble des applications linéaires $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$.

Si $S \in \mathcal{L}(V \times V, \mathbb{R})$, il n'y a pas de formules particulières pour $S(u, \lambda v)$. Par contre si $T \in \mathcal{L}_2(V, W)$, alors

$$T(u, \lambda v) = \lambda T(u, v). \quad (8.3)$$

Nous avons par contre

$$T(\lambda u, \lambda v) = \lambda^2 T(u, v) \quad (8.4)$$

alors que

$$S(\lambda u, \lambda v) = S(\lambda(u, v)) = \lambda S(u, v). \quad (8.5)$$

Certains[309] notent $\otimes^k V^*$ l'espace des formes k -linéaires sur V , voir la proposition 10.206.

Exemple 8.4.

Soit une application linéaire $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. L'application de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ associée à A définie par

$$\begin{aligned} T_A: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R} \\ x, y &\mapsto x \cdot Ay \end{aligned} \quad (8.6)$$

1. Mais je crois que c'est fait à plusieurs endroits dans le Frido. Faire attention.

est une forme bilinéaire.

Elle est aussi donnée par la formule

$$T_A(x, y) = x \cdot Ay = \sum_{i,j} A_{ij} x_i y_j. \quad (8.7)$$

△

8.2.1 Continuité

LEMooGQWQooUfqURv

Lemme 8.5 ([310]).

Soit une forme n -multilinéaire $\alpha \in \mathcal{L}_n(E_1, \dots, E_n; F)$. Nous avons la formule

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) - \alpha(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n \alpha(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i - a_i, x_{i+1}, \dots, x_n). \quad (8.8)$$

Démonstration. Nous y allons par récurrence.

- (1) $n = 2$ Vu que α est multilinéaire, nous avons $\alpha(x_1, x_2) = \alpha(x_1 - a_1, x_2) + \alpha(a_1, x_2)$. Avec ça, nous avons

$$\alpha(x_1, x_2) - \alpha(a_1, a_2) = \alpha(x_1 - a_1, x_2) + \alpha(a_1, x_2) - \alpha(a_1, a_2) \quad (8.9a)$$

$$= \alpha(x_1 - a_1, x_2) + \alpha(a_1, x_2 - a_2). \quad (8.9b)$$

- (2) **La récurrence** Nous supposons que la formule est valable pour toute application n -multilinéaire, et nous considérons une application $n + 1$ -multilinéaire $\alpha \in \mathcal{L}_{n+1}(E, F)$. Nous considérons aussi des éléments $x_i, a_i \in E_i$ pour $i = 1, \dots, n + 1$. Nous posons

$$\begin{aligned} \alpha' : E_1 \times \dots \times E_n &\rightarrow F \\ y_1, \dots, y_n &\mapsto \alpha(y_1, \dots, y_n, x_{n+1}). \end{aligned} \quad (8.10)$$

Cela est une application n -multilinéaire. Nous avons ce calcul :

$$\begin{aligned} &\alpha(x_1, \dots, x_{n+1}) - \alpha(a_1, \dots, a_{n+1}) \\ &= \alpha'(x_1, \dots, x_n) - \alpha'(a_1, \dots, a_n) + \alpha'(a_1, \dots, a_n) - \alpha(a_1, \dots, a_{n+1}) \end{aligned} \quad (8.11a)$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha'(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i - a_i, x_{i+1}, \dots, x_n) + \alpha'(a_1, \dots, a_n) - \alpha(a_1, \dots, a_{n+1}) \quad (8.11b)$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha'(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i - a_i, x_{i+1}, \dots, x_n) + \alpha(a_1, \dots, a_n, x_{n+1}) - \alpha(a_1, \dots, a_{n+1}) \quad (8.11c)$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha'(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i - a_i, x_{i+1}, \dots, x_n) + \alpha(a_1, \dots, a_n, x_{n+1} - a_{n+1}) \quad (8.11d)$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \alpha(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i - a_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \quad (8.11e)$$

□

PROPooDQB0ooByBvmj

Proposition 8.6 ([311]).

Soient des espaces vectoriels normés $E_1, \dots, E_n$ et F . Une application n -multilinéaire $\alpha : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ est continue² si et seulement si il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\|\alpha(x_1, \dots, x_n)\| \leq \lambda \|x_1\| \dots \|x_n\|. \quad (8.12)$$

EQooGTV EooZsvzAM

Démonstration. En deux parties.

2. Pour la topologie sur $E_1 \times \dots \times E_n$, c'est celle de la norme produit 7.282.

- (1) $\Rightarrow$ Nous supposons que α est continue. En particulier, elle est continue en $(0, \dots, 0) \in E_1 \times \dots \times E_n$. Nous considérons $r > 0$ tel que

$$\alpha(B(0, 2r)) \subset B(0, 1). \quad (8.13)$$

Nous posons $\lambda = 1/r^n$, et nous allons voir que ça fait le boulot. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$ avec $x_i \neq 0$ pour tout i . Nous posons $z_i = rx_i/\|x_i\|$, de telle sorte que $\|z_1\| = \dots = \|z_n\| = r$ et donc que $(z_1, \dots, z_n) \in B(0, 2r)$ et donc

$$\|\alpha(z_1, \dots, z_n)\| < 1. \quad (8.14)$$

Mais $\alpha(z_1, \dots, z_n) = r^n / \prod_i \|x_i\| \cdot \alpha(x_1, \dots, x_n)$. Donc avec $\lambda = 1/r^n$ nous trouvons

$$\|\alpha(x_1, \dots, x_n)\| \leq \lambda \prod_i \|x_i\|. \quad (8.15)$$

Si $x_i = 0$, alors c'est encore plus simple parce que la relation (8.12) se réduit à $0 \leq 0$.

- (2) $\Leftarrow$ Nous supposons que $\lambda > 0$ vérifie $\|\alpha(x_1, \dots, x_n)\| \leq \lambda \prod_i \|x_i\|$ pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$. En utilisant le lemme 8.5, nous avons, pour tout x_i et a_i :

$$\|\alpha(x_1, \dots, x_n) - \alpha(a_1, \dots, a_n)\| = \left\| \sum_{i=1}^n \alpha(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i - a_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \right\| \quad (8.16a)$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \lambda \|x_i - a_i\| \cdot \prod_{j=1}^{i-1} \|a_j\| \cdot \prod_{j=i+1}^n \|x_j\|. \quad (8.16b)$$

Et maintenant nous prenons $0 < \epsilon < 1$ et $(x_1, \dots, x_n) \in B((a_1, \dots, a_n), \epsilon)$, de telle sorte que $\|x_i - a_i\| < \epsilon$ pour tout i et que

$$\|x_i\| < \|a_i\| + \epsilon \leq \|a_i\| + 1. \quad (8.17)$$

Nous posons $M = \max_{j=1, \dots, n} \|a_j\|$: $\|x_j\| \leq \|a_j\| + 1 \leq M + 1$ et nous majorons sauvagement chacun des produits de (8.16b) par $(M + 1)^n$:

$$\|\alpha(x_1, \dots, x_n) - \alpha(a_1, \dots, a_n)\| \leq \sum_{i=1}^n \lambda \|x_i - a_i\| (M + 1)^{2n} \quad (8.18a)$$

$$\leq n \lambda \epsilon (M + 1)^{2n}. \quad (8.18b)$$

Nous avons donc bien prouvé que $\alpha(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{F} \alpha(a_1, \dots, a_n)$ lorsque $(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{E_1 \times \dots \times E_n} (a_1, \dots, a_n)$.

□

8.2.2 Formes multilinéaires alternées

DEFooYWOBooUGJoJy

Définition 8.7.

Soit E , un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Une application multilinéaire **alternée** sur E est une application k -linéaire $f : E^k \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $f(v_1, \dots, v_k) = 0$ dès que $v_i = v_j$ pour certains $i \neq j$.

Une application multilinéaire alternée est une **forme linéaire**.

LemHiHNey

Lemme 8.8 ([312]).

Une forme k -linéaire alternée est antisymétrique³. Si $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2, alors une forme antisymétrique est alternée⁴.

3. Antisymétrique, définition 8.2.

4. Définition 8.7.

Démonstration. Soit f une forme alternée ; quitte à fixer toutes les autres variables, nous pouvons travailler avec une 2-forme et simplement montrer que $f(x, y) = -f(y, x)$. Pour ce faire nous écrivons

$$0 = f(x + y, x + y) = f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y) = f(x, y) + f(y, x). \quad (8.19)$$

Pour la réciproque, si f est antisymétrique, alors $f(x, x) = -f(x, x)$. Cela montre que $f(x, x) = 0$ lorsque $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de deux. $\square$

ProprbjihK

Proposition 8.9 ([313]).

Soit E , un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , où la caractéristique de $\mathbb{K}$ n'est pas deux. L'espace des n -formes multilinéaires alternées sur E est de $\mathbb{K}$ -dimension 1.

Démonstration. Soient $\{e_i\}$, une base de E , une n -forme linéaire alternée $f: E \rightarrow \mathbb{K}$ ainsi que des vecteurs $(v_1, \dots, v_n)$ de E . Nous pouvons les écrire dans la base

$$v_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} e_i \quad (8.20)$$

et alors exprimer f par

$$f(v_1, \dots, v_n) = f\left(\sum_{i_1=1}^n \alpha_{1i_1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^n \alpha_{ni_n} e_{i_n}\right) \quad (8.21a)$$

$$= \sum_{i_1, \dots, i_n} \alpha_{1i_1} \dots \alpha_{ni_n} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}). \quad (8.21b)$$

Étant donné que f est alternée, les seuls termes de la somme sont ceux dont les i_k sont tous différents, c'est-à-dire ceux où $\{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}$. Il y a donc un terme par élément du groupe des permutations S_n et

$$f(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_{\sigma(1)1} \dots \alpha_{\sigma(n)n} f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}). \quad (8.22)$$

En utilisant encore une fois le fait que la forme f soit alternée, $f = f(e_1, \dots, e_n)\Pi$ où

$$\Pi(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \alpha_{\sigma(1)1} \dots \alpha_{\sigma(n)n}. \quad (8.23)$$

Pour rappel, la donnée des v_i est dans les nombres α_{ij} .

L'espace des n -formes alternées est donc *au plus* de dimension 1. Pour montrer qu'il est exactement de dimension 1, il faut et suffit de prouver que Π est alternée. Par le lemme 8.8, il suffit de prouver que cette forme est antisymétrique⁵.

Soient donc $v_1, \dots, v_n$ tels que $v_i = v_j$. En posant $\tau = (1i)$ et $\tau' = (2j)$ et en sommant sur $\sigma\tau\tau'$ au lieu de σ , nous pouvons supposer que $i = 1$ et $j = 2$. Montrons que $\Pi(v, v, v_3, \dots, v_n) = 0$ en tenant compte que $\alpha_{i1} = \alpha_{i2}$:

$$\Pi(v, v, v_3, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \alpha_{\sigma(1)1} \alpha_{\sigma(2)2} \alpha_{\sigma(3)3} \dots \alpha_{\sigma(n)n} \quad (8.24a)$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma\tau) \alpha_{\sigma\tau(1)1} \alpha_{\sigma\tau(2)2} \alpha_{\sigma\tau(3)3} \dots \alpha_{\sigma\tau(n)n} \quad \text{où } \tau = (12) \quad (8.24b)$$

$$= - \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \alpha_{\sigma(1)1} \alpha_{\sigma(2)2} \alpha_{\sigma(3)3} \dots \alpha_{\sigma(n)n} \quad (8.24c)$$

$$= -\Pi(v, v, v_3, \dots, v_n). \quad (8.24d)$$

$\square$

5. C'est ici que joue l'hypothèse sur la caractéristique de $\mathbb{K}$.

8.2.3 Déterminant d'une famille de vecteurs

Nous considérons un corps $\mathbb{K}$ et l'espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$.

Définition 8.10 (Déterminant d'une famille de vecteurs[13]).

Le **déterminant** de la famille de vecteurs $(v_1, \dots, v_n)$ dans la base $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ est l'élément de $\mathbb{K}$

$$\det_{(b_1, \dots, b_n)}(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n b_{\sigma(i)}^*(v_i) \quad (8.25)$$

où

- la somme porte sur le groupe symétrique,
- le nombre $\epsilon(\sigma)$ est la signature⁶ de la permutation σ ,
- les éléments $\{b_i^*\}$ sont la base duale⁷ de $\{b_i\}$.

8.11.

La base $\{e_i\}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$, et l'élément e_k^* est la forme linéaire définie par

$$\begin{aligned} e_k^*: \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathbb{K} \\ \sum_i x_i e_i &\mapsto x_k. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Il n'est pas sous-entendu que $\mathbb{K}^n$ ait un produit scalaire. Il n'est donc pas autorisé de dire que $\{e_i\}$ est une base orthonormée et que $e_k^*(x) = \langle e_k, x \rangle$. Ce genre d'égalités sont vraies dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mais n'ont pas de sens en général.

Le lemme 10.5 va un peu parler du cas où $\mathbb{K}^n$ est muni d'une base orthonormée.

Lemme 8.12 ([13]).

Les propriétés du déterminant. Soit B une base de E .

- (1) L'application $\det_B: E^n \rightarrow \mathbb{K}$ est n -linéaire.
- (2) L'application $\det_B: E^n \rightarrow \mathbb{K}$ est n -linéaire est antisymétrique et alternée⁸.
- (3) Pour toute base, $\det_B(B) = 1$.
- (4) Le déterminant ne change pas si on remplace un vecteur par une combinaison linéaire des autres :

$$\det_B(v_1, \dots, v_n) = \det_B\left(v_1 + \sum_{s=2}^n a_s v_s, v_2, \dots, v_n\right). \quad (8.27)$$

- (5) Si on permute les vecteurs,

$$\det_B(v_1, \dots, v_n) = \epsilon(\sigma) \det_B(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}). \quad (8.28)$$

- (6) Si B' est une autre base :

$$\det_B = \det_B(B') \det_{B'} \quad (8.29)$$

- (7) Nous avons aussi la formule $\det_B(B') \det_{B'}(B) = 1$.

- (8) Les vecteurs $\{v_1, \dots, v_n\}$ forment une base si et seulement si $\det_B(v_1, \dots, v_n) \neq 0$.

Démonstration. Point par point.

6. Définition 1.284.

7. Définition 4.136.

8. Alternée, définition 8.7. En caractéristique 2, alternée n'est pas équivalent à symétrique.

- (1) **(1)** En posant $v_1 = x_1 + \lambda x_2$ nous avons

$$\det_B(x_1 + \lambda x_2, v_2, \dots, v_n) = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n e_{\sigma(i)}^*(v_i) \quad (8.30a)$$

$$= \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) \left(e_{\sigma(1)}^*(x_1 + \lambda x_2) \right) \prod_{i=2}^n e_{\sigma(i)}^*(v_i). \quad (8.30b)$$

À partir de là, la linéarité de $e_{\sigma(1)}^*$ montre que $\det_B$ est linéaire en son premier argument. Pour les autres arguments, le même calcul tient.

- (2) **(2)**

Nous prouvons à présent que $\det$ est alternée. Si votre corps est de caractéristique différente de deux, vous pouvez lire la proposition 8.13.

Supposons $v_k = v_l$, et considérons la permutation $\beta = (k, l)$. Nous savons par la proposition 5.47 que $S_n = A_n \cup A_n \beta$. Cela nous permet de décomposer la somme sur S_n en deux parties :

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\sigma} \prod_i \epsilon_{\sigma(i)}^*(v_i) = \sum_{\sigma \in A_n} (-1)^{\sigma} \prod_i \epsilon_{\sigma(i)}^*(v_i) + \sum_{\sigma \in A_n} (-1)^{\sigma \beta} \prod_i \epsilon_{(\sigma \beta)(i)}^*(v_i). \quad (8.31)$$

D'abord $(-1)^{\sigma} = 1$ et $(-1)^{\sigma \beta} = -1$. Ensuite, pour un $\sigma \in A_n$ donné, nous avons

$$\prod_i \epsilon_{(\sigma \beta)(i)}^*(v_i) = \epsilon_{(\sigma \beta)(k)}^*(v_k) \epsilon_{(\sigma \beta)(l)}^*(v_l) \prod_{\substack{i \neq k \\ i \neq l}} \epsilon_{(\sigma \beta)(i)}^*(v_i) \quad (8.32a)$$

$$= \epsilon_{\sigma(l)}^*(v_k) \epsilon_{\sigma(k)}^*(v_l) \prod_{\substack{i \neq k \\ i \neq l}} \epsilon_{\sigma(i)}^*(v_i) \quad (8.32b)$$

$$= \epsilon_{\sigma(l)}^*(v_l) \epsilon_{\sigma(k)}^*(v_k) \prod_{\substack{i \neq k \\ i \neq l}} \epsilon_{\sigma(i)}^*(v_i) \quad (8.32c)$$

$$= \prod_i \epsilon_{\sigma(i)}^*(v_i). \quad (8.32d)$$

Donc les deux termes de la somme (8.31) ne diffèrent que par un signe. Elle est donc nulle, et la forme déterminant est alternée.

La fonction $\det$ est antisymétrique parce que alternée, voir le lemme 8.8.

- (3) **(3)** Nous avons

$$\det_B(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n \underbrace{e_{\sigma(i)}^*(e_i)}_{=\delta_{\sigma(i),i}}. \quad (8.33)$$

Si σ n'est pas l'identité, le produit contient forcément un facteur nul. Il ne reste de la somme que $\sigma = \text{Id}$ et le résultat est 1.

- (4) **(4)** Vu que $\det_B$ est linéaire en tous ses arguments,

$$\det_B \left(v_1 + \sum_{s=2}^n a_s v_s, v_2, \dots, v_n \right) = \det_B(v_1, \dots, v_n) + \sum_{s=2}^n a_s \det_B(v_s, v_2, \dots, v_n). \quad (8.34)$$

Chacun des termes de la somme est nul parce qu'il y a répétition de v_s parmi les arguments alors que la forme est alternée.

- (5) **(5)** Nous devons calculer $\det_B(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})$, et pour y voir plus clair nous posons $w_i =$

$v_{\sigma(i)}$. Alors :

$$\det_B(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = \sum_{\sigma'} \epsilon(\sigma') \prod_{i=1}^n e_{\sigma'(i)}^*(w_i) \quad (8.35a)$$

$$= \sum_{\sigma'} \epsilon(\sigma') \prod_{i=1}^n e_{\sigma'(i)}^*(v_{\sigma(i)}) \quad (8.35b)$$

$$= \sum_{\sigma'} \epsilon(\sigma') \prod_{i=1}^n e_{\sigma^{-1}\sigma'(i)}^*(v_i) \quad (8.35c)$$

$$= \sum_{\sigma'} \epsilon(\sigma\sigma') \prod_{i=1}^n e_{\sigma'(i)}^*(v_i) \quad (8.35d)$$

$$= \epsilon(\sigma) \det_B(v_1, \dots, v_n). \quad (8.35e)$$

Justifications : nous avons d'abord modifié l'ordre des éléments du produit et ensuite l'ordre des éléments de la somme. Nous avons ensuite utilisé le fait que $\epsilon: S_n \rightarrow \{0, 1\}$ était un morphisme de groupe (proposition 1.291).

- (6) (6) Étant donné que l'espace des formes multilinéaires alternées est de dimension 1, il existe un $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\det_B = \lambda \det_{B'}$. Appliquons cela à B' :

$$\det_B(B') = \lambda \det_{B'}(B'), \quad (8.36)$$

donc $\lambda = \det_B(B')$.

- (7) (7) Il suffit d'appliquer l'égalité précédente à B en nous souvenant que $\det_B(B) = 1$.
 (8) (8) Si $B' = \{v_1, \dots, v_n\}$ est une base alors $\det_B(B') \neq 0$, sinon il n'est pas possible d'avoir $\det_B(B') \det_{B'}(B) = 1$.

À l'inverse, si B' n'est pas une base, c'est que $\{v_1, \dots, v_n\}$ est liée par la proposition 4.19. Il y a donc moyen de remplacer un des vecteurs par une combinaison linéaire des autres. Le déterminant s'annule alors.

□

PROPOXNLDooGGkHpd

Proposition 8.13.

Si la caractéristique du corps de base n'est pas deux, le déterminant est antisymétrique et alterné.

Démonstration. Si la caractéristique du corps de base n'est pas deux, une forme antisymétrique est alternée (lemme 8.8).

Pour prouver que le déterminant est antisymétrique, remarquez que permuter v_k et v_l revient à calculer le nombre $\det_B(v_{\sigma_{kl}(1)}, \dots, v_{\sigma_{kl}(n)})$ au lieu de $\det_B(v_1, \dots, v_n)$. Cela revient à changer la somme $\sum_{\sigma}$ en $\sum_{\sigma \circ \sigma_{kl}}$. Cela multiplie $\epsilon(\sigma)$ par -1 parce qu'on ajoute une permutation.

Donc le déterminant est antisymétrique. Nous en déduisons qu'il est alterné parce que, en permutant trivialement v_1 et v_1 , nous obtenons $\det_B(v_1, v_1) = -\det_B(v_1, v_1)$. Si le corps est de caractéristique différente de deux, cela implique que $\det_B(v_1, v_1) = 0$. □

D'après la proposition 8.9, il existe une unique forme n -linéaire alternée égale à 1 sur B , et c'est $\det_B: E^n \rightarrow \mathbb{K}$.

8.2.4 Déterminant d'un endomorphisme

L'interprétation géométrique du déterminant en termes d'aires et de volumes est donnée après le théorème 14.272. Pour un déterminant entre deux espaces différents, voir la proposition 10.87.

8.14.

Voici une définition du déterminant d'une application linéaire $f: E \rightarrow E$. Comme expliqué dans [314], il est peu probable qu'il existe une définition satisfaisante de déterminant pour une application linéaire $f: E \rightarrow F$, même si E et F ont une même dimension finie.

Cela soit dit en passant, ça rend plus compliqué que prévu la preuve que $\text{GL}(E, F)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E, F)$. Il ne suffira pas de dire que le déterminant est une application continue. Voir la proposition 10.87.

LEMooQTRVooAKzucd

Lemme-Définition 8.15.

Si $f: E \rightarrow E$ est un endomorphisme, et si les parties B et B' sont deux bases, alors⁹

$$\det_B(f(B)) = \det_{B'}(f(B')). \quad (8.37)$$

Ce nombre, indépendant de la base choisie est nommé le **déterminant** de f et est noté $\det(f)$.

Démonstration. L'application

$$\begin{aligned} \varphi: E^n &\rightarrow \mathbb{K} \\ v_1, \dots, v_n &\mapsto \det_B(f(v_1), \dots, f(v_n)) \end{aligned} \quad (8.38)$$

est n -linéaire et alternée ; il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda \det_B$. En appliquant cela à B :

$$\det_B(f(B)) = \lambda \det_B(B) = \lambda. \quad (8.39)$$

Nous avons donc déjà prouvé que $\lambda = \det_B(f(B))$, c'est-à-dire

$$\det_B(f(v)) = \det_B(f(B)) \det_B(v). \quad (8.40)$$

Nous allons maintenant introduire B' là où il y a du v en utilisant les formules (8.29) :

$$\det_B(f(v)) = \det_B(B') \det_{B'}(f(v)) \quad (8.41a)$$

$$\det_B(v) = \det_B(B') \det_{B'}(v). \quad (8.41b)$$

Nous obtenons

$$\det_{B'}(f(v)) = \det_B(f(B)) \det_{B'}(v). \quad (8.42)$$

Et on applique cela à $v = B'$:

$$\det_{B'}(f(B')) = \det_B(f(B)) \underbrace{\det_{B'}(B')}_{=1}. \quad (8.43)$$

□

PropYQNMooZjlYlA

Proposition 8.16.

Principales propriétés géométriques du déterminant d'un endomorphisme.

ItemUPLNooYZMRJy

(1) Si f et g sont des endomorphismes, alors $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$.

ITEMooNZNLooODdXeH

(2) L'endomorphisme f est un automorphisme¹⁰ si et seulement si $\det(f) \neq 0$.

ITEMooZMVXooLGjvCy

(3) Si $\det(f) \neq 0$ alors $\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}$.

ItemooPJVYooYSwqaE

(4) L'application $\det: \text{GL}(E) \rightarrow \mathbb{K} \setminus \{0\}$ est un morphisme de groupe.

Démonstration. Point par point.

(1) Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi: E^n &\rightarrow \mathbb{K} \\ v &\mapsto \det_B(f(v)). \end{aligned} \quad (8.44)$$

Comme d'habitude nous avons $\varphi(v) = \lambda \det_B(v)$. En appliquant à B et en nous souvenant que $\det_B(B) = 1$ nous avons $\det_B(f(B)) = \lambda$. Autrement dit :

$$\lambda = \det(f). \quad (8.45)$$

9. Définition de $\det_B(B')$, 8.10.

10. Endomorphisme inversible, définition 4.38.

Calculons à présent $\varphi(g(B))$: d'une part,

$$\varphi(g(B)) = \det_B((f \circ g)(B)) \quad (8.46)$$

et d'autre part,

$$\varphi(g(B)) = \lambda \det_B(g(B)) = \lambda \det(g) \quad (8.47)$$

En égalisant et en reprenant la la valeur déjà trouvée de λ ,

$$\det((f \circ g)(B)) = \det(f) \det(g), \quad (8.48)$$

ce qu'il fallait.

- (2) Supposons que f soit un automorphisme. Alors si B est une base, $f(B)$ est une base. Par conséquent $\det(f) = \det_B(f(B)) \neq 0$ parce que $f(B)$ est une base (lemme 8.12(8)).

Réciproquement, supposons que $\det(f) \neq 0$. Alors si B est une base quelconque nous avons $\det_B(f(B)) \neq 0$, ce qui est uniquement possible lorsque $f(B)$ est une base. L'application f transforme donc toute base en une base et est alors un automorphisme d'espace vectoriel.

- (3) Vu que le déterminant de l'identité est 1 et que f est inversible, $1 = \det(f \circ f^{-1}) = \det(f) \det(f^{-1})$.

□

PROPOOFKDXooKMSolt

Proposition 8.17.

Soient deux espaces vectoriels E et F de dimension finies n et m sur le corps $\mathbb{K}$ munis de bases $\{e_i\}$ et $\{f_\alpha\}$. À une matrice $A \in \mathbb{M}(m \times n, \mathbb{K})$ nous associons l'application linéaire¹¹

$$f_A(x) = \sum_{i\alpha} A_{\alpha i} x_i f_\alpha. \quad (8.49)$$

Alors, en ce qui concerne les déterminants¹², nous avons

$$(1) \det(f_A) = \det(A)$$

$$(2) \det(f_{AB}) = \det(f_A) \det(f_B)$$

Démonstration. Nous devons étudier la formule

$$\det(f_A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n e_{\sigma(i)}^*(f_A(e_i)). \quad (8.50)$$

En premier lieu nous avons

$$f_A(e_i) = \sum_{jk} A_{jk}(e_i)_k e_j = \sum_j A_{ji} e_j. \quad (8.51)$$

Nous avons alors

$$e_{\sigma(i)}^*(f_A(e_i)) = \sum_j A_{ji} \underbrace{e_{\sigma(i)}^*(e_j)}_{\delta_{j\sigma(i)}} = A_{\sigma(i)i}. \quad (8.52)$$

Au final,

$$\det(f_A) = \sum_{\sigma} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n A_{\sigma(i)i} = \det(A^t) = \det(A) \quad (8.53)$$

où la dernière égalité est autorisée par le lemme 4.85.

Cela prouve la formule $\det(f_A) = \det(A)$.

En ce qui concerne la seconde formule, il s'agit de se souvenir de la proposition 4.77 qui donne $f_{AB} = f_A \circ f_B$, et ensuite de la proposition 8.16(1) qui donne $\det(f_A \circ f_B) = \det(f_A) \det(f_B)$. □

11. Dont nous avons déjà beaucoup parlé entre autres dans la proposition 4.77.

12. Définition 8.15 pour les applications linéaires et 4.83 pour les matrices.

Exemple 8.18.

Le déterminant de Vandermonde (proposition 4.126) est alterné, semi-symétrique et non symétrique. Le fait qu'il soit alterné est le fait qu'il soit un déterminant. Étant donné qu'il est alterné, il est semi-symétrique parce que sur A_n , nous avons $\epsilon = 1$. Étant donné qu'il est alterné, il change de signe sous l'action des éléments impairs de S_n et n'est donc pas symétrique. $\triangle$

PropUDqXax

Proposition 8.19.

Un polynôme semi-symétrique $f \in \mathbb{K}[T_1, \dots, T_n]$ se décompose de façon unique en

$$f = P + VQ \quad (8.54)$$

où P et Q sont deux polynômes symétriques.

Démonstration. Nous commençons par prouver l'unicité en montrant que si $f = P + VQ$ avec P et Q symétrique, alors P et Q sont donnés par des formules explicites en termes de f .

Si σ_1 et σ_2 sont deux permutations impaires de $\{1, \dots, n\}$, alors $\sigma_1 \cdot f = \sigma_2 \cdot f$ parce que l'élément $\sigma_2^{-1}\sigma_1$ est pair (proposition 1.291), de telle sorte que $\sigma_2^{-1}\sigma_1 \cdot f = f$. Nous posons donc $g = \tau \cdot f$ où τ est une permutation impaire quelconque – par exemple une transposition.

Vu que V est alternée et que τ est une transposition nous avons

$$g = \tau \cdot f = P - VQ. \quad (8.55)$$

Donc $f + g = 2P$ et $f - g = 2VQ$. Cela donne P et Q en termes de f et g , et donc l'unicité.

Attention : cela ne donne pas un moyen de prouver l'existence parce que rien ne prouve pour l'instant que $f - g$ peut effectivement être écrit sous la forme VQ , c'est-à-dire que $f - g$ soit divisible par V . C'est cela que nous allons nous atteler à démontrer maintenant.

Nous commençons par prouver que $f + g$ est symétrique et $f - g$ alterné. Si σ est une transposition,

$$\sigma \cdot (f + g) = \sigma \cdot f + \sigma \tau \cdot f = g + f \quad (8.56)$$

parce que $\sigma\tau$ est pair. De la même façon,

$$\sigma \cdot (f - g) = g - f = \epsilon(\sigma)(f - g). \quad (8.57)$$

Dans les deux cas nous concluons en utilisant le fait que toute permutation est un produit de transpositions (proposition 1.283) et que ϵ est un homomorphisme.

Soient maintenant deux entiers $h < k$ dans $\{1, \dots, n\}$ et l'anneau

$$(\mathbb{K}[T_1, \dots, \hat{T}_k, \dots, T_n])[T_k]. \quad (8.58)$$

Cet anneau contient le polynôme $T_k - T_h$ où T_k est la variable et T_h est un coefficient. Nous faisons la division euclidienne de $f - g$ par $T_k - T_h$ parce que nous avons dans l'idée de faire arriver le déterminant de Vandermonde et donc le produit de toutes les différences $T_k - T_h$:

$$f - g = (T_k - T_h)q + r \quad (8.59)$$

EqSHdgrG

où $\deg_{T_k} r < 1$, c'est-à-dire que r ne dépend pas de T_k . Nous revoyons maintenant l'égalité (8.59) dans $\mathbb{K}[T_1, \dots, T_n]$ et nous y appliquons la transposition τ_{kh} . Nous savons que $\tau_{kh}(f - g) = -(f - g)$ et $\tau_{kh}(T_k - T_h) = -(T_k - T_h)$, et donc

$$-(f - g) = -(T_k - T_h)\tau_{kh} \cdot q + \tau_{kh} \cdot r \quad (8.60)$$

EqVQhijkB

où $\tau_{kh} \cdot r$ ne dépend pas de T_h . Nous appliquons à (8.60) l'application

$$\begin{aligned} t\alpha: \mathbb{K}[T_1, \dots, T_n] &\rightarrow \mathbb{K}[T_1, \dots, \hat{T}_k, \dots, T_n] \\ \alpha(PT_1, \dots, \hat{T}_k, \dots, T_n) &= P(T_1, \dots, T_h, \dots, T_n). \end{aligned} \quad (8.61)$$

Cette application vérifie $\alpha(\tau_{kh} \cdot r) = \alpha(r)$ et nous avons

$$-\alpha(f - g) = \alpha(r). \quad (8.62)$$

Puis en appliquant α à la relation $f - g = (T_k - T_h)q + r$, nous trouvons

$$\alpha(f - g) = \alpha(r), \quad (8.63)$$

et par conséquent $\alpha(r) = 0$. Ici nous utilisons l'hypothèse de caractéristique différente de deux. Dire que $\alpha(r) = 0$, c'est dire que r est divisible par $T_k - T_h$, mais r étant de degré zéro en T_k , nous avons $r = 0$. Par conséquent $T_k - T_h$ divise $f - g$ pour tout $h < k$, et nous pouvons définir un polynôme Q par

$$f - g = 2Q \prod_{h < k} \prod_{k \leq n} (T_k - T_h) = 2Q(T_1, \dots, T_n)V(T_1, \dots, T_n), \quad (8.64)$$

où nous avons utilisé la formule du déterminant de Vandermonde de la proposition 4.126.

Étant donné que $f + g$ est un polynôme symétrique, nous allons aussi poser $f + g = 2P$ avec P symétrique.

Montrons à présent que Q est un polynôme symétrique. Soit $\sigma \in S_n$; vu que nous savons déjà que $f - g$ est alternée, nous avons

$$\sigma \cdot (f - g) = \epsilon(\sigma)(f - g) = \epsilon(\sigma)2QV, \quad (8.65)$$

Mais en appliquant σ à l'équation (8.64),

$$\sigma \cdot (f - g) = 2(\sigma \cdot V)(T_1, \dots, T_n)(\sigma \cdot Q)(T_1, \dots, T_n) \quad (8.66a)$$

$$= 2\epsilon(\sigma)V(T_1, \dots, T_n)(\sigma \cdot Q)(T_1, \dots, T_n). \quad (8.66b)$$

Nous égalisons cela avec (8.65) et nous souvenant que l'anneau $\mathbb{K}[T_1, \dots, T_n]$ est intègre par le théorème 3.92. Ensuite nous simplifions par $2\epsilon(\sigma)V$ pour obtenir

$$Q = \sigma \cdot Q, \quad (8.67)$$

c'est-à-dire que Q est symétrique.

Au final nous avons $f + g = 2P$ et $f - g = 2VQ$ avec P et Q symétriques. En faisant la somme,

$$f = P + VQ. \quad (8.68)$$

□

8.2.5 Déterminant de Gram

Si $x_1, \dots, x_r$ sont des vecteurs d'un espace vectoriel, alors le **déterminant de Gram** est le déterminant

$$G(x_1, \dots, x_r) = \det(\langle x_i, x_j \rangle). \quad (8.69)$$

Notons que la matrice est une matrice symétrique.

Proposition 8.20.

Si F est un sous-espace vectoriel de base $\{x_1, \dots, x_n\}$ et si x est un vecteur, alors le déterminant de Gram est un moyen de calculer la distance entre x et F par

$$d(x, F)^2 = \frac{G(x, x_1, \dots, x_n)}{G(x_1, \dots, x_n)}. \quad (8.70)$$

8.2.6 Déterminant de Cauchy

Soient des nombres a_i et b_i ($i = 1, \dots, n$) tels que $a_i + b_j \neq 0$ pour tout couple (i, j) . Le **déterminant de Cauchy** est

$$D_n = \det \left(\frac{1}{a_i + b_j} \right). \quad (8.71)$$

ProptoDYKA

Proposition 8.21 ([315]).

Le déterminant de Cauchy est donné par la formule

$$D_n = \frac{\prod_{i < j} (a_j - a_i) \prod_{i < j} (b_j - b_i)}{\prod_{i,j} (a_i + b_j)}. \quad (8.72)$$

8.2.7 Matrice de Sylvester

DEFooHCGzDsmXQyBâF

Définition 8.22 (Matrice de Sylvester, résultant[316]).

Soient P et Q deux polynômes non nuls, de degrés respectifs n et m :

$$P(x) = p_0 + p_1x + \dots + p_nx^n \quad (8.73a)$$

$$Q(x) = q_0 + q_1x + \dots + q_mx^m. \quad (8.73b)$$

La **matrice de Sylvester** associée à P et Q est la matrice carrée $m + n \times m + n$ définie ainsi :

(1) la première ligne est formée des coefficients de P , suivis de 0 :

$$(p_n \ p_{n-1} \ \dots \ p_1 \ p_0 \ 0 \ \dots \ 0); \quad (8.74)$$

(2) la seconde ligne s'obtient à partir de la première par permutation circulaire vers la droite ;

(3) les $(m-2)$ lignes suivantes s'obtiennent en répétant la même opération ;

(4) la ligne $(m+1)$ est formée des coefficients de Q , suivis de 0 :

$$(q_m \ q_{m-1} \ \dots \ q_1 \ q_0 \ 0 \ \dots \ 0); \quad (8.75)$$

(5) les $(n-1)$ lignes suivantes sont formées par des permutations circulaires.

Le déterminant de la matrice de Sylvester associée à P et Q est appelé le **résultant** de P et Q et noté $\text{res}(P, Q)$.

Ainsi dans le cas $n = 4$ et $m = 3$, la matrice obtenue est

$$S_{p,q} = \begin{pmatrix} p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & 0 & 0 \\ 0 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & 0 \\ 0 & 0 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 \\ q_3 & q_2 & q_1 & q_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_3 & q_2 & q_1 & q_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & q_2 & q_1 & q_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_3 & q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix}. \quad (8.76)$$

EqPEgtle

Attention : si P est de degré n et Q de degré m , il y a m lignes pour P et n pour Q dans le déterminant du résultant (et non le contraire).

LemBFrhgnA

Lemme 8.23 ([317]).

Si P et Q sont deux polynômes de degrés n et m à coefficients dans l'anneau $\mathbb{A}$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{A}$,

$$\text{res}(\lambda P, Q) = \lambda^m \text{res}(P, Q) \quad (8.77a)$$

$$\text{res}(P, \lambda Q) = \lambda^n \text{res}(P, Q). \quad (8.77b)$$

Démonstration. Cela est simplement un comptage du nombre de lignes. Il y a m lignes contenant les coefficients de P ; donc prendre λP revient à multiplier m lignes dans un déterminant et donc le multiplier par λ^m . $\square$

L'équation de Bézout (6.114) peut être traitée avec une matrice de Sylvester. Soient P et Q , deux polynômes donnés et à résoudre l'équation

$$xP + yQ = 0 \quad \text{EqSsyXQo} \quad (8.78)$$

par rapport aux polynômes inconnus x et y dont les degrés sont $\deg(x) < \deg(Q)$ et $\deg(y) < \deg(P)$. Si nous notons $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ la liste des coefficients de x et y (dans l'ordre décroissant de degré), nous pouvons récrire l'équation (8.78) sous la forme

$$S_{PQ}^t \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = 0. \quad (8.79)$$

Pour s'en convaincre, écrivons pour les polynômes de l'exemple (8.76) :

$$\begin{pmatrix} p_4 & 0 & 0 & q_3 & 0 & 0 & 0 \\ p_3 & p_4 & 0 & q_2 & q_3 & 0 & 0 \\ p_2 & p_3 & p_4 & q_1 & q_2 & q_3 & 0 \\ p_1 & p_2 & p_3 & q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ p_0 & p_1 & p_2 & 0 & q_0 & q_1 & q_2 \\ 0 & p_0 & p_1 & 0 & 0 & q_0 & q_1 \\ 0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_0 \\ y_3 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 p_4 + y_3 q_3 \\ p_3 x_2 + p_4 x_1 + q_2 y_3 + q_3 y_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (8.80)$$

Nous voyons que sur la ligne numéro k (en partant du bas et en numérotant de à partir de zéro) nous avons les produits $p_i x_j$ et $q_i y_j$ avec $i + j = k$. La colonne de droite représente donc bien les coefficients du polynôme $xP + yQ$.

Proposition 8.24.

Le résultant de deux polynômes est non nul si et seulement si les deux polynômes sont premiers entre eux.

Un polynôme P a une racine double en a si et seulement si P et P' ont a comme racine commune, ce qui revient à dire que P et P' ne sont pas premiers entre eux.

Une application importante de ces résultats sera le théorème de Rothstein-Trager 20.97 sur l'intégration de fractions rationnelles.

Exemple 8.25.

Si nous prenons $P = aX^2 + bX + c$ et $P' = 2aX + b$ alors la taille de la matrice de Sylvester sera $2 + 1 = 3$ et

$$S_{P,P'} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{pmatrix}. \quad (8.81)$$

Le résultant est alors

$$\text{res}(P, P') = -a(b^2 - 4ac). \quad (8.82)$$

Donc un polynôme du second degré a une racine double si et seulement si $b^2 - 4ac = 0$. Cela est un résultat connu depuis longtemps mais qui fait toujours plaisir à revoir. $\triangle$

La matrice de Sylvester permet aussi de récrire l'équation de Bézout pour les polynômes; voir le théorème 6.47 et la discussion qui s'ensuit.

Une proposition importante du résultant est qu'il peut s'exprimer à l'aide des racines des polynômes.

PropNDBOGNx

Proposition 8.26.*Si*

$$P(X) = a_p \prod_{i=1}^p (X - \alpha_i) \quad (8.83a)$$

$$Q(X) = b_q \prod_{j=1}^q (X - \beta_j) \quad (8.83b)$$

alors nous avons les expressions suivantes pour le résultant :

$$\text{res}(P, Q) = a_p^q b_q^p \prod_{i=1}^p \prod_{j=1}^q (\beta_j - \alpha_i) = b_q^p \prod_{j=1}^q P(\beta_j) = (-1)^{pq} a_p^q \prod_{i=1}^p Q(\alpha_i). \quad (8.84) \quad \text{EqCFUumjx}$$

Démonstration. Si P et Q ne sont pas premiers entre eux, d'une part la proposition 8.24 nous dit que $\text{res}(P, Q) = 0$ et d'autre part, P et Q ont un facteur irréductible en commun, ce qui signifie que nous devons avoir un des $X - \alpha_i$ égal à un des $X - \beta_j$. Autrement dit, nous avons $\alpha_i = \beta_j$ pour un couple (i, j) . Par conséquent tous les membres de l'équation (8.84) sont nuls.

Nous supposons donc que P et Q sont premiers entre eux. Nous commençons par supposer que les polynômes P et Q sont unitaires, c'est-à-dire que $a_p = b_q = 1$. Nous considérons alors l'anneau

$$\mathbb{A} = \mathbb{Z}[\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q]. \quad (8.85)$$

Dans cet anneau, l'élément $\beta_j - \alpha_i$ est irréductible (tout comme $X - Y$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X, Y]$). Le résultant $R = \text{res}(P, Q)$ est un élément de $\mathbb{A}$ parce que tous leurs coefficients peuvent être exprimés à l'aide des α_i et des β_j . Dans $\mathbb{A}$, l'élément $\beta_j - \alpha_i$ divise R . En effet lorsque $\beta_j = \alpha_i$, le déterminant définissant le résultant est nul, ce qui signifie que $\beta_j - \alpha_i$ est un facteur irréductible de R .

Par conséquent il existe un polynôme $T \in \mathbb{A}$ tel que

$$R = T(\alpha_1, \dots, \beta_q) \prod_{i=1}^p \prod_{j=1}^q (\beta_j - \alpha_i). \quad (8.86)$$

Comptons les degrés. Pour donner une idée de ce calcul de degré, voici comment se présente, au niveau des dimensions, le déterminant :

$$\begin{array}{ccccccc} & \xleftarrow{p+1} & & \xleftarrow{q-1} & & & \\ & & & & & & \\ a_p & \cdots & a_{p-1} & \cdots & a_0 & \cdots & 0 \cdots 0 \\ & \searrow & & & \searrow & & \\ 0 \cdots 0 & & a_p & \cdots & a_1 & \cdots & a_0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow q \\ \downarrow q \end{array} \quad (8.87) \quad \text{EqJCaATQH}$$

$\xleftarrow{p+q}$

si les a_i sont les coefficients de P . Mais chacun des a_i est de degré 1 en les α_i , donc le déterminant dans son ensemble est de degré q en les α_i , parce que R contient q lignes telles que (8.87). Le même raisonnement montre que R est de degré p en les β_j . Par ailleurs le polynôme $\prod_{i=1}^p \prod_{j=1}^q (\beta_j - \alpha_i)$ est de degré p en les β_j et q en les α_i . Nous en déduisons que T doit être un polynôme ne dépendant pas de α_i ou de β_j .

Nous pouvons donc calculer la valeur de T en choisissant un cas particulier. Avec $P(X) = X^p$ et $Q(X) = X^q + 1$, il est vite vu que $R(P, Q) = 1$ et donc que $T = 1$.

Si les polynômes P et Q ne sont pas unitaires, le lemme 8.23 nous permet de conclure. □

8.2.8 Théorème de Kronecker

Nous considérons K_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{Z}[X]$

- (1) unitaires de degré n ,
- (2) dont les racines dans $\mathbb{C}$ sont de modules plus petits ou égaux à 1,
- (3) et qui ne sont pas divisés par X .

Un tel polynôme s'écrit sous la forme

$$P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k. \quad (8.88)$$

Théorème 8.27 (Kronecker[126]).

ThoOWMNAVp

Les racines des éléments de K_n sont des racines de l'unité.

Démonstration. Vu que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos nous pouvons considérer les racines $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de P dans $\mathbb{C}$. Nous les considérons avec leurs multiplicités.

Soit $R = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k$ un élément de K_n dont nous notons $\beta_1, \dots, \beta_n$ les racines dans $\mathbb{C}$. Les relations coefficients-racines stipulent que

$$b_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-k} \leq n} \prod_{j=1}^{n-k} \beta_{i_j}. \quad (8.89)$$

En prenant le module et en se souvenant que $|\beta_l| \leq 1$ pour tout l , nous trouvons que

$$|b_k| \leq \binom{n}{n-k}. \quad (8.90)$$

Mais comme $b_k \in \mathbb{Z}$, nous avons

$$b_k \in \left\{ -\binom{n}{n-k}, -\binom{n}{n-k} + 1, \dots, 0, \dots, \binom{n}{n-k} \right\} \quad (8.91)$$

qui est de cardinal $2\binom{n}{n-k} + 1$. Nous avons donc

$$\text{Card}(K_n) \leq \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \binom{n}{n-k} \right) < \infty. \quad (8.92)$$

La conclusion jusqu'ici est que K_n est un ensemble fini.

Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$ nous considérons les polynômes

$$P_k = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i^k) \quad (8.93a)$$

$$Q_k = X^k - Y \in \mathbb{Z}[X, Y], \quad (8.93b)$$

et puis nous considérons le résultant $R_k = \text{res}_X(P, Q_k) \in \mathbb{Z}[Y]$:

$$R_k = \text{res}_X(P, Q_k) = \begin{pmatrix} 1 & a_{n-1} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{n-1} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} & \cdots & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & a_{n-1} & \cdots & a_0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{n-1} & \cdots & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -Y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -Y & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -Y & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -Y \end{pmatrix} \quad (8.94)$$

Cela est un polynôme en Y dont le terme de plus haut degré est $(-1)^n Y^n$. Les petites formules de la proposition 8.26 nous permettent d'exprimer $R_k(Y)$ en termes des racines de P :

$$R_k(Y) = \prod_{i=1}^n Q_k(\alpha_i) = \prod_{i=1}^n (\alpha_i^k - Y) = (-1)^n \prod_{i=1}^n (Y - \alpha_i^k) = (-1)^n P_k(Y). \quad (8.95)$$

Vu que $P \in K_n$ nous savons que les α_i ne sont pas tous nuls ; donc $P_k \in K_n$. Cependant nous avons vu que K_n est un ensemble fini ; donc parmi les P_k , il y a des doublons (et pas un peu)¹³. Nous regardons même l'ensemble des P_{2^n} dans lequel nous pouvons en trouver deux les mêmes. Soit $l > k$ tels que $P_{2^k} = P_{2^l}$. Si α est racine de P_{2^k} , alors il est de la forme $\alpha = \beta^{2^k}$ pour une certaine racines β de P . Par conséquent

$$\alpha^{2^l/2^k} = \alpha^{2^{l-k}} \quad \text{EqBEgJtzm} \quad (8.96)$$

est racine de P_{2^l} . Notons que dans cette expression il n'y a pas de problèmes de définition d'exposant fractionnaire dans $\mathbb{C}$ parce que $l > k$. Vu que (8.96) est racine de P_{2^l} , il est aussi racine de P_{2^k} . Donc

$$(\alpha^{2^{l-k}})^{2^{l-k}} = \alpha^{2^{2(l-k)}} \quad (8.97)$$

est racine de P_{2^l} et donc de P_{2^k} . Au final nous savons que tous les nombres de la forme $\alpha^{2^{n(l-k)}}$ sont racines de P_{2^k} . Mais comme P_{2^k} a un nombre fini de racines, nous pouvons en trouver deux égales. Si nous avons

$$\alpha^{2^{n(l-k)}} = \alpha^{2^{m(l-k)}} \quad (8.98)$$

pour certains entiers $m > n$, alors

$$\alpha^{2^{n(l-k)} - 2^{m(l-k)}} = 1, \quad (8.99)$$

ce qui prouve que α est une racine de l'unité. Nous avons donc prouvé que toutes les racines de P_{2^k} sont des racines de l'unité et donc que les racines de P sont racines de l'unité. $\square$

8.3 Orientation

8.3.1 Cas vectoriel

DEFooNVRHooEBHUSu

Proposition-Définition 8.28 ([318]).

Soient deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ d'un espace vectoriel réel E . Nous définissons la relation $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$ si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$ ¹⁴.

Cela est une relation d'équivalence¹⁵ sur l'ensemble des bases de E , et les classes sont les **orientations** de E .

Démonstration. Tout est dans le lemme 8.12. D'abord quand $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases, $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$ ensuite, nous passons en revue les points qu'il faut pour être une relation d'équivalence.

- (1) $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}$ parce que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1 > 0$.
- (2) Vu que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \frac{1}{\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})}$, les deux sont positifs en même temps ou pas du tout.
- (3) Si $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}' \sim \mathcal{B}''$, alors en utilisant la formule

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}''), \quad (8.100)$$

nous voyons que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') > 0$. $\square$

13. Ici dans [126], il déduit qu'on a un k tel que $P_k = P_1 = P$. Moi je vois pourquoi on a un k et un l tels que $P_k = P_l$, mais pourquoi on peut en trouver un spécialement égal au premier ? Une réponse à cette question permettrait de solidement réduire la lourdeur de la suite de la preuve.

14. Définition 8.10.

15. Définition 1.50.

Lemme 8.29.

Soit un espace vectoriel réel E . L'ensemble des bases de E possède exactement deux orientations¹⁶

Démonstration. Nous considérons une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ ¹⁷ à partir de laquelle nous définissons une autre base : $\mathcal{B}' = (-e_1, e_2, \dots, e_n)$. Nous allons prouver que ces deux bases ne sont pas équivalentes, et que toute base de E est équivalente soit à $\mathcal{B}$ soit à $\mathcal{B}'$.

- (1) **Au moins deux classes** Le fait que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = -1$ vient du fait que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$ et que l'application $\det_{\mathcal{B}}$ est n -linéaire; en multipliant par -1 le premier argument, la valeur du déterminant est multipliée par -1 .

Donc les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ne sont pas équivalentes et il existe au moins deux classes.

- (2) **Au plus deux classes** Nous montrons à présent que toute base est équivalente soit à $\mathcal{B}$ soit à $\mathcal{B}'$. Supposons que $\mathcal{B}''$ ne soit pas équivalente à $\mathcal{B}$, c'est-à-dire que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') < 0$. Nous utilisons encore la formule (8.29),

$$\underbrace{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'')}_{<0} = \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')}_{<0} \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}''), \quad (8.101)$$

et nous déduisons que $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'') > 0$.

□

8.30.

Vu qu'il n'y a que deux classes d'équivalence parmi les bases, nous pouvons utiliser le vocable « avoir la même orientation que » ou « avoir l'orientation contraire de ». Ce n'est pas ambigu.

Proposition 8.31 ([318]).

Si $\mathcal{B}$ est une base de l'espace vectoriel E de dimension n , et si τ est une transposition¹⁸ de S_n , alors la base $\tau(\mathcal{B})$ est de sens contraire.

Démonstration. Le lemme 8.12(2) dit que $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme anti-symétrique; donc

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = -\det_{\mathcal{B}}(\tau(\mathcal{B})). \quad (8.102)$$

Si l'un est positif, l'autre est négatif. Elles ont donc des orientations contraires.

□

Corolaire 8.32.

Si $\mathcal{B}$ est une base de l'espace vectoriel E de dimension n , et si $\sigma \in S_n$, la base $\sigma(\mathcal{B})$ a même orientation que $\mathcal{B}$ si et seulement si $\sigma \in A_n$.

Démonstration. Notons c_1 la classe d'orientation de $\mathcal{B}$ et c_2 l'autre classe. La permutation σ se décompose en produit de transpositions dont la parité est fixée (proposition 1.287). Posons $\sigma = \tau_k \dots \tau_1$.

En posant $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_{l+1} = \tau_{l+1}(\mathcal{B}_l)$, pour tout l , la base $\mathcal{B}_l$ est d'orientation contraire à celle de la base $\mathcal{B}_{l-1}$. Une base sur deux a l'orientation de $\mathcal{B}$ et l'autre sur deux a l'orientation contraire.

Donc $\sigma(\mathcal{B})$ a la même orientation que $\mathcal{B}$ si et seulement si k est pair. Mais $\sigma \in A_n$ si et seulement si k est pair. C'est bon.

□

PROPooNBAXooKNUrnk

Proposition-Définition 8.33 ([318]).

Soit un espace vectoriel réel, et un endomorphisme f de E . Deux définitions.

ITEMooOAXFooLIPHlW

- (1) L'endomorphisme f est **direct** si son déterminant est strictement positif.

ITEMooNKYCooXTgKJA

- (2) L'endomorphisme **préserve l'orientation** si il transforme toute base de E en une base de même orientation.

Un endomorphisme est direct si et seulement si il préserve l'orientation.

16. Définition 8.28.

17. Nous notons (e_1, e_2) et non $\{e_1, e_2\}$ parce que l'ordre est important.

18. Définition 1.280.

Démonstration. En deux sens.

- (1) **Direct implique préserve l'orientation** Soit une base $\mathcal{B}$ de E et un endomorphisme direct u . D'abord, u est inversible du fait que son déterminant est non nul par la proposition 8.16(2). Donc u transforme une base en une base par le lemme 4.8.

La définition 8.15 du déterminant de u est que

$$\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) > 0. \quad (8.103)$$

Donc $\mathcal{B}$ et $u(\mathcal{B})$ ont même orientation.

- (2) **Préserve l'orientation implique direct** Le fait que u préserve l'orientation signifie en particulier qu'il transforme une base en une base et qu'il est inversible par le lemme 4.8.

Donc si $\mathcal{B}$ est une base, $u(\mathcal{B})$ est encore une base et nous avons, parce que $\mathcal{B}$ et $u(\mathcal{B})$ ont même orientation,

$$0 < \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) = \det(u). \quad (8.104)$$

□

8.3.2 Cas affine

DEFooOTFPooIVkHFP

Définition 8.34.

Nous disons qu'une application affine $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ **préserve l'orientation** si sa partie linéaire préserve l'orientation.

8.4 Hermitien, orthogonal, adjoint

NORMooWGEJooCtGtqZ

8.35.

Une des choses à retenir de la définition de l'opérateur adjoint est que la notion de A^* dépend du produit scalaire considéré.

Il se fait que le plus souvent, sur $\mathbb{R}^n$, nous considérons le produit scalaire usuel et la base canonique. De ce fait, les notions d'opérateur adjoint et d'opérateur transposés se confondent avec la notion de matrice transposée. Ce sont pourtant, en général, trois notions distinctes.

DEFooROVNooFtTbSK

Proposition-Définition 8.36 (Définition de la transposée[1]).

Soient deux espaces vectoriels euclidiens ou hermitiens E et F et une application linéaire $A: E \rightarrow F$.

ITEMooRUZWooSZgGnf

- (1) Il existe une unique application linéaire $B: F \rightarrow E$ telle que

$$\langle Ax, y \rangle_F = \langle x, By \rangle_E \quad (8.105)$$

EQooHWYKooFzAGgB

pour tout $x \in E$ et $y \in F$.

ITEMooXXEUooPtPfkY

- (2) Si $\{e_i\}$ est une base orthonormée de E et $\{f_\alpha\}$ est une base orthonormée de F , alors la matrice de A et B pour ces bases sont liées par

$$B_{i\alpha} = A_{\alpha i}. \quad (8.106)$$

EQooUSNVooQtBNGL

L'application B ainsi définie est nommée **adjoint** de A et sera notée $B = A^*$.

Démonstration. Pour l'unicité, nous écrivons la condition avec $x = e_j$ pour obtenir :

$$\langle Ae_j, y \rangle = \langle e_j, By \rangle = (By)_j \quad (8.107)$$

c'est-à-dire que les coefficients $B(y)_j$ de $B(y)$ dans la base canonique sont fixés par la condition.

Pour l'existence, il suffit de vérifier que poser

$$B(y) = \sum_j \langle Ae_j, y \rangle e_j \quad (8.108)$$

fonctionne. Pour cela il faut utiliser la bilinéarité du produit scalaire et le fait que $\langle x, e_j \rangle = x_j$. Nous avons :

$$\langle x, B(y) \rangle = \langle x, \sum_j \langle A(e_j), y \rangle e_j \rangle \quad (8.109a)$$

$$= \sum_j \langle A(e_j), y \rangle \langle x, e_j \rangle \quad (8.109b)$$

$$= \sum_j \langle A(x_j e_j), y \rangle \quad (8.109c)$$

$$= \langle A(x), y \rangle. \quad (8.109d)$$

En ce qui concerne la matrice de l'application B ainsi définie, nous écrivons la condition (8.105) avec $y = e'_\alpha$ et $x = e_i$, de telle sorte que

$$A(x) = A(e_i) = \sum_\beta A_{\beta i} e'_\beta \quad (8.110)$$

et

$$B(y) = B(e'_\alpha) = \sum_j B_{j\alpha} e_j. \quad (8.111)$$

Alors nous avons :

$$\sum_\beta A_{\beta i} \langle e'_\beta, e'_\alpha \rangle = \sum_j B_{j\alpha} \langle e_i, e_j \rangle, \quad (8.112)$$

donc

$$A_{\alpha i} = B_{i\alpha}. \quad (8.113)$$

□

8.37.

À cause de l'expression (8.106) pour la matrice de A^* , cette application est souvent appelé **transposé** de A et noté A^t . Nous allons cependant voir plus tard (définition 8.185) que la transposée de A est une application $A^t: F^* \rightarrow E^*$. Il nous arrivera cependant d'écrire des égalités comme $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^t y \rangle$.

PROPOSHZMooGwdfBd

Proposition 8.38.

En ce qui concerne le déterminant,

$$\det(A^*) = \det(A)^* \quad (8.114)$$

où l'étoile à droite dénote la conjugaison complexe dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. Écrivons l'expression explicite (8.25) du déterminant. Le tout avec la base canonique :

$$\det(A) = \det_{(e_1, \dots, e_n)}(Ae_1, \dots, Ae_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n e_{\sigma(i)}^*(Ae_i). \quad (8.115)$$

Mais nous pouvons développer :

$$e_{\sigma(i)}^*(Ae_i) = \langle e_{\sigma(i)}, Ae_i \rangle = \langle A^* e_{\sigma(i)}, e_i \rangle = \langle e_i, A^* e_{\sigma(i)} \rangle^* = e_i^*(A^* e_{\sigma(i)})^*. \quad (8.116)$$

Notez que dans la dernière expression, les trois $*$ ont trois significations différentes. Par conséquent,

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n e_i^*(A^* e_{\sigma(i)})^*. \quad (8.117)$$

Mais $e_i^*(A^* e_{\sigma(i)}) = e_{\sigma(j)}^*(A^* e_j)$ pour $j = \sigma(i)$, donc le produit ne change pas si on déplace le σ :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n e_{\sigma(i)}^*(A^* e_i)^* = \det(A^*)^*. \quad (8.118)$$

Nous avons donc $\det(A) = \det(A^*)^*$, c'est-à-dire $\det(A)^* = \det(A^*)$. Pour information, la dernière étoile est la conjugaison complexe. $\square$

PROPooVPSYooRuofEfi

Proposition 8.39 ([1]).

Si $A: E_2 \rightarrow E_3$ et $B: E_1 \rightarrow E_2$ sont des applications linéaires, alors

$$(AB)^* = B^* A^* \quad (8.119)$$

où la « multiplication » est la composition.

Démonstration. L'existence de $(AB)^*$, de A^* et de B^* ne donne pas lieu à débat parce que la proposition 8.36 ne souffre pas de discussions. La propriété que $(AB)^*$ est unique à avoir est que

$$\langle ABx, y \rangle = \langle x, (AB)^* y \rangle \quad (8.120)$$

pour tout $x \in E_1$ et $y \in E_3$. Or l'application $B^* A^*$ possède également cette propriété parce que

$$\langle x, B^* A^* y \rangle = \langle Bx, A^* y \rangle = \langle ABx, y \rangle. \quad (8.121)$$

La partie unicité de la proposition 8.36 nous impose donc d'accepter que les applications $(AB)^*$ et $B^* A^*$ sont en réalité les mêmes¹⁹. $\square$

8.40.

Un grand moment d'utilisation de la notion d'adjoint pour un opérateur non carré sera la définition d'une intégrale sur une variété; en particulier dans la proposition 20.9.

Lemme 8.41.

Si E est un espace euclidien, un endomorphisme $f: E \rightarrow E$ est autoadjoint si et seulement si pour tout $x, y \in E$ nous avons $\langle x, f(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle$.

Démonstration. Dans le sens direct, nous avons

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle = \langle x, f(y) \rangle. \quad (8.122)$$

La première égalité est la définition de f^* et la seconde est l'hypothèse $f = f^*$.

Dans l'autre sens, l'hypothèse est que l'endomorphisme f vérifie $\langle x, f(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle$. Mais la proposition 8.36(1) spécifie que f^* est l'unique endomorphisme à satisfaire cette égalité. Donc $f = f^*$. $\square$

8.4.1 Opérateur orthogonal, matrice orthogonale

DEFooYKCSooURQDoS

Définition 8.42.

Un opérateur est **orthogonal** lorsque $A^* = A^{-1}$ où A^* est l'adjoint de A définit en 8.36.

DEFooUHANooLVBVID

Définition 8.43.

Une matrice U est **orthogonale** si $U^t = U^{-1}$. Le **groupe orthogonal** noté $O(n)$ est l'ensemble des matrices orthogonales $n \times n$.

LEMooSSALooSBFzJb

Lemme 8.44.

Soit un opérateur $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel. Il est orthogonal si et seulement si sa matrice dans la base canonique est orthogonale²⁰.

Démonstration. Soit la base canonique $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ de $\mathbb{R}^n$. Nous avons

$$\langle AA^* e_i, e_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad (8.123)$$

donc $((AA^*)e_i)_j = \delta_{ij}$, ou encore $(AA^*)_{ij} = \delta_{ij}$, ce qui signifie que la matrice AA^* est l'identité. $\square$

19. Et ce même si vous croyez les avoir déjà vu ensemble dans la même pièce.

20. Définition 8.43.

Proposition 8.45 (Thème 78).

À propos de matrices orthogonales.

(1) L'ensemble des matrices réelles orthogonales forme un groupe noté $O(n, \mathbb{R})$.

(2) Si A est une matrice orthogonale, alors $\det(A) = \pm 1$.

(3) Le groupe $O(n)$ est le groupe des isométries linéaires²¹ de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Commençons par prouver que $O(n, \mathbb{R})$ est un groupe. La matrice $\mathbb{1}$ est orthogonale. De plus si A et B sont orthogonales, la matrice produit AB est orthogonale :

$$(AB)(AB)^t = ABB^t A^t = A\mathbb{1}A^t = \mathbb{1}. \quad (8.124)$$

Nous avons donc bien un groupe.

En ce qui concerne le déterminant, $AA^t = \mathbb{1}$ donne $\det(A)\det(A^t) = 1$, mais la proposition 8.38 dit que $\det(A) = \det(A^t)$, donc $\det(A)^2 = 1$. D'où le fait que $\det(A) = \pm 1$.

D'autre part si A est une isométrie de $\mathbb{R}^n$ alors pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ nous avons $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$. En particulier,

$$\langle A^t Ax, y \rangle = \langle x, y \rangle \quad (8.125)$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$. En prenant $y = e_i$ nous trouvons

$$(A^t Ax)_i = x_i, \quad (8.126)$$

ce qui signifie que pour tout x , $A^t Ax = x$, ou encore que $A^t A$ est l'identité.

Réciproquement si $A^t A$ est l'identité nous avons

$$\langle x, y \rangle = \langle A^t Ax, y \rangle = \langle Ax, Ay \rangle, \quad (8.127)$$

ce qui prouve que A est une isométrie. $\square$

En ce qui concerne les valeurs propres des matrices de $O(n)$ ainsi que leurs formes canoniques (avec des fonctions trigonométriques) pour $O(3)$ et $SO(3)$, ce sera pour la proposition 18.219 et ce qui s'ensuit.

Définition 8.46.

Le sous-groupe des matrices orthogonales de déterminant 1 est le groupe **spécial orthogonal** noté $SO(n)$.

8.5 Topologie

8.5.1 Boules et sphères

Un espace vectoriel normé (définition 7.212) vient avec sa topologie métrique (théorème 7.142). Sphères et boules fermées viennent dans la définition 7.178.

Définition 8.47.

Une partie A de V est dite **bornée** si il existe un réel R tel que $A \subset B(0_V, R)$.

Une partie est donc bornée si elle est contenue dans une boule de rayon fini.

Exemple 8.48.

Dans $\mathbb{R}$, les boules sont les intervalles ouverts et fermés tandis que la sphère est donnée par les points extrêmes des intervalles :

$$\begin{aligned} B(a, r) &=]a - r, a + r[, \\ \bar{B}(a, r) &= [a - r, a + r], \\ S(a, r) &= \{a - r, a + r\}. \end{aligned} \quad (8.128)$$

$\triangle$

21. Au sens où, parmi les applications linéaires, les isométries sont les éléments de $O(n)$. À part ça, il y a aussi les translations, mais c'est une autre histoire qui vous sera contée une autre fois.

Exemple 8.49.

Si nous considérons $\mathbb{R}^2$, la situation est plus riche parce que nous avons plus de normes. Essayons de voir les sphères de centre $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon r pour les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Pour la norme $\|\cdot\|_1$, la sphère de rayon r est donnée par l'équation

$$|x| + |y| = r. \quad (8.129)$$

Pour la norme $\|\cdot\|_2$, l'équation de la sphère de rayon r est

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r, \quad (8.130)$$

et pour la norme supremum, la sphère de rayon r a pour équation

$$\max\{|x|, |y|\} = r. \quad (8.131)$$

Elles sont dessinées sur la figure 8.1

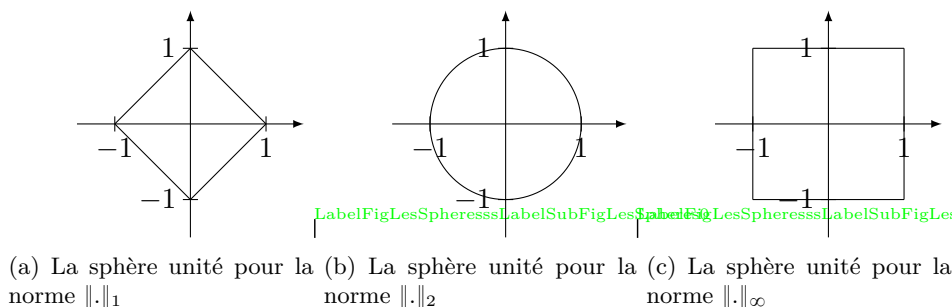


FIGURE 8.1: Les sphères de rayon 1 pour les trois normes classiques.

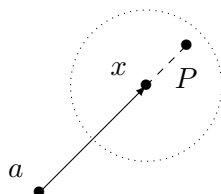
△

PropBoitPtLoIn

Proposition 8.50.

Soient V un espace vectoriel normé, a dans V et x tel que $d(a, x) = r$, c'est-à-dire $x \in S(a, r)$. Dans ce cas, toute boule centrée en x contient un point P tel que $d(P, a) > r$ et un point Q tel que $d(Q, a) < r$.

Démonstration. Soit une boule de rayon δ autour de x . Le but est de trouver un point P tel que $d(P, a) > r$ et $d(P, x) < \delta$. Pour cela, nous prenons P sur la même droite que x (en partant de a), mais juste « un peu plus loin », comme sur la figure suivante :



Plus précisément, nous considérons le point

$$P = x + \frac{v}{N} \quad (8.132)$$

où $v = x - a$ et N est suffisamment grand pour que $d(x, P)$ soit plus petit que δ . Cela est toujours possible parce que

$$d(P, x) = \|P - x\| = \frac{\|v\|}{N} \quad (8.133)$$

peut être rendu aussi petit que l'on veut par un choix approprié de N . Montrons maintenant que $d(a, P) > d(a, x)$:

$$\begin{aligned} d(a, P) &= \left\| a - x - \frac{v}{N} \right\| \\ &= \left\| a - x + \frac{a}{N} - \frac{x}{N} \right\| \\ &= \left\| \left(1 + \frac{1}{N}\right)(a - x) \right\| \\ &> \|a - x\| = d(a, x). \end{aligned} \tag{8.134}$$

Nous laissons en exercice le soin de trouver un point Q tel que $d(Q, a) < r$ et $d(Q, x) < \delta$. $\square$

8.5.2 Ouverts, fermés, intérieur et adhérence

Définition 8.51.

Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A , une partie de V . Un point a est dit **intérieur** à A si il existe une boule ouverte centrée en a et contenue dans A .

On appelle **l'intérieur** de A l'ensemble des points qui sont intérieurs à A . Nous notons $\text{Int}(A)$ l'intérieur de A .

Notons que $\text{Int}(A) \subset A$ parce que si $a \in \text{Int}(A)$, nous avons $B(a, r) \subset A$ pour un certain r et en particulier $a \in A$.

Exemple 8.52.

Trouver l'intérieur d'un intervalle dans $\mathbb{R}$ consiste à « ouvrir là où c'est fermé ».

- (1) $\text{Int}([0, 1]) =]0, 1[$.

Prouvons d'abord que $]0, 1[\subset \text{Int}([0, 1])$. Si $a \in]0, 1[$, alors a est strictement supérieur à 0 et strictement inférieur à 1. Dans ce cas, la boule de centre a et de rayon $\frac{\min\{a, 1-a\}}{2}$ est contenue dans $]0, 1[$ (voir figure 8.2). Cela prouve que a est dans l'intérieur de $[0, 1]$.

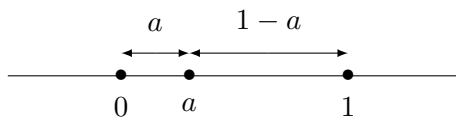


FIGURE 8.2: Trouver le rayon d'une boule autour de a . Une boule qui serait centrée en a avec un rayon strictement plus petit à la fois de a et de $1 - a$ est entièrement contenue dans le segment $]0, 1[$.

LabelFigIntervalleUn

Prouvons maintenant que $\text{Int}([0, 1]) \subset]0, 1[$. Vu que l'intérieur d'un ensemble est inclus dans l'ensemble, nous savons déjà que $\text{Int}([0, 1]) \subset [0, 1]$. Nous devons donc seulement montrer que 0 n'est pas dans l'intérieur de $[0, 1]$. C'est le cas parce que toute boule du type $B(0, r)$ contient le point $-r/2$ qui n'est pas dans $[0, 1]$.

- (2) $\text{Int}([0, \infty[) =]0, \infty[$.

- (3) $\text{Int}([2, 3]) =]2, 3[$.

$\triangle$

ExempleIntBoules

Exemple 8.53.

Les intérieurs des boules et sphères sont importantes à savoir.

- (1) $\text{Int}(B(a, r)) = B(a, r)$. Si $x \in B(a, r)$, nous avons $d(a, x) < r$. Alors la boule $B(x, r - d(a, x))$ est incluse à $B(a, r)$, et donc x est dans l'intérieur de $B(a, r)$. Conseil : faire un dessin.
- (2) $\text{Int}(\bar{B}(a, r)) = B(a, r)$. Par le point précédent, la boule $B(a, r)$ est certainement dans l'intérieur de la boule fermée. Il reste à montrer que les points de $\bar{B}(a, r)$ qui ne sont pas dans $B(a, r)$ ne sont pas dans l'intérieur. Ces points sont ceux dont la distance à a est égale à r . Le résultat découle alors de la proposition 8.50.

- (3) $\text{Int}(S(a, r)) = \emptyset$. Si $x \in S(a, r)$, toute boule centrée en a contient des points qui ne sont pas à distance r de a .

Notez que la sphère est un exemple d'ensemble non vide mais d'intérieur vide.

△

Définition 8.54.

Une partie A de l'espace vectoriel normé $(V, \|\cdot\|)$ est dite **ouverte** si chacun de ses points est intérieur. La partie A est donc ouverte si $A \subset \text{Int}(A)$. Par convention, nous disons que l'ensemble vide $\emptyset$ est ouvert.

Une partie est dite **fermée** si son complémentaire est ouvert. La partie A est donc fermée si $V \setminus A$ est ouvert.

Remarque : un ensemble A est ouvert si et seulement si $\text{Int}(A) = A$.

Définition 8.55.

Une partie A de l'espace vectoriel normé V est dite **compacte** si elle est fermée et bornée.

Nous verrons tout au long de ce cours que les ensembles compacts, et les fonctions définies sur ces ensembles ont de nombreuses propriétés agréables.

ExempleFerméIntervR

Exemple 8.56.

En ce qui concerne les intervalles de $\mathbb{R}$,

- $]1, 2[$ est ouvert ;
- $[3, 4]$ est fermé ;
- $[5, 6[$ n'est ni ouvert ni fermé ;

Les intervalles fermés de $\mathbb{R}$ sont toujours compacts.

△

PropTopologieAx

Proposition 8.57.

Soit V un espace vectoriel normé.

- (1) L'ensemble V lui-même et le vide sont à la fois fermés et ouverts.
- (2) Toute union d'ouverts est ouverte.
- (3) Toute intersection finie d'ouverts est ouverte.
- (4) Le vide et V sont les seules parties de V à être à la fois fermées et ouvertes.

ItemPropTopologieAxiv

Démonstration. L'ingrédient principal de cette démonstration est que si a est un point d'un ouvert $\mathcal{O}$, alors il existe une boule autour de a contenue dans $\mathcal{O}$ parce que a doit être dans l'intérieur de $\mathcal{O}$.

- (1) Nous avons déjà dit que, par définition, l'ensemble vide est ouvert. Cela implique que V lui-même est fermé (parce que son complémentaire est le vide). De plus, V est ouvert parce que toutes les boules sont incluses à V . Le vide est alors fermé (parce que son complémentaire est V).
- (2) Soit une famille $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ d'ouverts²², et l'union

$$\mathcal{O} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i. \quad (8.135)$$

Soit maintenant $a \in \mathcal{O}$. Nous devons prouver qu'il existe une boule centrée en a entièrement contenue dans $\mathcal{O}$. Étant donné que $a \in \mathcal{O}$, il existe $i \in I$ tel que $a \in \mathcal{O}_i$ (c'est-à-dire que a est au moins dans un des $\mathcal{O}_i$). Par hypothèse l'ensemble $\mathcal{O}_i$ est ouvert et donc tous ses points (en particulier a) sont intérieurs ; il existe donc une boule $B(a, r)$ centrée en a telle que $B(a, r) \subset \mathcal{O}_i \subset \mathcal{O}$.

22. L'ensemble I avec lequel nous « numérotions » les ouverts $\mathcal{O}_i$ est *quelconque*, c'est-à-dire qu'il peut être $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ ou n'importe quel autre ensemble, fini ou infini.

(3) Soit une famille finie d'ouverts $(\mathcal{O}_k)_{k \in \{1, \dots, n\}}$, et $a \in \mathcal{O}$ où

$$\mathcal{O} = \bigcap_{k=1}^n \mathcal{O}_k. \quad (8.136)$$

Vu que a appartient à chaque ouvert $\mathcal{O}_k$, nous pouvons trouver, pour chacun de ces ouverts, une boule $B(a, r_k)$ contenue dans $\mathcal{O}_k$. Chacun des r_k est strictement positif, et nous n'en avons qu'un nombre fini, donc le nombre $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$ est strictement positif. La boule $B(a, r)$ est incluse dans toutes les autres (parce que $B(a, r) \subset B(a, r')$ lorsque $r \leq r'$), par conséquent

$$B(a, r) \subset \bigcap_{k=1}^n B(a, r_k) \subset \bigcap_{k=1}^n \mathcal{O}_k = \mathcal{O}, \quad (8.137)$$

c'est-à-dire que la boule de rayon r est une boule centrée en a contenue dans $\mathcal{O}$, ce qui fait que a est intérieur à $\mathcal{O}$.

(4) Je n'ai pas encore de démonstration de ce point ²³.

□

La proposition dit que toute intersection *finie* d'ouvert est ouverte. Il est faux de croire que cela se généralise aux intersections infinies, comme le montre l'exemple suivant :

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}. \quad (8.138)$$

Chacun des ensembles $]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ est ouvert, mais le singleton $\{0\}$ est fermé (pourquoi?).

Nous reportons à la proposition 1.567 la preuve du fait que tout ensemble borné de $\mathbb{R}$ possède un infimum et un supremum.

Définition 8.58.

L'ensemble des ouverts de V est la **topologie** de V . La topologie dont nous parlons ici est dite **induite** par la norme $\|\cdot\|$ de V (parce que cette norme définit la notion de boule et qu'à son tour la notion de boule définit la notion d'ouverts). Un **voisinage** de a dans V est un ensemble contenant un ouvert contenant a .

Il existe de nombreuses topologies sur un espace vectoriel donné, mais certaines sont plus fameuses que d'autres. Dans le cas de $V = \mathbb{R}^n$, la topologie **usuelle** est celle induite par la norme euclidienne. Lorsque nous parlons de boules, de fermés, de voisinages ou d'autres notions topologiques (y compris de convergence, voir plus bas) dans $\mathbb{R}^n$, nous sous-entendons toujours la topologie de la norme euclidienne.

Exemple 8.59.

Les ensembles suivants sont des voisinages de 3 dans $\mathbb{R}$:

- $]1, 5[$;
- $[0, 10]$;
- $\mathbb{R}$.

Les ensembles suivants ne sont pas des voisinages de 3 dans $\mathbb{R}$:

- $]1, 3[$;
- $]1, 3]$;
- $[0, 5] \setminus \{3\}$.

△

Proposition 8.60.

Dans un espace vectoriel normé,

23. Rédigez une preuve, photographiez votre feuille, et envoyez-la moi.

- (1) toute intersection de fermés est fermée ;
 (2) toute union finie de fermés est fermée.

Encore une fois, l'hypothèse de finitude de l'intersection est indispensable comme le montre l'exemple suivant :

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] =]-1, 1[. \quad (8.139)$$

Chacun des intervalles dont on prend l'union est fermé tandis que l'union est ouverte.

LEMooHPQTooHKdoiL

Lemme 8.61.

Soit A , une partie de l'espace vectoriel normé V . Un point $a \in V$ est adhérent²⁴ à A dans V si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset. \quad (8.140)$$

Démonstration. En deux implications.

- (1) $\Rightarrow$ Soient un point adhérent a et un $\varepsilon > 0$. Vu que $B(a, \varepsilon)$ est un ouvert contenant a , nous avons $B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.
 (2) $\Leftarrow$ Soit un point a tel que pour tout ε , l'intersection $B(a, \varepsilon) \cap A$ est non vide. Si S est un ouvert contenant a , alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $a \in B(a, \varepsilon) \subset S$. Vu que $B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, nous avons aussi $S \cap A \neq \emptyset$.

□

Un point peut être adhérent à A sans faire partie de A , et nous avons toujours $A \subset \text{Adh}(A)$.

EXooiCLBooJzQFNy

Exemple 8.62.

La terminologie « fermeture » de A pour désigner $\bar{A}$ provient de deux origines.

- (1) L'ensemble $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A . Cela signifie que si B est un fermé qui contient A , alors $\bar{A} \subset B$. Cela est fondamentalement le sens de la définition 7.19.
 (2) Pour les intervalles dans $\mathbb{R}$, trouver $\bar{A}$ revient à fermer les extrémités qui sont ouvertes, comme on en a parlé dans l'exemple 8.56.

△

Exemple 8.63.

Dans $\mathbb{R}$, l'infimum et le supremum d'un ensemble sont des points adhérents. En effet si M est le supremum de $A \subset \mathbb{R}$, pour tout ε , il existe un $a \in A$ tel que $a > M - \varepsilon$, tandis que $M > a$. Cela fait que $a \in B(M, \varepsilon)$, et en particulier que pour tout rayon ε , nous avons $B(M, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Le même raisonnement montre que l'infimum est également dans l'adhérence de A .

△

ParlerEncoredeF

Exemple 8.64.

Il ne faut pas conclure de l'exemple précédent qu'un point limite ou adhérent est automatiquement un minimum ou un maximum. En effet, si nous regardons l'ensemble formé par les points de la suite $x_n = (-1)^n/n$, le nombre zéro est un point adhérent et une limite, mais pas un infimum ni un maximum.

△

Lemme 8.65.

Si B est une partie fermée de V , alors $B = \bar{B}$.

Démonstration. Supposons qu'il existe $a \in \bar{B}$ tel que $a \notin B$. Alors il n'y a pas d'ouverts autour de a qui soit contenu dans $\mathbb{C}B$. Cela prouve que $\mathbb{C}B$ n'est pas ouvert, et par conséquent que B n'est pas fermé. Cela est une contradiction qui montre que tout point de $\bar{B}$ doit appartenir à B lorsque B est fermé.

□

24. Définition 7.19.

Exemple 8.66.

Au niveau des intervalles dans $\mathbb{R}$, prendre l'adhérence consiste à « fermer là où c'est ouvert ». Attention cependant à ne pas fermer l'intervalle en l'infini.

- (1) $\overline{[0, 2[} = [0, 2]$.
- (2) $\overline{]3, \infty[} = [3, \infty[$.

Si au lieu de travailler dans $\mathbb{R}$, vous travaillez dans une extension comme le compactifié d'Alexandrov $\hat{\mathbb{R}}$ (définition 7.185) ou dans la droite réelle achevée (définition 12.26), vous devez un peu réfléchir avant de décider si il faut fermer les intervalles en $\pm\infty$ ou en ω . Bref, ne faites rien mécaniquement et posez vous des questions de topologie quand vous cherchez des fermetures. $\triangle$

PROPooEURXooHHpkhd

Proposition 8.67.

Soit V un espace vectoriel normé et $a \in V$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) $a \in \bar{A}$;
- (2) il existe une suite d'éléments x_n dans A qui converge vers a ;
- (3) $d(a, A) = 0$.

Notez que dans cette proposition, nous ne supposons pas que a soit dans A .

PropComleIntBar

Proposition 8.68.

Pour toute partie A d'un espace vectoriel normé nous avons

- (1) $V \setminus \bar{A} = \text{Int}(V \setminus A)$,
- (2) $V \setminus \text{Int}(A) = \overline{V \setminus A}$.

En utilisant les notations du complémentaire (définition 1.6), les deux points de la proposition se récrivent

- (1) $\complement \bar{A} = \text{Int}(\complement A)$,
- (2) $\complement \text{Int}(A) = \overline{\complement A}$.

ItemLemPropComplementiv

Démonstration. Nous avons $a \in V \setminus \bar{A}$ si et seulement si $a \notin \bar{A}$. Or ne pas être dans $\bar{A}$ signifie qu'il existe un rayon ε tel que la boule $B(a, \varepsilon)$ n'intersecte pas A . Le fait que la boule $B(a, \varepsilon)$ n'intersecte pas A est équivalent à dire que $B(a, \varepsilon) \subset V \setminus A$. Or cela est exactement la définition du fait que a est à l'intérieur de $V \setminus A$. Nous avons donc montré que $a \in V \setminus \bar{A}$ si et seulement si $a \in \text{Int}(V \setminus A)$. Cela prouve la première affirmation.

Pour prouver la seconde affirmation, nous appliquons la première au complémentaire de A : $\complement(\bar{A}) = \text{Int}(\complement A)$. En prenant le complémentaire des deux membres nous trouvons successivement

$$\begin{aligned} \complement \complement(\bar{A}) &= \complement \text{Int}(\complement A), \\ \bar{A} &= \complement \text{Int}(A), \end{aligned} \tag{8.141}$$

ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Attention à ne pas confondre $\complement \bar{A}$ et $\overline{\complement A}$. Ces deux ensembles ne sont pas égaux. En effet, en tant que complément d'un fermé, l'ensemble $\complement \bar{A}$ est certainement ouvert, tandis que, en tant que fermeture, l'ensemble $\overline{\complement A}$ est fermé. Pouvez-vous trouver des exemples d'ensembles A tels que $\complement \bar{A} = \overline{\complement A}$?

PROPooRAZUooVMxPic

Proposition 8.69.

Soient A et B deux parties de l'espace vectoriel normé V .

- (1) Pour les inclusions, si $A \subset B$, alors $\text{Int}(A) \subset \text{Int}(B)$ et $\bar{A} \subset \bar{B}$.
- (2) Pour les unions, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ et $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.
- (3) Pour les intersections, $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) = \text{Int}(A \cap B)$ et $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \subset \text{Int}(A \cup B)$.

Démonstration. (1) Si a est dans l'intérieur de A , il existe une boule autour de a contenue dans A . Cette boule est alors contenue dans B et donc est une boule autour de a contenue dans B , ce qui fait que a est dans l'intérieur de B . Si maintenant a est dans l'adhérence de A , toute boule centrée en a contient un élément de A et donc un élément de B , ce qui prouve que a est dans l'adhérence de B .

- (2) Nous avons $A \subset A \cup B$ et donc, en utilisant le premier point, $\bar{A} \subset \overline{A \cup B}$. De la même manière, $\bar{B} \subset \overline{A \cup B}$. En prenant l'union, $\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Réciproquement, soit $a \in \overline{A \cup B}$ et montrons que $a \in \bar{A} \cup \bar{B}$. Supposons par l'absurde que a ne soit ni dans $\bar{A}$ ni dans $\bar{B}$. Il existe donc des rayons ε_1 et ε_2 tels que

$$\begin{aligned} B(a, \varepsilon_1) \cap A &= \emptyset, \\ B(a, \varepsilon_2) \cap B &= \emptyset. \end{aligned} \quad (8.142)$$

En prenant $r = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, la boule $B(a, r)$ est incluse aux deux boules citées et donc n'intersecte ni A ni B . Donc $a \notin \overline{A \cup B}$, d'où la contradiction.

- (3) Si nous appliquons le second point à $\mathbb{C}A$ et $\mathbb{C}B$, nous trouvons

$$\overline{\mathbb{C}A \cup \mathbb{C}B} = \overline{\mathbb{C}A} \cup \overline{\mathbb{C}B}. \quad (8.143)$$

En utilisant les propriétés du lemme 1.44, le membre de gauche devient

$$\overline{\mathbb{C}A \cup \mathbb{C}B} = \overline{\mathbb{C}(A \cap B)} = \mathbb{C} \text{Int}(A \cap B), \quad \text{Eq2707CACBCAB} \quad (8.144)$$

tandis que le membre de droite devient

$$\overline{\mathbb{C}A} \cup \overline{\mathbb{C}B} = \mathbb{C} \text{Int}(A) \cup \mathbb{C} \text{Int}(B) = \mathbb{C}(\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)). \quad \text{Eq2707cAcBACAACB} \quad (8.145)$$

En égalisant le membre de droite de (8.144) avec celui de (8.145) et en passant au complémentaire nous trouvons

$$\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B), \quad (8.146)$$

comme annoncé.

La dernière affirmation provient du fait que $\text{Int}(A) \subset \text{Int}(A \cup B)$ et de la propriété équivalente pour B .

□

Remarque 8.70.

Nous avons prouvé que $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$. Il arrive que l'inclusion soit stricte, comme dans l'exemple suivant. Si nous prenons $A = [0, 1]$ et $B =]1, 2]$, nous avons $A \cap B = \emptyset$ et donc $\overline{A \cap B} = \emptyset$. Par contre nous avons $\bar{A} \cap \bar{B} = \{1\}$.

Définition 8.71.

La **frontière** d'un sous-ensemble A de l'espace vectoriel normé V est l'ensemble des points $a \in V$ tels que

$$\begin{aligned} B(a, r) \cap A &\neq \emptyset, \\ B(a, r) \cap \mathbb{C}A &\neq \emptyset, \end{aligned} \quad (8.147)$$

pour tout rayon r . En d'autres termes, toute boule autour de a contient des points de A et des points de $\mathbb{C}A$. La frontière de A se note ∂A .

PropDescFrpbmsmI

Proposition 8.72.

La frontière d'une partie A d'un espace vectoriel normé V s'exprime sous la forme

$$\partial A = \bar{A} \setminus \text{Int}(A). \quad (8.148)$$

Démonstration. Le fait pour un point a de V d'appartenir à $\bar{A}$ signifie que toute boule centrée en a intersecte A . De la même façon, le fait de ne pas appartenir à $\text{Int}(A)$ signifie que toute boule centrée en a intersecte $\mathbb{C}A$.

□

La description de la frontière donnée par la proposition 8.72 est celle qu'en pratique nous utilisons le plus souvent. Dans certains textes, elle est prise comme définition de la frontière.

Lemme 8.73.

La frontière de A peut également s'exprimer des façons suivantes :

$$\partial A = \bar{A} \cap \mathbb{C} \operatorname{Int}(A) = \bar{A} \cap \overline{\mathbb{C} A}, \quad (8.149)$$

Démonstration. En partant de $\partial A = \bar{A} \setminus \operatorname{Int}(A)$, la première égalité est une application de la propriété (4) du lemme 1.44. La seconde égalité est alors la proposition 8.68. $\square$

Exemple 8.74.

Dans $\mathbb{R}$, la frontière d'un intervalle est la paire constituée des points extrêmes. En effet

$$\partial[a, b[= \overline{[a, b[} \setminus \operatorname{Int}([a, b[) = [a, b[\setminus]a, b[= \{a, b\}. \quad (8.150)$$

Toujours dans $\mathbb{R}$ nous avons

$$\partial \mathbb{R} = \bar{\mathbb{R}} \setminus \operatorname{Int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset, \quad (8.151)$$

et

$$\partial \mathbb{Q} = \bar{\mathbb{Q}} \setminus \operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}. \quad (8.152)$$

$\triangle$

Exemple 8.75.

Dans $\mathbb{R}^n$, nous avons

$$\partial B(a, r) = \partial \bar{B}(a, r) = S(a, r). \quad (8.153)$$

Cela est un boulot pour la proposition 8.50. Si $x \in S(a, r)$ alors tout boule autour de x contient des points à distance strictement plus grande et plus petite que $d(a, x)$, c'est-à-dire des points dans $B(a, r)$ et hors de $B(a, r)$. Cela prouve que les points de $S(a, r)$ font partie de $\partial B(a, r)$, c'est-à-dire que $S(a, r) \subset \partial B(a, r)$; et idem pour $\bar{B}(a, r)$.

Pour prouver l'inclusion inverse, soit $x \in \partial B(a, r)$. Vu que toute boule autour de x contient des points intérieurs à $B(a, r)$, pour tout $\epsilon > 0$, $d(a, x) - \epsilon < r$, c'est-à-dire que $d(a, x) \leq r$. De la même manière toute boule autour de x contient des points hors de $B(a, r)$ signifie que pour tout ϵ , $d(a, x) + \epsilon > r$ ou encore que $d(a, x) \geq r$. Nous avons donc $d(a, x) = r$. $\triangle$

Remarque 8.76.

Il serait toutefois faux de croire que $\partial A = \partial \bar{A}$ pour toute partie A de $\mathbb{R}^n$. En effet si $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nous avons $\partial A = \{0\}$ et $\bar{A} = \mathbb{R}$, donc $\partial \bar{A} = \emptyset$.

8.5.3 Point isolé, point d'accumulation

LEM00OMVN00VBIQMD

Lemme 8.77.

Soit un espace vectoriel normé V ainsi qu'une partie D de V .

(1) Un point $a \in D$ est isolé²⁵ de D dans V si et seulement si existe un $r > 0$ tel que

$$B(a, r) \cap D = \{a\}. \quad (8.154)$$

(2) Un point $a \in V$ point d'accumulation²⁶ de D si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$,

$$\left(B(a, \epsilon) \setminus \{a\} \right) \cap D \neq \emptyset. \quad (8.155)$$

Démonstration. Deux parties.

25. Définition 7.44.

26. Définition 7.43.

- (1) **Pour le point isolé** D'une part si il existe un $r > 0$ tel que $B(a, r) \cap D = \{a\}$, la définition 7.44 est vérifiée. D'autre part, si la définition 7.44 est vérifiée, il existe un ouvert $\mathcal{O}$ contenant a et tel que $\mathcal{O} \cap D = \{a\}$. Vu que les boules forment une base de la topologie normée²⁷, il existe un $r > 0$ tel que $a \in B(a, r) \subset \mathcal{O}$.
- (2) **Pour le point d'accumulation** Il s'agit encore de dire que tout voisinage ouvert de a contient une boule centrée en a .

□

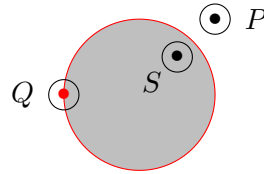


FIGURE 8.3: L'ensemble décrit par l'équation (8.156). Le point P est un point isolé de D , tandis que les points S et Q sont des points d'accumulation.

LabelFigAccumulationIsolo

Exemple 8.78.

Considérons la partie suivante de $\mathbb{R}^2$:

$$D = \{(x, y) \text{ tel que } x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(1, 1)\}. \quad (8.156)$$

Eq2807BouleIso

Comme on peut le voir sur la figure 8.3, le point $P = (1, 1)$ est un point isolé de D parce qu'on peut tracer une boule autour de P sans inclure d'autres points de D que P lui-même. Le point $Q = (-1, 0)$ est un point d'accumulation de D parce que toute boule autour de Q contient des points de D .

Le point S , étant un point intérieur, est un point d'accumulation : toute boule autour de S intersecte D .

Notez cependant que le point Q lui-même n'est pas dans D parce que l'inégalité qui définit D est stricte. $\triangle$

Remarque 8.79.

À propos de la position des points d'accumulation et des points isolés.

- (1) Les points intérieurs sont tous des points d'accumulation.
- (2) Les points isolés ne sont jamais intérieurs.
- (3) Certains points d'accumulation ne font pas partie de l'ensemble. Par exemple le point 1 est un point d'accumulation de $E =]0, 1[$.
- (4) Les points de la frontière sont soit d'accumulation soit isolés.

Exemple 8.80.

Tous les points de $\mathbb{R}$ sont des points d'accumulation de $\mathbb{Q}$ parce que dans toute boule autour d'un réel, on peut trouver un nombre rationnel. $\triangle$

Remarque 8.81.

L'ensemble des points d'accumulation d'un ensemble n'est pas exactement son adhérence. En effet, un point isolé dans A est dans l'adhérence de A , mais n'est pas un point d'accumulation de A .

8.5.4 Des exemples

Exemple 8.82.

Nous considérons l'ensemble.

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 5x + 6 < y \leq 2\}. \quad (8.157)$$

ItemExoEVN3i

27. La définition (7.125) exprime le fait que tout ouvert contenant a contient une boule centrée en a .

Si un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est tel que $x^2 - 5x + 6 < y$, alors dans une boule centrée en (x, y) (de rayon r_1), l'inégalité reste vraie (parce que la fonction $x^2 - 5x + 6 - y$ est une fonction continue). De la même manière, si nous avons $y < 2$ en (x, y) , alors nous avons encore l'inégalité dans une boule de rayon r_2 . En prenant $r = \min\{r_1, r_2\}$, les deux inégalités restent vraies dans la boule de rayon r .

Donc les points (x, y) tels que $x^2 - 5x + 6 < y < 2$ sont dans l'intérieur de A_1 .

Pour les mêmes raisons, autour d'un point (x, y) tel que $x^2 - 5x + 6 > y$, nous pouvons trouver une boule dans laquelle l'inégalité reste stricte. Ces points ne sont donc pas dans l'adhérence de A_1 . Un point qui vérifie $x^2 - 5x + 6 = y = 2$ est par contre dans l'adhérence parce que dans toute boule, on pourra trouver un x tel que $x^2 - 5x + 6 < y$, et un y . L'adhérence est donc donnée par les inéquations

$$\bar{A}_1 \equiv x^2 - 5x + 6 \leq y \leq 2. \quad (8.158)$$

La frontière est donnée par les points de l'adhérence qui ne sont pas dans l'intérieur de A_1 . Attention : **ne pas dire** que la frontière est alors donnée simplement en remplaçant les inégalités par des égalités : $\partial A_1 \equiv x^2 - 5x + 6 = y = 2$. Quel est cet ensemble ?

Trouver la frontière demande un peu plus de travail. Le point marqué sur la figure 8.4 est sur la frontière parce que toute boule intersecte l'intérieur et l'extérieur. Cela est dû au fait que, sur ce point, nous avons $x^2 - 5x + 6 = y$ en même temps que $y < 2$. Donc si on prend une boule assez petite, on conserve $y < 2$, mais on obtient des points tels que $x^2 - 5x + 6 < y$.

En voyant le dessin, la chose à faire pour écrire la frontière est de trouver les deux points d'intersection entre la parabole et la droite horizontale. Ces points sont les points (x, y) qui satisfont au système

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 = y \\ y = 2. \end{cases} \quad (8.159a)$$

$$(8.159b)$$

En substituant la seconde équation dans la première, il vient $x^2 - 5x + 6 = 2$, ce qui nous donne à résoudre le polynôme du second degré $x^2 - 5x + 4 = 0$. Les éventuelles solutions entières sont les diviseurs de 4. Par chance²⁸, on voit que $x = 1$ et $x = 4$ sont des solutions. Le théorème 3.118 nous assure qu'il n'y a pas d'autres racines. Les deux points d'intersection sont les points $P = (1, 2)$ et $Q = (4, 2)$. Les points de la frontière de A_1 sont donc donnés par

$$\begin{aligned} \partial A_1 = & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x^2 - 5x + 6 = y \text{ et } 1 \leq x \leq 4\} \\ & \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } y = 2 \text{ et } 1 \leq x \leq 4\}. \end{aligned} \quad (8.160)$$

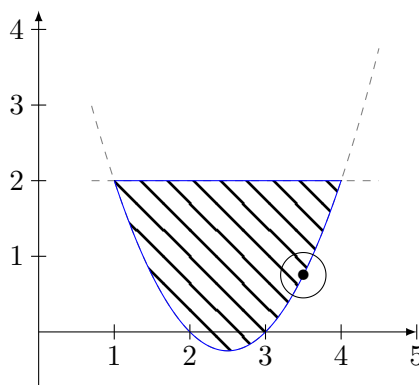


FIGURE 8.4: En hachuré : l'intérieur ; en trait plein : la frontière. L'adhérence est l'union des deux. Exemple 8.82.

LabelFigAdhIntFr

Notez que les points de la parabole qui sont sur la frontière ne font pas partie de l'ensemble A_1 lui-même, tandis que ceux de la frontière qui sont sur la droite horizontale en font partie sauf $(4, 2)$ et $(1, 2)$.

28. Sinon, il aurait fallu utiliser la proposition 9.120.

L'intérieur de A_1 n'étant pas égal à A_1 , cet ensemble n'est pas ouvert ; de la même manière, vu que $\bar{A}_1 \neq A_1$, l'ensemble n'est pas fermé. L'ensemble A_1 est par contre borné parce qu'il est contenu par exemple dans la boule de centre $(0, 0)$ et de rayon 5. Les points d'accumulation de A_1 sont les points de sa fermeture. $\triangle$

ItemExoEVN3ii

Exemple 8.83.

Nous étudions

$$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 1 < y < 2x\}. \quad (8.161)$$

Pour les mêmes raisons que dans l'exemple 8.82 l'intérieur est donné par

$$\text{Int}(A_2) \equiv x + 1 < y < 2x; \quad (8.162)$$

L'adhérence est donnée par

$$\overline{A_2} \equiv x + 1 \leq y \leq 2x, \quad (8.163)$$

Pour la frontière, les deux droites dont il est question dans la définition de A_2 (les droites $y = x + 1$ et $y = 2x$) se coupent en $x = 1$ (refaire soi-même le dessin de la figure 8.5). Lorsque $x < 1$, les conditions $x + 1 < y$ et $y < 2x$ sont incompatibles : aucun point de A_2 n'est dans la partie $x < 1$ du plan. Lorsque $x > 1$, alors les points situés *entre* les deux droites font partie de A_2 . La frontière est donc donnée par ces deux droites pour $x \geq 1$.

Étant donné que $\text{Int}(A_2) = A_2$, cet ensemble est ouvert (et donc pas fermé par la proposition 8.57(4)). Il n'est par contre pas borné parce qu'il contient des point (x, y) avec des x arbitrairement grands. $\triangle$

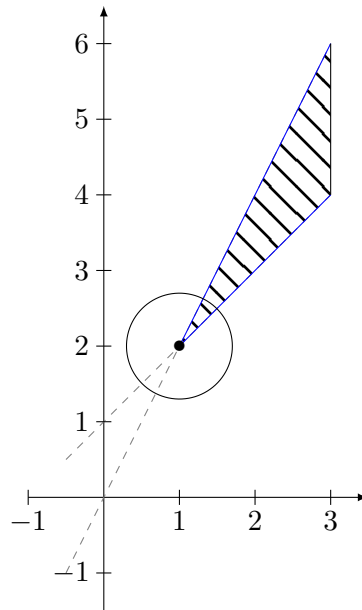


FIGURE 8.5: Notez que le point d'angle fait partie de la frontière, mais pas de l'ensemble. Exemple 8.83.

LabelFigAdhIntFrDeux

Proposition 8.84 ([319]).

Tout partie de $\mathbb{R}$ sans point d'accumulation est dénombrable.

Démonstration. Soit une partie S de $\mathbb{R}$ ne contenant pas de points d'accumulation. Pour chaque $s \in S$, il existe un $\epsilon_s > 0$ tel que

$$B(s, \epsilon_s) \cap S = \{s\}. \quad (8.164)$$

Rien ne garantit cependant que $B(s, \epsilon_s) \cap B(t, \epsilon_t) = \emptyset$, alors que nous en aurons besoin pour la suite.

Le nombre

$$\inf\{|s - v| \text{ tel que } v \in S \setminus \{s\}\} \quad (8.165)$$

est au moins égal à ϵ_s et est donc strictement positif. Nous posons

$$r_s = \frac{\inf\{|s - v| \text{ tel que } v \in S \setminus \{s\}\}}{4}, \quad (8.166)$$

et

$$I_s = B(s, r_s). \quad (8.167)$$

Nous avons maintenant $I_s \cap I_t = \emptyset$. Soit en effet $u \in I_s \cap I_t$. Alors

$$|s - t| \leq |s - u| + |u - t| \quad (8.168a)$$

$$\leq r_s + r_t \quad (8.168b)$$

$$\leq 2r_s \quad (8.168c)$$

où nous avons supposé $r_s \geq r_t$. Si ce n'est pas le cas, changer s et t dans ce qui suit ; les deux points ont des rôles symétriques. Nous avons donc

$$|s - t| \leq 2r_s = \frac{\inf\{|s - v| \text{ tel que } v \in S \setminus \{s\}\}}{2} \leq \frac{|s - t|}{2}. \quad (8.169)$$

Donc $|s - t| = 0$ et $s = t$.

Cela pour dire que I_s ne possède d'intersection avec I_t que si $s = t$.

Nous définissons alors une application

$$\begin{aligned} \varphi: S &\rightarrow \mathbb{Q} \\ s &\mapsto q_s \end{aligned} \quad (8.170)$$

où q_s est un choix de rationnel dans I_s . C'est le lemme 1.544 qui nous permet de choisir un tel rationnel.

La construction des intervalles I_s garantit que φ est une injection. Le fait qu'il existe une injection de $\mathbb{Q}$ vers S et le fait que $\mathbb{Q}$ est dénombrable impliquent que S est au plus dénombrable. $\square$

8.6 Valeur propre et vecteur propre

8.6.1 Généralités

Nous savons qu'une application *linéaire* $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est complètement définie par la donnée de son action sur les trois vecteurs de base, c'est-à-dire par la donnée de

$$Ae_1, Ae_2 \text{ et } Ae_3. \quad (8.171)$$

La matrice d'une application A se forme en mettant simplement les vecteurs Ae_1 , Ae_2 et Ae_3 en colonne. Donc la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.172) \quad \text{EqExempleALin}$$

signifie que l'application linéaire A envoie le vecteur e_1 sur $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, le vecteur e_2 sur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le

vecteur e_3 sur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pour savoir comment A agit sur n'importe quel vecteur, on applique la règle de produit vecteur $\times$ matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \\ 7x + 8y + 9z \end{pmatrix}. \quad (8.173)$$

Une chose intéressante est de savoir quelles sont les directions invariantes de la transformation linéaire. Par exemple, on peut lire sur la matrice (8.172) que la direction $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est invariante : elle est simplement multipliée par 3. Dans cette direction, la transformation est juste une dilatation. Afin de savoir si v est un vecteur d'une direction conservée, il faut voir si il existe un nombre λ tel que $Av = \lambda v$, c'est-à-dire voir si v est simplement dilaté.

L'équation $Av = \lambda v$ se réécrit $(A - \lambda \mathbb{1})v = 0$, c'est-à-dire qu'il faut résoudre l'équation

$$(A - \lambda \mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8.174)$$

Nous savons qu'une telle équation ne peut avoir de solutions que si $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$. La première étape est donc de trouver les λ qui vérifient cette condition.

8.6.2 Dans le vif du sujet

DefooMMKZooVcskCc

Proposition-Définition 8.85.

Soit un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E et un endomorphisme $T: E \rightarrow E$. Un **vecteur propre** de T est un vecteur $v \neq 0$ tel que $T(v) = \lambda v$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$. Dans ce cas, λ est la **valeur propre** de v .

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. L'ensemble des vecteurs propres de T pour la valeur propre λ est un espace vectoriel nommé **espace propre**.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soient des vecteurs propres v, w pour la valeur propre λ . Si $\alpha \in \mathbb{K}$, en utilisant la linéarité de T , nous avons

$$T(\alpha v + w) = \alpha T(v) + T(w) = \alpha \lambda v + \lambda w = \lambda(\alpha v + w), \quad (8.175)$$

donc $\alpha v + w$ est un vecteur propre de T pour la même valeur propre λ . $\square$

Définition 8.86.

L'ensemble des valeurs propres de l'endomorphisme T est son **spectre** et est noté $\text{Spec}(T)$.

Remarque 8.87.

Le nombre zéro peut être une valeur propre ; c'est le vecteur zéro qui ne peut pas être vecteur propre. La matrice nulle est une matrice diagonalisable.

LEMooWHWUooFFXlzT

Lemme 8.88 ([320]).

Le spectre d'une matrice est égal au spectre de sa transposée : $\text{Spec}(T) = \text{Spec}(T^t)$.

Démonstration. Nous savons que T est inversible si et seulement si T^t l'est parce que si $TS = \mathbb{1}$ alors $S^t T^t = \mathbb{1}$. Nous avons équivalence entre les énoncés suivants :

- λ est une valeur propre de T
- il existe v tel que $(T - \lambda \mathbb{1})v = 0$
- $T - \lambda \mathbb{1}$ n'est pas inversible
- $(T^t - \lambda \mathbb{1})$ n'est pas inversible
- il existe w tel que $T^t w = \lambda w$.
- λ est valeur propre de T^t .

$\square$

LemjczTYH

Lemme 8.89.

Soient un espace vectoriel E , un endomorphisme $T \in \text{End}(E)$, ainsi que ses sous-espaces propres $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \text{Spec}(T)}$. Toute somme finie de la forme

$$E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_p} \quad (8.176)$$

est directe²⁹.

Démonstration. Nous utilisons le lemme 4.151. Soient $v_i \in E_{\lambda_i}$ un choix de vecteurs tels que

$$\sum_{i=1}^p v_i = 0. \quad (8.177)$$

Soit un entier j_0 entre 1 et p . Nous allons montrer que $v_{j_0} = 0$. Pour cela nous remarquons d'abord que, pour tout $i \neq j_0$,

$$\prod_{k \neq j_0} (\lambda_i - \lambda_k) = 0. \quad (8.178)$$

Nous appliquons l'opérateur $\prod_{k \neq j_0} (T - \lambda_k \mathbb{1})$ à l'égalité (8.177) :

$$0 = \sum_{i=1}^p \prod_{k \neq j_0} (T - \lambda_k) v_i \quad (8.179a)$$

$$= \sum_{i=1}^p \prod_{k \neq j_0} (\lambda_i - \lambda_k) v_i \quad (8.179b)$$

$$= \prod_{k \neq j_0} (\lambda_{j_0} - \lambda_k) v_{j_0}. \quad (8.179c)$$

Justifications.

- Pour (8.179b). Pour chaque k et i nous avons $(T - \lambda_k) v_i = T v_i - \lambda_k v_i = \lambda_i v_i - \lambda_k v_i$ parce que v_i est un vecteur propre de T pour la valeur propre λ_i .
- Pour (8.179c). Dans la somme, seul le terme $i = j_0$ est non nul, à cause de (8.178).

Donc $v_{j_0} = 0$ parce que le produit $\prod_{k \neq j_0} (\lambda_{j_0} - \lambda_k)$, lui, est non nul. $\square$

8.7 Polynômes d'endomorphismes

Soit A un anneau commutatif et $\mathbb{K}$, un corps commutatif. L'injection canonique $A \rightarrow A[X]$ se prolonge en une injection

$$\mathbb{M}(A) \rightarrow \mathbb{M}(A[X]). \quad (8.180)$$

8.7.1 Polynômes d'endomorphismes

Soit $u \in \text{End}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi_u : \mathbb{K}[X] &\rightarrow \text{End}(E) \\ P &\mapsto P(u). \end{aligned} \quad (8.181)$$

L'image de φ_u est un sous-espace vectoriel. En effet si $A = \varphi_u(P)$ et $B = \varphi_u(Q)$, alors $A + B = \varphi_u(P + Q)$ et $\lambda A = (\lambda P)(u)$. En particulier c'est un espace fermé³⁰.

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E et P , un polynôme. Nous disons que P est un polynôme **annulateur** de u si $P(u) = 0$ en tant qu'endomorphisme de E .

Lemme 8.90.

Si P et Q sont des polynômes dans $\mathbb{K}[X]$ et si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , nous avons

$$(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u). \quad (8.182)$$

29. Définition 4.149.

30. Proposition 7.229.

Démonstration. Si $P = \sum_i a_i X^i$ et $Q = \sum_j b_j X^j$, alors le coefficient de X^k dans PQ est

$$\sum_l a_l b_{k-l}. \quad \text{EqCoefGPvVoy} \quad (8.183)$$

Par conséquent $(PQ)(u)$ contient $\sum_l a_l b_{k-l} u^k$. Par ailleurs $P(u) \circ Q(u)$ est donné par

$$\sum_i a_i u^i \left(\sum_j b_j u^j \right) (x) = \sum_{ij} a_i b_j u^{i+j}(x). \quad (8.184)$$

Le coefficient du terme en u^k est bien le même que celui donné par (8.183). $\square$

ThoDecompNoyayzzMWod

Théorème 8.91 (Décomposition des noyaux ou lemme des noyaux[321]).

Soit u un endomorphisme du $\mathbb{K}$ -espace³¹ vectoriel E . Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme tel que $P(u) = 0$. Nous supposons que P s'écrit comme le produit $P = P_1 \dots P_n$ de polynômes deux à deux étrangers³². Alors

(1) Nous avons la formule

$$E = \ker P_1(u) \oplus \dots \oplus \ker P_n(u). \quad (8.185)$$

(2) En posant $Q_i = \prod_{j \neq i} P_j$, il existe des polynômes R_i tels que

$$R_1 Q_1 + \dots + R_n Q_n = 1. \quad (8.186)$$

ITEMooMOBPooPVXuXj

(3) Les projecteurs sur $\ker(P_j(u))$ sont donnés par

$$\text{proj}_{\ker(P_i(u))} = (R_i Q_i)(u). \quad (8.187)$$

Démonstration. Dans ce qui suit, nous allons beaucoup utiliser le fait que $\mathbb{K}[X]$ soit commutatif (lemme 1.466). Nous posons

$$Q_i = \prod_{j \neq i} P_j. \quad (8.188)$$

(1) **Utilisation de Bézout**

Par le lemme 6.48 ces polynômes sont étrangers entre eux et le théorème de Bézout (théorème 6.47) donne l'existence de polynômes R_i tels que

$$R_1 Q_1 + \dots + R_n Q_n = 1. \quad \text{EQooMMCVooRzIXpA} \quad (8.189)$$

(2) **Une première somme, pas directe** Si nous appliquons cette égalité à u et ensuite à $x \in E$ nous trouvons

$$\sum_{i=1}^n (R_i Q_i)(u)(x) = x, \quad \text{EqqVcpUy} \quad (8.190)$$

et en particulier si nous posons $E_i = \text{Image}(R_i Q_i(u))$ nous avons

$$E = \sum_{i=1}^n E_i. \quad (8.191)$$

Cette dernière somme n'est éventuellement pas une somme directe.

(3) **$Q_i Q_j$ est multiple de P** Si $i \neq j$, en utilisant la commutativité de $\mathbb{K}[X]$,

$$Q_i Q_j = \left(\prod_{k \neq i} P_k \right) \left(\prod_{l \neq j} P_l \right) = \left(\prod_{\substack{k \neq i \\ k \neq j}} P_k \right) P_j \left(\prod_{l \neq j} P_l \right) = \prod_{\substack{k \neq i \\ k \neq j}} P_k \prod_k P_l = S_{ij} P, \quad (8.192)$$

où S_{ij} est un polynôme. Nous voyons que $Q_i Q_j$ est multiple de P .

31. Le corps $\mathbb{K}$ est commutatif comme tous les corps dans le Frido.

32. Définition 3.99.

- (4) **Une somme directe** Toujours avec $i \neq j$, en utilisant le lemme 8.90,

$$(R_i Q_i)(u) \circ (R_j Q_j)(u) = (R_i Q_i R_j Q_j)(u) = (R_i R_j \underbrace{Q_i Q_j}_{=S_{ij}P})(u) = (R_i R_j S_{ij})(u) \circ P(u) = 0 \quad (8.193)$$

Nous pouvons voir E comme un $\mathbb{K}$ -module et appliquer le théorème 1.446. Les opérateurs $R_i Q_i(u)$ ont l'identité comme somme et sont orthogonaux, et nous avons donc la décomposition en somme directe :

$$E = \bigoplus_{i=1}^n R_i Q_i(u) E. \quad (8.194)$$

- (5) $R_i Q_i(u) E \subset \ker P_i(u)$ Attention : utilisation massive du lemme 8.90. Un élément de $R_i Q_i(u) E$ est de la forme $(R_i Q_i)(u)x$ avec $x \in E$. Nous appliquons l'endomorphisme $P_i(u)$ à cet élément, et nous vérifions que nous obtenons zéro :

$$P_i(u)((R_i Q_i)(u)x) = (P_i R_i Q_i)(u)x \quad (8.195a)$$

$$= (R_i \underbrace{P_i Q_i}_{=P})(u)x \quad (8.195b)$$

$$= (R_i P)(u)x \quad (8.195c)$$

$$= (R_i(u) \circ \underbrace{P(u)}_{=0})x \quad (8.195d)$$

$$= 0. \quad (8.195e)$$

Par conséquent

$$\text{Image}(R_i Q_i(u)) \subset \ker P_i(u). \quad (8.196)$$

- (6) **Et la somme qu'il nous fallait** Le fait que la somme (8.194) soit directe n'est en fait pas crucial. En effet, vu que chacun des termes est inclus dans $\ker P_i(u)$, nous avons la somme (pas directe à priori)

$$E = \sum_{i=1}^n R_i Q_i(u) E \subset \sum_{i=1}^n \ker P_i(u). \quad (8.197)$$

Mais cette fois, nous prouvons qu'elle est directe en utilisant la caractérisation du lemme 4.151(4). Supposons que, pour un certain k ,

$$x \in \ker P_k(u) \cap \left(\sum_{j \neq k} \ker P_j(u) \right). \quad (8.198)$$

Nous allons montrer que $x = 0$.

- (6a) $Q_i(u)x = 0$ si $i \neq k$ Si $i \neq k$, nous avons

$$Q_i(u)x = \left(\prod_{\substack{j \neq i \\ j \neq k}} P_j \right) P_k(u)x = 0 \quad (8.199)$$

parce que $x \in \ker P_k(u)$.

- (6b) $Q_k(u)x = 0$ Nous savons qu'il existe $z_l \in \ker P_l(u)$ tel que $x = \sum_{l \neq k} z_l$. Nous avons alors

$$Q_k(u)x = \left(\prod_{j \neq k} P_j \right) \sum_{l \neq k} z_l = \sum_{l \neq k} \left(\prod_{j \neq k} P_j(u) \right) z_l = 0 \quad (8.200)$$

parce que parmi les $P_j(u)$ ($j \neq k$), il y a $P_l(u)$ qui annule z_l .

- (6c) **Et finalement** Nous avons prouvé que $Q_i(u)x = 0$ pour tout i . La formule de Bézout (8.189) donne alors

$$\sum_i R_i \subset \underbrace{Q_i(u)x}_{=0} = x \quad (8.201)$$

et donc $x = 0$.

(6d) **Conclusion pour la somme directe** Nous venons de prouver que les $\ker(P_i(u))$ sont en somme directe. L'équation (8.197) donne alors $E \subset \bigoplus_i \ker(P_i(u))$ et donc

$$E = \bigoplus_{i=1}^n \ker(P_i(u)). \quad (8.202)$$

(7) **Les projecteurs** Nous avons déjà tout et pour faire bien, on va poser plein de notations. D'abord $K_i = \ker(P_i(u))$, et ensuite $s_i = (R_i Q_i)(u)$. L'équation (8.197) dit que

$$E = \bigoplus_i K_i, \quad (8.203)$$

et (8.196) dit que

$$s_i(E) \subset K_i, \quad (8.204)$$

et aussi, par (8.190) :

$$\sum_i s_i = \text{Id}. \quad (8.205)$$

Nous devons prouver que s_k est la projection sur K_k parallèle aux autres K_i (définition 4.153). Pour cela nous vérifions les conditions du lemme 4.154.

D'abord s_i est linéaire en tant que composition et somme d'applications linéaires.

Soit $x \in K_i$. En posant $y_l = s_l(x)$ et en utilisant (8.205) :

$$y_1 + \dots + y_n = \sum_l s_l(x) = x \in K_i. \quad (8.206)$$

Vu que la somme (8.203) est directe nous avons $y_j = 0$ si $j \neq i$ et $y_i = x$. En prenant $i = k$ et $i \neq k$ nous avons les deux conditions du lemme 4.154.

□

8.92.

Ce résultat est utilisé pour prouver que toute représentation est décomposable en représentations irréductibles, proposition 16.10 ainsi que pour le théorème 8.218 qui dit que si le polynôme minimal d'un endomorphisme est scindé à racine simple alors il est diagonalisable.

CorKiSCkC

Corolaire 8.93.

Soit E , un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et f , un endomorphisme semi-simple dont la décomposition du polynôme minimal μ_f en facteurs irréductibles sur $\mathbb{K}[X]$ est $\mu_f = M_1^{\alpha_1} \cdots M_r^{\alpha_r}$. Si F est un sous-espace stable par f , alors

$$F = \bigoplus_{i=1}^r \ker M_i^{\alpha_i}(f) \cap F. \quad (8.207)$$

Démonstration. Nous posons $E_i = \ker M_i^{\alpha_i}(f)$ et $F_i = E_i \cap F$. Les polynômes $M_i^{\alpha_i}$ sont deux à deux étrangers et $\mu_f(f) = 0$, donc le lemme des noyaux (8.91) s'applique et

$$E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r. \quad (8.208)$$

Nous pouvons décomposer $x \in F$ en termes de cette somme :

$$x = x_1 + \dots + x_r \quad (8.209)$$

avec $x_i \in E_i$. Toujours selon le lemme des noyaux, les projections sur les espaces E_i sont des polynômes en f . Par conséquent F est stable sous toutes ces projections $\text{proj}_i: E \rightarrow E_i$, et en appliquant proj_i à (8.209), $\text{proj}_i(x) = x_i$. Puisque $x \in F$, le membre de gauche est encore dans F et $x_i \in E_i \cap F$. Nous avons donc

$$F \subset \bigoplus_{i=1}^r F_i. \quad (8.210)$$

L'inclusion inverse est immédiate parce que $F_i \subset F$ pour chaque i .

□

LemVISooHxMdbR

Lemme 8.94.

Si x est un vecteur propre de valeur propre λ pour l'endomorphisme u et si P est un polynôme, alors x est vecteur propre de $P(u)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.

Démonstration. C'est un simple calcul de $P(u)x$ en ayant noté³³ $P(X) = \sum_{k=0}^n c_k X^k$:

$$P(u)x = \sum_{k=0}^n c_k u^k(x) = \sum_{k=0}^n c_k \lambda^k x = P(\lambda)x. \quad (8.211)$$

□

8.7.2 Polynôme minimal et minimal ponctuel

Nous avons déjà vu la définition de polynôme minimal en 6.64. Le lemme suivant permet de parler de polynôme minimal d'endomorphisme.

LEMooQJQGooRcAxmJ

Lemme 8.95.

Soit un endomorphisme $f: E \rightarrow E$ d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Il existe un unique polynôme annulateur unitaire de degré minimum³⁴.

Tout endomorphisme de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie possède un polynôme minimal³⁵.

Démonstration. Pour l'unicité, soient P et Q deux polynômes annulateurs de f de même degré minimum N et ayant tous deux 1 comme coefficient de x^N . Alors $P - Q$ est de degré $N - 1$ tout en étant encore annulateur. Vu que nous avons dit que N était le degré minimum, le seul polynôme annulateur de degré $N - 1$ est le polynôme nul. Donc $P - Q = 0$.

Pour l'existence, les endomorphismes Id , f , f^2 , $\dots$ ne peuvent pas être tous linéairement indépendants parce que la dimension de $\text{End}(E)$ est finie. Il existe donc un nombre N et des coefficients a_k tels que $\sum_{k=0}^N a_k f^k = 0$. Le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^N a_k X^k$ est donc annulateur de f .

Une autre façon de le dire est que l'application linéaire $\varphi: \mathbb{K}[X] \rightarrow \text{End}(E)$ donnée par $\varphi(P) = P(f)$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension infinie vers un espace vectoriel de dimension finie. Il ne peut donc pas être injectif et possède donc un noyau non réduit à zéro.

L'existence d'un polynôme minimal est maintenant seulement dû au fait que, avec les notations de la définition 6.64, l'idéal I_f n'est pas réduit à $\{0\}$. □

Remarque 8.96.

La preuve donnée ci-dessus montre que $\deg(\mu) \leq \dim(E)^2$. Comme conséquence du théorème de Cayley-Hamilton 8.117 nous verrons qu'en réalité le degré du polynôme minimal est majoré par la dimension de l'espace.

Dans la suite, l'endomorphisme f du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension n est fixé. Pour $x \in E$ nous notons

$$E_x = \{P(f)x \text{ tel que } P \in \mathbb{K}[X]\}. \quad (8.212)$$

EqooOAYDooEpZELo

Nous considérons le morphisme d'algèbres

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{K}[X] &\rightarrow \text{End}(E) \\ P &\mapsto P(f) \end{aligned} \quad (8.213)$$

et si $x \in E$ est donné nous considérons le morphisme de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels

$$\begin{aligned} \varphi_x: \mathbb{K}[X] &\rightarrow E \\ P &\mapsto P(f)x. \end{aligned} \quad (8.214)$$

33. En complète violation de ce qu'on disait dans 1.467.

34. Degré minimum au sens où il existe peut-être d'autres polynômes annulateurs, mais ils seront de degré plus élevé.

35. Définition 6.64.

Les noyaux de ces applications sont des idéaux, entre autres par le lemme 8.90. Ils ont donc un unique générateur unitaire (chacun) par le théorème 6.43. En termes de vocabulaire, l'ensemble

$$\ker(\varphi) = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P(f) = 0\} \quad (8.215)$$

est l'**idéal annulateur** de f et un polynôme P tel que $P(f) = 0$ est un polynôme annulateur de f .

DEFooUICRooBGYhqQ

Proposition-Définition 8.97.

La partie $\ker(\varphi_x)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ qui possède un unique générateur unitaire.

Le générateur unitaire de $\ker(\varphi_x)$ est le **polynôme minimal ponctuel** de f en x . Il sera noté $\mu_{f,x}$ ou μ_x lorsque la dépendance en f est claire dans le contexte.

Nous notons μ le générateur unitaire du noyau de φ et μ_x celui de φ_x . Puisque $\mu \in \ker(\varphi_x)$ pour tout x nous avons $\mu_x \mid \mu$ pour tout x .

ExooDTUJooIMqSKn

Exemple 8.98 (Pas en dimension infinie).

En dimension infinie, il n'y a pas toujours de polynôme annulateur. Si E est un espace vectoriel de dimension infinie ayant une base dénombrable $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ alors l'opérateur donné par $f(e_i) = e_{i+1}$ n'a pas de polynôme annulateur. Même pas ponctuel en quel que point que ce soit.

De même l'opérateur donné par $g(e_1) = 0$ et $g(e_i) = e_{i-1}$ si $i \neq 1$ n'a pas de polynôme annulateur, mais il a un polynôme annulateur ponctuel évident en $x = e_1$. L'exemple 15.100 donnera un habillage à peine subtil à cet exemple. $\triangle$

PropAnnneEcCxj

Proposition 8.99.

Si P est un polynôme tel que $P(f) = 0$, alors le polynôme minimal μ_f divise P . Autrement dit, le polynôme minimal engendre l'idéal des polynômes annulateurs.

Démonstration. L'ensemble $\ker(\varphi) = \{Q \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } Q(f) = 0\}$ est un idéal par le lemme 8.90. Le polynôme minimal de f est un élément de degré plus bas dans I et par conséquent $I = (\mu_f)$ par le théorème 6.43. Nous concluons que μ_f divise tous les éléments de I . $\square$

La proposition suivante permet de caractériser le polynôme minimal.

PROPooVUJPOoMxxzjE

Proposition 8.100 ([152]).

Soit une application linéaire f sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Il existe un unique polynôme unitaire³⁶ $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que

- (1) $P(f) = 0$;
- (2) l'application

$$\begin{aligned} \varphi: \frac{\mathbb{K}[X]}{(P)} &\rightarrow \text{End}(E) \\ \bar{Q} &\mapsto Q(f) \end{aligned} \quad (8.216)$$

EQooIBMDooVtAEhf

est injective.

Démonstration. En ce qui concerne l'existence, il existe le polynôme minimal de f qui satisfait les conditions. Pour l'unicité nous y travaillons maintenant.

Supposons que l'application (8.216) soit injective. Alors pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(f) = 0$ nous avons $\bar{Q} = 0$, c'est-à-dire $Q = PR$ pour un certain $R \in \mathbb{K}[X]$. Autrement dit : P est un générateur unitaire de l'idéal annulateur de f . Le théorème 6.43(3) nous dit alors que $P = \mu$ parce que μ est également générateur unitaire. $\square$

LemSYsJJj

Lemme 8.101 ([322]).

Soit $f: E \rightarrow E$ un endomorphisme de l'espace vectoriel E . Il existe un élément $x \in E$ tel que $\mu_{f,x} = \mu_f$.

36. À mon avis, « unitaire » manque dans [152].

Démonstration. Soit une décomposition en irréductibles du polynôme minimal $\mu = P_1^{\alpha_1} \dots P_r^{\alpha_r}$. Nous notons $E_i = \ker(P_i^{\alpha_i}(f))$. Les polynômes P_i sont étrangers deux à deux (un diviseur commun aurait a fortiori été un diviseur et aurait contredit l'irréductibilité). Le lemme des noyaux 8.91 nous donne la somme directe

$$E = \bigoplus_{i=1}^r \ker(P_i^{\alpha_i}(f)). \quad (8.217)$$

Si $x_i \in E_i$ alors μ_{x_i} est une puissance de P_i . En effet $\mu_{x_i} \mid \mu$ et est donc un produit des puissances des P_j . Or si $(QP_j)(f)x_i = 0$ alors $(P_jQ)(f)x_i = 0$, ce qui donne $Q(f)x_i \in E_j \cap E_i = \{0\}$ si $j \neq i$. Donc μ_{x_i} n'est pas de la forme QP_j pour $j \neq i$. Nous en déduisons que μ_{x_i} est une puissance de P_i dès que $x_i \in E_i$. Nous choisissons $x_i \in E_i$ tel que $\mu_{x_i} = P_i^{\alpha_i}$.

Nous posons enfin $a = x_1 + \dots + x_r$; par définition du polynôme annulateur μ_a , nous avons

$$0 = \mu_a(f)a = \mu_a(f)x_1 + \dots + \mu_a(f)x_r. \quad (8.218)$$

Mais $\mu_a(f)x_i \in E_i$, et la somme des E_i est directe, donc l'annulation de la somme (8.218) implique l'annulation de chacun des termes : $\mu_a(f)x_i = 0$ pour tout i . Cela prouve que $\mu_{x_i} \mid \mu_a$. Mais comme les μ_{x_i} sont premiers deux à deux (parce que ce sont les $P_i^{\alpha_i}$), nous concluons que le produit divise encore μ_a :

$$\prod_{i=1}^r \mu_{x_i} \mid \mu_a, \quad (8.219)$$

c'est-à-dire $\mu \mid \mu_a$. Comme nous avons aussi $\mu_a \mid \mu$, nous déduisons $\mu_a = \mu$. □

Définition 8.102 (Matrices, endomorphismes et vecteurs cycliques).

Une matrice est **cyclique** si elle est semblable à une matrice compagnon. Un endomorphisme $f: E \rightarrow E$ est **cyclique** si il existe un vecteur $x \in E$ tel que $\{f^k(x)\}_{k=0, \dots, n-1}$ est une base de E . Un vecteur ayant cette propriété est un **vecteur cyclique** pour f .

Lemme 8.103.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et un endomorphisme cyclique³⁷ f de E . Soit un vecteur cyclique v de f , alors le polynôme minimal de f est égal au polynôme minimal de f au point v : $\mu_f = \mu_{f,v}$.

Démonstration. Montrons que $\mu_{f,v}$ est un polynôme annulateur de f , ce qui prouvera que μ_f divise $\mu_{f,v}$ par la proposition 8.99. Étant donné que v est cyclique, tout élément de E s'écrit sous la forme $x = Q(f)v$. Prenons un polynôme P annulateur de f en v : $P(f)v = 0$. Nous montrons que P est alors un polynôme annulateur de f . En effet, nous avons

$$P(f)x = (P(f) \circ Q(f))v = (Q(f) \circ P(f))v = 0 \quad (8.220)$$

où nous avons utilisé le lemme 8.90. □

Lemme 8.104 ([322]).

Soit $a \in E$ un vecteur cyclique pour f , tel que $\mu_a = \mu$. Alors E_a est un sous-espace stable par f pour lequel il existe un supplémentaire stable.

Démonstration. Soit $l = \deg(\mu) = \deg(\mu_a)$. L'espace E_a étant engendré par les $f^k(a)$ nous savons que $e_1 = a, e_2 = f(a), \dots, e_l = f^{l-1}(a)$ forment une base de E_a . Nous pouvons la compléter en une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E . Et nous posons³⁸

$$G = \{x \in E \text{ tel que } e_l^*(f^k(x)) = 0, \forall k \geq 0\} \quad (8.221a)$$

$$= \bigcap_{k \geq 0} \ker\{e_l^* \circ f^k\} \quad (8.221b)$$

$$= \bigcap_{k=0}^{l-1} \ker(e_l^* \circ f^k). \quad (8.221c)$$

37. Voir la définition 8.102.

38. ici, comme presque partout, e_l^* est le dual de e_l , c'est-à-dire l'application linéaire sur E donnée par $e_l^*(e_i) = \delta_{li}$, voir la définition 4.136.

La dernière égalité est due au fait que l soit le degré de μ . Du coup f^l est une combinaison linéaire des f^i avec $i \leq l-1$.

Nous avons $f(G) \subset G$ et de plus $E_a \cap G = \{0\}$ parce qu'un élément de E_a est une combinaison linéaire d'éléments de la forme $f^j(a)$ ($j \leq l$). Après application de f^{l-j} , ces éléments obtiennent une composante $f^l(a) = e_l$. De plus G est un sous-espace vectoriel du fait que $e_l^* \circ f^i$ est une application linéaire.

Montrons enfin que $\dim(G) = n - l$. Pour cela nous remarquons que G est une intersection d'hyperplans, et nous montrons que les équations définissant ces hyperplans sont linéairement indépendantes. Soit donc

$$\sum_{j=0}^{l-1} \lambda_j (e_l^* \circ f^j) = 0 \quad (8.222)$$

et montrons que $\lambda_j = 0$ pour tout j est l'unique solution. Soit $x \in E$ et appliquons l'opération (8.222) au vecteur $f^i(x)$; le résultat est zéro :

$$0 = \sum_{j=0}^{l-1} \lambda_j (e_l^* \circ f^i \circ f^j) = (e_l^* \circ f^i) P(u) \quad (8.223)$$

où nous avons posé $P(X) = \sum_{j=0}^{l-1} \lambda_j X^j$. Appliquons cela à a : pour tout i nous avons

$$(e_l^* \circ f^i)(P(f)a) = 0. \quad (8.224)$$

Mais par définition de E_a , l'élément $P(f)a$ est dans E_a . Nous en déduisons que

$$P(f)a \in G \cap E_a = \{0\}, \quad (8.225)$$

c'est-à-dire que P est un polynôme annulateur de a . Mais P est de degré $l-1$ alors que le polynôme minimal de a est de degré l . Par conséquent $P = 0$ et $\lambda_j = 0$ pour tout j . $\square$

Définition 8.105.

L'endomorphisme f d'un espace vectoriel est **semi-simple** si tout sous-espace stable par f possède un supplémentaire stable.

Lemme 8.106.

Si le polynôme minimal d'un endomorphisme est irréductible, alors cet endomorphisme est semi-simple³⁹.

Démonstration. Soit f , un endomorphisme dont le polynôme minimal est irréductible et F , un sous-espace stable par f . Nous devons en trouver un supplémentaire stable. Si $F = E$, il n'y a pas de problème. Sinon nous considérons $u_1 \in E \setminus F$ et

$$E_{u_1} = \{P(f)u_1 \text{ tel que } P \in \mathbb{K}[X]\}, \quad (8.226)$$

qui est un espace stable par f .

Montrons que $E_{u_1} \cap F = \{0\}$. Pour cela nous étudions l'idéal

$$I_{u_1} = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P(f)u_1 = 0\}. \quad (8.227)$$

C'est un idéal non réduit à $\{0\}$ parce que le polynôme minimal de f par exemple est dans I_{u_1} . Soit P_{u_1} un générateur unitaire de I_{u_1} . Étant donné que $\mu_f \in I_{u_1}$, nous avons P_{u_1} divise μ_f et donc, $P_{u_1} = \mu_f$, parce que μ_f est irréductible par hypothèse.

Soit $y \in E_{u_1} \cap F$. Par définition il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $y = P(f)u_1$ et si $y \neq 0$, cela signifie que $P \notin I_{u_1}$, c'est-à-dire que P_{u_1} ne divise pas P . Étant donné que P_{u_1} est irréductible cela implique que P_{u_1} et P sont premiers entre eux (ils n'ont pas d'autre pgcd que 1).

39. Définition 8.105.

Nous utilisons maintenant des coefficient de Bézout (théorème 6.47) $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$AP + BP_{u_1} = 1. \quad (8.228)$$

Nous appliquons cette égalité à f et puis à u_1 :

$$u_1 = A(f) \circ \underbrace{P(f)u_1}_{=y} + B(f) \circ \underbrace{P_{u_1}(f)u_1}_{=0} = A(f)y. \quad (8.229)$$

Mais $y \in F$, donc $A(f)y \in F$. Nous aurions donc $u_1 \in F$, ce qui est impossible par choix. Nous savons maintenant que l'espace $E_{u_1} \oplus F$ est stable sous f . Si cet espace est E alors nous arrêtons. Sinon nous reprenons le raisonnement avec $E_{u_1} \oplus F$ en guise de F et en prenant $u_2 \in E \setminus (E_{u_1} \oplus F)$. Étant donné que E est de dimension finie, ce procédé s'arrête à un certain moment et nous aurons

$$E = F \oplus E_{u_1} \oplus \dots \oplus E_{u_k} \quad (8.230)$$

où chacun des E_{u_i} sont stables. □

ThoFgsxCE

Théorème 8.107.

Un endomorphisme est semi-simple si et seulement si son polynôme minimal est produit de polynômes irréductibles distincts deux à deux.

Démonstration. Supposons que f soit semi-simple et que son polynôme minimal soit donné par $\mu_f = M_1^{\alpha_1} \dots M_r^{\alpha_r}$ où les M_i sont des polynômes irréductibles deux à deux distincts. Nous devons montrer que $\alpha_i = 1$ pour tout i . Soit i tel que $\alpha_i \geq 1$ et $N \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\mu_f = M^2 N$ où l'on a noté $M = M_i$. Nous étudions l'espace

$$F = \ker M(f) \quad (8.231)$$

qui est stable par f , et qui possède donc un supplémentaire S également stable par f . Nous allons montrer que MN est un polynôme annulateur de f .

D'abord nous prenons $x \in S$. Étant donné que F est le noyau de $M(f)$,

$$M(f)(MN(f)x) = \mu_f(f)x = 0, \quad (8.232)$$

ce qui signifie que $MN(f)x \in F$. Mais puisque S est stable par f nous avons aussi $MN(f)x \in S$. Finalement $MN(f)x \in F \cap S = \{0\}$. Autrement dit, $MN(f)$ s'annule sur S .

Prenons maintenant $y \in F$. Nous avons

$$MN(f) = N(f)(M(f)y) = 0 \quad (8.233)$$

parce que $y \in F = \ker M(f)$.

Nous avons prouvé que $MN(f)$ s'annule partout et donc que $MN(f)$ est un polynôme annulateur de f , ce qui contredit la minimalité de $\mu_f = M^2 N$.

Nous passons au sens inverse. Soit $m_f = M_1 \dots M_r$ une décomposition du polynôme minimal de l'endomorphisme f en irréductibles distincts deux à deux. Soit F un sous-espace vectoriel stable par f . Nous notons

$$E_i = \ker(M_i(f)) \quad (8.234)$$

et $f_i = f|_{E_i}$. Par le lemme 8.93 nous avons

$$F = \bigoplus_{i=1}^r (F \cap E_i). \quad (8.235)$$

Les espaces E_i sont stables par f et étant donné que M_i est irréductible, il est le polynôme minimal de f_i . En effet, M_i est annulateur de f_i , ce qui montre que le polynôme minimal de f_i divise M_i . Mais M_i étant irréductible, M_i est le polynôme minimal. Étant donné que $\mu_{f_i} = M_i$, l'endomorphisme f_i est semi-simple par le lemme 8.106.

L'espace $F \cap E_i$ étant stable par l'endomorphisme semi-simple f_i , il possède un supplémentaire stable que nous notons S_i :

$$E_i = S_i \oplus (F \cap E_i). \quad (8.236)$$

Étant donné que sur chaque S_i nous avons $f|_{S_i} = f_i$, l'espace $S = S_1 \oplus \dots \oplus S_r$ est stable par f . Par conséquent, nous avons

$$E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r \quad (8.237a)$$

$$= (S_1 \oplus (F \cap E_1)) \oplus \dots \oplus (S_r \oplus (F \cap E_r)) \quad (8.237b)$$

$$= \left(\bigoplus_{i=1}^r S_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^r F \cap E_i \right) \quad (8.237c)$$

$$= S \oplus F, \quad (8.237d)$$

ce qui montre que F a bien un supplémentaire stable par f et donc que f est semi-simple. $\square$

Exemple 8.108 (L'espace engendré par $\mathbb{1}, A, A^2, \dots$).

Soit A une matrice, et

$$E = \text{Span}\{A^k \text{ tel que } k \in \mathbb{N}\}. \quad (8.238)$$

Nous montrons que $\dim(E)$ est le degré du polynôme minimal de A .

D'abord l'idéal annulateur de A est engendré par le polynôme minimal⁴⁰ que nous notons $\mu = \sum_{k=0}^p a_k X^k$. La partie $\{\mathbb{1}, \dots, A^{p-1}\}$ est libre parce qu'une combinaison linéaire nulle de ces éléments serait un polynôme annulateur en A de degré plus petit que p . Donc $\dim(E) \geq p$.

La partie $\{\mathbb{1}, A, \dots, A^p\}$ est liée à cause du polynôme minimal. Isoler A^p dans $\mu(A) = 0$ donne un polynôme f de degré $p-1$ tel que $A^p = f(A)$.

Nous allons montrer à présent que la famille $\{\mathbb{1}, A, \dots, A^{p-1}\}$ est génératrice (alors $\dim(E) \leq p$). Soit un entier $q \geq p$ et de division euclidienne⁴¹ $np + r = q$ avec $r < p$. Nous avons $A^q = A^{np} A^r$. D'une part

$$A^{np} = (A^p)^n = f(A)^n \quad (8.239)$$

est de degré $n(p-1)$. Par conséquent

$$A^q = f(A)^n A^r \quad (8.240)$$

qui est de degré $n(p-1) + r = q - n$. Autrement dit il existe un polynôme g_1 de degré $q - n$ tel que $A^q = g_1(A)$. Si $q - n > p - 1$ alors nous pouvons recommencer et obtenir un polynôme g_2 de degré strictement inférieur à celui de g_1 tel que $A^q = g_2(A)$. Au bout du compte, il existe un polynôme g de degré au maximum $p - 1$ tel que $A^q = g(A)$. Cela prouve que la partie $\{\mathbb{1}, A, \dots, A^{p-1}\}$ est génératrice de E .

La dimension de E est donc p , le degré du polynôme minimal. $\triangle$

PropoocFZDooROVlaA

Proposition 8.109.

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Nous avons l'isomorphisme d'espace vectoriel

$$\mathbb{K}[f] \simeq \frac{\mathbb{K}[X]}{(\mu_f)} \quad (8.241)$$

La dimension en est $\deg(\mu_f)$.

Démonstration. Notons avant de commencer que (μ) est l'idéal engendré par μ . Les classes dont il est question dans le quotient $\mathbb{K}[X]/(\mu)$ sont

$$\bar{P} = \{P + S\mu\}_{S \in \mathbb{K}[X]}. \quad (8.242)$$

40. Proposition 8.99.

41. Théorème 1.343.

Nous allons montrer que l'application suivante fournit l'isomorphisme :

$$\begin{aligned} \psi: \frac{\mathbb{K}[X]}{(\mu)} &\rightarrow \mathbb{K}[f] \\ \bar{P} &\mapsto P(f). \end{aligned} \quad (8.243)$$

- (1) ψ est bien définie Si $Q \in \bar{P}$ alors $Q = P + S\mu$ pour un certain $S \in \mathbb{K}[X]$. Du coup nous avons

$$\psi(\bar{Q}) = P(f) + (S\mu)(f). \quad (8.244)$$

Mais $\mu(f) = 0$ donc le deuxième terme est nul. Donc $\psi(\bar{P})$ est bien défini.

- (2) Injectif Si $\psi(\bar{P}) = 0$ nous avons $P(f) = 0$, ce qui signifie que $P = S\mu$ pour un polynôme S . Par conséquent $P \in (\mu)$ et donc $\bar{P} = 0$.
- (3) Surjectif Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. L'élément $P(f)$ de $\mathbb{K}[f]$ est dans l'image de ψ parce que c'est $\psi(\bar{P})$.

En ce qui concerne la dimension, le corolaire 6.44 en parle déjà : une base est donnée par les projections de $1, X, \dots, X^{\deg(\mu_f)-1}$. $\square$

8.7.3 Polynôme caractéristique

DefOWQooXbybYD

Définition 8.110.

Soit un anneau commutatif A . Si $u \in \mathbb{M}(n, A)$, nous définissons le **polynôme caractéristique** de u :

$$\chi_u(X) = \det(u - X\mathbb{1}_n). \quad (8.245) \quad \text{Egkxbdfu}$$

Nous définissons de même le polynôme caractéristique d'un endomorphisme $u: E \rightarrow E$.

Remarque 8.111.

Quelques remarques à propos du signe⁴².

- Certains auteurs définissent le polynôme caractéristique par $\det(X - u)$ au lieu de $\det(u - X)$.
- Wikipédia francophone[323] prend la définition $\det(X - u)$ (donc opposée de la notre). Allez lire la page de discussion.
- Sur les wikipédias en d'autres langues, ça varie.
- Un avantage de $\det(u - X)$ est que $\det(u) = \chi_u(0)$.
- Un avantage de $\det(X - u)$ est qu'il est unitaire.

LemooWCZMooZqyaHd

Lemme 8.112.

Soit un endomorphisme $u: E \rightarrow E$.

ITEMooAALQooGIQYOs

- (1) Le polynôme caractéristique χ_u a pour degré la dimension de E .
- (2) Si la dimension de E est paire, alors le polynôme caractéristique χ_u est unitaire.

ThoNhbrUL

Théorème 8.113.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et un endomorphisme $u \in \text{End}(E)$. Alors

- (1) Le polynôme caractéristique divise $(\mu_u)^n$ dans $\mathbb{K}[X]$.
- (2) Les polynômes caractéristiques et minimaux ont mêmes facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$.
- (3) Les polynômes caractéristiques et minimaux ont mêmes racines dans $\mathbb{K}[X]$.
- (4) Le polynôme caractéristique est scindé si et seulement si le polynôme minimal est scindé.

ThoWDGooQUGSTL

Théorème 8.114.

Soit $u \in \text{End}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Les conditions suivantes sont équivalentes

ItemeXHXhHi

- (1) $\lambda \in \text{Spec}(u)$

42. Attention : je crois qu'il y a des incohérences dans le Frido à propos de ce choix

$$(2) \chi_u(\lambda) = 0$$

$$(3) \mu_u(\lambda) = 0.$$

ItemXHXhHii

ItemXHXhHiii

Démonstration. (1) $\Leftrightarrow$ (2). Dire que λ est dans le spectre de u signifie que l'opérateur $u - \lambda\mathbb{1}$ n'est pas inversible, ce qui est équivalent à dire que $\det(u - \lambda\mathbb{1})$ est nul par la proposition 8.16(1) ou encore que λ est une racine du polynôme caractéristique de u .

(2) $\Leftrightarrow$ (3). C'est une application directe du théorème 8.113 qui précise que le polynôme caractéristique a les mêmes racines dans $\mathbb{K}$ que le polynôme minimal. $\square$

ExICOJcFp

Exemple 8.115.

Sur $\mathbb{R}^2$, nous considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui a pour polynôme caractéristique⁴³ le polynôme $\chi_A = (X - 1)^2$. Le nombre $\lambda = 1$ est une racine double de ce polynôme, et pourtant il n'y a qu'une seule dimension d'espace propre :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (8.246)$$

entraîne $x = 0$.

Ici la multiplicité algébrique est différente de la multiplicité géométrique. $\triangle$

PropNrZGhT

Proposition 8.116 ([324]).

Soit f , un endomorphisme de E et $x \in E$. Alors

(1) L'espace $E_{f,x}$ est stable par f .

ItemfzKOCco

(2) L'espace $E_{f,x}$ est de dimension

$$p_{f,x} = \dim E_{f,x} = \deg(\mu_{f,x}) \quad (8.247)$$

où $\mu_{f,x}$ est le générateur unitaire de $I_{f,x}$.

ItemKHNExH

(3) Le polynôme caractéristique de $f|_{E_{f,x}}$ est $\mu_{f,x}$.

ItemHMviZw

(4) Nous avons

$$\chi_{f|_{E_{f,x}}}(f)x = \mu_{f,x}(f)x = 0. \quad (8.248)$$

Démonstration. Le fait que $E_{f,x}$ soit stable par f est classique. Le point (4) est une application du point (3). Les deux gros morceaux sont donc les points (2) et (3).

Étant donné que $\mu_{f,x}$ est de degré minimal dans $I_{f,x}$, l'ensemble

$$B = \{f^k(x) \text{ tel que } 0 \leq k \leq p_{f,x} - 1\} \quad (8.249)$$

est libre. En effet une combinaison nulle des vecteurs de B donnerait un polynôme en f de degré inférieur à $p_{f,x}$ annihilant x . Nous écrivons

$$\mu_{f,x}(X) = X^{p_{f,x}} - \sum_{i=0}^{p_{f,x}-1} a_i X^i. \quad (8.250)$$

Étant donné que $\mu_{f,x}(f)x = 0$ et que la somme du membre de droite est dans $\text{Span}(B)$, nous avons $f^{p_{f,x}}(x) \in \text{Span}(B)$. Nous prouvons par récurrence que $f^{p_{f,x}+k}(x) \in \text{Span}(B)$. En effet en appliquant f^k à l'égalité

$$0 = f^{p_{f,x}}(x) - \sum_{i=0}^{p_{f,x}-1} a_i f^i(x) \quad (8.251)$$

nous trouvons

$$f^{p_{f,x}+k}(x) = \sum_{i=0}^{p_{f,x}-1} a_i f^{i+k}(x), \quad (8.252)$$

43. Définition 8.110.

alors que par hypothèse de récurrence le membre de droite est dans $\text{Span}(B)$. L'ensemble B est alors générateur de $E_{f,x}$ et donc une base d'icelui. Nous avons donc bien $\dim(E_{f,x}) = p_{f,x}$.

Nous montrons maintenant que $\mu_{f,x}$ est annulateur de f au point x . Nous savons que

$$\mu_{f,x}(f)x = 0. \quad (8.253)$$

En y appliquant f^k et en profitant de la commutativité des polynômes sur les endomorphismes (proposition 8.90), nous avons

$$0 = f^k(\mu_{f,x}(f)x) = \mu_{f,x}(f)f^k(x), \quad (8.254)$$

de telle sorte que $\mu_{f,x}(f)$ est nul sur B et donc est nul sur $E_{f,x}$. Autrement dit,

$$\mu_{f,x}(f|_{E_{f,x}}) = 0. \quad (8.255)$$

Montrons que $\mu_{f,x}$ est même minimal pour $f|_{E_{f,x}}$.

Supposons avoir Q , un polynôme non nul de degré $p_{f,x} - 1$ annulant $f|_{E_{f,x}}$. En particulier $Q(f)x = 0$. Cela signifie que B est un système lié, alors que nous avons montré que c'était un système libre. Contradiction. Nous concluons que $\mu_{f,x}$ est le polynôme minimal de $f|_{E_{f,x}}$. $\square$

Cette histoire de densité permet de donner une démonstration alternative du théorème de Cayley-Hamilton.

ThoCaIYWLBjQ

Théorème 8.117 (Cayley-Hamilton).

Le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur.

Une démonstration plus simple via la densité des diagonalisables est donnée en théorème 13.31.

Démonstration. Nous devons prouver que $\chi_f(f)x = 0$ pour tout $x \in E$. Pour cela nous nous fixons un $x \in E$, nous considérons l'espace $E_{f,x}$ et $\chi_{f,x}$, le polynôme caractéristique de $f|_{E_{f,x}}$. Étant donné que $E_{f,x}$ est stable par f , le polynôme caractéristique de $f|_{E_{f,x}}$ divise χ_f , c'est-à-dire qu'il existe un polynôme Q_x tel que

$$\chi_f = Q_x \chi_{f,x}, \quad (8.256)$$

et donc aussi

$$\chi_f(f)x = Q_x(f)(\chi_{f,x}(f)x) = 0 \quad (8.257)$$

parce que la proposition 8.116 nous indique que $\chi_{f,x}$ est un polynôme annulateur de $f|_{E_{f,x}}$. $\square$

Corolaire 8.118.

Le degré du polynôme minimal est majoré par la dimension de l'espace.

Démonstration. Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique parce qu'il engendre l'idéal des polynômes annulateurs par la proposition 8.99. Or le degré du polynôme caractéristique est la dimension de l'espace par le lemme 8.112. $\square$

Exemple 8.119 (Calcul de l'inverse d'un endomorphisme).

Le théorème de Cayley-Hamilton donne un moyen de calculer l'inverse d'un endomorphisme inversible pourvu que l'on connaisse son polynôme caractéristique. En effet, supposons que

$$\chi_f(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k. \quad (8.258)$$

Nous aurons alors

$$0 = \chi_f(f) = \sum_{k=0}^n a_k f^k. \quad (8.259)$$

Nous appliquons f^{-1} à cette dernière égalité en sachant que $f^{-1}(0) = 0$:

$$0 = a_0 f^{-1} + \sum_{k=1}^n a_k f^{k-1}, \quad (8.260)$$

et donc

$$f^{-1} = -\frac{1}{\det(f)} \sum_{k=1}^n a_k f^{k-1} \quad (8.261)$$

où nous avons utilisé le fait que $a_0 = \chi_f(0) = \det(f)$. $\triangle$

PropooBYZCooBmYLS

Proposition 8.120.

Si $(X - z)^l$ ($l \geq 1$) est la plus grande puissance de $(X - z)$ dans le polynôme caractéristique d'un endomorphisme f alors

$$1 \leq \dim(E_z) \leq l. \quad (8.262)$$

C'est-à-dire que nous avons au moins un vecteur propre pour chaque racine du polynôme caractéristique.

Démonstration. Si $(X - z)$ divise χ_f alors en posant $\chi_f = (X - z)P(X)$ nous avons

$$\det(f - X\mathbb{1}) = (X - z)P(X), \quad (8.263)$$

ce qui, évalué en $X = z$, donne $\det(f - z\mathbb{1}) = 0$. L'annulation du déterminant étant équivalente à l'existence d'un noyau non trivial, nous avons $v \neq 0$ dans E tel que $(f - z\mathbb{1})v = 0$. Cela donne $f(v) = zv$ et montre que v est vecteur propre de f pour la valeur propre z . Et aussi que $\dim(E_z) \geq 1$.

Si $\dim(E_z) = k$ alors le théorème de la base incomplète 4.14 nous permet d'écrire une base de E dont les k premiers vecteurs forment une base de E_z . Dans cette base, la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix} z & & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & z & * \\ & & & * \end{pmatrix} \quad (8.264)$$

où les étoiles représentent des blocs à priori non nuls. En tout cas, sous cette forme, il est visible que $(X - z)^k$ divise χ_f . $\square$

8.8 Formes bilinéaires et quadratiques

Plus à propos de formes bilinéaires dans le thème 16.

DEFooEEQGooNiPjHz

Définition 8.121 ([325]).

Soient trois espaces vectoriels E, F et V sur le même corps commutatif $\mathbb{K}$. Une application $b: E \times F \rightarrow V$ est **bilinéaire** si elle est séparément linéaire en ses deux variables, c'est-à-dire si

- (1) $b(u_1 + u_2, v) = b(u_1, v) + b(u_2, v)$,
- (2) $b(u, v_1 + v_2) = b(u, v_1) + b(u, v_2)$
- (3) $b(\lambda u, v) = b(u, \lambda v) = \lambda b(u, v)$

pour tout $u, u_1, u_2 \in E$, $v, v_1, v_2 \in F$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

- (1) Dans le cas $E = F$ et $V = \mathbb{K}$, nous parlons de **forme bilinéaire** sur E .
- (2) Nous parlons de forme bilinéaire **symétrique** si de plus $b(u, v) = b(v, u)$.

DefBSIoouvuKR

Définition 8.122 ([326]).

Soit un espace vectoriel E et $\mathbb{F}$ un corps de caractéristique différente de 2. Une **forme quadratique** sur E est une application $q: E \rightarrow \mathbb{F}$ pour laquelle il existe une forme bilinéaire symétrique $b: E \times E \rightarrow \mathbb{F}$ satisfaisant $q(x) = b(x, x)$ pour tout $x \in E$.

L'ensemble des formes quadratiques réelles sur E est noté $Q(E)$.

La topologie sur $Q(E)$ sera la topologie métrique donnée dans le lemme 8.137.

Définition 8.123 (Application bilinéaire définie positive, thème 39).

Si b est une application bilinéaire⁴⁴ sur un espace vectoriel E nous disons qu'elle est

- (1) **définie positive** si $b(x, x) \geq 0$ pour tout $x \in E$ et $b(x, x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.
- (2) **semi-définie positive** si $b(x, x) \geq 0$ pour tout $x \in E$. Nous dirons aussi parfois qu'elle est simplement « positive ».

Note : nous disons souvent « strictement définie positive » pour « définie positive », pour éviter les confusions.

8.124.

Une application bilinéaire $E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ n'est pas une application linéaire ; la distinction est importante. La linéarité est

$$b(\lambda u, \lambda v) = b(\lambda(u, v)) = \lambda b(u, v) \quad (8.265)$$

et la bilinéarité est

$$b(\lambda u, v) = b(u, \lambda v) = \lambda b(u, v). \quad (8.266)$$

En réalité la seule forme qui soit à la fois linéaire et bilinéaire est la forme identiquement nulle : la condition

$$b(\lambda u, \lambda v) = \lambda^2 b(u, v) = \lambda b(u, v) \quad (8.267)$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ implique $b(u, v) = 0$.

Exemple 8.125 ([327]).

L'application

$$\begin{aligned} b: \mathbb{M}(n, \mathbb{K}) \times \mathbb{M}(n, \mathbb{K}) &\rightarrow \mathbb{K} \\ (A, B) &\mapsto \text{Tr}(AB) \end{aligned} \quad (8.268)$$

est une forme bilinéaire symétrique.

La vérification est un calcul :

$$\text{Tr}(BA) = \sum_i (BA)_{ii} = \sum_{ik} B_{ik} A_{ki} = \sum_{ik} A_{ki} B_{ik} = \sum_k (AB)_{kk} = \text{Tr}(AB). \quad (8.269)$$

△

8.8.1 Dégénérescence d'une forme bilinéaire

Soit b , une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur l'espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique différente de 2. Nous notons q la forme quadratique associée.

Définition 8.126.

Une forme bilinéaire est **non dégénérée** si $b(x, z) = 0$ pour tout z implique $x = 0$.

Lemme 8.127.

Soit b une forme bilinéaire non dégénérée. Si x et y sont tels que $b(x, z) = b(y, z)$ pour tout z , alors $x = y$.

Démonstration. C'est immédiat du fait de la linéarité en le premier argument et de la non-dégénérescence : si $b(x, z) - b(y, z) = 0$ alors

$$b(x - y, z) = 0 \quad (8.270)$$

pour tout z , ce qui implique $x - y = 0$. □

44. Définition 8.121.

8.8.2 Orthogonal pour une forme bilinéaire

Définition 8.128.

Soit un espace vectoriel E et une forme bilinéaire symétrique b . Si $A \subset E$ nous notons

$$A^\perp = \{z \in E \text{ tel que } b(z, x) = 0 \forall x \in A\}. \quad (8.271)$$

C'est l'**orthogonal** de A par rapport à la forme b .

Définition 8.129.

Soit un espace vectoriel E et une forme bilinéaire symétrique b . Le **noyau** est la partie

$$\ker(b) = \{z \in E \text{ tel que } b(z, x) = 0 \forall x \in E\}. \quad (8.272)$$

Proposition 8.130 ([328]).

Soit un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$. Soit une forme bilinéaire symétrique b sur E . Si A et B sont des parties de E nous avons :

- (1) $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel.
- (2) Si $A \subset B$ alors $B^\perp \subset A^\perp$.
- (3) $A^\perp = \text{Span}(A)^\perp$.

Démonstration. Point par point.

(1) **Pour (1)**

Soient $x, y \in A^\perp$, $a \in A$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Nous avons alors

$$b(x + \lambda y, a) = b(x, a) + \lambda b(y, a) = 0 \quad (8.273)$$

(2) **Pour (2)**

Soient $x \in B^\perp$ et $a \in A$. Nous avons $b(x, a) = 0$ parce que $a \in A \subset B$ et $x \in B^\perp$.

(3) **Pour (3)** Deux inclusions à prouver.

(3a) **Première inclusion** Nous avons $A \subset \text{Span}(A)$, donc le point (2) montre que $\text{Span}(A)^\perp \subset A^\perp$.

(3b) **Deuxième inclusion** Soit $x \in A^\perp$ et $y \in \text{Span}(A)$. Nous avons $y = \sum_i \lambda_i a_i$ pour certains $a_i \in A$ et $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Alors

$$b(x, y) = \sum_i \lambda_i b(x, a_i) = 0. \quad (8.274)$$

□

Proposition 8.131 ([328]).

Soit un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$. Soit une forme bilinéaire symétrique b sur E . Si V est un sous-espace de E , alors :

- (1) Si $b_V : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ est la restriction de b , alors $V \cap V^\perp = \ker(b_V)$ ⁴⁵.
- (2) $(V + W)^\perp = V^\perp \cap W^\perp$.
- (3) $V \subset (V^\perp)^\perp$.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Pour (1)**

En deux parties.

(1a) $V \cap V^\perp \subset \ker(b_V)$ Soit $x \in V \cap V^\perp$. Si $v \in V$, nous avons $b(x, v) = 0$ parce que $x \in V^\perp$.

45. Définition du noyau de b , définition 8.129.

(1b) $\ker(b_V) \subset V \cap V^\perp$ Soit $x \in \ker(b_V)$. Nous avons $x \in V$ parce que $x \in \ker(b_V) \subset V$. Pour montrer que $x \in V^\perp$ nous considérons $y \in V$ et nous remarquons que $b(x, y) = 0$ parce que $x \in V^\perp$.

(2) **Pour (2)** En deux parties.

(2a) $(V + W)^\perp \subset V^\perp \cap W^\perp$ Soit $x \in (V + W)^\perp$. Si $v \in V$, alors $v \in V + W$, donc $f(x, v) = 0$. Cela prouve que $x \in V^\perp$. Nous prouvons que $x \in W^\perp$ de même.

(2b) $V^\perp \cap W^\perp \subset (V + W)^\perp$ Un élément de $V + W$ est de la forme $v + w$ avec $v \in V$ et $w \in W$. Nous avons

$$b(x, v + w) = b(x, v) + b(x, w) = 0. \quad (8.275)$$

(3) **Pour (3)** Si $x \in V$, alors $b(x, z) = 0$ pour tout $V^\perp$.

□

PROF00MAZZ00RZZ0Hj

Proposition 8.132.

Soit une forme bilinéaire non dégénérée b sur l'espace vectoriel E de dimension finie. L'application

$$\begin{aligned} \varphi_b: E &\rightarrow E^* \\ x &\mapsto b(x, \cdot) \end{aligned} \quad (8.276)$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration. En plusieurs parties.

(1) **Linéaire**

Le fait que φ_b soit linéaire est une conséquence de la bilinéarité de b .

(2) **Injectif** Si $\varphi_b(v) = \varphi_b(w)$, alors pour tout $x \in E$ nous avons $\varphi_b(v)x = \varphi_b(w)x$, c'est-à-dire

$$b(v - w, x) = 0. \quad (8.277)$$

Vu que b est non dégénérée, cela implique $v - w = 0$.

(3) **Isomorphisme** Nous savons que $\dim(E) = \dim(E^*)$ par le lemme 4.136. Une application linéaire injective entre espaces de même dimension est toujours une bijection par le corolaire 4.51.

□

LEM00RXMM00AvvOjF

Lemme 8.133 ([329]).

Soit une forme bilinéaire non dégénérée b sur l'espace vectoriel E de dimension finie. Soit un sous-espace vectoriel V . Nous avons

$$\dim(E) = \dim(V) + \dim(V^\perp). \quad (8.278)$$

EQ00LFJB00NNHGP

Démonstration. Nous considérons les applications

$$\begin{aligned} \varphi_b: E &\rightarrow E^* \\ x &\mapsto b(x, \cdot). \end{aligned} \quad (8.279)$$

et l'application de restriction

$$\begin{aligned} r: E^* &\rightarrow V^* \\ \alpha &\mapsto \alpha|_V \end{aligned} \quad (8.280)$$

(1) **Théorème du rang** Nous appliquons le théorème du rang 4.51 à l'application r :

$$\operatorname{rk}(r) + \dim(\ker(r)) = \dim(E). \quad (8.281)$$

EQ00SABB00UdWyzL

(2) $\operatorname{rk}(r) = \dim(V)$

Étant donné que r est surjective, $\operatorname{rk}(r) = \dim(V^*) = \dim(V)$. La seconde égalité est l'égalité des dimensions du lemme 4.136.

(3) $\varphi_b(V^\perp) \subset \ker(r)$ Soit $x \in V^\perp$. Pour tout $v \in V$ nous avons

$$r(\varphi_b(x))v = \varphi_b(x)v = b(x, v) = 0. \quad (8.282)$$

Donc $\varphi_b(x) \in \ker(r)$.

(4) $\varphi_b: V^\perp \rightarrow \ker(r)$ est surjective Soit $\alpha \in \ker(r)$. Vu que φ_b est une bijection, il existe $x \in E$ tel que $\alpha = \varphi_b(x)$, c'est-à-dire $\alpha = b(x, \cdot)$. Nous avons $\alpha(y) = 0$ pour tout $y \in V$, c'est-à-dire $b(x, y) = 0$ pour tout $y \in V$, ce qui signifie que $x \in V^\perp$. Donc $\alpha \in \varphi_b(V^\perp)$.

(5) $\dim(V^\perp) = \dim(\ker(r))$ L'application φ_b étant globalement injective, elle est une bijection entre $V^\perp$ et $\ker(r)$. Donc ces deux ont la même dimension.

(6) **Conclusion** Nous pouvons reprendre l'équation (8.281) et y mettre nos découvertes : $\text{rk}(r) = \dim(V)$ et $\dim(\ker(r)) = \dim(V^\perp)$. Cela donne la formule demandée

$$\dim(V) + \dim(V^\perp) = \dim(E). \quad (8.283)$$

□

LEMooYYGLooYIDmoa

Lemme 8.134.

Si V est un sous-espace de E de dimension finie, alors

$$(V^\perp)^\perp = V. \quad (8.284)$$

Démonstration. Nous avons déjà vu dans la proposition 8.131 que $V \subset (V^\perp)^\perp$.

Nous écrivons maintenant la formule (8.278) pour V , et pour $V^\perp$ (qui est un sous-espace vectoriel par la proposition 8.130(1)) :

$$\dim(V) + \dim(V^\perp) = \dim(E) \quad (8.285a)$$

$$\dim(V^\perp) + \dim((V^\perp)^\perp) = \dim(E). \quad (8.285b)$$

En soustrayant ces deux équations membre à membre, nous trouvons $\dim(V) = \dim((V^\perp)^\perp)$. Vu que V s'injecte (par l'identité) dans $(V^\perp)^\perp$ et qu'ils ont la même dimension, ils sont égaux. □

8.8.3 Formes quadratiques

LEMooOQIDooPSOeXL

Lemme 8.135 ([330]).

Soit une forme quadratique Q sur E . Si F est un sous-espace de E , alors

$$\dim(F) + \dim(F^\perp) \geq n \quad (8.286)$$

où $F^\perp$ est l'orthogonal par rapport à Q .

Démonstration. Nous posons $p = \dim(F)$. Nous considérons une base $\{f_i\}_{i=1, \dots, n}$ de E telle que $\{f_i\}_{i=1, \dots, p}$ est une base de F ⁴⁶. Nous posons

$$\begin{aligned} \phi: E &\rightarrow F \\ x &\mapsto \sum_{i=1}^p B(x, f_i) f_i \end{aligned} \quad (8.287)$$

où B est la forme bilinéaire associée à Q . Ce ϕ est une application linéaire à qui nous appliquons le théorème du rang (4.51) :

$$\dim(E) = \text{rk}(\phi) + \dim(\ker(\phi)). \quad (8.288)$$

EQooCLWLooCFxVDq

Mais vu que l'image de ϕ est dans F , nous avons $\text{rk}(\phi) \leq \dim(F)$. De plus, $\ker(\phi) = F^\perp$. Donc (8.288) devient

$$\dim(E) \leq \dim(F) + \dim(F^\perp). \quad (8.289)$$

□

46. Théorème de la base incomplète, 4.26.

LEMooUOZOooYvEcji

Lemme 8.136 ([330]).

Soit un espace vectoriel E de dimension finie et un sous-espace F sur lequel la forme quadratique Q est strictement définie positive ou négative. Alors

$$E = F \oplus F^\perp. \quad (8.290)$$

Démonstration. D'abord nous montrons que $F \cap F^\perp = \{0\}$. Si $v \neq 0$ est dans F , alors $Q(v) > 0$, et donc v n'est pas dans $F^\perp$. Donc $F \cap F^\perp \subset \{0\}$. L'inclusion inverse est immédiate.

Nous avons vu dans le lemme 8.135 que

$$\dim(E) \leq \dim(F) + \dim(F^\perp). \quad (8.291)$$

Vu que F et $F^\perp$ n'ont pas d'intersection autre que $\{0\}$, nous avons

$$\dim(E) \geq \dim(F \oplus F^\perp) = \dim(F) + \dim(F^\perp) \geq \dim(E). \quad (8.292)$$

Toutes ces inégalités sont donc des égalités et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\perp)$. $\square$

LEMooWRClooWkMpoF

Lemme 8.137.

La topologie considérée sur $Q(E)$ ⁴⁷ est celle de la norme L 'application

$$\begin{aligned} N: Q(E) &\rightarrow \mathbb{R} \\ q &\mapsto \sup_{\|x\|_E=1} |q(x)|, \end{aligned} \quad (8.293)$$

EqZYBooZysmYh

est une norme.

L 'application

$$\begin{aligned} N: S(n, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto \sup_{\|x\|_E=1} |x \cdot Ax| \end{aligned} \quad (8.294)$$

EQooJETQooIixRWu

est une norme. À droite, nous trouvons le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ et la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{R}$.

Ces normes sont celles que nous considérons pour la topologie sur $Q(E)$ et $S(n, \mathbb{R})$.

PROPooZLXVooOsXCcB

Proposition 8.138.

Soit une forme bilinéaire b et la forme quadratique associée q . Alors nous avons l'**identité de polarisation** :

$$b(x, y) = \frac{1}{2}(q(x) + q(y) - q(x - y)). \quad (8.295)$$

EqMrhsop

Démonstration. Il suffit de substituer dans le membre de droite $q(x) = b(x, x)$ et d'utiliser la bilinéarité :

$$q(x) + q(y) - q(x - y) = b(x, x) + b(y, y) - b(x - y, x - y) \quad (8.296a)$$

$$= b(x, x) + b(y, y) - b(x, x) + b(x, y) + b(y, x) - b(y, y) \quad (8.296b)$$

$$= 2b(x, y) \quad (8.296c)$$

où nous avons utilisé le fait que b est symétrique : $b(x, y) = b(y, x)$. $\square$

PropFSXooRUMzdb

Proposition 8.139 (Matrice associée à une forme bilinéaire).

Soit $\{e_i\}$ une base de E . L 'application

$$\begin{aligned} \phi: Q(E) &\rightarrow S(n, \mathbb{R}) \\ q &\mapsto (b(e_i, e_j))_{i,j} \end{aligned} \quad (8.297)$$

où b est forme bilinéaire associée à q est une bijection linéaire et continue⁴⁸.

47. $Q(E)$ sont les formes quadratiques réelles sur E , définition 8.122.

48. Pour les topologies des normes données dans le lemme 8.137.

Démonstration. Si $\phi(q) = \phi(q')$; alors

$$q(x) = \sum_{i,j} \phi(q)_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j} \phi(q')_{ij} x_i x_j = q'(x). \quad (8.298)$$

Donc $q = q'$. L'application ϕ est donc injective

De plus elle est surjective parce que si $B \in S(n, \mathbb{R})$ alors la forme quadratique

$$q(x) = \sum_{i,j} B_{ij} x_i x_j \quad (8.299)$$

a évidemment B comme matrice associée. L'application ϕ est donc surjective.

Notre application ϕ est de plus linéaire parce que l'association d'une forme quadratique à la forme bilinéaire associée est linéaire.

En ce qui concerne la continuité, nous la prouvons en zéro en considérant une suite convergente $q_n \xrightarrow{Q(E)} 0$. C'est-à-dire que

$$\sup_{\|x\|=1} |q_n(x)| \rightarrow 0. \quad (8.300)$$

Nous rappelons l'identité de polarisation ⁴⁹ :

$$b_n(x, y) = \frac{1}{2} (q_n(x - y) - q_n(x) - q_n(y)). \quad (8.301)$$

En ce qui concerne deux des trois termes, il n'y a pas de problèmes :

$$|\phi(q_n)_{ij}| = |b_n(e_i, e_j)| \leq \frac{1}{2} |q_n(e_i - e_j)| + \frac{1}{2} |q_n(e_i)| + \frac{1}{2} |q_n(e_j)|. \quad (8.302)$$

Si n est assez grand, nous avons tout de suite

$$|\phi(q_n)_{ij}| \leq \frac{1}{2} |q_n(e_i - e_j)| + \epsilon. \quad (8.303)$$

Nous définissons e_{ij} et α_{ij} de telle sorte que $e_i - e_j = \alpha_{ij} e_{ij}$ avec $\|e_{ij}\| = 1$. Si $\alpha = \max\{\alpha_{ij}, 1\}$ alors nous avons

$$q_n(e_i - e_j) = \alpha_{ij}^2 q_n(e_{ij}) \leq \alpha^2 q_n(e_{ij}). \quad (8.304)$$

Il suffit maintenant de prendre n assez grand pour avoir $\sup_{\|x\|=1} |q_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{\alpha^2}$ pour avoir

$$|\phi(q_n)_{ij}| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{\alpha^2}. \quad (8.305)$$

□

8.8.4 Isotropie

DefVKMnUEM

Définition 8.140 (Isotropie[331]).

Quelques définitions.

- (1) Un vecteur est **isotrope** pour b si il est perpendiculaire à lui-même. En d'autres termes, x est isotrope si et seulement si $b(x, x) = 0$.
- (2) Un sous-espace $W \subset E$ est **isotrope** si $W \cap W^\perp \neq \{0\}$.
- (3) Un sous-espace $W \subset E$ est **totalement isotrope** si pour tout $x, y \in W$, nous avons $b(x, y) = 0$.

Le **cône isotrope** de b est l'ensemble de ses vecteurs isotropes :

$$C(b) = \{x \in E \text{ tel que } b(x, x) = 0\}. \quad (8.306)$$

49. Proposition 8.138.

Nous introduisons quelques notations. D'abord pour $y \in E$ nous notons

$$\begin{aligned}\Phi_y: E &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto b(x, y)\end{aligned}\tag{8.307}$$

et ensuite

$$\begin{aligned}\Phi: E &\rightarrow E^* \\ y &\mapsto \Phi_y.\end{aligned}\tag{8.308}$$

Définition 8.141.

Le fait pour une forme bilinéaire b d'être dégénérée signifie que l'application Φ n'est pas injective. Le **noyau** de la forme bilinéaire est celui de Φ , c'est-à-dire

$$\ker(b) = \{z \in E \text{ tel que } b(z, y) = 0 \forall y \in E\}.\tag{8.309}$$

Autrement dit, $\ker(b) = E^\perp$ où le perpendiculaire est pris par rapport à b .

Notons tout de même que nous utilisons la notation $\perp$ même si b est dégénérée et éventuellement pas positive; c'est-à-dire même si la formule $(x, y) \mapsto b(x, y)$ ne fournit pas un produit scalaire.

Lemme 8.142.

Si E est de dimension finie, et si V est un sous-espace non isotrope⁵⁰ de E , alors $V^\perp$ est également non-isotrope.

Démonstration. En dimension finie, le lemme 8.134 nous indique que $(V^\perp)^\perp = V$. Si $V^\perp$ était isotrope nous aurions $V^\perp \cap (V^\perp)^\perp \neq \emptyset$. Cela donne alors immédiatement $V^\perp \cap V \neq \emptyset$, qui serait que V est isotrope. $\square$

8.9 Formes bilinéaires et quadratiques

Plus à propos de formes bilinéaires dans le thème 16.

Lemme 8.143.

Si q est une forme quadratique, il existe une unique forme bilinéaire b telle que $q(x) = b(x, x)$.

Démonstration. L'existence n'est pas en cause : c'est la définition d'une forme quadratique. Pour l'unicité, étant donné une forme quadratique, la forme bilinéaire b doit forcément vérifier l'identité de polarisation de la proposition 8.138. Elle est donc déterminée par q . $\square$

Notons la division par 2 qui est le pourquoi de la demande de la caractéristique différente de 2 pour $\mathbb{F}$ dans la définition de forme quadratique.

Définition 8.144.

Soit une forme quadratique q sur E . Nous disons que $v, w \in E$ sont **q -orthogonaux** si $b(v, w) = 0$ où b est la forme bilinéaire associée à q par le lemme 8.143.

8.9.1 Matrice associée à une forme bilinéaire

Définition 8.145.

Soit une forme bilinéaire⁵¹ $b: E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ et une base quelconque $\{f_\alpha\}$ de E . Nous définissons les nombres

$$B_{\alpha\beta} = b(f_\alpha, f_\beta),\tag{8.310}$$

qui forment une matrice symétrique dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$. Cette matrice est la **matrice associée** à la forme bilinéaire b .

La matrice d'une forme quadratique est celle associée à sa forme bilinéaire associée.

50. Définition 8.140.

51. Définition 8.121.

LEMooDCIOooTIVZMR

Lemme 8.146.

Soit une forme bilinéaire $b: E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ et une base quelconque $\{f_\alpha\}$ de E . Nous notons B la matrice de b (définition 8.145) et q la forme quadratique associée.

Alors nous avons

$$b(x, y) = \sum_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta. \quad (8.311)$$

EQooQFMWooVKVLMx

et

$$b(x, y) = x \cdot By. \quad (8.312)$$

où le point est le produit scalaire usuel (composante par composante).

Démonstration. Si $x = \sum_\alpha x_\alpha f_\alpha$ et $y = \sum_\beta y_\beta f_\beta$:

En utilisant la convention (4.92) et les choses autour (voir aussi -1.1),

$$b(x, y) = \sum_\alpha x_\alpha \sum_\beta B_{\alpha\beta} y_\beta = \sum_\alpha x_\alpha (By)_\alpha = x \cdot By. \quad (8.313)$$

□

8.9.2 Changement de base : matrice d'une forme bilinéaire

PROPooOKTGooOYukoB

Proposition 8.147 ([1]).

Soient une forme quadratique q sur $\mathbb{R}^n$ et une application linéaire $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. La matrice de $q \circ \phi$ est

$$\phi^t q \phi \quad (8.314)$$

où l'on a noté q la matrice de q et ϕ celle de ϕ .

Démonstration. C'est un calcul direct de $(q \circ \phi)(x)$:

$$q(\phi(x)) = \sum_{ij} q_{ij} \phi(x)_i \phi(x)_j \quad (8.315a)$$

$$= \sum_{ij} \sum_k \sum_l q_{ij} \phi_{ik} x_k \phi_{jl} x_l \quad \text{prop. 4.75} \quad (8.315b)$$

$$= \sum_{kl} \left(\sum_{ij} \phi_{ik} q_{ij} \phi_{jl} \right) x_k x_l = \sum_{kl} (\phi^t q \phi)_{kl} x_l x_k. \quad (8.315c)$$

Et voilà.

□

PROPooLBIOooUpzxXA

Proposition 8.148 (Voir la section -1.1).

Soit une forme bilinéaire⁵² $b: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ dont la matrice⁵³ dans la base $\{e_i\}$ est A et celle dans la base $\{f_\alpha\}$ est B . Nous supposons que les bases sont liées par $f_\alpha = \sum_i Q_{i\alpha} e_i$. Alors

$$B = Q^t A Q. \quad (8.316)$$

EQooZUVTooKianJi

Démonstration. Soit $x, x' \in V$ de coordonnées (x_i) et (x'_i) dans la base $\{e_i\}$ et (y_α) , (y'_α) dans la base $\{f_\alpha\}$. Par définition de la matrice associée à une forme bilinéaire,

$$b(x, x') = \sum_{ij} A_{ij} x_i x'_j = \sum_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} y_\alpha y'_\beta. \quad (8.317)$$

En remplaçant les x_i et x'_i par leurs valeurs en fonction de y_α et y'_β données par la proposition 4.122, nous trouvons

$$b(x, x') = \sum_{ij\alpha\beta} A_{ij} Q_{i\alpha} y_\alpha Q_{j\beta} y'_\beta \quad (8.318a)$$

$$= \sum_{\alpha\beta} (Q^t A Q)_{\alpha\beta} y_\alpha y'_\beta \quad (8.318b)$$

52. Définition 8.121

53. Définition 8.310.

où Q^t désigne la transposée de la matrice $Q : Q_{ij}^t = Q_{ji}$. Vu que les nombres y_α et y'_β sont arbitraires nous déduisons⁵⁴ que $B = Q^t A Q$. $\square$

REMooNEJLooSggeh

Remarque 8.149.

Notons que cette « loi de transformation » n'est pas la même que celle pour une application linéaire⁵⁵. Ici nous avons Q^t alors que pour les applications linéaires nous avons Q^{-1} .

Pour cette raison, tant que nous travaillons avec des bases orthonormées, c'est-à-dire tant que Q est orthogonale⁵⁶, nous pouvons confondre une application linéaire avec une application bilinéaire en passant par la matrice. Mais cette identification n'est pas du tout canonique : elle repose sur le fait que les bases soient orthonormées.

Il en découle que la réduction des endomorphismes et la réduction des formes bilinéaires ne sont pas tout à fait les mêmes théories. Par exemple la pseudo-diagonalisation simultanée (corollaire 10.48) est un résultat de réduction de forme bilinéaire et non d'endomorphismes.

8.9.3 Isométrie, forme quadratique et bilinéaire

Exemple 8.150.

La forme quadratique $q(x) = x_1^2 + x_2^2$ donne la norme euclidienne. La forme bilinéaire associée est $b(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$, qui est le produit scalaire usuel. $\triangle$

Il ne faudrait pas déduire trop vite que la formule $\|x\|^2 = q(x)$ donne une norme dès que q est non dégénérée. En effet q peut ne pas être définie positive. La forme $q(x) = x_1^2 - x_2^2$ prend des valeurs positives et négatives. A fortiori $d(x, y) = q(x - y)$ ne donne pas toujours une distance.

DEFooECTUooRxBhHf

Définition 8.151.

Une **isométrie** pour la forme quadratique q est une application bijective $f : V \rightarrow V$ telle que

$$q(x - y) = q(f(x) - f(y)). \quad (8.319)$$

Dans les cas où q donne une distance, alors c'est une isométrie au sens usuel.

DEFooIQRooMeQuqX

Définition 8.152 (Thème 78).

Soit un espace vectoriel E muni d'une forme bilinéaire b . Une **isométrie** pour b est une bijection $f : E \rightarrow E$ telle que

$$b(f(x), f(y)) = b(x, y) \quad (8.320)$$

pour tout $x, y \in E$.

LemewGJmM

Lemme 8.153.

Soient q une forme quadratique et b la forme bilinéaire associée par le lemme 8.143. Une application $f : E \rightarrow E$ telle que $f(0) = 0$ est une isométrie pour b si et seulement si elle est une isométrie pour q .

Démonstration. Pour une application bijective $f : E \rightarrow E$ telle que $f(0) = 0$, nous devons prouver l'équivalence des propriétés suivantes :

- (1) $b(f(x), f(y)) = b(x, y)$ pour tout $x, y \in E$;
- (2) $q(f(x) - f(y)) = q(x - y)$ pour tout $x, y \in E$.

Dans le sens direct, en posant $x = y$ nous trouvons tout de suite $q(f(x)) = q(x)$; ensuite en utilisant la distributivité de b ,

$$q(f(x) - f(y)) = b(f(x) - f(y), f(x) - f(y)) \quad (8.321a)$$

$$= q(f(x)) - 2b(f(x), f(y)) + q(f(y)) \quad (8.321b)$$

$$= q(x) + q(y) - 2b(x, y) \quad (8.321c)$$

$$= q(x - y). \quad (8.321d)$$

54. Lemme 4.71.

55. Proposition 4.125.

56. Définition 4.106.

Dans l'autre sens, nous commençons par remarquer que l'hypothèse $f(0) = 0$ donne $q(x) = q(f(x))$. Ensuite nous utilisons l'identité de polarisation (8.295) :

$$b(f(x), f(y)) = \frac{1}{2}[q(f(x)) + q(f(y)) - q(f(x - y))] \quad (8.322a)$$

$$= \frac{1}{2}[q(x) + q(y) - q(x - y)] \quad (8.322b)$$

$$= b(x, y). \quad (8.322c)$$

□

8.9.4 Isométries

Voici un théorème pas toujours bien énoncé dans les cours de physique qui font de la relativité. Au moment de « prouver » les transformations de Lorentz⁵⁷, beaucoup oublient de justifier pourquoi elles devraient être linéaires.

ThoDsFErq

Théorème 8.154 ([332]).

Une isométrie⁵⁸ d'une forme bilinéaire non dégénérée est linéaire.

Démonstration. Soient une forme bilinéaire non-dégénérée b sur l'espace vectoriel E ainsi qu'une isométrie f pour icelle. Soit $z \in E$; étant donné que f est bijective nous pouvons considérer l'élément $f^{-1}(z) \in E$ et calculer

$$b(f(x + y), z) = b(f(x + y), f(f^{-1}(z))) \quad (8.323a)$$

$$= b(x + y, f^{-1}(z)) \quad (8.323b)$$

$$= b(x, f^{-1}(z)) + b(y, f^{-1}(z)) \quad (8.323c)$$

$$= b(f(x), z) + b(f(y), z) \quad (8.323d)$$

$$= b(f(x) + f(y), z), \quad (8.323e)$$

donc $f(x + y) = f(x) + f(y)$ par le lemme 8.127.

De la même façon on trouve $b(f(\lambda x), z) = b(\lambda f(x), z)$ qui prouve que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ et donc que f est linéaire. □

Exemple 8.155.

Une isométrie peut ne pas être linéaire quand la forme bilinéaire est dégénérée. Par exemple pour la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$ donnée par

$$b((a, b), (x, y)) = ax, \quad (8.324)$$

nous pouvons faire

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ \lambda(x, y) \end{pmatrix} \quad (8.325)$$

où λ est n'importe quoi. △

DEFooVTXWooVXfUnc

Définition 8.156.

Soient deux espaces vectoriels E et V . Une application $f: E \rightarrow V$ est **affine** si il existe une application linéaire $u: E \rightarrow V$ et un élément $\alpha \in V$ tel que

$$f(x) = u(x) + \alpha \quad (8.326)$$

pour tout $x \in E$.

57. Théorème 18.198.

58. Définition 8.152.

THOooHSGHooNCLebs

Théorème 8.157.

Soit un espace vectoriel E muni d'une forme quadratique q . Soit une isométrie $f: E \rightarrow E$ pour q . Alors

- (1) si $f(0) = 0$, alors f est linéaire ;
- (2) si $f(0) \neq 0$ alors f est affine⁵⁹.

Démonstration. Nous considérons la forme bilinéaire associée b . Si $f(0) = 0$, nous savons par le lemme 8.153 que $b(f(x), f(y)) = b(x, y)$. La proposition 8.154 nous dit alors que f est linéaire.

Si $f(0) \neq 0$, alors nous posons $g(x) = f(x) - f(0)$ qui vérifie $g(0) = 0$ et

$$q(g(x) - g(y)) = q(f(x) - f(0) - f(y) + f(0)) = q(x - y). \quad (8.327)$$

Nous pouvons donc appliquer le premier point à g , déduire que g est linéaire et donc que f est affine. $\square$

PROPooHSGHooNCLebs

Proposition 8.158 ([1]).

Soit un espace vectoriel E . Soient des points $a, x_1, \dots, x_n$ tels que $\{x_i - a\}_{i=1, \dots, n}$ forme une base de E . Si $f: E \rightarrow E$ est une application affine fixant a et tous les x_i , alors f est l'identité.

Démonstration. Nous décomposons $f(x) = u(x) + \alpha$ où u est linéaire et $\alpha \in E$. Nous avons, pour tout i :

$$\begin{cases} u(a) - a = \alpha \\ u(x_i) - x_i = \alpha. \end{cases} \quad (8.328a)$$

$$\quad (8.328b)$$

En faisant la soustraction, nous obtenons $u(x_i - a) = x_i - a$. Donc u est une application linéaire fixant une base. Elle est donc l'identité. À partir de là, il est immédiat que $\alpha = 0$. $\square$

Nous pouvons maintenant particulariser tout cela au cas de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel et de la norme associée pour voir quel résultat nous avons à peine prouvé.

Nous notons ici $T(n)$ le groupe des translations sur $\mathbb{R}^n$. Un élément de $T(n)$ est une translation τ_v donnée par un vecteur v et agissant sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\begin{aligned} \tau_v: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto x + v. \end{aligned} \quad (8.329)$$

Ce groupe est isomorphe au groupe abélien $(\mathbb{R}^n, +)$, et nous allons souvent identifier τ_v à v .

Vous savez par culture générale que les isométries de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire usuel sont les matrices orthogonales. En voici une petite généralisation (pensez à $\eta = \mathbb{1}$ dans le cas du produit scalaire usuel).

PROPooHSGHooNCLebs

Proposition 8.159.

Soit une forme bilinéaire b sur $\mathbb{R}^n$ de matrice symétrique η . Si A est la matrice d'une application linéaire $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

$$b(Ax, Ay) = b(x, y) \quad (8.330)$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, alors

$$A^t \eta A = \eta. \quad (8.331)$$

Démonstration. En suivant la formule générale (8.311),

$$b(Ax, Ay) = \sum_{ij} \eta_{ij} (Ax)_i (Ay)_j = \sum_{ijkl} \eta_{ij} A_{ik} A_{jl} x_k y_l. \quad (8.332)$$

En imposant que ce soit égal à $\sum_{kl} \eta_{kl} x_k y_l$ pour tout x, y nous avons la contrainte

$$\sum_{ij} \eta_{ij} A_{ik} A_{jl} = \eta_{kl} \quad (8.333)$$

qui signifie exactement $A^t \eta A = \eta$. $\square$

59. Définition 8.156.

8.10 Signature, théorème de Sylvester

Définition 8.160 (Signature^[333]).

Soit une forme quadratique⁶⁰ Q sur un espace vectoriel E de dimension finie n . L'**indice d'inertie** de Q est le nombre

$$q = \max\{\dim(F) \text{ tel que } Q(v) < 0 \forall v \in F \setminus \{0\}\}. \quad (8.334)$$

Nous définissons aussi

$$p = \max\{\dim(G) \text{ tel que } Q(v) > 0 \forall v \in G \setminus \{0\}\}. \quad (8.335)$$

Le couple (p, q) est la **signature** de Q .

Définition 8.161 (Rang d'une forme quadratique).

Si $Q: E \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme quadratique, nous considérons l'application

$$\begin{aligned} f_Q: E &\rightarrow E^* \\ x &\mapsto [y \mapsto B(x, y)]. \end{aligned} \quad (8.336)$$

Le **rang** de Q est le rang de l'application linéaire f_Q .

Proposition 8.162.

Le rang d'une forme quadratique est le rang de sa matrice dans n'importe quelle base.

Démonstration. Nous considérons une forme quadratique Q sur l'espace vectoriel E . Sa trace est, par définition, la trace de l'application linéaire f_Q de la définition 8.161. Or cette dernière trace ne dépend pas des bases choisies sur E et E^* . Nous la calculons donc maintenant.

Soit une base $\{e_i\}$ de E ainsi que sa base duale $\{e_i^*\}$ de E^* . Si $v = \sum_k v_k e_k \in E$, alors

$$f_Q(e_i)v = \sum_k v_k B(e_i, e_k) = \sum_k Q_{ik} v_k \quad (8.337)$$

où nous avons noté B la forme bilinéaire associée à Q et utilisé la définition 8.145 de la matrice associée à la forme quadratique Q . Nous avons donc $f_Q(e_i) = \sum_k Q_{ik} e_k^*$ ou encore

$$f_Q(e_i)_k = Q_{ik}, \quad (8.338)$$

ce qui signifie, par (1) que la matrice associée à f_Q est la matrice Q^t .

Le rang de f_Q est donc celui de Q^t , qui est le même que celui de la matrice Q (ici, nous avons noté Q la matrice de la forme quadratique Q). Le rang de f_Q est celui de sa matrice par la proposition 4.115. $\square$

Lemme 8.163 ([333]).

Soient une forme quadratique Q ainsi que deux bases Q -orthogonales $\{e_1, \dots, e_n\}$ et $\{e'_1, \dots, e'_n\}$. Nous posons

$$r = \text{Card}\{e_i \text{ tel que } Q(e_i) > 0\} \quad (8.339a)$$

$$r' = \text{Card}\{e_i \text{ tel que } Q(e'_i) > 0\} \quad (8.339b)$$

$$s = \text{Card}\{e_i \text{ tel que } Q(e_i) < 0\} \quad (8.339c)$$

$$s' = \text{Card}\{e_i \text{ tel que } Q(e'_i) < 0\} \quad (8.339d)$$

Alors $r = r'$ et $s = s'$.

Démonstration. Nous posons

$$I = \{i \text{ tel que } Q(e_i) \geq 0\} \quad (8.340a)$$

$$J = \{j \text{ tel que } Q(e'_j) \leq 0\} \quad (8.340b)$$

60. Définition 8.122.

Nous commençons par prouver que $\{e_i\}_{i \in I} \cup \{e'_j\}_{j \in J}$ est libre. Supposons pour cela que

$$\sum_{i \in I} x_i e_i + \sum_{j \in J} y_j e'_j = 0, \quad (8.341)$$

et posons $z = \sum_{i \in I} x_i e_i$. Nous avons

$$Q(z) = \sum_{i \in I} x_i^2 Q(e_i) \geq 0. \quad (8.342)$$

Mais nous avons aussi $z = -\sum_{j \in J} y_j e'_j$, donc

$$Q(z) = \sum_{j \in J} y_j^2 Q(e'_j) \leq 0. \quad (8.343)$$

Donc $Q(z) = 0$. Vu (8.342), et le fait que $Q(e_i) > 0$, avoir $Q(z) = 0$ impose $x_i = 0$ pour tout i . La relation (8.343) nous donne aussi immédiatement que les y_j sont nuls. Donc la partie $\{e_i\}_{i \in I} \cup \{e'_j\}_{j \in J}$ est libre.

Le lemme 4.12 nous indique qu'une partie libre est toujours de cardinal plus petit ou égal à la dimension de l'espace⁶¹. Tout ça pour dire que

$$\underbrace{\text{Card}(I)}_{=r} + \underbrace{\text{Card}(J)}_{=n-r'} \leq n, \quad (8.344)$$

et donc $r \leq r'$.

Le même raisonnement, en partant de $I = \{i \text{ tel que } Q(e_i) \leq 0\}$ et de $J = \{j \text{ tel que } Q(e'_j) > 0\}$, prouve que $r' \leq r$.

La preuve de $s = s'$ est du même tonneau. $\square$

Pour l'équivalence de formes quadratiques, voir la définition 8.251 et la proposition 8.252.

8.11 Produit scalaire, produit hermitien

Définition 8.164.

Un **produit scalaire** sur un espace vectoriel réel est une forme bilinéaire⁶² symétrique strictement définie positive⁶³.

La définition suivante est utile pour ceux qui veulent faire de la relativité⁶⁴.

Définition 8.165.

Un **produit pseudo-scalaire** sur un espace vectoriel réel est une forme bilinéaire et symétrique.

Définition 8.166.

Nous disons que deux vecteurs sont **orthogonaux** lorsque leur produit scalaire⁶⁵ est nul. Nous écrivons que $u \perp v$ lorsque $\langle u, v \rangle = 0$.

Si $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ est une base de E , nous disons qu'elle est **orthonormée** si

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}. \quad (8.345)$$

Lemme 8.167.

Un produit scalaire est toujours non dégénéré⁶⁶.

61. Ici nous utilisons l'hypothèse que V est de dimension finie.

62. Définition 8.121.

63. Définition 8.123.

64. Voir le théorème 18.198 qui établit les transformations de Lorentz.

65. Définition 8.164.

66. Définition 8.126.

Démonstration. Si b est dégénérée, il existe un $x \neq 0$ tel que $b(x, z) = 0$ pour tout z . En particulier $b(x, x) = 0$, en contradiction avec la condition 8.123(1) de la stricte positivité. $\square$

Vu que nous allons voir un pâté d'espaces avec des produits scalaires, nous leur donnons un nom.

DefLZMcvfj

Définition 8.168.

Un espace vectoriel **euclidien** est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire (définition 8.164).

Avouez que c'est drôle qu'un espace vectoriel est euclidien lorsqu'il possède une *multiplication* alors qu'un anneau est euclidien lorsqu'il possède une *division* (voir la définition 1.336). C'est pas très profond, mais si ça peut vous servir de moyen mnémotechnique...

PROPooSKVRooDGVcyj

Proposition-Définition 8.169 (Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$, thème 25).

Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, nous définissons

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n. \quad (8.346)$$

EQooFITHooEXDCCGd

Cela est un produit scalaire.

Ce produit scalaire est le **produit scalaire** qui sera toujours considéré. C'est de lui qui découle toujours la norme, et la topologie de $\mathbb{R}^n$. Il sera aussi souvent noté $\langle x, y \rangle$.

Démonstration. Il faut que $b(x, y) = \sum_i x_i y_i$ soit bilinéaire, symétrique, strictement définie positive. Ce sont toutes des vérifications immédiates. Par exemple pour la symétrie, nous avons $\sum_i x_i y_i = \sum_i y_i x_i$. $\square$

Calculons par exemple le produit scalaire de deux vecteurs de la base canonique : $\langle e_i, e_j \rangle$. En utilisant la formule de définition et le fait que $(e_i)_k = \delta_{ik}$, nous avons

$$\langle e_i, e_j \rangle = \sum_{k=1}^m \delta_{ik} \delta_{jk}. \quad (8.347)$$

Nous pouvons effectuer la somme sur k en remarquant qu'à cause du δ_{ik} , seul le terme avec $k = i$ n'est pas nul. Effectuer la somme revient donc à remplacer tous les k par des i :

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ii} \delta_{ji} = \delta_{ji}. \quad (8.348)$$

Une des propriétés intéressantes du produit scalaire est qu'il permet de décomposer un vecteur dans une base, comme nous le montre la proposition suivante.

PropScalCompDec

Proposition 8.170.

Si nous notons v_i les composantes du vecteur v , c'est-à-dire si $v = \sum_{i=1}^m v_i e_i$, alors nous avons $v_j = \langle v, e_j \rangle$.

Démonstration.

$$v \cdot e_j = \sum_{i=1}^m \langle v_i e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^m v_i \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^m v_i \delta_{ij} \quad (8.349)$$

Eqvejscalecomp

En effectuant la somme sur i dans le membre de droite de l'équation (8.349), tous les termes sont nuls sauf celui où $i = j$; il reste donc

$$v \cdot e_j = v_j. \quad (8.350)$$

 $\square$

Le produit scalaire ne dépend en réalité pas de la base orthogonale choisie.

LEMooZMCWooDfbrIq

Lemme 8.171.

Si $\{e_i\}$ est la base canonique, et si $\{f_i\}$ est une autre base orthonormale⁶⁷, alors si u et v sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^m$, nous avons

$$\sum_i u_i v_i = \sum_i u'_i v'_i \quad (8.351)$$

où u_i sont les composantes de u dans la base $\{e_i\}$ et u'_i sont celles dans la base $\{f_i\}$.

Démonstration. La preuve demande un peu d'algèbre linéaire. Étant donné que $\{f_i\}$ est une base orthonormale, il existe une matrice A orthogonale ($AA^t = \mathbb{1}$) telle que $u'_i = \sum_j A_{ij} u_j$ et idem pour v . Nous avons alors

$$\begin{aligned} \sum_i u'_i v'_i &= \sum_i \left(\sum_j A_{ij} u_j \right) \left(\sum_k A_{ik} v_k \right) \\ &= \sum_{ijk} A_{ij} A_{ik} u_j v_k \\ &= \sum_{jk} \sum_i \underbrace{(A^t)_{ji} A_{ik}}_{=\delta_{jk}} u_j v_k \\ &= \sum_{jk} \delta_{jk} u_j v_k \\ &= \sum_k u_k v_k. \end{aligned} \quad (8.352)$$

□

Cette proposition nous permet de réellement parler du produit scalaire entre deux vecteurs de façon intrinsèque sans nous soucier de la base dans laquelle nous exprimons les vecteurs.

8.11.1 Hermitien, unitaire, etc.

DefMZQxmQ

Définition 8.172 ([334]).

Soit E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ est **sesquilinéaire à droite** si pour tout $x, y \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

- (1) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \langle x, \bar{\lambda} y \rangle$,
- (2) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
- (3) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$.

Définitions supplémentaires :

- La forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est **hermitienne** si de plus

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}. \quad (8.353)$$

- Un **produit hermitien** est une forme hermitienne strictement définie positive, c'est-à-dire telle que $\langle x, x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in E$ et $\langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

PROPooRPRRooRYEMCB

Proposition-Définition 8.173.

Soit un espace hermitien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Soit un opérateur linéaire $A \in \text{End}(E)$. Il existe un unique opérateur $B \in \text{End}(E)$ tel que

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, By \rangle \quad (8.354)$$

pour tout $x, y \in E$.

L'opérateur B ainsi défini est noté $A^\dagger$ et est nommé **hermitien conjugué** de A .

67. Définition 8.166.

LEMooBOXMooSDyCfm

Lemme 8.174.

Au niveau des matrices, nous avons

$$A_{ij}^\dagger = A_{ji}^* \quad (8.355)$$

où z^* est le conjugué complexe.

DEFooKEBHooWwCKRK

Définition 8.175.

Quelque définitions.

(1) Un opérateur A est **hermitien** si $A^\dagger = A$.

(2) Un opérateur A est **unitaire** si $A^\dagger = A^{-1}$.

Note : le conjugué hermitien est parfois noté A^* au lieu de $A^\dagger$.

8.176.

Le mot « hermitien » est réservé aux opérateurs sur des espaces hermitiens, c'est-à-dire des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$. Le mot « autoadjoint » par contre est plutôt utilisé dans le cadre d'opérateurs sur les espaces réels. En conséquence de quoi, ces deux mots sont synonymes, mais il est préférable d'utiliser « hermitien » lorsque l'espace vectoriel est sur $\mathbb{C}$ et « autoadjoint » lorsqu'il est sur $\mathbb{R}$.

L'ensemble des opérateurs autoadjoints de E est noté $S(E)$. Cette notation provient du fait que dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, les opérateurs autoadjoints sont les matrices symétriques.

Remarque 8.177.

Le fait d'être hermitien n'implique en rien le fait d'être inversible.

8.178.

Les normes associées aux produits scalaires font intervenir une racine carrée, et donc devront être données plus tard. Voir le thème 25.

PROPooMWUCooMbJuaJ

Proposition 8.179 ([1]).

Nous considérons $\mathbb{C}^n$ vu comme espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{C}$.

(1) La formule, pour $x, y \in \mathbb{C}^n$,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k \quad (8.356)$$

EqFormSesqOrizPH

définit une forme sesquilinéaire sur $\mathbb{C}^n$.

(2) L'ensemble $\mathbb{C}^n$ devient un espace vectoriel hermitien.

8.11.2 Éléments de matrice

PROPooZKWXooWmEzoA

Proposition 8.180.

Soit une application linéaire $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Nous considérons le produit scalaire usuel⁶⁸ sur $\mathbb{R}^n$. Alors :

(1) Les éléments de matrice de A sont donnés par $A_{ij} = e_i \cdot Ae_j$.

(2) Nous avons la formule $x \cdot Ay = \sum_{kl} A_{kl} x_k y_l$.

Démonstration. Pour Ae_j nous utilisons la formule 4.91 avec des notations plus décontractées : $Ae_j = \sum_k A_{kj} e_k$. Ensuite nous faisons un calcul avec la formule (8.346) :

$$e_i \cdot Ae_j = e_i \cdot \sum_k A_{kj} e_k = \sum_k A_{kj} \delta_{i,k} = A_{ij}. \quad (8.357)$$

La seconde formule à prouver est du même tonneau, en utilisant cette fois la formule (4.92) :

$$x \cdot Ay = \sum_k x_k (Ay)_k = \sum_{kl} x_k A_{kl} y_l = \sum_{kl} A_{kl} x_k y_l. \quad (8.358)$$

□

68. Définition 8.169.

La proposition suivante est une version plus « pragmatique » de la proposition 4.144.

PROPOoNITTooCYcrT

Proposition 8.181 ([161]).

Soient un espace euclidien⁶⁹ de dimension finie V ainsi qu'un sous-espace M . Nous posons

$$M^\perp = \{x \in V \text{ tel que } x \cdot y = 0 \forall y \in M\}. \quad (8.359)$$

Alors $M \oplus M^\perp = V$.

Démonstration. D'abord si $x \in M \cap M^\perp$, alors $x \cdot x = 0$ et donc $x = 0$. Donc nous avons déjà $M \cap M^\perp = \{0\}$. Nous considérons une base $\{b_1, \dots, b_k\}$ de M , et nous définissons l'application linéaire

$$\begin{aligned} f: V &\rightarrow \mathbb{R}^k \\ x &\mapsto (x \cdot b_1, \dots, x \cdot b_k). \end{aligned} \quad (8.360)$$

Nous avons que $M^\perp = \ker(f)$. Le théorème du rang 4.49 nous indique que

$$\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Image}(f)) \leq \dim(M^\perp) + k = \dim(M^\perp) + \dim(M). \quad (8.361)$$

Une justification : vu que f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^k$, la dimension de son image est majorée par k .

Nous en déduisons que

$$\dim(M) + \dim(M^\perp) \geq \dim(V), \quad (8.362)$$

et la proposition 4.152 nous permet de conclure que $M \oplus M^\perp = V$. $\square$

8.11.3 Transposée : pas d'approche naïve

SUBSECooGPXVooEYwIiJ

Il est légitime, si $t: E \rightarrow E$ est une application linéaire, de dire que sa transposée soit l'application linéaire $t^t: E \rightarrow E$ dont la matrice est la matrice transposée de celle de t . Lorsque nous travaillons sur $\mathbb{R}^n$ muni de la base canonique, cela ne pose pas de problème et nous pouvons écrire des égalités du type $\langle x, Ay \rangle = \langle A^t x, y \rangle$.

PROPooNARVooEuhweD

Proposition 8.182 (Matrice transposée et produit scalaire).

Soit une matrice réelle A . En utilisant l'application linéaire associée⁷⁰ $f_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, nous avons

$$x \cdot f_A(y) = f_{A^t}(x) \cdot y. \quad (8.363)$$

Cette formule est souvent écrite $x \cdot Ay = A^t x \cdot y$ ou $\langle x, Ay \rangle = \langle A^t x, y \rangle$.

Démonstration. Il s'agit d'un calcul utilisant la formule (4.86) et le produit scalaire (8.346) :

$$x \cdot f_A(y) = \sum_i x_i (f_A(y))_i = \sum_i x_i \sum_j A_{ij} y_j = \sum_{ij} A_{ji}^t x_i y_j = \sum_j f_{A^t}(x)_j y_j = f_{A^t}(x) \cdot y. \quad (8.364)$$

$\square$

Hélas nous allons voir que cette façon de définir une transposée est mauvaise.

Soit une application linéaire $t: E \rightarrow E$ de matrice A dans la base $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ et de matrice B dans la base $\{f_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,n}$. Nous notons Q la matrice de passage d'une base à l'autre :

$$e_i = \sum_\alpha Q_{\alpha i}^{-1} f_\alpha. \quad (8.365)$$

Nous nommons t_1 l'application linéaire associée à A^t dans la base $\{e_i\}$ et t_2 l'application linéaire associée à la matrice B^t dans la base $\{f_\alpha\}$. Définir la transposée d'une application linéaire comme étant l'application linéaire associée à la transposée de sa matrice ne sera une bonne définition que si $t_1 = t_2$.

69. Qui possède un produit scalaire, définition 8.168.

70. Définition 4.72. Ici nous considérons la base canonique sur $\mathbb{R}^n$

La première chose facile à voir est

$$t_1(e_i)_j = \sum_k (A^t)_{jk} (e_i)_k = A_{ji}^t = A_{ij}. \quad (8.366)$$

Pour calculer $t_2(e_i)_j$, c'est un peu plus laborieux :

$$t_2(e_i) = \sum_{\alpha} Q_{\alpha i}^{-1} t_2(f_{\alpha}) = \sum_{\beta \gamma \alpha} Q_{\alpha i}^{-1} B_{\gamma \beta}^t \underbrace{(f_{\alpha})_{\beta}}_{\delta_{\alpha \beta}} f_{\gamma} = \sum_{\beta \gamma} Q_{\beta i}^{-1} B_{\gamma \beta}^t f_{\gamma} \quad (8.367a)$$

$$= \sum_{j \gamma} (B^t Q^{-1})_{\gamma i} Q_{j \gamma} e_j \quad (8.367b)$$

$$= \sum_j (Q B^t Q^{-1})_{ji} e_j. \quad (8.367c)$$

Donc $t_2(e_i)_j = (Q B^t Q^{-1})_{ji}$. En tenant compte du fait que $B = Q^{-1} A Q$ nous avons

$$t_2(e_i)_j = (Q Q^t A^t (Q^{-1})^t Q^{-1})_{ji}. \quad (8.368)$$

Ceci est égal à l'expression (8.366) lorsque $Q^t = Q^{-1}$. Nous voyons que confondre transposée d'une application linéaire avec transposée de la matrice associée n'est valable que si nous sommes certain de ne considérer que des changements de base par des matrices orthogonales.

C'est la situation typique dans laquelle nous nous trouvons lorsque nous considérons des applications linéaires sur $\mathbb{R}^n$ muni de la base canonique, et que nous n'avons aucune intention de changer de base, et encore moins de chercher une base non orthonormale. Cette situation est clairement la situation la plus courante.

Exemple 8.183 ([117]).

Soit la base canonique $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$. Nous considérons l'application linéaire $t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$t(e_1) = e_1 \quad (8.369a)$$

$$t(e_2) = 0. \quad (8.369b)$$

La matrice de t dans cette base est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.370)$$

Elle est symétrique : elle vérifie $A^t = A$. Si nous comptons sur la transposée de matrice pour définir la transposée de t , nous aurions $t^t = t$.

Soit maintenant la base $f_1 = e_1$, $f_2 = e_1 + e_2$. Nous avons $t(f_1) = f_1$ et

$$t(f_2) = t(e_1) + t(e_2) = e_1 = f_1. \quad (8.371)$$

Donc la matrice de t dans cette base est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.372)$$

Et là, nous avons $B^t \neq B$. Donc en comptant sur cette base pour définir la transposée de t nous aurions $t^t \neq t$. △

8.184.

Autrement dit, la façon « usuelle » de voir la transposée d'une application linéaire, ne fonctionne dans les livres pour enfants uniquement parce qu'on y considère toujours $\mathbb{R}^n$ muni de la base canonique ou de bases orthonormées.

Notons que nous avons tout de même les notions d'opérateur adjoint et autoadjoint pour parler d'application orthogonale sans passer par la transposée, voir 8.42.

8.11.4 Transposée : la bonne approche

DefooZLPAooKTITdd

Définition 8.185.

Si $f: E \rightarrow F$ est une application linéaire entre deux espaces vectoriels, la **transposée** est l'application $f^t: F^* \rightarrow E^*$ donnée par

$$f^t(\omega)(x) = \omega(f(x)). \quad (8.373)$$

pour tout $\omega \in F^*$ et $x \in E$.

PROPooFAVAooDevBrT

Proposition 8.186 (transposée et conjuguée[1]).

Soit une application linéaire $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ainsi que l'isomorphisme canonique $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$. Nous avons

$$A^\dagger = \phi \circ A^t \circ \phi \quad (8.374)$$

où A^t est l'opérateur transposé, défini en 8.185, et $A^\dagger$ est l'hermitien conjugué défini en 8.173.

NORMooFUZYooWeXjp

8.187.

Étant données les propositions 8.186, le fait que l'isomorphisme soit canonique, que la matrice de l'hermitien conjugué est la matrice transposée (dans le cas réel, par le lemme 8.174), nous écrirons souvent A^t pour $A^\dagger$, et donc nous écrirons des égalités comme

$$x \cdot Ay = A^t x \cdot y \quad (8.375)$$

alors qu'il faudrait écrire

$$x \cdot Ay = A^\dagger x \cdot y \quad (8.376)$$

Notons également que cette remarque est une raison pour laquelle je préfère noter A^t au lieu de ${}^tA$.

LEMooEMNNooPquZMg

Lemme 8.188.

Soit E muni de la base $\{e_i\}$ et F muni de la base $\{g_i\}$ et une application $f: E \rightarrow F$. Si A est la matrice de f dans ces bases, alors A^t est la matrice de f^t dans les bases $\{e_i^*\}$ et $\{g_i^*\}$ de E^* et F^* .

Autrement dit, en utilisant l'application $\psi: \mathbb{M} \rightarrow \mathcal{L}(F^*, E^*)$ de la proposition 4.75,

$$\psi(A^t) = f^t. \quad (8.377)$$

Démonstration. Attention aux indices, ça va chauffer⁷¹.

Nous allons montrer que $f^t = \psi(A^t)$ sur la base $\{g_i^*\}$, et pour cela nous appliquons $f^t(g_i^*)$ à $x \in E$:

$$f^t(g_i^*)x = g_i^*(f(x)) \quad \text{Définition 8.185} \quad (8.378a)$$

$$= g_i^*\left(\sum_k x_k f(e_k)\right) \quad (8.378b)$$

$$= g_i^*\left(\sum_{kl} x_k A_{lk} g_l\right) \quad \text{eq. (4.91)} \quad (8.378c)$$

$$= \sum_{kl} x_k A_{lk} \underbrace{g_i^*(g_l)}_{=\delta_{i,l}} \quad (8.378d)$$

$$= \sum_k x_k A_{ik} \quad (8.378e)$$

$$= \sum_k (A^t)_{ki} x_k \quad (8.378f)$$

$$= \sum_k (A^t)_{ki} e_k^*(x). \quad (8.378g)$$

Voilà. Donc nous avons

$$f^t(g_i^*) = \sum_k (A^t)_{ki} e_k^* = \psi(A^t)g_i^*. \quad (8.379)$$

□

71. Et merci à Alain Vigne pour m'avoir fait remarquer qu'il fallait mettre de l'ordre dans les indices.

8.189.

Intuitivement, les rangs de f et de f^t sont égaux parce que le rang est donné par la plus grande matrice carrée de déterminant non nul.

Nous donnons maintenant une vraie preuve de ce résultat.

LemSEpTeW

Lemme 8.190 ([335]).

Si $f: E \rightarrow F$ est une application linéaire, alors

$$\text{rk}(f) = \text{rk}(f^t). \quad (8.380)$$

Démonstration. Soient $n = \dim(E)$ et $r = \dim(F)$. Nous posons $\dim \ker(f) = p$ et donc $\text{rk}(f) = n - p$. Soit $\{e_1, \dots, e_p\}$ une base de $\ker(f)$ que l'on complète en une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E . Nous considérons maintenant les vecteurs

$$g_i = f(e_{p+i}) \quad (8.381)$$

pour $i = 1, \dots, n - p$. C'est-à-dire que les g_i sont les images des vecteurs qui ne sont pas dans le noyau de f . Prouvons qu'ils forment une famille libre. Si

$$\sum_{k=1}^{n-p} a_k f(e_{p+k}) = 0, \quad (8.382)$$

alors $f(\sum_k a_k e_{p+k}) = 0$, c'est-à-dire $\sum_k a_k e_{p+k} \in \ker(f)$. Comme une base de $\ker(f)$ est $\{e_1, \dots, e_p\}$, il existe des b_l tels que $\sum_k a_k e_{p+k} = \sum_{l=1}^p b_l e_l$. Autrement dit,

$$\sum_k a_k e_{p+k} - \sum_{l=1}^p b_l e_l = 0, \quad (8.383)$$

qui est une combinaison linéaire nulle des e_i . Donc $a_k = b_l = 0$ pour tout k et l . Tout ça pour dire que les $\{g_i\}_{i=1, \dots, n-p}$ est libre.

Étant donné que les vecteurs $g_1, \dots, g_{n-p}$ sont libres, nous pouvons les compléter en une base de F :

$$\underbrace{\{g_1, \dots, g_{n-p}\}}_{\text{images}}, \underbrace{\{g_{n-p+1}, \dots, g_r\}}_{\text{complétion}}. \quad (8.384)$$

Nous prouvons maintenant que $\text{rk}(f^t) \geq n - p$ en montrant que les formes $\{g_i^*\}_{i=1, \dots, n-p}$ forment une partie libre (et donc l'espace image de f^t est au moins de dimension $n - p$). Pour cela nous prouvons que $f^t(g_i^*) = e_{i+p}^*$. En effet

$$f^t(g_i^*)(e_k) = g_i^*(f(e_k)), \quad (8.385)$$

Si $k = 1, \dots, p$, alors $f(e_k) = 0$ et donc $g_i^*(f(e_k)) = 0$; si $k = p + l$ alors

$$f^t(g_i^*)(e_k) = g_i^*(f(e_{p+l})) = g_i^*(g_l) = \delta_{i,l} = \delta_{i,k-p} = \delta_{k,i+p}. \quad (8.386)$$

Donc $f^t(g_i^*) = e_{i+p}^*$. Cela prouve que les formes $f^t(g_i^*)$ sont libres et donc que

$$\text{rk}(f^t) \geq n - p = \text{rk}(f). \quad (8.387)$$

En appliquant le même raisonnement à f^t au lieu de f , nous trouvons

$$\text{rk}((f^t)^t) \geq \text{rk}(f^t) \quad (8.388)$$

et donc, sachant que $(f^t)^t = f$, nous obtenons $\text{rk}(f) = \text{rk}(f^t)$.

□

PropWOPlooBHFDdP

Proposition 8.191 ([336]).

Si f est une application linéaire entre les espaces vectoriels E et F , alors nous avons

$$\text{Image}(f^t) = \ker(f)^\perp. \quad (8.389)$$

Démonstration. Soient donc l'application $f: E \rightarrow F$ et sa transposée $f^t: F^* \rightarrow E^*$. Nous commençons par prouver que $\text{Image}(f^t) \subset (\ker f)^\perp$. Pour cela nous prenons $\omega \in \text{Image}(f^t)$, c'est-à-dire $\omega = \alpha \circ f$ pour un certain élément $\alpha \in F^*$. Si $z \in \ker(f)$, alors $\omega(z) = (\alpha \circ f)(z) = 0$, c'est-à-dire que $\omega \in (\ker f)^\perp$.

Pour prouver qu'il y a égalité, nous n'allons pas démontrer l'inclusion inverse, mais plutôt prouver que les dimensions sont égales. Après, on sait que si $A \subset B$ et si $\dim A = \dim B$, alors $A = B$. Nous avons

$$\dim(\text{Image}(f^t)) = \text{rk}(f^t) \quad (8.390a)$$

$$= \text{rk}(f) \quad \text{lemme 8.190} \quad (8.390b)$$

$$= \dim(E) - \dim \ker(f) \quad \text{théorème 4.49} \quad (8.390c)$$

$$= \dim((\ker f)^\perp) \quad \text{proposition 4.144.} \quad (8.390d)$$

□

Lemme 8.192 ([152]).

Soit $\mathbb{K}$ un corps, E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et une application linéaire $f: E \rightarrow F$. L'application f est injective si et seulement si sa transposée⁷² f^t est surjective.

Démonstration. Supposons que f soit injective. Alors par le lemme 4.60, il existe $g: F \rightarrow E$ tel que $g \circ f = \text{Id}_E$. Nous avons alors aussi $(g \circ f)^t = \text{Id}_{E^*}$, mais $(g \circ f)^t = f^t \circ g^t$, donc f^t est surjective.

Inversement, nous supposons que $f^t: F^* \rightarrow E^*$ est surjective. Alors en nous souvenant que E et F sont de dimension finie et en faisant jouer les identifications $(f^t)^t = f$ et $(E^*)^* = E$ nous savons qu'il existe $s: E^* \rightarrow F^*$ tel que $f^t \circ s = \text{Id}_{E^*}$. En passant à la transposée,

$$s^t \circ f = \text{Id}_E, \quad (8.391)$$

qui implique que f est injective. □

8.11.5 Polynômes de Lagrange

Lemme-Définition 8.193.

Soit $E = \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n . Soient $n+1$ réels distincts $a_0, \dots, a_n$. Nous considérons les formes linéaires associées $f_i \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})^*$,

$$f_i(P) = P(a_i). \quad (8.392)$$

La partie $\{f_1, \dots, f_n\}$ est une base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})^*$.

Les **polynômes de Lagrange** aux points (a_i) sont les polynômes de la base préduale de la base $\{f_i\}$.

Démonstration. Nous prouvons que l'orthogonal est réduit au singleton nul :

$$\text{Span}\{f_0, \dots, f_n\}^\perp = \{0\}. \quad (8.393)$$

La proposition 4.144 conclura. Si $P \in \text{Span}\{f_i\}^\perp$, alors $f_i(P) = 0$ pour tout i , ce qui fait que $P(a_i) = 0$ pour tout $i = 0, \dots, n$. Un polynôme de degré au plus n qui s'annule en $n+1$ points est automatiquement le polynôme nul. □

Proposition 8.194.

Les polynômes de Lagrange aux points $(a_i)_{i=1, \dots, n}$ sont donnés par

$$P_i = \prod_{k \neq i} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}. \quad (8.394)$$

72. Définition 8.185.

Démonstration. Il suffit de vérifier que $f_j(P_i) = \delta_{i,j}$. Nous avons

$$f_j(P_i) = P_i(a_j) = \prod_{k \neq i} \frac{a_j - a_k}{a_i - a_k}. \quad (8.395)$$

Si $j \neq i$ alors un des termes est nul. Si au contraire $i = j$, tous les termes valent 1. $\square$

8.11.6 Dual de $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$

Proposition 8.195 ([126]).

PropHOjJpCa

Soit $\mathbb{K}$, un corps. Les formes linéaires sur $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ sont les applications de la forme

$$\begin{aligned} f_A: \mathbb{M}(n, \mathbb{K}) &\rightarrow \mathbb{K} \\ M &\mapsto \text{Tr}(AM). \end{aligned} \quad (8.396)$$

Démonstration. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} f: \mathbb{M}(n, \mathbb{K}) &\rightarrow \mathbb{M}(n, \mathbb{K})^* \\ A &\mapsto f_A \end{aligned} \quad (8.397)$$

et nous voulons prouver que c'est une bijection. Étant donné que nous sommes en dimension finie, nous avons égalité des dimensions de $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ et $(\mathbb{M}(n, \mathbb{K}))^*$, et il suffit de prouver que f est injective. Soit donc A telle que $f_A = 0$. Nous l'appliquons à la matrice $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$:

$$0 = f_A(E_{ij}) = \sum_k (AE_{ij})_{kk} = \sum_{kl} A_{kl}(E_{ij})_{lk} = \sum_{kl} A_{kl}\delta_{il}\delta_{jk} = A_{ji}. \quad (8.398)$$

Donc $A = 0$. $\square$

Corolaire 8.196 ([126]).

Soient un corps $\mathbb{K}$ ainsi qu'une application $\phi \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})^*$ telle que pour tout $M, N \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ on ait

$$\phi(MN) = \phi(NM). \quad (8.399)$$

Alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\phi = \lambda \text{Tr}$.

Démonstration. La proposition 8.195 nous donne une matrice $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ telle que $\phi = f_A$. L'hypothèse nous dit que $f_A(MN) = f_A(NM)$, c'est-à-dire

$$\text{Tr}(AMN) = \text{Tr}(ANM) \quad (8.400)$$

pour toutes matrices $M, N \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$. L'invariance cyclique de la trace⁷³ appliqué au membre de droite nous donne $\text{Tr}(AMN) = \text{Tr}(MAN)$, ce qui signifie que

$$\text{Tr}((AM - MA)N) = 0 \quad (8.401)$$

ou encore que $f_{AM-MA} = 0$, et ce, pour toute matrice M . La fonction f étant injective nous en déduisons que la matrice A doit satisfaire

$$AM = MA \quad (8.402)$$

pour tout $M \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$. En particulier, en prenant pour M les fameuses matrices E_{ij} et en calculant un peu,

$$A_{li}\delta_{j,m} = \delta_{i,l}A_{jm} \quad (8.403)$$

pour tout i, j, l, m . Cela implique que $A_{ll} = A_{mm}$ pour tout l et m et que $A_{jm} = 0$ dès que $j \neq m$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda \mathbb{1}$. En fin de compte,

$$\phi(X) = f_{\lambda \mathbb{1}}(X) = \lambda \text{Tr}(X). \quad (8.404)$$

$\square$

73. Lemme 4.69.

CorICUOooPsZQrg

Corolaire 8.197 ([126]).*Soit $\mathbb{K}$ un corps. Tout hyperplan de $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ coupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan de $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$. Il existe une forme linéaire ϕ sur $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ telle que $\mathcal{H} = \ker(\phi)$. Encore une fois la proposition 8.195 nous donne $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ telle que $\phi = f_A$; nous notons r le rang de A . Par le lemme 4.118 nous avons $A = PJ_rQ$ avec $P, Q \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ et

$$J_r = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.405)$$

Pour tout $M \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ nous avons

$$\phi(M) = \mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(PJ_rQM) = \mathrm{Tr}(J_rQMP), \quad (8.406)$$

la dernière égalité découlant de l'invariance cyclique de la trace⁷⁴. Ce que nous cherchons est $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ telle que $\phi(M) = 0$. Nous commençons par trouver $N \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ telle que $\mathrm{Tr}(J_rN) = 0$. Celle-là est facile : c'est

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mathbb{1}_{n-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.407)$$

Les éléments diagonaux de J_rN sont tous nuls. Par conséquent en posant $M = Q^{-1}NP^{-1}$ nous avons notre matrice inversible dans le noyau de ϕ . $\square$

8.12 Diagonalisation et trigonalisation

Ici encore $\mathbb{K}$ est un corps commutatif.

8.12.1 Matrices semblables

PROPooXGXTooQNAAxw

Proposition-Définition 8.198 (Matrices équivalentes).

Nous définissons, sur l'ensemble $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, la relation $A \sim B$ si et seulement si il existe des matrices inversibles P et Q telles que $A = PBQ^{-1}$.

Cette relation est une relation d'équivalence.

*Deux telles matrices sont dites **équivalentes**.*

Démonstration. Il faut vérifier les points de la définition 1.50. D'abord $A \sim A$ en prenant $P = Q = \mathbb{1}$. Si $A \sim B$, alors il existe des matrices P et Q telles que $A = PBQ^{-1}$. En multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par Q nous trouvons $B = P^{-1}AQ$, ce qui montre que $B \sim A$ par les matrices P^{-1} et Q^{-1} . Enfin si $A \sim B$ et $B \sim C$, nous avons des matrices P, Q, R, S tels que $A = PBQ^{-1}$ et $B = RCS^{-1}$. Nous avons alors

$$A = PBQ^{-1} = P(RCS^{-1})Q^{-1} = (PR)C(QS)^{-1}. \quad (8.408)$$

Donc A et C sont équivalentes par les matrices PR et $(QS)^{-1}$. $\square$

DefCQNFooSDhDpB

Proposition-Définition 8.199 (matrices semblables[1]).

Nous définissons, sur l'ensemble $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, la relation $A \sim B$ si et seulement si il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Cette relation est une relation d'équivalence.

*Deux matrices équivalentes en ce sens sont dites **semblables**.*

Démonstration. Comme 8.198, mais en plus facile parce qu'il n'y a qu'une seule matrice au lieu de deux. $\square$

74. Lemme 4.69.

PROPooIXFSooZsFWHm

Proposition-Définition 8.200 (Applications linéaires semblables).

Soit un espace vectoriel E . Nous définissons sur $\text{End}(E)$ la relation $f \sim g$ si et seulement si il existe une application inversible $u: E \rightarrow E$ telle que $f = u^{-1} \circ g \circ u$.

Cette relation est une relation d'équivalence.

Deux endomorphismes équivalents en ce sens sont dits **semblables**.

Démonstration. Toujours la même chose que 8.198. □

PROPooBGJBsooXIDYEv

Proposition 8.201.

Deux applications linéaires sont semblables si et seulement si leurs matrices sont semblables dans une base.

Dans ce cas, les matrices sont semblables dans toutes les bases.

Démonstration. Supposons que $f \sim g$. Il existe un endomorphisme inversible u tel que $f = u^{-1} \circ g \circ u$. En vertu de la proposition 4.78, l'application qui a une application linéaire fait correspondre sa matrice est un morphisme d'algèbres. Donc si A est la matrice de f , si B est celle de g et X celle de u , nous avons

$$A = X^{-1}BX, \quad (8.409)$$

ce qui montre que $A \sim B$. □

LEMooKUHJooDfNKeg

Lemme 8.202.

Le polynôme caractéristique⁷⁵ est un invariant sous les similitudes.

Démonstration. En effet si P est une matrice inversible,

$$\chi_{P^{-1}AP} = \det(P^{-1}AP - \lambda X \mathbb{1}) \quad (8.410a)$$

$$= \det(P(P^{-1}AP - \lambda X \mathbb{1})P^{-1}) \quad (8.410b)$$

$$= \det(A - \lambda X \mathbb{1}) \quad (8.410c)$$

$$= \chi_A. \quad (8.410d)$$

□

La permutation de lignes ou de colonnes ne sont pas des similitudes, comme le montrent les exemples suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}. \quad (8.411)$$

Nous avons $\chi_A = X^2 - 5X - 2$ tandis que $\chi_B = X^2 - 5X + 2$ alors que le polynôme caractéristique est un invariant de similitude.

8.12.2 Trace de matrices semblables

PROPooRMYQooWkEpJJ

Proposition 8.203 ([1]).

Invariance de la trace par similarité.

(1) Soit une application linéaire f . Si la matrice de f dans une base est A et est B dans une autre base, alors

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B). \quad (8.412)$$

(2) Deux opérateurs semblables⁷⁶ ont même trace.

⁷⁵. Définition 8.110.

⁷⁶. Opérateurs semblables, définition 8.199

Démonstration. Les matrices A et B sont liées par la proposition 4.125 : $B = Q^{-1}AQ$ où Q est la matrice qui lie les vecteurs des deux bases. L'invariance cyclique de la trace donnée en le lemme 4.69 implique que

$$\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(Q^{-1}AQ) = \mathrm{Tr}(QQ^{-1}A) = \mathrm{Tr}(A). \quad (8.413)$$

□

LEMooXXEYooKHyQjb

Lemme 8.204.

Soit une matrice A . Nous avons

$$\mathrm{Tr}(A^\dagger A) = \sum_{ij} |A_{ij}|^2. \quad (8.414)$$

Démonstration. Utilisant la proposition 8.174 pour les éléments de la matrice $A^\dagger$, nous avons

$$\mathrm{Tr}(A^\dagger A) = \sum_k (A^\dagger A)_{kk} = \sum_{kl} A_{lk}^* A_{lk} = \sum_{kl} |A_{lk}|^2. \quad (8.415)$$

□

LEFmoQXFQooLGPcIt

Lemme 8.205 ([337]).

Si les matrice A et B sont unitairement semblables⁷⁷, alors

$$\sum_{ij} |A_{ij}|^2 = \sum_{ij} |B_{ij}|^2. \quad (8.416)$$

Démonstration. Soit une matrice unitaire U telle que $B = UAU^\dagger$. Nous savons par le proposition 8.203 que des matrice semblables ont même trace. Or $B^\dagger B$ est unitairement semblable à $A^\dagger A$ parce que

$$B^\dagger B = UA^\dagger U^\dagger UAU^\dagger = UA^\dagger AU^\dagger. \quad (8.417)$$

Donc $\mathrm{Tr}(A^\dagger A) = \mathrm{Tr}(B^\dagger B)$. Le lemme 8.204 conclut.

□

8.12.3 Endomorphismes nilpotents

DEFooHDFBooSbMgZN

Définition 8.206.

La **trace** d'une matrice $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ est la somme de ses éléments diagonaux :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}. \quad (8.418)$$

Une propriété importante est son invariance cyclique.

LemhbZTay

Lemme 8.207.

Quelques propriétés de la trace.

ITEMooBRUGooFWQDss

- (1) Si A et B sont des matrices carrées, alors $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
- (2) La trace est un invariant de similitude.

Démonstration. C'est un simple calcul :

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{ik} A_{ik} B_{ki} = \sum_{ik} A_{ki} B_{ik} = \sum_{ik} B_{ik} A_{ki} = \sum_i (BA)_{ii} = \mathrm{Tr}(BA) \quad (8.419)$$

où nous avons simplement renommé les indices $i \leftrightarrow k$.

En particulier, la trace est un invariant de similitude parce que $\mathrm{Tr}(ABA^{-1}) = \mathrm{Tr}(A^{-1}AB) = \mathrm{Tr}(B)$ par l'invariance cyclique démontrée en 4.69(2). □

⁷⁷. Définition 8.199.

PropMWWJooVIXdJp

Proposition 8.211 ([338]).

Soit un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Un endomorphisme $u \in \text{End}(E)$ est nilpotent si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est strictement triangulaire supérieure.

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ Nous faisons la démonstration par récurrence sur la dimension de E .

Lorsque $n = 1$ nous avons $u = (a)$ avec $a \in \mathbb{K}$. Puisque $a^k = 0$ pour un certain k nous avons $a = 0$ parce qu'un corps est toujours un anneau intègre⁷⁹.

Lorsque $\dim(E) = n$ nous savons que u a un noyau non réduit au vecteur nul (parce qu'il est nilpotent). Soit donc un vecteur non nul $x \in \ker(u)$ et une base

$$\{x, e_2, \dots, e_n\} \quad (8.426)$$

donnée par le théorème de la base incomplète 4.14. La matrice de u dans cette base s'écrit

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & * & * \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & A & \\ 0 & & & \end{array} \right). \quad (8.427)$$

Un tout petit peu de calcul de produit de matrice montre que la matrice de u^k est de la forme

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & * & * \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & A^k & \\ 0 & & & \end{array} \right). \quad (8.428)$$

Étant donné que l'endomorphisme u est nilpotent, la matrice A l'est aussi. L'hypothèse de récurrence dit alors que A est strictement triangulaire supérieure (ou en tout cas peut le devenir par un changement de base adéquat).

(2) $\Leftarrow$ Soit une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ dans laquelle la matrice de u est strictement triangulaire supérieure.

Alors $u(e_1) = 0$ et plus généralement, $u(e_k) \in \text{Span}\{e_1, \dots, e_{k-1}\}$. Voyez par récurrence que $u^l(e_k) \in \text{Span}\{e_1, \dots, e_{k-l}\}$. Donc $u^l(e_k) = 0$ dès que $l \geq k$.

□

PROPooWTFWooXHlmhp

Proposition 8.212 (Thème 41).

Soit E un espace de Banach (espace vectoriel normé complet⁸⁰). Si $A \in \mathcal{L}(E, E)$ est nilpotente, alors $(\mathbb{1} - A)$ est inversible et son inverse est donné par

$$(\mathbb{1} - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k, \quad (8.429)$$

où l'infini peut évidemment être remplacé par l'ordre de nilpotence de A .

Démonstration. En ce qui concerne la convergence de la somme, elle ne fait pas de doute parce que A étant nilpotente, la somme contient seulement une quantité finie de termes non nuls.

Montrons à présent que la somme est l'inverse de $\mathbb{1} - A$ en multipliant terme à terme :

$$\sum_{k=0}^n A^k (\mathbb{1} - A) = \sum_{k=0}^n (A^k - A^{k+1}) = \mathbb{1} - A^{n+1}. \quad (8.430)$$

Par conséquent

$$\|\mathbb{1} - \sum_{k=0}^n A^k (\mathbb{1} - A)\| = \|A^{n+1}\| \rightarrow 0. \quad (8.431)$$

La dernière limite est en réalité une égalité pour n assez grand.

□

79. Lemme 1.327.

80. Définition 7.315.

8.12.4 Endomorphismes diagonalisables

DefCNJqsmo

Définition 8.213 (Diagonalisable).

Plusieurs notions.

- (1) Une matrice est **diagonalisable** si elle est semblable⁸¹ à une matrice diagonale.
- (2) Une matrice est **diagonale** si seuls ses éléments diagonaux sont non nuls.
- (3) Une application linéaire est diagonalisable si elle est semblable⁸² à une application linéaire diagonale.
- (4) Une application linéaire est diagonale si elle admet une base de vecteurs propres.

Dans une matrice diagonale, certains éléments diagonaux peuvent être nuls. Pour un opérateur diagonal par contre, il faut de vrais vecteurs propres. Donc une matrice diagonale n'est pas toujours la matrice d'un opérateur diagonal.

LEMooOCLHooBMwUtm

Lemme 8.214.

Un opérateur est diagonal si et seulement si il est diagonalisable.

PROPooDEETooSOMiGO

Proposition 8.215.

Si A est un opérateur diagonalisable⁸³ dont les valeurs propres sont λ_i , alors il existe un opérateur inversible Q tel que

$$A = Q^{-1}DQ \quad (8.432)$$

où D est l'opérateur diagonal contenant les λ_i sur sa diagonale.

Démonstration. Commençons par montrer que si u est un vecteur propre de A , alors $Q^{-1}u$ est un vecteur propre de D , pour la même valeur propre. En effet nous avons $D = Q^{-1}AQ$, et donc

$$D(Q^{-1}u) = Q^{-1}AQQ^{-1}u = Q^{-1}Au = \lambda Q^{-1}u. \quad (8.433a)$$

Donc si $\{e_i\}$ est une base de vecteurs propres de D , alors $\{Qe_i\}$ est une base de vecteurs propres de A . Pour les mêmes valeurs propres. $\square$

Lemme 8.216.

Une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale n'est diagonalisable que si elle est diagonale (c'est-à-dire si c'est la matrice unité).

Démonstration. Si A est une matrice triangulaire supérieure de taille n telle que $A_{ii} = 1$, alors $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = (1 - \lambda)^n$, ce qui signifie que $\text{Spec}(A) = \{1\}$. Pour la diagonaliser, il faudrait une matrice $P \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$ telle que $\mathbb{1} = P^{-1}AP$, ce qui est uniquement possible si $A = \mathbb{1}$. $\square$

LemgnaEOk

Lemme 8.217.

Soit F un sous-espace stable par u . Soit une décomposition du polynôme minimal

$$\mu_u = P_1^{n_1} \dots P_r^{n_r} \quad (8.434)$$

où les P_i sont des polynômes irréductibles unitaires distincts. Si nous posons $E_i = \ker P_i^{n_i}$, alors

$$F = (F \cap E_1) \oplus \dots \oplus (F \cap E_r). \quad (8.435)$$

ThoDigLEQEXR

Théorème 8.218.

Soit E , un espace vectoriel de dimension n sur le corps commutatif $\mathbb{K}$ et $u \in \text{End}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

ItemThoDigLEQEXRiv

- (1) L'endomorphisme u est diagonalisable.
- (2) Il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant, scindé sur $\mathbb{K}$, dont toutes les racines sont simples, tel que $P(u) = 0$.

ItemThoDigLEQEXRi

81. Définition 8.199.

82. Définition 8.200.

83. Définition 8.213.

- (3) Le polynôme minimal μ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et toutes ses racines sont simples ^{ItemThoDigLEQEXRii 84}
 (4) Tout sous-espace de E possède un supplémentaire stable par u . ^{ItemThoDigLEQEXRiii}
 (5) Dans une base adaptée, la matrice de u est diagonale et les éléments diagonaux sont ses valeurs propres. ^{ITEMooZNJFooEiqDYp}

Démonstration. Plein d'implications à prouver.

- (1) **(2) implique (3)** Étant donné que $P(u) = 0$, il est dans l'idéal des polynômes annulateurs de u , et le polynôme minimal μ_u le divise parce que l'idéal des polynômes annulateurs est généré par μ_u par le théorème 6.43.
 (2) **(3) implique (1)** Étant donné que le polynôme minimal est scindé à racines simples, il s'écrit sous forme de produits de monômes tous distincts, c'est-à-dire

$$\mu_u(X) = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_r) \quad (8.437)$$

où les λ_i sont des éléments distincts de $\mathbb{K}$. Étant donné que $\mu_u(u) = 0$, le théorème de décomposition des noyaux (théorème 8.91) nous enseigne que

$$E = \ker(u - \lambda_1) \oplus \dots \oplus \ker(u - \lambda_r). \quad (8.438)$$

Mais $\ker(u - \lambda_i)$ est l'espace propre $E_{\lambda_i}(u)$. Donc u est diagonalisable.

- (3) **(1) implique (4)** Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base qui diagonalise u , soit F un sous-espace de E et $\{f_1, \dots, f_r\}$ une base de F . Par le théorème 4.18(2), nous pouvons compléter la base de F par des éléments de la base $\{e_i\}$. Le complément ainsi construit est stable par u .
 (4) **(4) implique (1)** En dimension un, tout endomorphisme est diagonalisable, nous supposons donc que $\dim E = n \geq 2$. Nous procédons par récurrence sur le nombre de vecteurs propres connus de u . Supposons avoir déjà trouvé p vecteurs propres $e_1, \dots, e_p$ de u . Considérons H , un hyperplan qui contient les vecteurs $e_1, \dots, e_p$. Soit F un supplémentaire de H stable par u ; par construction $\dim F = 1$ et si $e_{p+1} \in F$, il doit être vecteur propre de u .
 (5) **(1) implique (2)** Nous supposons maintenant que u est diagonalisable. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes, et considérons le polynôme

$$P(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_r). \quad (8.439)$$

Alors $P(u) = 0$. En effet si e_i est un vecteur propre pour la valeur propre λ_i ,

$$P(u)e_i = \prod_{j \neq i} (u - \lambda_j) \circ (u - \lambda_i)e_i = 0 \quad (8.440)$$

par le lemme 8.90. Par conséquent $P(u)$ s'annule sur la base $\{e_i\}$.

- (6) **(5) implique (2)** Si la matrice A est diagonale alors le polynôme $P = \prod_{i=1}^n (X - A_{ii})$ est annulateur de A . En effet,

$$P(A)e_k = \prod_{i=1}^n (A - A_{ii})e_k = \prod_{i=1}^n (u(e_k) - A_{ii}e_k) = \prod_{i=1}^n (A_{kk}e_k - A_{ii}e_k) = 0 \quad (8.441)$$

parce que le facteur $i = k$ est nul.

84. Le polynôme *caractéristique*, lui, n'a pas spécialement ses racines simples ; il peut encore être de la forme

$$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\alpha_i}, \quad (8.436)$$

mais alors $\dim(E_{\lambda_i}) = \alpha_i$.

(7) **(3) implique (5)** le polynôme minimal de u s'écrit

$$\mu = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_r), \quad (8.442)$$

et les espaces E_i du lemme 8.217 sont les espaces propres $E_i = \ker(u - \lambda_i)$. Nous avons donc une somme directe

$$E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r. \quad (8.443)$$

Dans chacun des espaces propres, u a une matrice diagonale avec la valeur propre correspondante sur la diagonale. Une base de E constituée d'une base de chacun des espaces propres est donc une base comme nous en cherchons.

□

CorQeVqsS

Corolaire 8.219.

Si u est diagonalisable et si F est un sous-espace stable par u , alors

$$F = \bigoplus_{\lambda} E_{\lambda}(u) \cap F \quad (8.444)$$

où $E_{\lambda}(u)$ est l'espace propre de u pour la valeur propre λ . En particulier la restriction de u à F , $u|_F$ est diagonalisable.

Démonstration. Par le théorème 8.218, le polynôme μ_u est scindé et ne possède que des racines simples. Notons le

$$\mu_u(X) = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_r). \quad (8.445)$$

Les espaces E_i du lemme 8.217 sont maintenant les espaces propres.

En ce qui concerne la diagonalisabilité de $u|_F$, notons que nous avons une base de F composée de vecteurs dans les espaces $E_{\lambda}(u)$. Cette base de F est une base de vecteurs propres de u . □

Lemme 8.220.

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $u \in \text{End}(E)$. Si $\text{Card}(\text{Spec}(u)) = \dim(E)$ alors u est diagonalisable.

Démonstration. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres distinctes de u . Nous savons que les espaces propres correspondants sont en somme directe (lemme 8.89). Par conséquent $\text{Span}\{E_{\lambda_i}(u)\}$ est de dimension $n = \dim(E)$ et u est diagonalisable. □

Voici un résultat de diagonalisation simultanée. Nous donnerons un résultat de trigonalisation simultanée dans le lemme 12.107.

PropGqhAMei

Proposition 8.221 (Diagonalisation simultanée).

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes qui commutent deux à deux.

ItemGqhAMei

(1) Si $i, j \in I$ alors tout sous-espace propre de u_i est stable par u_j . Autrement dit $u_j(E_{\lambda}(u_i)) \subset E_{\lambda}(u_i)$.

(2) Si les u_i sont diagonalisables, alors ils le sont simultanément.

Démonstration. Supposons que u_i et u_j commutent et soit x un vecteur propre de u_i : $u_i(x) = \lambda x$. Nous montrons que $u_j(x) \in E_{\lambda}(u_i)$. Nous avons

$$u_i(u_j(x)) = u_j(u_i(x)) = \lambda u_j(x). \quad (8.446)$$

Par conséquent $u_j(x)$ est vecteur propre de u_i de valeur propre λ .

Montrons maintenant l'affirmation à propos des endomorphismes simultanément diagonalisables. Si $\dim E = 1$, le résultat est évident. Nous supposons également qu'aucun des u_i n'est multiple de l'identité. Nous effectuons une récurrence sur la dimension.

Soit u_0 un des u_i et considérons ses valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Pour chaque k nous avons

$$E_{\lambda_k}(u_0) \neq E, \quad (8.447)$$

sinon u_0 serait un multiple de l'identité. Par contre le fait que u_0 soit diagonalisable permet de décomposer E en espaces propres de u_0 :

$$E = \bigoplus_k E_{\lambda_k}(u_0). \quad (8.448)$$

Ce que nous allons faire est de simultanément diagonaliser les $(u_i)_{i \in I}$ sur chacun des E_{λ_k} séparément. Par le point (1), nous avons $u_i : E_{\lambda_k}(u_0) \rightarrow E_{\lambda_k}(u_0)$, et nous pouvons considérer la famille d'opérateurs

$$\left(u_i|_{E_{\lambda_k}(u_0)} \right)_{i \in I}. \quad (8.449)$$

Ce sont tous des opérateurs qui commutent et qui agissent sur un espace de dimension plus petite. Par hypothèse de récurrence nous avons une base de $E_{\lambda_k}(u_0)$ qui diagonalise tous les u_i . $\square$

ExewINGYo

Exemple 8.222.

Soit un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Un opérateur **involutif** est un opérateur différent de l'identité dont le carré est l'identité. Typiquement une symétrie orthogonale dans $\mathbb{R}^3$. Le polynôme caractéristique d'une involution est $X^2 - 1 = (X + 1)(X - 1)$.

Tant que $1 \neq -1$, $X^2 - 1$ est donc scindé à racines simples et les involutions sont diagonalisables (8.218). Cependant si le corps est de caractéristique 2, alors $X^2 - 1 = (X + 1)^2$ et l'involution n'est plus diagonalisable.

Par exemple si le corps est de caractéristique 2, nous avons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.450a)$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.450b)$$

Cette matrice A représente donc une involution, mais n'est pas diagonalisable. $\triangle$

8.12.5 Diagonalisation : cas complexe, pas toujours

Il n'est pas vrai qu'une matrice de $M(n, \mathbb{C})$ soit toujours diagonalisable. En effet le théorème 8.218(3) dit qu'une matrice est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples. Certes sur $\mathbb{C}$ le polynôme minimal sera scindé, mais il ne sera pas spécialement à racines simples.

Exemple 8.223.

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.451)$$

a pour polynôme caractéristique $\chi_A(X) = X^2$. C'est également son polynôme minimal, qui n'est pas à racine simple.

Il est par ailleurs facile de voir que le seul espace propre de A est $\text{Span}\{(1, 0)\}$ (ici le span est sur $\mathbb{C}$). Donc l'espace $\mathbb{C}^2$ ne possède pas de base de vecteurs propres de A . $\triangle$

Ce qui est vrai, c'est que le polynôme caractéristique a des racines, et que ces racines correspondent à des vecteurs propres. Mais il n'y a pas toujours autant de vecteurs propres que la multiplicité des racines.

8.224.

Lorsque la diagonalisation n'est pas possible, il est souvent possible de trigonaliser. Les matrices triangulaires ne sont pas aussi faciles à manipuler que les matrices diagonales, mais c'est toujours ça de pris.

Nous étudierons ça plus tard, en 12.10.1 parce que ça va nécessiter le théorème de d'Alembert.

8.12.6 Diagonalisation : cas réel

LemSchureReInrqfiy

Lemme 8.225 (Lemme de Schur réel).

Soit $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$. Il existe une matrice orthogonale Q telle que $Q^{-1}AQ$ soit de la forme

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_r & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} a_s & b_s \\ c_s & d_s \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad \text{EqMtrTSqBTA (8.452)}$$

Le déterminant de A est le produit des déterminants des blocs diagonaux et les valeurs propres de A sont les $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ et celles de ces blocs.

Démonstration. Si la matrice A a des valeurs propres réelles, nous procédons comme dans le cas complexe. Cela nous fournit le partie véritablement triangulaire avec les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sur la diagonale. Supposons donc que A n'a pas de valeurs propres réelles. Soit donc $\alpha + i\beta$ une valeur propre ($\beta \neq 0$) et $u + iv$ un vecteur propre correspondant où u et v sont des vecteurs réels. Nous avons

$$Au + iAv = A(u + iv) = (\alpha + i\beta)(u + iv) = \alpha u - \beta v + i(\alpha v + \beta u), \quad (8.453)$$

et en égalisant les parties réelles et imaginaires,

$$Au = \alpha u - \beta v \quad (8.454a)$$

$$Av = \alpha v + \beta u. \quad (8.454b)$$

Sur ces relations nous voyons que ni u ni v ne sont nuls. De plus u et v sont linéairement indépendants (sur $\mathbb{R}$), en effet si $v = \lambda u$ nous aurions $Au = \alpha u - \beta \lambda u = (\alpha - \beta \lambda)u$, ce qui serait une valeur propre réelle alors que nous avons supposé avoir déjà épuisé toutes les valeurs propres réelles.

Étant donné que u et v sont deux vecteurs réels non nuls et linéairement indépendants, nous pouvons trouver une base orthonormée $\{q_1, q_2\}$ de $\text{Span}\{u, v\}$. Nous pouvons étendre ces deux vecteurs en une base orthonormée $\{q_1, q_2, q_3, \dots, q_n\}$ de $\mathbb{R}^n$. Nous considérons à présent la matrice orthogonale dont les colonnes sont formées de ces vecteurs : $Q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]$.

L'espace $\text{Span}\{e_1, e_2\}$ est stable par $Q^{-1}AQ$, en effet nous avons

$$Q^{-1}AQe_1 = Q^{-1}Aq_1 = Q^{-1}(aq_1 + bq_2) = ae_1 + be_2. \quad (8.455)$$

La matrice $Q^{-1}AQ$ est donc de la forme

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} & C_1 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \quad (8.456)$$

où C_1 est une matrice réelle $2 \times (n-1)$ quelconque et A_1 est une matrice réelle $(n-2) \times (n-2)$. Nous pouvons appliquer une récurrence sur la dimension pour poursuivre.

Notons que si A n'a pas de valeurs propres réelles, elle est automatiquement d'ordre pair parce que les valeurs propres complexes viennent par couple complexes conjugués.

En ce qui concerne les valeurs propres, il est facile de voir en regardant (8.452) que les valeurs propres sont celles des blocs diagonaux. Étant donné que $Q^{-1}AQ$ et A ont même polynôme caractéristique, ce sont les valeurs propres de A . $\square$

ThoeTMXla

Théorème 8.226 (Théorème spectral, matrice symétrique[126]).

Une matrice symétrique réelle,

ITEMooJWHLooSfhNSW

(1) a un spectre contenu dans $\mathbb{R}$

ITEMooMWWRoXxGONW

(2) est diagonalisable par une matrice orthogonale.

Si M est une matrice symétrique réelle alors $\mathbb{R}^n$ possède une base orthonormée de vecteurs propres de M .

Démonstration. Soit A une matrice réelle symétrique. Elle agit sur l'espace $\mathbb{C}^n$ par la définition 4.72, et en particulier la formule 4.87. Nous munissons de plus $\mathbb{C}^n$ de la forme sesquilineaire définie en la proposition 8.179.

Si λ est une valeur propre complexe pour le vecteur propre complexe v , alors d'une part $\langle Av, v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle$ et d'autre part $\langle Av, v \rangle = \langle v, Av \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle$. Par conséquent $\lambda = \bar{\lambda}$, et λ est réelle.

Le lemme de Schur réel 8.225 donne une matrice orthogonale Q qui trigonalise A . Les valeurs propres étant toutes réelles, la matrice $Q^{-1}AQ$ est même triangulaire (il n'y a pas de blocs dans la forme (8.452)). Prouvons que $Q^{-1}AQ$ est symétrique :

$$(Q^{-1}AQ)^t = Q^t A^t (Q^{-1})^t = Q^{-1} A^t Q = Q^{-1} A Q \quad (8.457)$$

où nous avons utilisé le fait que Q était orthogonale ($Q^{-1} = Q^t$) et que A était symétrique ($A^t = A$). Une matrice triangulaire supérieure symétrique est obligatoirement une matrice diagonale.

En ce qui concerne la base de vecteurs propres, soit $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et Q une matrice orthogonale telle que $A = Q^t D Q$ avec D diagonale. Nous posons $f_i = Q^t e_i$ et en tenant compte du fait que $Q^t = Q^{-1}$ nous avons $A f_i = Q^t D Q Q^t e_i = Q^t \lambda_i e_i = \lambda_i f_i$. Donc les f_i sont des vecteurs propres de A . De plus ils sont orthonormés parce qu'en utilisant la proposition 8.182,

$$\langle f_i, f_j \rangle = \langle Q^t e_i, Q^t e_j \rangle = \langle e_i, Q^t Q e_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}. \quad (8.458)$$

□

Le théorème spectral pour les opérateurs autoadjoints sera traité plus bas parce qu'il a besoin de notions sur les formes bilinéaires, théorème 10.16.

RemGKDZfxu

Remarque 8.227.

Une matrice symétrique est diagonalisable par une matrice orthogonale. Nous pouvons en réalité nous arranger pour diagonaliser par une matrice de $SO(n)$. Plus généralement si A est une matrice diagonalisable par une matrice $P \in GL^+(n, \mathbb{R})$ alors elle est diagonalisable par une matrice de $GL^-(n, \mathbb{R})$ en changeant le signe de la première ligne de P . Et inversement.

En effet, si nous avons $P^t D P = A$, alors en notant $*$ les quantités qui ne dépendent pas de a , b ou c ,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & * & * \\ b & * & * \\ c & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & * & * \\ b & * & * \\ c & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 a & \lambda_1 b & \lambda_1 c \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 a^2 + * & \lambda_1 ab + * & \lambda_1 ac + * \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8.459)$$

Nous voyons donc que si nous changeons les signes de a , b et c en même temps, le résultat ne change pas.

PROPooQHHPooSqpgcb

Proposition 8.228.

Une forme bilinéaire est non-dénégée⁸⁵ si et seulement si sa matrice associée est inversible.

85. Définition 8.126.

Démonstration. Nous savons que la matrice associée est symétrique et qu'elle peut donc être diagonalisée (théorème 8.226). En nous plaçant dans une base de diagonalisation, nous devons prouver que la forme est non-dégénérée si et seulement si les éléments diagonaux de la matrice sont tous non nuls.

Écrivons $b(x, z)$ en choisissant pour z le vecteur de base e_k de composantes $(e_k)_j = \delta_{kj}$:

$$b(x, e_k) = \sum_{ij} x_i (e_k)_j = \sum_i b_{ik} x_i = b_{kk} x_k. \quad (8.460)$$

Si b est dégénérée et si x est un vecteur non nul (disons que la composante x_i est non nulle) de E tel que $b(x, z) = 0$ pour tout $z \in E$, alors $b_{ii} = 0$, ce qui montre que la matrice de b n'est pas inversible.

Réciproquement si la matrice de b est inversible, alors tous les b_{kk} sont différents de zéro, et le seul vecteur x tel que $b_{kk} x_k = 0$ pour tout k est le vecteur nul. $\square$

8.12.7 Matrice définie positive

DefAWAoCMPuVM

Définition 8.229 (Matrice définie positive, opérateur défini positif).

Un opérateur sur un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ est **défini positif** si toutes ses valeurs propres sont réelles et strictement positives. Il est **semi-défini positif** si ses valeurs propres sont réelles positives ou nulles.

Mêmes définitions pour une matrice.

Afin d'éviter l'une ou l'autre confusion, nous disons souvent *strictement* défini positif pour positif.

NORMooAJLHooQhwpvr

8.230.

Quelques ensembles de matrices symétriques.

- (1) $S(n, \mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques réelles $n \times n$.
- (2) $S^+(n, \mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles symétriques $n \times n$ définies positives.
- (3) $S^{++}(n, \mathbb{R})$ le sous-ensemble de $S^+(n, \mathbb{R})$ des matrices strictement définies positives.

Remarque 8.231.

Nous ne définissons pas la notion de matrice définie positive pour une matrice non symétrique.

PropcnJyXZ

Proposition 8.232.

Soit M , une matrice symétrique. Nous avons

ITEMooTJVQooYmRkas

- (1) $\det(M) > 0$ et $\text{Tr}(M) > 0$ implique M définie positive⁸⁶,
- (2) $\det(M) > 0$ et $\text{Tr}(M) < 0$ implique M définie négative,
- (3) $\det(M) < 0$ implique ni semi-définie positive, ni définie négative
- (4) $\det(M) = 0$ implique M semi-définie positive ou semi-définie négative.

ItemluuFPN

Lorsqu'un énoncé parle d'une matrice symétrique, le premier réflexe est de la diagonaliser : considérer une matrice orthogonale Q telle que $Q^t M Q = D$ avec D diagonale. Et les valeurs propres sur la diagonale : $D_{kk} = \lambda_k$. Les matrices symétriques définies positives ont cependant des propriétés même en dehors de leur base de diagonalisation.

Pour rappel, $\langle x, y \rangle$ est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ défini par la proposition 8.169.

LemWZFSooYvksjw

Lemme 8.233.

Soit une matrice symétrique M .

ITEMooSKRAooOgHbGA

- (1) Elle est strictement définie positive si et seulement si $\langle x, Mx \rangle > 0$ pour tout x non nul dans $\mathbb{R}^n$.

86. Définition 8.229.

- (2) Elle est semi-définie positive si et seulement si $\langle x, Mx \rangle \geq 0$ pour tout x non nul dans $\mathbb{R}^n$.
- (3) Si elle est seulement définie positive, alors $\langle x, Mx \rangle \geq \lambda \|x\|^2$ dès que $\lambda \geq 0$ minore toutes les valeurs propres.

Démonstration. Démonstration en trois parties.

- (1) **(1)** Soit $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ une base orthonormée de vecteurs propres de M dont l'existence est assurée par le théorème spectral 8.226. Nous nommons x_i les coordonnées de x dans cette base. Alors,

$$\langle x, Mx \rangle = \sum_{i,j} x_i \langle e_i, x_j M e_j \rangle = \sum_{i,j} x_i x_j \langle e_i, \lambda_j e_j \rangle = \sum_{i,j} x_i x_j \lambda_j \delta_{ij} = \sum_i \lambda_i x_i^2 \quad (8.461)$$

où les λ_i sont les valeurs propres de M . Le produit $\langle x, Mx \rangle$ est strictement positif pour tout x si et seulement si tous les λ_i sont strictement positifs.

- (2) **(2)** Nous avons encore

$$\langle x, Mx \rangle = \sum_i \lambda_i x_i^2 \quad (8.462)$$

qui est plus grand ou égal à zéro si et seulement si tous les λ_i sont plus grands ou égaux à zéro.

- (3) **(3)**

Soit une matrice orthogonale T diagonalisant M , c'est-à-dire telle que $T^t M T = D$ avec D diagonale. Nous allons vérifier que si $\lambda \leq \min\{\lambda_i\}$, alors

$$\langle Tx, MTx \rangle \geq \lambda \|Tx\|^2 \quad (8.463)$$

pour tout x . Si nous considérons la base de diagonalisation $\{e_k\}$ pour les valeurs propres λ_k , nous avons le calcul

$$\langle Tx, MTx \rangle = \langle x, T^t M T x \rangle \quad (8.464a)$$

$$= \langle x, D x \rangle \quad (8.464b)$$

$$= \sum_k \langle x, x_k D e_k \rangle \quad (8.464c)$$

$$= \sum_k \lambda_k x_k \underbrace{\langle x, e_k \rangle}_{=x_k} \quad (8.464d)$$

$$\geq \sum_k \lambda |x_k|^2 \quad \text{en posant } \lambda = \min\{\lambda_i\} \quad (8.464e)$$

Nous avons donc

$$\langle Tx, MTx \rangle \geq \sum_k \lambda |x_k|^2 = \lambda \|x\|^2 = \lambda \|Tx\|^2. \quad (8.465)$$

Au dernier passage nous avons utilisé le fait que T est une isométrie (proposition 8.45). L'inéquation (8.463) est démontrée.

Comme T est une bijection⁸⁷, cela implique le résultat pour tout x .

□

Les personnes qui aiment les vecteurs lignes et colonnes écriront des inégalités comme

$$x^t M x \geq x^t x. \quad (8.466)$$

Tout à l'autre bout du spectre des personnes névrosées des notations, on trouvera des inégalités comme

$$M(x \otimes x) \geq x \cdot x. \quad (8.467)$$

87. Une matrice orthogonale a un déterminant qui vaut ± 1 .

Le penchant personnel de l'auteur de ces lignes est la notation avec le produit tensoriel. Si vous aimez ça, vous pouvez lire la section 10.13.15 et en particulier ce qui suit (10.729).

La notation adoptée ici avec le produit scalaire $\langle x, Mx \rangle$, qui peut aussi être écrite $x \cdot Mx$ est entre les deux. Elle a l'avantage de n'être pas technologique comme le produit tensoriel (si vous y mettez les pieds, vous devez savoir ce que vous faites), tout en évitant de se casser la tête à savoir qui est un vecteur ligne ou un vecteur colonne.

HHQTPmLWQSFkEAGVDFRC

Proposition 8.234.

Une application bilinéaire est définie positive⁸⁸ si et seulement si sa matrice symétrique associée⁸⁹ l'est.

Démonstration. La définition 8.123 dit que b est strictement définie positive lorsque $b(x, x) \geq 0$ et $b(x, x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.

D'autre part, le lemme 8.233 dit que la matrice B est strictement définie positive lorsque $x \cdot Bx \geq 0$ et $x \cdot Bx = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Le lien entre les deux est que le lemme 8.146 nous enseigne que pour tout x et y ,

$$b(x, y) = x \cdot By \quad (8.468)$$

où B est la matrice de b . □

PROPOCIEUooODqfwm

Proposition 8.235.

Soit une forme quadratique $q: E \rightarrow \mathbb{K}$ et sa matrice⁹⁰ $(q_{ij}) \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$. Nous avons

$$q(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n q_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} q_{ij} x_i x_j. \quad (8.469)$$

EQooAJTUooBSAhKy

Démonstration. La première égalité est seulement l'expression de la matrice de q . Pour la seconde, on découpe la somme sur j en trois parties : $j < i$, $j = i$ et $j > i$:

$$q(x) = \sum_i \sum_{j < i} q_{ij} x_i x_j + \sum_i q_{ii} x_i^2 + \sum_i \sum_{j > i} q_{ij} x_i x_j. \quad (8.470)$$

EQooMKMDooGKghJi

Nous pouvons utiliser le lemme 1.298 en posant $A = \{(i, j) \text{ tel que } j < i\}$, $B = \{(i, j) \text{ tel que } j > i\}$, et en considérant la bijection

$$\begin{aligned} \varphi: A &\rightarrow B \\ (i, j) &\mapsto (j, i). \end{aligned} \quad (8.471)$$

Nous avons alors

$$\sum_{(i,j) \in A} q_{ij} x_i x_j = \sum_{(i,j) \in B} q_{ji} x_j x_i = \sum_{(i,j) \in B} q_{ij} x_i x_j. \quad (8.472)$$

La première égalité est le lemme et la seconde est la symétrie de q . Bref, dans (8.470), le premier et le dernier termes sont égaux. □

8.236.

De nombreux auteurs préfèrent écrire des choses comme $x^t B y$ ou $x B^t y$ ou $x B y^t$ et se poser de longues questions sur qui est un « vecteur colonne » et qui est un « vecteur ligne », et si la matrice B soit être transposée ou non. Toutes ces notations servent(?) à cacher un bête produit scalaire.

8.237.

Notons que la matrice associée à une forme bilinéaire (ou quadratique associée) est uniquement valable pour une base donnée. Si nous changeons de base, la matrice change. Cependant lorsque nous travaillons sur $\mathbb{R}^n$, la base canonique est tellement canonique que nous allons nous permettre de parler de « la » matrice associée à une forme bilinéaire.

88. Définition 8.123.

89. Par la proposition 8.139.

90. Matrice associée à une forme quadratique, définition 8.145.

Corolaire 8.238.

Une matrice symétrique strictement définie positive est inversible.

Démonstration. Si $Ax = 0$ alors $\langle Ax, x \rangle = 0$. Mais dans le cas d'une matrice strictement définie positive, cela implique $x = 0$ par le lemme 8.233. $\square$

Lemme 8.239.

Pour une base quelconque, les éléments diagonaux d'une matrice symétrique semi-définie positive sont positifs. Si la matrice est strictement définie positive, alors les éléments diagonaux sont strictement positifs.

Démonstration. Il s'agit d'une application du lemme 8.233. Si A est définie positive et que $\{e_i\}$ est une base, alors

$$A_{ii} = \langle Ae_i, e_i \rangle \geq \lambda \|e_i\|^2 = \lambda \geq 0. \quad (8.473)$$

Si A est strictement définie positive, alors λ peut être choisi strictement positif. $\square$

8.12.8 Réduction de Gauss

THOooOMMFooKxqICS

Théorème 8.240 (Réduction de Gauss[339, 340]).

Soit une forme quadratique non nulle q sur l'espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$. Il existe une base $\{l_i\}_{i=1,\dots,n}$ de E^* et des coefficients $\alpha_i \in \mathbb{K}$ tels que

$$q(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i l_i(x)^2. \quad (8.474)$$

Démonstration. Notre point de départ sont les formules (8.469) pour la forme quadratique. Nous allons faire la preuve par récurrence sur la dimension de l'espace. Si $n = 1$, alors nous avons seulement

$$q(x) = \alpha x^2 \quad (8.475)$$

et donc le théorème est fait avec $l(x) = x$.

Nous supposons que le théorème est prouvé pour tout espace de dimension n . Une forme quadratique pour un espace de dimension $n + 1$ s'écrit

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n+1} m_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} m_{ij} x_i x_j. \quad (8.476)$$

Vu que q est non nulle, un des m_{ij} est non nul. Nous allons diviser en plusieurs cas.

- $m_{11} \neq 0$
- $m_{kk} \neq 0$ avec $k \neq 1$
- $m_{12} \neq 0$ et $m_{ii} = 0$ pour tout i .
- $m_{kl} \neq 0$ avec $(k, l) \neq (1, 2)$ et $m_{ii} = 0$ pour tout i .

Ces cas ne sont pas exclusifs, mais ils couvrent toutes les possibilités.

(1) Si $m_{11} \neq 0$ Nous écrivons q sous la forme

$$q(x) = m_{11}x_1^2 + \sum_{i=2}^{n+1} m_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i+1}^{n+1} m_{ij}x_i x_j \right) \quad (8.477a)$$

$$= m_{11}x_1^2 + \sum_{i=2}^{n+1} m_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{j=2}^{n+1} m_{1j}x_1 x_j + 2 \sum_{i=2}^n \sum_{j=i+1}^{n+1} (m_{ij}x_i x_j) \quad (8.477b)$$

$$= m_{11}x_1^2 + 2x_1 \sum_{j=2}^{n+1} m_{1j}x_j + R(x_2, \dots, x_{n+1}) \quad (8.477c)$$

$$= m_{11} \left(x_1^2 + 2x_1 \sum_{j=2}^{n+1} \frac{m_{1j}}{m_{11}} x_j \right) + R(x_2, \dots, x_{n+1}) \quad (8.477d)$$

$$= m_{11} (x_1^2 + 2x_1 f(x_2, \dots, x_{n+1})) + R(x_2, \dots, x_{n+1}) \quad (8.477e)$$

$$= m_{11} (x_1 + f(x_2, \dots, x_{n+1}))^2 - m_{11} f(x_2, \dots, x_{n+1})^2 + R(x_2, \dots, x_{n+1}) \quad (8.477f)$$

où

- R est une forme quadratique de $n - 1$ variables ;
- nous avons noté $f(x_2, \dots, x_{n+1}) = \sum_{j=2}^{n+1} \frac{m_{1j}}{m_{11}} x_j$.

Maintenant, toute la partie $-f(x_2, \dots, x_{n+1})^2 + R(x_2, \dots, x_{n+1})$ est une forme quadratique de n variables. Par hypothèse de récurrence, il existe des coefficients α_i et des formes linéairement indépendantes sur $\mathbb{K}^n$ $l'_i(x_2, \dots, x_{n+1})$ telles que

$$-f(x_2, \dots, x_{n+1})^2 + R(x_2, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i l'_i(x_2, \dots, x_{n+1})^2. \quad (8.478)$$

En posant ensuite $l_j(x_1, \dots, x_{n+1}) = l'_j(x_2, \dots, x_{n+1})$, ainsi que $l_1(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1 + f(x_2, \dots, x_{n+1})$, nous avons

$$q(x) = m_{11}l_1(x)^2 + \sum_{j=2}^{n+1} \alpha_j l_j(x)^2. \quad (8.479)$$

(2) Si $m_{kk} \neq 0$ avec $k \neq 1$

Nous nommons k le plus petit entier pour lequel $m_{kk} \neq 0$, et nous supposons que $k \neq 1$, parce que nous avons déjà couvert ce cas. Dans ce cas, nous avons

$$q(x) = m_{kk}x_k^2 + \sum_{j=k+1}^{n+1} m_{jj}x_j^2 + 2 \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i+1}^{n+1} m_{ij}x_i x_j \right), \quad (8.480)$$

et tout tourne comme dans le premier cas.

(3) $m_{ii} = 0$ pour tout i et $m_{12} \neq 0$ Nous écrivons q en séparant les termes m_{1k} :

$$q(x) = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} m_{ij}x_i x_j \quad (8.481a)$$

$$= 2m_{12}x_1x_2 + 2 \sum_{2 \leq j \leq n+1} m_{1j}x_1x_j + 2 \sum_{2 \leq i < j \leq n+1} m_{ij}x_i x_j \quad (8.481b)$$

$$= 2m_{12}x_1x_2 + 2x_1 \sum_{2 \leq j \leq n+1} m_{1j}x_j + 2 \sum_{3 \leq j \leq n+1} m_{2j}x_2x_j + 2 \sum_{3 \leq i < j \leq n+1} m_{ij}x_i x_j \quad (8.481c)$$

$$= 2m_{12}x_1x_2 + x_1f(x_2, \dots, x_{n+1}) + x_2g(x_3, \dots, x_{n+1}) + T(x_3, \dots, x_{n+1}) \quad (8.481d)$$

où f et g sont linéaires et T est multilinéaire.

À ce moment, nous tentons de factoriser toute la partie concernant x_1 et x_2 . L'idée est d'utiliser ceci :

$$(x_1 + g)(x_2 + f) = x_1x_2 + x_1f + x_2g + fg, \quad (8.482)$$

mais en mettant les bons coefficients pour reproduire ce que nous avons dans (8.481d) :

$$(2m_{12} + 2g)(x_2 + \frac{f}{m_{12}}) - \frac{2fg}{m_{12}} = 2m_{12}x_1x_2 + 2x_1f + 2x_2g. \quad (8.483)$$

Cela pour dire que

$$q(x) = 2(m_{12}x_1 + g)(x_2 + \frac{f}{m_{12}}) - \frac{2fg}{m_{12}} + T \quad (8.484)$$

où $-2fg/m_{12} + T$ est une forme quadratique de $x_3, \dots, x_{n+1}$, c'est-à-dire de $n - 1$ variables. L'hypothèse de récurrence nous donne des formes linéaires $(l_i)_{i=3, \dots, n+1}$ telles que

$$\frac{2fg}{m_{12}} + T = \sum_{i=3}^{n+1} \alpha_i l_i(x)^2. \quad (8.485)$$

Nous pouvons donc déjà écrire

$$q(x) = 2l'_1(x)l'_2(x) + \sum_{i=3}^{n+1} \alpha_i l_i(x)^2 \quad (8.486)$$

où

- Les forme l_i avec $i \geq 3$ ne dépendent pas de x_1 et x_2 , et sont donc indépendantes de l_1 et l_2 .
- La forme l'_1 ne dépend pas de x_2 ,
- La forme l'_2 ne dépend pas de x_1 .

Ce sont donc $n + 1$ formes linéaires indépendantes. Le seul problème résiduel est que les formes l'_1 et l'_2 arrivent en produit l'une de l'autre. Nous en définissons donc deux de plus :

$$\begin{aligned} l_1(x) &= \frac{1}{2}(l'_1 + l'_2) \\ l_2(x) &= \frac{1}{2}(l'_1 - l'_2), \end{aligned} \quad (8.487)$$

qui sont linéairement indépendantes l'une de l'autre et indépendantes des l_i ($i \geq 3$). Au final,

$$q(x) = l_1(x)^2 + l_2(x)^2 + \sum_{i=3}^{n+1} \alpha_i l_i(x)^2. \quad (8.488)$$

(4) Si $m_{ii} = 0$ et $m_{12} = 0$ et $m_{kl} \neq 0$ avec $k < l$ Nous considérons la permutation

$$\begin{aligned} \sigma: \{1, \dots, n+1\} &\rightarrow \{1, \dots, n+1\} \\ i &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 2 & \text{si } i = l \\ k & \text{si } i = 1 \\ l & \text{si } i = 2 \\ i & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned} \quad (8.489)$$

c'est-à-dire que σ permute 1 et k ainsi que 2 et l . Ensuite nous posons

$$\begin{aligned} s: \mathbb{R}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ e_i &\mapsto e_{\sigma(i)}. \end{aligned} \quad (8.490)$$

Nous allons un peu considérer $q \circ s$, pour changer :

$$(q \circ s)(x) = \sum_{i,j} m_{ij} s(x)_i s(x)_j = \sum_{ij} x_{\sigma(i)} x_{\sigma(j)}. \quad (8.491)$$

parce que $s(x)_i = x_{\sigma(i)}$.

Utilisons un petit abus de notation pour considérer

$$\begin{aligned} \sigma: \{1, \dots, n+1\} \times \{1, \dots, n+1\} &\rightarrow \{1, \dots, n+1\} \times \{1, \dots, n+1\} \\ (i, j) &\mapsto (\sigma(i), \sigma(j)). \end{aligned} \quad (8.492)$$

Cela est une bijection ; nous pouvons utiliser le lemme 1.296 pour permuter les termes dans (8.491) :

$$(q \circ s)(x) = \sum_{ij} m_{\sigma(i)\sigma(j)} x_{\sigma\sigma(i)} x_{\sigma\sigma(j)} \quad (8.493a)$$

$$= \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j \quad (8.493b)$$

où nous avons posé $a_{ij} = m_{\sigma(i)\sigma(j)}$ et utilisé le fait que $\sigma = \sigma^{-1}$. Le point intéressant de l'histoire est que dans (8.493b), $a_{12} = m_{kl} \neq 0$. La forme $q \circ s$ est donc dans le cas déjà traité et il existe des formes linéaires l'_i telles que

$$(q \circ s)(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i l'_i(x)^2. \quad (8.494)$$

En évaluant cela en $s(x)$, et en tenant compte de $s = s^{-1}$, nous trouvons

$$q(x) = \sum_i \alpha_i (l_i \circ s)(x)^2, \quad (8.495)$$

de telle sorte que $l_i = l'_i \circ s$ soit la réponse à notre théorème.

□

8.12.9 Orthogonalité pour une forme bilinéaire

Proposition 8.241 ([340]).

Soient un espace vectoriel $(E, \mathbb{K})$ et une forme quadratique⁹¹ q . Une base de E est q -orthogonale⁹² si et seulement si la matrice de q dans cette base est diagonale.

Démonstration. La matrice de q est donnée par $Q_{ij} = b(e_i, e_j)$. Donc oui, cette matrice est diagonale si et seulement si les e_i sont orthogonaux. □

Proposition 8.242 ([1]).

Si b est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, et si q est la forme quadratique associée, alors il existe une base q -orthogonale.

Les vecteurs de cette base ne sont pas isotropes⁹³

Démonstration. Nous considérons une base $\{e_i\}$ de E . Vu que b est symétrique, elle est donnée par une matrice symétrique selon la formule $b(x, y) = \sum_{kl} S_{kl} x_k y_l$. Le théorème 8.226 permet de diagonaliser S par une matrice orthogonale : il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale A telles que $S = A^t D A$.

91. Définition 8.122.

92. Définition 8.144.

93. Définition 8.140.

Nous posons alors $s_i = Ae_i$, et nous vérifions que c'est bon. Nous avons :

$$b(s_i, s_j) = \sum_{kl} S_{kl}(s_i)_k (s_j)_l \quad (8.496a)$$

$$= \sum_{kl} S_{kl}(Ae_i)_k (Ae_j)_l \quad (8.496b)$$

$$= \sum_{kl} S_{kl} A_{ki} A_{lj} \quad (8.496c)$$

$$= \sum_{kl} (A^t)_{ik} S_{kl} A_{lj} \quad (8.496d)$$

$$= D_{ij}. \quad (8.496e)$$

Vu que b n'est pas dégénérée, les éléments diagonaux de D ne sont pas nuls. Donc les vecteurs s_i vérifient $b(s_i, s_i) \neq 0$. $\square$

PROPOZYISooQZNgeo

Proposition 8.243.

Soit une forme quadratique q . Si une base (e_i) de E est q -orthogonale, alors $\mathcal{B} = \{e_i \text{ tel que } q(e_i) = 0\}$ est une base de $\ker(q)$.

Démonstration. Nous considérons un vecteur de base e_j , et nous montrons que $q(e_j) = 0$ si et seulement si $e_j \in \ker(q)$. Nous savons par la proposition 8.241 que la matrice de q dans la base (e_i) est diagonale et que les éléments diagonaux sont les $q(e_i)$. Soit $K = \{i \text{ tel que } q(e_i) = 0\}$.

(1) $\text{Span}\{e_i\}_{i \in K} \subset \ker(q)$ Si $x = \sum_{i \in K} x_i e_i$, alors

$$q(x) = b(x, x) = \sum_{i,j \in K} |x_i|^2 b(e_i, e_j) = \sum_{i,j \in K} |x_i|^2 \delta_{ij} q(e_i) = 0 \quad (8.497)$$

parce que $q(e_i) = 0$ dès que $i \in K$.

(2) $\ker(q) \subset \text{Span}\{e_i\}_{i \in K}$ Soit $x \in \ker(q)$ et écrivons-le sous la forme $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Nous avons

$$0 = q(x) = \sum_i |x_i|^2 q(e_i). \quad (8.498)$$

Mais $|x_i|^2 \geq 0$ et $q(e_i) \geq 0$, donc si $q(e_i) \neq 0$, alors $x_i = 0$. Donc les seules composantes non nulles de x sont celles sur lesquelles q s'annule. En d'autres termes $x = \sum_i x_i e_i \in \text{Span}\{e_i\}_{i \in K}$. $\square$

THOOoIDMPoolMwkqB

Théorème 8.244 ([340, 1]).

Toute forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension finie admet une base formée de vecteurs 2 à 2 orthogonaux (pour la forme considérée).

Démonstration. Nous considérons la base $\{l_i\}$ de E^* donnée par la réduction de Gauss (théorème 8.240). La forme quadratique q s'écrit

$$q(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i l_i(x)^2. \quad (8.499)$$

La base préduale⁹⁴ $\{e_i\}$ de $\{l_i\}$ répond aux conditions. Pour le vérifier, nous considérons la forme bilinéaire associée à q par l'identité de polarisation 8.138 :

$$b(e_i, e_j) = \frac{1}{2} (q(e_i) + q(e_j) - q(e_i - e_j)). \quad (8.500)$$

Vu que $l_k(e_i) = \delta_{ki}$, nous avons

$$q(e_i) = \sum_{k=1}^n \alpha_k l_k(e_i)^2 = \alpha_i. \quad (8.501)$$

94. Définition, existence, unicité dans la proposition 4.140.

En utilisant la linéarité,

$$q(e_i - e_j) = \sum_k \alpha_k l_k (e_i - e_j)^2 \quad (8.502a)$$

$$= \sum_k \alpha_k (\delta_{ki} - \delta_{kj})^2 \quad (8.502b)$$

$$= \sum_k \alpha_k (\delta_{ki} + \delta_{kj} - 2\delta_{ki}\delta_{kj}) \quad (8.502c)$$

$$= \alpha_i + \alpha_j - 2\delta_{ij}\alpha_i. \quad (8.502d)$$

Donc

$$b(e_i, e_j) = \delta_{ij}\alpha_i. \quad (8.503)$$

Les vecteurs $\{e_i\}$ sont donc bien deux à deux q -orthogonaux. $\square$

Notons qu'en l'absence de notion de racine carrée sur $\mathbb{K}$, il n'est pas possible de considérer $\sqrt{\alpha_i}$ et donc de base q -orthonormée.

PROPOoPMYCooAAAtHsB

Proposition 8.245 ([1]).

Si $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ est telle que $\det(A) = 0$, alors il existe des matrices de manipulation de lignes et de colonnes⁹⁵ $G_1, \dots, G_p$ et $H_1, \dots, H_q$ telles que $G_1 \dots G_p A H_1 \dots H_q$ ait une colonne de zéros.

Démonstration. Si la matrice A n'a pas de colonnes de zéros, il existe un i tel que $A_{i1} \neq 0$. Nous utilisons une matrice de permutation de ligne 1 et i :

$$(S(n, i, 1)A)_{11} \neq 0. \quad (8.504)$$

Nous notons s ce nombre. Alors en multipliant la première ligne par $1/s$ nous avons un 1 dans la première case :

$$(T(n, 1, 1/s)S(n, i, 1)A)_{11} = 1. \quad (8.505)$$

Pour la suite nous n'allons plus être aussi explicite.

Maintenant, en faisant des combinaisons entre la première colonne et les autres, nous pouvons annuler toutes les autre entrées 1_{1i} . Tout ça pour dire qu'il existe des matrices $G_1, \dots, G_{p'}$ et $H_1, \dots, H_{q'}$ telles que

$$G_1 \dots G_{p'} A H_1 \dots H_{q'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A^{(1)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}. \quad (8.506)$$

Si $A^{(1)}$ ne possède pas de colonnes de zéros, nous pouvons continuer.

Si nous parvenons à faire n pas de la sorte, alors nous aurions

$$G_1 \dots G_p A H_1 \dots H_q = \delta, \quad (8.507)$$

et donc, par le lemme 4.94, nous aurions $\det(G_1 \dots G_p) \det(A) \det(H_1 \dots H_q) = 1$, ce qui est impossible lorsque $\det(A) = 0$. Nous en concluons que le processus doit s'arrêter et qu'une des matrices $A^{(k)}$ doit avoir une colonne de zéros⁹⁶. $\square$

PROPOoVUDJooLWjmSI

Proposition 8.246.

Une matrice dont le déterminant est nul n'est pas inversible.

⁹⁵. Les opérations élémentaires sur les lignes sont résumées en 4.92.

⁹⁶. En réalité, le processus tel que nous l'avons décrit ne s'arrête que lorsque la première colonne est remplie de zéros.

Démonstration. Par la proposition 8.245, il existe des matrices de manipulation de lignes et de colonnes $G_1, \dots, G_p$ telles que la matrice $G_1 \dots G_p A H_1 \dots H_q$ ait une colonne de zéros. De là, la proposition 4.104 implique que la matrice

$$G_1 \dots G_p A H_1 \dots H_q \quad (8.508)$$

n'est pas inversible. Vu les déterminants des matrices G_i , la proposition 4.103 implique que $G_1 \dots G_p$ et $H_1 \dots H_q$ sont inversibles. Si A était inversible, tout le produit serait inversible, ce qui est faux. $\square$

Théorème 8.247.

Une matrice sur un corps commutatif est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Démonstration. Dans un sens c'est la proposition 4.103 et dans l'autre sens c'est la proposition 8.246. $\square$

Proposition 8.248.

Soient des matrices A et B sur un corps commutatif. Alors

$$\det(AB) = \det(A) \det(B). \quad (8.509)$$

Démonstration. Les propositions 4.107 et 4.108 ont déjà fait une grosse partie du travail. Il ne reste que le cas où $\det(A) = \det(B) = 0$.

Dans ce cas, les matrices A et B ne sont pas inversibles (proposition 8.247). Le produit AB n'est alors pas inversible non plus⁹⁷. La proposition 8.247, utilisée dans le sens inverse, nous dit alors que $\det(AB) = 0$.

Au final dans le cas $\det(A) = \det(B) = 0$ nous avons $0 = \det(AB) = \det(A) \det(B) = 0$. $\square$

Faisons maintenant le cas général des manipulations de lignes et colonnes.

Proposition 8.249.

Soit une matrice carrée $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$. La matrice B obtenue par la substitution simultanée

$$C_j \rightarrow \sum_k a_{kj} C_k \quad (8.510)$$

a pour déterminant

$$\det(B) = \det(a) \det(A). \quad (8.511)$$

Démonstration. L'élément B_{ij} de la matrice B est une combinaison linéaire de tous les éléments de sa ligne :

$$B_{ij} = \sum_k a_{kj} A_{ik} = (Aa)_{ij}. \quad (8.512)$$

Donc $B = Aa$. La proposition 8.248 nous dit alors que $\det(B) = \det(a) \det(A)$. $\square$

Théorème 8.250 (de Sylvester^[333]).

Soit Q une forme quadratique réelle de signature⁹⁸ (p, q) sur $\mathbb{R}^n$ ($n \geq p + q$). Alors pour toute base Q -orthogonale $\{e_i\}$ de $\mathbb{R}^{p+q}$ nous avons les propriétés suivantes.

(1) Les nombres p et q sont donnée par

$$\begin{aligned} p &= \text{Card}\{i \text{ tel que } Q(e_i) > 0\} \\ q &= \text{Card}\{i \text{ tel que } Q(e_i) < 0\}. \end{aligned} \quad (8.513a) \quad (8.513b)$$

97. Citez le lemme 4.100 si vous voulez justifier ça.

98. Définition 8.160.

(2) Si A est la matrice de Q dans une base, alors il existe une matrice inversible P telle que

$$P^t A P = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_q & & \\ & \mathbb{1}_p & \\ & & 0_{n-p-q} \end{pmatrix}. \quad (8.514)$$

(3) Le rang de Q est $p + q$.

Démonstration. Soit F un sous-espace de dimension maximale q sur lequel Q est définie négative. Le fait que la dimension de F soit q est la définition 8.160 de la signature. Nous notons $F^\perp$ sont Q -orthogonal, c'est-à-dire que

$$F^\perp = \{v \in E \text{ tel que } B(v, x) = 0 \forall x \in F\}. \quad (8.515)$$

Le lemme 8.136 nous assure que $E = F \oplus F^\perp$.

Le théorème 8.244 sur l'existence de bases Q -orthogonales nous permet de considérer une base Q -orthogonale de F et une de $F^\perp$. En réunissant les deux, nous avons une base de E . Nous la notons $\{f_1, \dots, f_n\}$ avec

- La partie $\{f_1, \dots, f_q\}$ est une base de F ,
- La partie $\{f_{q+1}, \dots, f_n\}$ est une base de $F^\perp$,
- Remarquez cependant qu'il n'est pas dit que $n = q + p$.

Notons que pour $i > q$, nous avons $Q(f_i) \geq 0$, sinon la maximalité de F serait contredite par $\text{Span}\{f_1, \dots, f_q, f_i\}$.

Cela prouve que

$$\text{Card}\{i \text{ tel que } Q(f_i) > 0\} = p. \quad (8.516)$$

Le lemme 8.163 nous dit alors que

$$\text{Card}\{i \text{ tel que } Q(e_i) > 0\} = \text{Card}\{i \text{ tel que } Q(f_i) > 0\} = p. \quad (8.517)$$

C'est l'égalité (8.513b). L'égalité (8.513a) se prouve de la même façon, en prenant F maximal pour la propriété que Q y est strictement définie positive.

Le point (1) est prouvé.

Dans une base Q -orthogonale, la matrice de Q est diagonale, et contient sur la diagonale les valeurs de $Q(e_i)$. Parmi celles-ci, on en a p strictement positives et q strictement négatives. Les $n - p - q$ autres sont nulles. Vu que Q est à valeur réelle, nous avons une notion de racine carré, et nous pouvons considérer $e_i/\sqrt{|Q(e_i)|}$ au lieu de e_i . De cette façon, $Q(e_i)$ est normalisé. Avec ça, la matrice de Q est

$$D = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & & \\ & -\mathbb{1}_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.518)$$

Nous venons de prouver qu'il existe une base $\{e_i\}$ dans laquelle la matrice de Q est (8.518). Si A est la matrice de Q dans une base quelconque $\{f_i\}$ et si P est la matrice de changement de base $f_j = \sum_i P_{ij} e_i$, la proposition 8.148 donne $D = P^t A P$.

Le point (2) est prouvé.

Pour (3), la proposition 8.162 nous permet de calculer le rang de Q par le rang de sa matrice dans n'importe quelle base. Nous choisissons la base qui donne la matrice (8.518). Le rang est alors bien $p + q$. $\square$

8.12.10 Équivalence de formes quadratiques

DEFooOLWYooMwhMJp

Définition 8.251 (Équivalence de forme quadratique[326]).

Deux formes quadratiques q et q' sont **équivalentes** si il existe une application linéaire inversible ϕ telle que $q' = q \circ \phi$.

PROPooBWXMooLsgyKm

Proposition 8.252 ([333]).

Deux formes quadratiques sont équivalentes⁹⁹ si et seulement si elles ont même signature¹⁰⁰.

Démonstration. En deux parties, et en utilisant tout le temps le théorème de Sylvester 8.250. Dans la suite nous allons toujours noter de la même façon les formes quadratiques, les applications linéaires et leurs matrices correspondantes.

- (1) $\Rightarrow$ Soient deux formes quadratiques équivalentes q et q' . Nous avons une application linéaire ϕ telle que $q' = q \circ \phi$. Soit une matrice inversible P telle que

$$P^t A P = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_{q'} & & \\ & \mathbb{1}_{p'} & \\ & & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.519)$$

EQooTCIRooFtWiTz

où (p', q') est la signature de q' . Par équivalence et par le changement de base de la proposition 8.147, nous avons $q' = \phi^t q \phi$, et donc

$$P^t q' P = (\phi P)^t q (\phi P). \quad (8.520)$$

Dans la base des $(\phi \circ P)e_i$, la matrice de q est (8.519). Donc le point 8.250(1) du théorème de Sylvester montre que la signature de q est également (p', q') .

- (2) $\Rightarrow$ Nous supposons que q et q' ont la même signature. Il existe donc des matrices inversibles P et Q telles que $P^t q' P$ et $Q^t q Q$ aient la même forme (celle de la matrice (8.519)). Autrement dit,

$$q' \circ P = q \circ Q, \quad (8.521)$$

d'où nous déduisons que $q' = q \circ Q \circ P^{-1}$ parce que P est inversible. Comme l'application $Q \circ P^{-1}$ est inversible, les formes quadratiques q et q' sont équivalentes.

□

8.12.11 Diagonalisation

DEFooGVGGooWQEIEt

Lemme-Définition 8.253.

Soit une forme quadratique¹⁰¹ q sur l'espace vectoriel V sur $\mathbb{K}$. Soit A la matrice de q dans la base $\{e_i\}$ et B sa matrice dans la base $\{f_\alpha\}$. Nous supposons que le changement de base est orthogonal.

Alors les valeurs propres de A et B sont les mêmes.

Ces valeurs sont les **valeurs propres** de q .

Démonstration. Nous nous rappelons de la définition 8.145 de la matrice associée à q , et à la proposition 8.148 qui parle de changement de base : $B = Q^t A Q$ où Q est orthogonale.

Soit un vecteur propre v de A , de valeur propre λ . Alors nous prouvons que $Q^t v$ est un vecteur propre pour B , de même valeur propre λ . En effet,

$$B Q^t v = Q^t A Q Q^t v = Q^t A v = \lambda Q^t v \quad (8.522)$$

où nous avons utilisé $Q Q^t = \mathbb{1}$ et $A v = \lambda v$.

□

99. Définition 8.251.

100. Définition 8.160.

101. Définition 8.122.

PropFWYooQXfcVY

Proposition 8.254.

Dans la base de diagonalisation de sa matrice associée, une forme quadratique a la forme

$$q(x) = \sum_i \lambda_i x_i^2 \quad (8.523)$$

où les λ_i sont les valeurs propres de la matrice associée à q .

Démonstration. Soit q une forme quadratique et b la forme bilinéaire associée. Si $\{f_i\}$ est une base de diagonalisation¹⁰² de la matrice de b alors dans cette base nous avons

$$q(x) = b(x, x) = \sum_{ij} x_i x_j b(f_i, f_j) = \sum_i \lambda_i x_i^2 \quad (8.524)$$

où les λ_i sont les valeurs propres de la matrice de b . □

Notons que si nous choisissons une autre base de diagonalisation, les λ_i ne changent pas (à part l'ordre éventuellement).

Cela justifie la définition pour dire que nous nous permettrons de parler des **valeurs propres** d'une forme quadratique comme étant les valeurs propres de la matrice associée.

Le théorème 8.244 a déjà donné une base orthogonale pour toute forme quadratique sur un espace vectoriel $(E, \mathbb{K})$ de dimension finie. Dans le cas de $\mathbb{R}^n$, nous pouvons en donner une preuve basée sur le théorème spectral, c'est la proposition 8.255.

PROPooUKRUooGRIDHt

Proposition 8.255.

Soit une forme bilinéaire symétrique b sur un $\mathbb{R}^n$. Il existe une matrice orthogonale Q telle que

- (1) $D = Q^t b Q$ est diagonale
- (2) $D(x, y) = b(Qx, Qy)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Il existe une base $(f_i)_{i=1, \dots, n}$ qui est b -orthogonale.

Dans cet énoncé, nous mélangeons sans vergogne les formes et les matrices, en supposant qu'une base soit fixée¹⁰³. Par exemple

$$D(x, y) = \sum_{ij} D_{ij} x_i y_j. \quad (8.525)$$

Démonstration. Pour la matrice diagonale, c'est le théorème spectral 8.226(2) qui joue parce que la matrice d'une forme bilinéaire symétrique est symétrique (c'est vu de la définition (8.310)).

Pour le reste c'est un calcul :

$$D(x, y) = \sum_{ijkl} Q_{ik}^t b_{kl} Q_{lj} x_i y_j \quad (8.526a)$$

$$= \sum_{ijkl} b_{kl} (Q_{ki} x_i) (Q_{lj} y_j) \quad (8.526b)$$

$$= \sum_{kl} b_{kl} (Qx)_k (Qy)_l \quad (8.526c)$$

$$= b(Qx, Qy). \quad (8.526d)$$

Nous avons utilisé le produit matrice fois vecteur donné par (4.87).

En ce qui concerne l'existence d'une base b -orthogonale, vu que D est diagonale, nous avons, pour $i \neq j$ que $D(e_i, e_j) = 0$. Donc en posant $f_i = Qe_i$, nous trouvons

$$0 = D(e_i, e_j) = b(Qe_i, Qe_j) = b(f_i, f_j). \quad (8.527)$$

La base $(Qe_i)_{i=1, \dots, n}$ est donc b -orthogonale. □

102. Qui existe parce que la matrice est symétrique, théorème 8.226.

103. Autrement dit, si vous avez en tête d'utiliser cette proposition pour $\mathbb{R}^n$ c'est bon ; mais sinon vous devez choisir une base et considérer toutes les matrices dans cette base.

8.13 Fonctions

Sect_fonctions

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, et une fonction f de E dans F . Il est maintenant facile de définir les notions de limites et de continuité pour de telles fonctions en copiant les définitions données pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et en changeant simplement les valeurs absolues par les normes sur E et F .

La proposition suivante explicite la définition 7.135 dans le cas où la topologie est donnée par des boules.

PropHOCWooSsrMjl

Proposition 8.256 (Caractérisation de la limite).

Soient des espaces vectoriels normés. Soit $f: E \rightarrow F$ une fonction de domaine $\text{Dom}(f) \subset E$ et soit a un point d'accumulation de $\text{Dom}(f)$.

- (1) Si F est séparé¹⁰⁴ et si f admet une limite en a , alors cette limite est unique.
- (2) La fonction f admet une limite en $a \in E$ si et seulement si il existe un élément $\ell \in F$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D = \text{Dom}(f)$,

ITEMooSHKNooStKGKH

$$0 < \|x - a\|_E < \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon. \quad (8.528)$$

EqDefLimzmasubV

Si la limite existe et est unique, nous écrivons $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et nous disons que ℓ est la **limite** de f lorsque x tend vers a .

Démonstration. L'unicité est la proposition 7.138.

- (1) $\Rightarrow$ La définition 7.135 nous assure de l'existence d'un élément ℓ tel que pour tout voisinage S de ℓ , il existe un ouvert U autour de a tel que $f(U \cap D \setminus \{a\}) \subset S$.

Soit $\epsilon > 0$. Nous posons $S = B(\ell, \epsilon)$. Il existe un voisinage U de a tel que $f(U \cap D \setminus \{a\}) \subset B(\ell, \epsilon)$. Puisque U est un voisinage de a , il contient une boule centrée en a (c'est dans la définition 7.142 de la topologie métrique). Soit donc $\delta > 0$ tel que $B(a, \delta) \subset U$.

Un élément de D qui est dans $B(0, \delta) \setminus \{a\}$ est un élément de D qui vérifie $0 < \|x - a\| < \delta$. Nous avons donc, pour $x \in D$ que

$$0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \epsilon. \quad (8.529)$$

- (2) $\Leftarrow$ C'est le même raisonnement.

□

Remarque 8.257.

Le fait que nous limitons la formule (8.528) aux x dans le domaine de f n'est pas anodin. Considérons la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, de domaine $|x| \geq 2$. Nous avons

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 - 4} = 0. \quad (8.530)$$

Nous ne pouvons pas dire que cette limite n'existe pas en justifiant que la limite à gauche n'existe pas. Les points $x < 2$ sont hors du domaine de f et ne comptent donc pas dans l'appréciation de l'existence de la limite.

Vous verrez plus tard que ceci provient de la **topologie induite** de $\mathbb{R}$ sur l'ensemble $[2, \infty[$.

8.14 Sous espaces caractéristiques

Lorsqu'un opérateur n'est pas diagonalisable, les valeurs propres jouent quand même un rôle important.

104. C'est le cas en dimension finie et en particulier pour $\mathbb{R}^n$. En dimension infinie, il faut être très prudent.

DefFBNlooCGbIix

Définition 8.258.

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \text{End}(E)$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ nous définissons

$$F_\lambda(f) = \{v \in E \text{ tel que } (f - \lambda \mathbb{1})^n v = 0, n \in \mathbb{N}\} \quad (8.531)$$

et nous appelons cet ensemble un **sous-espace caractéristique** de f .

L'espace $F_\lambda(f)$ est l'ensemble de nilpotence de l'opérateur $f - \lambda \mathbb{1}$ et

LemBLPooHMAoyJ

Lemme 8.259.

L'ensemble $F_\lambda(f)$ est non vide si et seulement si λ est une valeur propre de f . L'espace $F_\lambda(f)$ est invariant sous f .

Démonstration. Si $F_\lambda(f)$ est non vide, nous considérons $v \in F_\lambda(f)$ et n le plus petit entier non nul tel que $(f - \lambda)^n v = 0$. Alors $(f - \lambda)^{n-1} v$ est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ . Réciproquement, si v est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ , alors $v \in F_\lambda(f)$.

En ce qui concerne l'invariance, remarquons que f commute avec $f - \lambda \mathbb{1}$. Si $x \in F_\lambda(f)$ il existe n tel que $(f - \lambda \mathbb{1})^n x = 0$. Nous avons aussi

$$(f - \lambda \mathbb{1})^n f(x) = f((f - \lambda \mathbb{1})^n x) = 0, \quad (8.532)$$

par conséquent $f(x) \in F_\lambda(f)$. □

Contrairement à ce que l'on pourrait croire, il n'est pas vrai que toute matrice à coefficient réel est diagonalisable, même pas sur $\mathbb{C}$. La raison est qu'une telle matrice peut très bien avoir des valeurs propres multiples.

ExBRXUooIIUnSx

Exemple 8.260.

Le théorème 8.218 nous donne une façon simple de trouver des matrices non diagonalisables sur $\mathbb{C}$: il suffit que le polynôme minimal ne soit pas scindé à racines simples. Par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (8.533)$$

dont le polynôme caractéristique est $\chi_A = (1 - X)^2$. Ce polynôme n'a manifestement pas des racines simples. Nous pouvons faire le calcul explicite pour montrer que A n'est pas diagonalisable. D'abord l'unique valeur propre de A est 1 et nous pouvons sans peine résoudre

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (8.534)$$

qui revient au système

$$\begin{cases} x + y = x \\ y = y. \end{cases} \quad (8.535a)$$

$$(8.535b)$$

La première équation donne directement $y = 0$. Le seul espace propre est de dimension 1 et est engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. △

Nous donnons maintenant un exemple un peu plus avancé de matrice réelle non diagonalisable, qui montre la multiplicité algébrique et géométrique d'une racine d'un polynôme caractéristique.

RemBOGooCLMwyb

Remarque 8.261.

Considérons l'endomorphisme $f \in \text{End}(\mathbb{C}^3)$ donné par la matrice

$$\begin{pmatrix} a & \alpha & \beta \\ 0 & a & \gamma \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \quad (8.536)$$

avec $a \neq b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $\alpha \neq 0$, β et γ sont des nombres complexes quelconques. Son polynôme caractéristique est

$$\chi_f(X) = (a - X)^2(b - X), \quad (8.537)$$

et les valeurs propres sont donc a et b . Nous trouvons les vecteurs propres pour la valeur a en résolvant

$$\begin{pmatrix} a & \alpha & \beta \\ 0 & a & \gamma \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix}. \quad (8.538)$$

La troisième équation est $bz = az$ qui oblige $z = 0$ parce que $a \neq b$ et $0 \neq a$. La première est $ax + \alpha y = ax$ qui implique $y = 0$ parce que $\alpha \neq 0$. Enfin la première équation se réduit à $ax = ax$ qui ne donne pas de contraintes sur x . En résumé : l'espace propre $E_a(f)$ est réduit à une seule dimension générée par $(1, 0, 0)$.

De la même façon l'espace propre correspondant à la valeur propre b est donné par le système

$$\begin{pmatrix} a & \alpha & \beta \\ & a & \gamma \\ & & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bw \\ by \\ bz \end{pmatrix} \quad (8.539)$$

La seconde équation donne $ay + \gamma z = by$, et donc

$$y = \frac{\gamma}{b-a}z. \quad (8.540)$$

La première équation est $ax + \alpha y + \beta z = bx$ qui donne

$$x = \frac{1}{b-a}(\alpha y + \beta z). \quad (8.541)$$

En y remettant la valeur déjà trouvée de y , nous trouvons que l'espace propre pour la valeur propre b est engendré par le vecteur

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{b-a} \left(\beta + \frac{\alpha\gamma}{b-a} \right) \\ \frac{\gamma}{b-a} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8.542)$$

Vu que nous savons que a et b sont les seules valeurs propres et que nous venons de voir que leurs espaces propres sont de dimension 1, il n'y a donc pas trois vecteurs propres linéairement indépendants, et l'opérateur f n'est pas diagonalisable.

Par contre nous pouvons voir que $(f - a\mathbb{1})^2 e_2 = 0$. En effet :

$$(f - a\mathbb{1})^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & b-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8.543)$$

de telle sorte que le vecteur $(0, 1, 0)$ est également dans l'espace caractéristique $F_a(f)$.

Dans cet exemple, la multiplicité algébrique de la racine a du polynôme caractéristique vaut 2 tandis que sa multiplicité géométrique vaut seulement 1.

8.14.1 Théorèmes de décomposition

Théorème 8.262 (Théorème spectral, décomposition primaire).

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur le corps algébriquement clos $\mathbb{K}$ et $f \in \text{End}(E)$.

Alors

$$E = F_{\lambda_1}(f) \oplus \dots \oplus F_{\lambda_k}(f) \quad (8.544)$$

où la somme est sur les espaces caractéristiques engendrés par les valeurs propres distinctes de f .

Les projecteurs sur les espaces caractéristiques forment un système complet et orthogonal.

Démonstration. Soit P le polynôme caractéristique de f et une décomposition

$$P = (f - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (f - \lambda_r)^{\alpha_r} \quad (8.545)$$

en facteurs irréductibles. Par le théorème des noyaux (8.91) nous avons

$$E = \ker(f - \lambda_1)^{\alpha_1} \oplus \dots \oplus \ker(f - \lambda_r)^{\alpha_r}. \quad (8.546)$$

Les projecteurs sont des polynômes en f et forment un système orthogonal. Il nous reste à prouver que $\ker(f - \lambda_i)^{\alpha_i} = F_{\lambda_i}(f)$. L'inclusion

$$\ker(f - \lambda_i)^{\alpha_i} \subset F_{\lambda_i}(f) \quad (8.547)$$

est évidente. Nous devons montrer l'inclusion inverse.

$$(1) \quad F_{\lambda_i}(f) \cap F_{\lambda_j}(f) = 0$$

Soit $v \in F_{\lambda_i}(f) \cap F_{\lambda_j}(f)$. Le fait que $v \in F_{\lambda_i}(f)$ implique qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(f - \lambda_i)^n v \neq 0$ et $(f - \lambda_i)^{n+1} v = 0$ (éventuellement $n = 0$ si v est un vecteur propre). Posons $v_1 = (f - \lambda_i)^n v$. Étant donné que $(f - \lambda_i)$ commute avec $(f - \lambda_j)$, ce v_1 est encore dans $F_{\lambda_j}(f)$. En effet, si k est tel que $(f - \lambda_j)^k v = 0$, alors

$$(f - \lambda_j)^k v_1 = (f - \lambda_j)^k (f - \lambda_i)^n v = (f - \lambda_i)^n (f - \lambda_j)^k v = 0. \quad (8.548)$$

Il existe donc $m \in \mathbb{N}$ tel que $(f - \lambda_j)^m v_1 \neq 0$ et $(f - \lambda_j)^{m+1} v_1 = 0$. En posant $w = (f - \lambda_j)^m v_1$, nous avons

$$\begin{cases} (f - \lambda_i)w = (f - \lambda_j)^m (f - \lambda_i)^{n+1} v = 0 \\ (f - \lambda_j)w = (f - \lambda_j)^{m+1} v_1 = 0. \end{cases} \quad (8.549a)$$

$$(8.549b)$$

Ce w serait donc un vecteur propre simultané pour les valeurs propres λ_i et λ_j . Vu que les espaces propres sont linéairement indépendants, les seules possibilités sont $i = j$ ou $w = 0$.

- (2) **Questions de dimension** Étant donné que espaces F_{λ_i} sont en somme directe, la somme de leurs dimensions est au maximum la dimension de E :

$$\sum_i \dim F_{\lambda_i}(f) \leq \dim E. \quad (8.550)$$

En tenant compte de l'inclusion (8.547) nous avons même

$$\dim E = \sum_i \dim \ker(f - \lambda_i)^{\alpha_i} \leq \sum_i \dim F_{\lambda_i}(f) \leq \dim E. \quad (8.551)$$

Vu qu'il y a $\dim(E)$ des deux côtés des inégalités, toutes les inégalités sont des égalités et nous avons

$$\sum_i \dim \ker(f - \lambda_i)^{\alpha_i} = \sum_i \dim F_{\lambda_i}(f). \quad (8.552)$$

L'inclusion (8.547) nous dit qu'il y a une inégalité terme à terme dans les sommes de (8.552). Vu qu'il y a égalité des sommes, il y a en réalité égalité de chacun des termes : $\dim \ker(f - \lambda_i)^{\alpha_i} = \dim F_{\lambda_i}(f)$ et l'égalité des deux espaces de (8.547) :

$$\ker(f - \lambda_i)^{\alpha_i} = F_{\lambda_i}(f). \quad (8.553)$$

□

Si l'espace vectoriel est sur un corps algébriquement clos, alors les endomorphismes semi-simples¹⁰⁵ sont les endomorphismes diagonaux.

105. Définition 8.105.

ThoRURcpW

Théorème 8.263 (Décomposition de Dunford).

Soit E un espace vectoriel sur le corps algébriquement clos¹⁰⁶ $\mathbb{K}$ et $u \in \text{End}(E)$ un endomorphisme de E .

(1) L'endomorphisme u se décompose de façon unique sous la forme

$$u = s + n \quad (8.554)$$

où s est diagonalisable, n est nilpotent et $[s, n] = 0$ ¹⁰⁷.

(2) Les endomorphismes s et n sont des polynômes en u et commutent avec u .

ItemThoRURcpWiii

(3) Si notons $\{\lambda_i\}$ les valeurs propres distinctes de u , et $F_{\lambda_i}(u)$ les espaces caractéristiques correspondants, alors les parties s et n sont données par

$$s = \sum_i \lambda_i p_i \quad (8.555a)$$

$$n = \sum_i (s - \lambda_i \mathbb{1}) p_i \quad (8.555b)$$

$p_i: E \rightarrow F_{\lambda_i}(u)$ est la projection de E sur $F_{\lambda_i}(u)$.

Démonstration. Le théorème spectral 8.262 nous indique que

$$E = \bigoplus_i F_{\lambda_i}(f). \quad (8.556)$$

Nous considérons l'endomorphisme s de E qui consiste à dilater d'un facteur λ_i l'espace caractéristique $F_{\lambda_i}(f)$:

$$s = \sum_i \lambda_i p_i \quad (8.557)$$

où $p_i: E \rightarrow F_{\lambda_i}(u)$ est la projection de E sur $F_{\lambda_i}(u)$.

Nous allons prouver que $[s, f] = 0$ et $n = f - s$ est nilpotent. Cela impliquera que $[s, n] = 0$.

Si $x \in F_{\lambda}(f)$, alors nous avons $sf(x) = \lambda f(x)$ parce que $f(x) \in F_{\lambda}(f)$ tandis que $fs(x) = f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Par conséquent f commute avec s .

Pour montrer que $f - s$ est nilpotent, nous en considérons la restriction

$$f - s: F_{\lambda}(f) \rightarrow F_{\lambda}(f). \quad (8.558)$$

Cet opérateur est égal à $f - \lambda \mathbb{1}$ et est par conséquent nilpotent.

Prouvons à présent l'unicité. Soit $u = s' + n'$ une autre décomposition qui satisfait aux conditions : s' est diagonalisable, n' est nilpotent et $[n', s'] = 0$. Commençons par prouver que s' et n' commutent avec u . En multipliant $u = s' + n'$ par s' nous avons

$$s'u = s'^2 + s'n' = s'^2 + n's' = (s' + n')s' = us', \quad (8.559)$$

par conséquent $[u, s'] = 0$. Nous faisons la même chose avec n' pour trouver $[u, n'] = 0$. Notons que pour obtenir ce résultat nous avons utilisé le fait que n' et s' commutent, mais pas leur propriétés de nilpotence et de diagonalisabilité.

Si $s' + n' = s + n$ est une autre décomposition, s' et n' commutent avec u , et par conséquent avec tous les polynômes en u . Ils commutent en particulier avec n et s . Les endomorphismes s et s' sont alors deux endomorphismes diagonalisables qui commutent. Par la proposition 8.221, ils sont simultanément diagonalisables. Dans la base de diagonalisation simultanée, la matrice de

106. Je crois qu'on peut remplacer l'hypothèse de corps algébriquement clos par une hypothèse de polynôme caractéristique scindé. Écrivez-moi si vous avez une idée à ce propos.

107. Lorsque a et b sont des opérateurs, la notation $[a, b]$ signifie le commutateur entre a et b , c'est-à-dire $a \circ b - b \circ a$. Dire que $[a, b] = 0$ signifie que $ab = ba$.

l'opérateur $s' - s = n - n'$ est donc diagonale. Mais $n - n'$ est également nilpotent, en effet si A et B sont deux opérateurs nilpotents,

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}. \quad (8.560)$$

Si n est assez grand, au moins un parmi A^k ou B^{n-k} est nul.

Nous savons que $n - n'$ est diagonal et nilpotent. Le seul opérateur diagonal à être nilpotent est l'opérateur nul¹⁰⁸. Nous en déduisons que $n = n'$. Nous avons alors immédiatement aussi $s = s'$. $\square$

8.264.

Le théorème 12.438 montrera que $A^n x \rightarrow 0$ pour tout x si et seulement si $\rho(A) < 1$, mais ça demande un résultat de vitesse comparée entre l'exponentielle et la puissance.

Une application de la décomposition de Jordan est l'existence d'un logarithme pour les matrices. La proposition suivante va d'une certaine manière donner un logarithme pour les matrices inversibles complexes. Dans le cas des matrices réelles m telles que $\|m - \mathbb{1}\| < 1$, nous donnerons au lemme 15.166 une formule pour le logarithme sous forme d'une série; ce logarithme sera réel.

8.14.2 Valeurs singulières

DEFooZSCYooQnBzix

Définition 8.265.

Soit M une matrice $m \times n$ sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Un nombre réel σ est une **valeur singulière** de M si il existe des vecteurs unitaires $u \in \mathbb{K}^m$, $v \in \mathbb{K}^n$ tels que

$$Mv = \sigma u \quad (8.561a)$$

$$M^*u = \sigma v. \quad (8.561b)$$

THOooSCOLooSKIvvd

Théorème 8.266 (Décomposition en valeurs singulières).

Soit $M \in \mathbb{M}(m \times n, \mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Alors M se décompose en

$$M = ADB \quad (8.562)$$

où il existe deux matrices unitaires $A \in \mathbb{U}(m \times m)$, $B \in \mathbb{U}(n \times n)$ et une matrice (pseudo)diagonale $D \in \mathbb{M}(m \times n)$ tels que

- (1) $A \in \mathbb{U}(m \times m)$, $B \in \mathbb{U}(n \times n)$ sont deux matrices unitaires,
- (2) D est (pseudo)diagonale,
- (3) les éléments diagonaux de D sont les valeurs singulières de M ,
- (4) le nombre d'éléments non nuls sur la diagonale de D est le rang¹⁰⁹ de M .

Corolaire 8.267.

Soit $M \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$. Il existe un isomorphisme $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ tel que fM soit autoadjoint.

Démonstration. Si $M = ADB$ est la décomposition de M en valeurs singulières, alors nous pouvons prendre $f = \overline{B}^t A^{-1}$ qui est une matrice inversible. Pour la vérification que ce f répond bien à la question, ne pas oublier que D est réelle, même si M ne l'est pas. $\square$

8.15 Extension du corps de base

SECooAUOWooNdYTzf

Nous avons discuté dans la section 6.4 de ce qui arrive au corps lorsqu'on l'étend. Dans cette section nous allons étudier ce qui arrive aux applications linéaires entre deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels lorsque nous étendons le corps $\mathbb{K}$ en un corps $\mathbb{L}$.

Soient $\mathbb{K}$ un corps (commutatif) et une extension $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$. Soient E et F , des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, et entrons dans le vif du sujet¹¹⁰.

108. Parce qu'une puissance d'un opérateur diagonal est diagonal.

109. Définition 4.48.

110. Le sujet étant le corps étendu.

8.15.1 Extension des applications linéaires

Définition 8.268 ([341]).

L'espace vectoriel obtenu par **extension du corps de base** de E est l'espace vectoriel

$$E_{\mathbb{L}} = \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{K}} E. \quad (8.563)$$

Ce dernier est le quotient $\mathbb{L} \otimes_{\mathbb{K}} E = (\mathbb{L} \times E) / \sim$ par la relation d'équivalence

$$(\lambda, v) \sim (a\lambda, \frac{1}{a}v) \quad (8.564)$$

pour tout $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Nous noterons $[\lambda, v]$ ou $\lambda \otimes v$ ou encore $\lambda \otimes_{\mathbb{K}} v$ la classe de (λ, v) pour la relation d'équivalence $\sim$:

$$[\lambda, v] = \{(\mu, w) \in \mathbb{L} \times E \text{ tel que } (\mu, w) \sim (\lambda, v)\}. \quad (8.565)$$

Un élément de $E_{\mathbb{L}}$ est de la forme $\sum_k [\lambda_k, v_k]$ avec $\lambda_k \in \mathbb{L}$ et $v_k \in E$. Si $f: E \rightarrow F$ est une applications linéaire, nous définissons

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{L}}: E_{\mathbb{L}} &\rightarrow F_{\mathbb{L}} \\ [\lambda, v] &\mapsto [\lambda, f(v)]. \end{aligned} \quad (8.566)$$

Remarque 8.269.

Si deux vecteurs de $E_{\mathbb{L}}$ sont linéairement indépendants pour $\mathbb{K}$, ils ne le sont pas spécialement pour $\mathbb{L}$. Par exemple si $\mathbb{C}$ est vu comme $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, alors $\{1, i\}$ est une partie libre. Mais dans $\mathbb{C}$, vu comme $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, la partie $\{1, i\}$ n'est pas libre.

Lemme 8.270.

Soient trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels E , F et G ainsi que deux applications linéaires $f: E \rightarrow F$ et $g: G \rightarrow E$. Si $\mathbb{L}$ est une extension de $\mathbb{K}$, alors

$$f_{\mathbb{L}} \circ g_{\mathbb{L}} = (f \circ g)_{\mathbb{L}}. \quad (8.567)$$

Démonstration. Il suffit de composer la définition (8.566) :

$$(f_{\mathbb{L}} \circ g_{\mathbb{L}})([\lambda, v]) = f_{\mathbb{L}}([\lambda, g(v)]) \quad (8.568a)$$

$$= [\lambda, (f \circ g)(v)] \quad (8.568b)$$

$$= (f \circ g)_{\mathbb{L}}([\lambda, v]). \quad (8.568c)$$

□

Nous définissons aussi l'injection canonique

$$\begin{aligned} \tau: E &\rightarrow E_{\mathbb{L}} \\ v &\mapsto [1, v]. \end{aligned} \quad (8.569)$$

Proposition 8.271 ([152]).

Injectivité et surjectivité respectées.

- (1) L'application $f_{\mathbb{L}}$ est injective si et seulement si f est injective.
- (2) L'application $f_{\mathbb{L}}$ est surjective si et seulement si f est surjective.

Démonstration. En plusieurs parties.

- (1) **Si $f_{\mathbb{L}}$ est injective** Supposons pour commencer que $f_{\mathbb{L}}$ soit injective. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\ E_{\mathbb{L}} & \xrightarrow{f_{\mathbb{L}}} & F_{\mathbb{L}} \end{array} \quad (8.570)$$

est un diagramme commutatif. En effet

$$(\tau \circ f)(v) = [1, f(v)] \quad (8.571)$$

tandis que

$$(f_{\mathbb{L}} \circ \tau)(v) = f_{\mathbb{L}}[1, v] = [1, f(v)]. \quad (8.572)$$

Donc si $f(v) = 0$ avec $v \neq 0$ nous aurions $(\tau \circ f)(v) = 0$ et donc aussi $(f_{\mathbb{L}} \circ \tau)(v) = 0$, alors que $\tau(v) \neq 0$ dans $E_{\mathbb{L}}$.

(2) **Si f est injective**

Nous supposons que f est injective et que $f_{\mathbb{L}}(\lambda \otimes v) = f_{\mathbb{L}}(\mu \otimes w)$. Cela signifie que $\lambda \otimes f(v) = \mu \otimes f(w)$, ou encore qu'il existe $a \neq 0$ dans $\mathbb{K}$ tel que

$$\begin{cases} \mu = a\lambda \\ f(w) = \frac{1}{a}f(v). \end{cases} \quad (8.573a)$$

$$(8.573b)$$

Par linéarité de f , $f(v) = f(aw)$ et par injectivité de f , nous déduisons que $v = aw$. Enfin nous avons l'injectivité de $f_{\mathbb{L}}$ parce que

$$\mu \otimes w = a\lambda \otimes \frac{v}{a} = \lambda \otimes v. \quad (8.574)$$

□

PROPooMHARooUycAts

Proposition 8.272 ([1, 342]).

Soit $\{e_i\}_{i=1,\dots,p}$ une base de E . Alors $\{1 \otimes e_i\}_i$ est une base de $E_{\mathbb{L}} = \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{K}} E$.

Démonstration. L'espace vectoriel E peut être écrit comme somme directe $E = \bigoplus_i \mathbb{K}e_i$. Si $\lambda \in \mathbb{L}$ et $k \in \mathbb{K}$ nous avons

$$\lambda \otimes ke_i = \frac{\lambda}{k} \otimes e_i = \frac{\lambda}{k} (1 \otimes e_i). \quad (8.575)$$

Cela pour introduire l'application

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{K}} E &\rightarrow \bigoplus_i \mathbb{L}(1 \otimes e_i) \\ \sum_k \lambda_k \otimes v_k &\mapsto \bigoplus_i \sum_k (\lambda_k v_{ik})(1 \otimes e_i) \end{aligned} \quad (8.576)$$

où $v_k = \sum_i v_{ik}e_i$ avec $v_{ik} \in \mathbb{K}$, qui représente un isomorphisme de $\mathbb{L}$ -espaces vectoriels. La surjectivité est facile. En ce qui concerne l'injectivité, si

$$\sum_i \sum_k (\lambda_k v_{ik})(1 \otimes e_i) = 0 \quad (8.577)$$

alors les quantités suivantes sont nulles également :

$$\sum_i \sum_k (\lambda_k v_{ik})(1 \otimes e_i) = \sum_{ik} (\lambda_k \otimes v_{ik}e_i) = \sum_k (\lambda_k \otimes \sum_i v_{ik}e_i) = \sum_k (\lambda_k \otimes v_k). \quad (8.578)$$

La dernière est l'argument de ψ . Le fait qu'il soit nul implique que ψ est injective. □

Remarque 8.273.

Nous n'avons pas dû prouver que chacun des $\lambda_k \otimes v_k$ était nul. Et encore heureux, parce que cela pouvait très bien être faux, puisqu'il y a plusieurs façons de noter un élément de $E_{\mathbb{L}}$ sous la forme de tels termes.

CORooTQGHooIKhNtr

Corolaire 8.274.

La $\mathbb{L}$ -dimension de $E_{\mathbb{L}}$ est égale à la $\mathbb{K}$ -dimension de E .

8.15.2 Projections

⚠ Avertissement/question au lecteur !! 8.275

Nous allons définir $\text{proj}: \mathcal{L}(E_{\mathbb{L}}, F_{\mathbb{L}}) \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ en faisant appel à des bases et en prouvant que les quantités définies ne dépendent pas des bases choisies. Il y a sûrement une façon plus « intrinsèque » de faire.

Nous savons que $\mathbb{L}$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel dans lequel nous pouvons voir $\mathbb{K}$ comme un sous-espace (lemme 6.60). Dans cette optique nous choisissons dans $\mathbb{L}$ un supplémentaire de $\mathbb{K}$, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de $\mathbb{L}$ tel que

$$\mathbb{L} = \mathbb{K} \oplus V. \quad (8.579)$$

Nous avons alors naturellement une projection $\text{proj}: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{K}$.

Soit $\{e_i\}$ une base de E et $\{e_a\}$ une de F . Nous noterons également e_i et e_a les éléments $\tau(e_i)$ et $\tau(e_a)$ correspondants. Grâce à la proposition 8.272, ce sont des bases de $E_{\mathbb{L}}$ et $F_{\mathbb{L}}$. Si la fonction $f: E_{\mathbb{L}} \rightarrow F_{\mathbb{L}}$ s'écrit dans ces bases comme

$$f(e_i) = \sum_a f_{ai} e_a \quad (8.580)$$

alors nous définissons $\text{proj}(f)$ par

$$(\text{proj } f)e_i = \sum_a \text{proj}(f_{ai})e_a. \quad (8.581)$$

Proposition 8.276 ([1]).

L'application proj définie en (8.581) est indépendante du choix des bases.

Démonstration. Notons que dans ce qui suit, les sommes sur a ou b et celles sur i ou j ne vont pas jusqu'au même indice (dimensions de E et F). De plus nous manipulons deux quantités qui se notent proj . La première est la projection $\text{proj}: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{K}$ qui ne dépend que d'un choix de supplémentaire et que nous supposons fixée ici. D'autre part il y a $\text{proj}: E_{\mathbb{L}} \rightarrow E$ qui dépend à priori des bases choisies.

Nous choisissons de nouvelles bases qui sont liées aux anciennes bases par

$$\begin{cases} e'_b = \sum_a B_{ab} e_a \end{cases} \quad (8.582a)$$

$$\begin{cases} e'_j = \sum_i A_{ji} e_i. \end{cases} \quad (8.582b)$$

Les matrices A et B sont dans $\text{GL}(\mathbb{K})$. Nous allons écrire l'opérateur proj' qui correspond à ces bases et montrer que pour toute application linéaire $f: E_{\mathbb{L}} \rightarrow F_{\mathbb{L}}$ nous avons $\text{proj}(f) = \text{proj}'(f)$. Nous avons :

$$f(e'_j) = \sum_i A_{ji} f(e_i) \quad (8.583a)$$

$$= \sum_a \sum_b \sum_i A_{ji} f_{ai} (B^{-1})_{ba} e'_b \quad (8.583b)$$

$$= \sum_b \left(\sum_{ai} A_{ji} f_{ai} (B^{-1})_{ba} \right) e'_b, \quad (8.583c)$$

ce qui donne

$$(\text{proj}' f)e'_j = \sum_b \left(\text{proj} (A_{ji} f_{ai} (B^{-1})_{ba}) \right) e'_b. \quad (8.584)$$

Nous calculons maintenant $(\text{proj}' f)e_j$ en substituant $e_j = \sum_l (A^{-1})_{lj} e'_l$ et en utilisant (8.584), la linéarité de proj' et la $\mathbb{K}$ -linéarité de $\text{proj}: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{K}$:

$$(\text{proj}' f) \left(\sum_l (A^{-1})_{lj} e'_l \right) = \sum_l (A^{-1})_{lj} \sum_b \sum_{ai} \text{proj} (A_{li} f_{ai} (B^{-1})_{ba}) e_b \quad (8.585a)$$

$$= \sum_a \text{proj} (f_{aj}) e_a \quad (8.585b)$$

$$= (\text{proj} f) e_j. \quad (8.585c)$$

Donc $\text{proj} = \text{proj}'$. □

Note au passage : il y a un abus systématique de notation entre $e_i \in E$ et $\tau(e_i) = 1 \otimes e_i \in E_{\mathbb{L}}$.

REMooBEXGooLgpHzg

Remarque 8.277 ([1]).

L'opération $\text{proj}: \mathcal{L}(E_{\mathbb{L}}, F_{\mathbb{L}}) \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ ne dépend pas des bases choisies un peu partout. Mais elle dépend de l'application $\text{proj}: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{K}$ déjà construite. Et celle-là dépend du choix d'un supplémentaire V qui fournit $\mathbb{L} = \mathbb{K} \oplus V$.

Si $\text{proj}(\lambda) = 0$ pour un de ces choix, cela n'implique nullement que $\lambda = 0$. Penser à $i \in \mathbb{C}$ si la projection $\text{proj}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ est l'application $(x + iy) \mapsto x$ parallèle à l'axe des imaginaires.

Par contre si $\text{proj}(\lambda) = 0$ pour tout choix de V , alors nous avons bien $\lambda = 0$. Dans la suite nous « fixons » un choix de V générique, et lorsque nous rencontrerons l'égalité $\text{proj}(\lambda) = 0$ nous en déduirons $\lambda = 0$.

PROPooPwDKooFNFWRI

Proposition 8.278.

Si $f: E \rightarrow F$ et si $f_{\mathbb{L}}(e_j) = \sum_a (f_{\mathbb{L}})_{aj} e_a$ et si $f(e_j) = \sum_a f_{aj} e_a$ alors

$$(1) \text{proj} f_{\mathbb{L}} = f,$$

$$(2) (f_{\mathbb{L}})_{aj} = f_{aj} \in \mathbb{K}.$$

ITEMooNMPYooXosGhI

Démonstration. Nous avons

$$f_{\mathbb{L}}(e_i) = \sum_a f_{ai} (1 \otimes e_a) = \sum_a f_{ai} \tau(e_a), \quad (8.586)$$

donc

$$(\text{proj} f_{\mathbb{L}}) e_i = \sum_a \text{proj} (f_{ai}) e_a = \sum_a f_{ai} e_a = f(e_i). \quad (8.587)$$

Cela prouve que $\text{proj} f_{\mathbb{L}} = f$.

Par ailleurs,

$$f_{\mathbb{L}}(\tau(e_i)) = f_{\mathbb{L}}(1 \otimes e_i) = 1 \otimes f(e_i) = \tau(f(e_i)) = \sum_a f_{ai} \tau(e_a) \quad (8.588)$$

EQooIOTFooNAdkit

alors que par définition,

$$f_{\mathbb{L}}(\tau(e_i)) = \sum_a (f_{\mathbb{L}})_{ai} \tau(e_a). \quad (8.589)$$

EQooMYSCooPFWATG

Les éléments $\tau(e_a)$ formant une base¹¹¹, la comparaison de (8.588) avec (8.589) donne $(f_{\mathbb{L}})_{ai} = f_{ai} \in \mathbb{K}$. □

LEMooWZGSooONEnjZ

Lemme 8.279.

Soient des espaces vectoriels E , F et G ainsi que des applications linéaires

$$(1) f: E \rightarrow F,$$

$$(2) \tilde{h}: G_{\mathbb{L}} \rightarrow E_{\mathbb{L}}.$$

111. Encore la proposition 8.272.

Alors nous avons

$$\mathbf{proj}(f_{\mathbb{L}} \circ \tilde{h}) = \mathbf{proj}(f_{\mathbb{L}}) \circ \mathbf{proj}(\tilde{h}). \quad (8.590)$$

De même¹¹² si $f: E \rightarrow F$ et $\tilde{h}: F_{\mathbb{L}} \rightarrow G_{\mathbb{L}}$, alors

$$\mathbf{proj}(\tilde{h} \circ f_{\mathbb{L}}) = \mathbf{proj}(\tilde{h}) \circ \mathbf{proj}(f_{\mathbb{L}}). \quad (8.591)$$

Démonstration. Nous considérons une base $\{e_i\}$ de E , une base $\{e_a\}$ de F , et une base $\{e_\alpha\}$ de G . Pour écrire $\mathbf{proj}(f_{\mathbb{L}} \circ \tilde{h})$ à partir de la définition (8.581) nous commençons par écrire

$$(f_{\mathbb{L}} \circ \tilde{h})e_\alpha = \sum_a (f_{\mathbb{L}} \circ \tilde{h})_{a\alpha} e_a = \sum_{ai} (f_{\mathbb{L}})_{ai} (\tilde{h})_{i\alpha} e_a = \sum_a \left(\sum_i f_{ai} (\tilde{h})_{i\alpha} \right) e_a \quad (8.592)$$

où nous avons utilisé le fait que $(f_{\mathbb{L}})_{ai} = f_{ai}$. Donc, en utilisant la $\mathbb{K}$ -linéarité de $\mathbf{proj}$,

$$\mathbf{proj}(f_{\mathbb{L}} \circ \tilde{h})e_\alpha = \sum_a \sum_i \mathbf{proj} \left(f_{ai} (\tilde{h})_{i\alpha} \right) e_a = \sum_a \sum_i f_{ai} \mathbf{proj} \left((\tilde{h})_{i\alpha} \right) e_a. \quad (8.593)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \mathbf{proj}(f_{\mathbb{L}}) \circ \mathbf{proj}(\tilde{h})e_\alpha &= \mathbf{proj}(f_{\mathbb{L}}) \sum_i \mathbf{proj} \left((\tilde{h})_{i\alpha} \right) e_i \\ &= \sum_i \mathbf{proj} \left((\tilde{h})_{i\alpha} \right) \sum_a f_{ai} e_a \\ &= \sum_{ai} \mathbf{proj} \left((\tilde{h})_{i\alpha} \right) f_{ai} e_a, \end{aligned} \quad (8.594)$$

et c'est égal à (8.593). □

Remarque 8.280.

Nous n'avons en général pas $\mathbf{proj}(xy) = \mathbf{proj}(x) \mathbf{proj}(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{L}$. Par exemple si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{L} = \mathbb{C}$ avec la projection canonique,

$$\mathbf{proj}(i \cdot i) = \mathbf{proj}(-1) = -1 \quad (8.595)$$

alors que $\mathbf{proj}(i) = 0$.

Proposition 8.281.

Soient trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels E, F et G . Nous considérons deux applications linéaires $f: E \rightarrow F$ et $g: E \rightarrow G$.

Il existe une application linéaire $h: F \rightarrow G$ telle que $g = h \circ f$ si et seulement si il existe une application linéaire $\tilde{h}: F_{\mathbb{L}} \rightarrow G_{\mathbb{L}}$ telle que $g_{\mathbb{L}} = \tilde{h} \circ f_{\mathbb{L}}$.

Démonstration. Dans le sens direct, il suffit de poser $\tilde{h} = h_{\mathbb{L}}$ et d'invoquer le lemme 8.270.

Dans le sens inverse, si nous avons $\tilde{h}: F_{\mathbb{L}} \rightarrow G_{\mathbb{L}}$ tel que $g_{\mathbb{L}} = \tilde{h} \circ f_{\mathbb{L}}$ alors en appliquant $\mathbf{proj}$ des deux côtés et en utilisant le lemme 8.279,

$$\mathbf{proj}(g_{\mathbb{L}}) = \mathbf{proj}(\tilde{h}) \circ \mathbf{proj}(f_{\mathbb{L}}) \quad (8.596)$$

c'est-à-dire

$$g = \mathbf{proj}(\tilde{h}) \circ f, \quad (8.597)$$

c'est-à-dire que l'application $\mathbf{proj}(\tilde{h}): F \rightarrow G$ est la réponse à la proposition. □

112. Je n'ai pas vérifié cette deuxième partie. Soyez prudent.

8.15.3 Rang, polynôme minimal, polynôme caractéristique

PROPooJFQDooZSsxMf

Proposition 8.282 (Stabilité du rang par extension des scalaires[152]).

Si $f: E \rightarrow F$ est linéaire alors nous avons

$$\text{rk}(f) = \text{rk}(f_{\mathbb{L}}). \quad (8.598)$$

où à droite nous considérons le rang de l'application $\mathbb{L}$ -linéaire $f_{\mathbb{L}}: E_{\mathbb{L}} \rightarrow F_{\mathbb{L}}$.

Démonstration. Il existe un supplémentaire V tel que $E = \ker(f) \oplus V$ avec $\dim(V) = \text{rk}(f)$. Nous pouvons factoriser f en

$$f = f_2 \circ f_1 \quad (8.599)$$

avec $f_1: E \rightarrow V$ est la projection parallèle à $\ker(f)$ et est surjective (vers V) parce que $\dim(V) = \text{rk}(f) = \dim(\text{Image}(f))$. De plus $f_2: V \rightarrow F$ est injective parce que si $v \in V$ est tel que $f_2(v) = 0$ alors on aurait

$$f(v) = (f_2 \circ f_1)(v) = f_2(v) = 0. \quad (8.600)$$

Cela donne $v \in \ker(f) \cap V = \{0\}$. Par la proposition 8.271, les applications $(f_1)_{\mathbb{L}}$ et $(f_2)_{\mathbb{L}}$ sont respectivement surjective et injective.

L'application $(f_2)_{\mathbb{L}}: V_{\mathbb{L}} \rightarrow F_{\mathbb{L}}$ est forcément surjective sur son image, donc

$$(f_2)_{\mathbb{L}}: V_{\mathbb{L}} \rightarrow \text{Image}(f_{\mathbb{L}}) \quad (8.601)$$

est un isomorphisme de $\mathbb{L}$ -espaces vectoriels. Nous avons alors les égalités

$$\dim_{\mathbb{L}}(V_{\mathbb{L}}) = \dim_{\mathbb{L}}(\text{Image}(f_{\mathbb{L}})) = \text{rk}(f_{\mathbb{L}}). \quad (8.602) \quad \text{EQooWLOooKlYWTl}$$

Mais aussi, par les définitions posées plus haut,

$$\dim(V) = \text{rk}(f) = \dim(\text{Image}(f)). \quad (8.603) \quad \text{EQooEVCGoAA GimgU}$$

Mais le corolaire 8.274 nous dit que $\dim_{\mathbb{L}}(V_{\mathbb{L}}) = \dim_{\mathbb{K}}(V)$. Donc il y a égalité des deux lignes (8.602) et (8.603), ce qui donne $\text{rk}(f) = \text{rk}(f_{\mathbb{L}})$. $\square$

PROPooZAZFooUFdCUv

Proposition 8.283.

Nous avons

$$(1) \det(f) = \det(f_{\mathbb{L}})$$

$$(2) \chi_f = \chi_{f_{\mathbb{L}}}.$$

Démonstration. Dès que l'on a des bases nous avons $(f_{\mathbb{L}})_{ai} = f_{ai}$ par la proposition 8.278(2). Le nombre $\det(f) \in \mathbb{K}$ est un polynôme en les f_{ai} . Entendons nous : il existe un polynôme indépendant de f et de $\mathbb{K}$ et de $\mathbb{L}$ donnant le déterminant de n'importe quelle matrice. Donc $\det(f) = \det(f_{\mathbb{L}})$.

Même chose pour le polynôme caractéristique (définition 8.110) : les coefficients de ce polynôme sont des polynômes en les f_{ai} qui sont indépendants de $\mathbb{L}$, de $\mathbb{K}$ et de f .

Notons que $\chi_{f_{\mathbb{L}}}$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. $\square$

La situation est très différente avec le polynôme minimal¹¹³. Autant il existe une « recette » pour créer le polynôme caractéristique, il n'en n'existe pas pour le polynôme minimal (ou en tout cas, il ne suffit pas d'appliquer des polynômes en les coefficients de la matrice). La proposition suivante montre que le polynôme minimal est conservé par extension de corps, mais que pour le savoir, il faut travailler plus.

PROPooXVZMooXcJrsJ

Proposition 8.284 ([152, 1]).

Soit $\mathbb{L}$ une extension du corps $\mathbb{K}$ et une application linéaire $f: E \rightarrow F$ entre deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Alors $\mu_f = \mu_{f_{\mathbb{L}}}$.

113. Définition 6.64.

Démonstration. Nous allons montrer que l'application

$$\begin{aligned}\tilde{g}: \frac{\mathbb{L}[X]}{(\mu)} &\rightarrow \text{End}(E_{\mathbb{L}}) \\ [P] &\mapsto P(f_{\mathbb{L}})\end{aligned}\tag{8.604}$$

est bien définie et injective. La proposition 8.100 nous dira alors que μ est le polynôme minimal de $f_{\mathbb{L}}$.

Pour prouver que l'application $\tilde{g}$ est bien définie, nous commençons par prouver que $P(f_{\mathbb{L}}) = P(f)_{\mathbb{L}}$:

$$P(f_{\mathbb{L}})\lambda \otimes v = \sum_k a_k f_{\mathbb{L}}^k \lambda \otimes v \tag{8.605a}$$

$$= \lambda \otimes \sum_k a_k f^k(v) \tag{8.605b}$$

$$= \lambda \otimes P(f)v \tag{8.605c}$$

$$= P(f)_{\mathbb{L}} \lambda \otimes v. \tag{8.605d}$$

Par conséquent $\mu(f_{\mathbb{L}}) = 0$ et l'application est bien définie.

Sur $\mathbb{L}[X]/(\mu)$ nous considérons la base $\{1, [X], \dots, [X^{\deg(\mu)-1}]\}$, et sur $\text{End}(E_{\mathbb{L}})$ nous considérons une base qui commence ¹¹⁴ par $\{f_{\mathbb{L}}^k\}_{k=0, \dots, \deg(\mu)-1}$. Montrons tout de même que cette partie est libre (sinon le théorème de la base incomplète ne s'applique pas) : si $\sum_k \lambda_k f_{\mathbb{L}}^k = 0$ alors

$$\sum_k \text{proj}(\lambda_k f_{\mathbb{L}}^k) = 0. \tag{8.606}$$

Pour détailler ce que cela implique, nous calculons ceci :

$$(\lambda f_{\mathbb{L}})(\tau(e_i)) = \lambda f_{\mathbb{L}}(\tau(e_i)) = \sum_a \lambda f_{ai} e_a, \tag{8.607}$$

par conséquent $\text{proj}(\lambda f_{\mathbb{L}})e_i = \sum_a \text{proj}(\lambda f_{ai})e_a$, et comme proj est $\mathbb{K}$ -linéaire et que $f_{ai} \in \mathbb{K}$,

$$\text{proj}(\lambda f_{\mathbb{L}})e_i = \text{proj}(\lambda) \sum_a f_{ai} e_a = \text{proj}(\lambda) \text{proj}(f_{\mathbb{L}})e_i = \text{proj}(\lambda) f(e_i). \tag{8.608}$$

Appliquer la projection proj à l'équation (8.606) donne alors $\sum_k \text{proj}(\lambda)_k f^k = 0$. Mais comme les f^k sont linéairement indépendants sur $\mathbb{K}$ nous avons pour tout k : $\text{proj}(\lambda)_k = 0$ (égalité dans $\mathbb{K}$). En nous souvenant de la remarque 8.277 nous en déduisons $\lambda_k = 0$ dans $\mathbb{L}$.

Dans les choix de bases effectués, l'application $\tilde{g}$ a la forme

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ * & * & * & \\ * & * & * & \\ * & * & * & \end{pmatrix}, \tag{8.609}$$

qui est injective.

Puisque $\tilde{g}$ est injective, μ est le polynôme minimal de $f_{\mathbb{L}}$ et donc $\mu = \mu_{\mathbb{L}}$. □

8.16 Frobenius et Jordan

8.16.1 Matrice compagnon

Définition 8.285.

Soit le polynôme $P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_1X - a_0$ dans $\mathbb{K}[X]$. La **matrice compagnon** de

¹¹⁴. Théorème de la base incomplète 4.14(2).

P est la matrice donnée par

$$C(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \quad (8.610)$$

si $n \geq 2$ et par (a_0) si $n = 1$.

En formule :

$$C(P)_{ij} = \begin{cases} \delta_{i,j+1} & \text{si } j < n \\ a_{i-1} & \text{si } j = n. \end{cases} \quad (8.611)$$

Une matrice est dite *compagnon* si elle a cette forme.

Proposition 8.286.

Nous considérons le polynôme $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Si f est l'endomorphisme associé à la matrice compagnon ¹¹⁵ $C(P)$, alors nous avons

(1)

$$f(e_i) = \begin{cases} e_{i+1} & \text{si } 1 \leq i < n \\ (a_0, \dots, a_{n-1}) & \text{si } i = n. \end{cases} \quad (8.612)$$

(2) La formule : $P(f)e_1 = 0$.

Démonstration. Nous calculons $f(e_i)$ à partir des éléments de matrice (8.611) et de la relation entre matrice et application linéaire donnée par la proposition 4.75. D'abord si $i \neq n$ nous avons

$$f(e_i) = \sum_j C(P)_{ji} e_j = \sum_j \delta_{j,i+1} e_j = e_{i+1}. \quad (8.613)$$

Ensuite pour $i = n$ nous avons

$$f(e_n) = \sum_j C(P)_{jn} e_j = \sum_j a_{j-1} e_j. \quad (8.614)$$

Pour la seconde partie, notez que $X^k(f)$ est en réalité f^k . Donc si $k < n$,

$$X^k(f)e_i = f^k(e_1) = e_{1+k}. \quad (8.615)$$

Et pour $k = n$,

$$X^n(f)e_1 = f^n(e_1) = f(e_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i e_{i+1}. \quad (8.616)$$

En mettant ensemble,

$$P(f)e_1 = (f^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k)(e_1) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i e_{i+1} - \sum_{k=0}^{n-1} a_k e_{k+1} = 0. \quad (8.617)$$

□

LemkVNisk

Lemme 8.287 ([343]).

Un polynôme sur un corps commutatif est le polynôme caractéristique de sa matrice compagnon. En d'autres termes nous avons $\chi_{C(P)} = P$.

¹¹⁵. Définition 8.285.

Démonstration. Nous notons f l'endomorphisme associé à $C(P)$. La propriété $P(f)_{e_1} = 0$ nous indique que le polynôme minimal ponctuel de f en e_1 divise P . L'ensemble des puissances de f appliquées à e_1 , $(f^k(e_1))_{k=1,\dots,n-1}$ est libre, donc le polynôme minimal ponctuel en e_1 est de degré n au minimum. En reprenant les notations du théorème 6.43, nous avons $I_{e_1} = (P)$ parce que P est de degré minimum dans I_{e_1} et $\chi_f \in I_{e_1}$.

Donc P divise χ_f et est de degré égal à celui de χ_f . Étant donné qu'ils sont tous deux unitaires, ils sont égaux. $\square$

RemmQjZOA

Remarque 8.288.

Les matrices compagnons ne sont pas les seules dont le polynôme caractéristique est égal au polynôme minimal. En fait les matrices dont le polynôme caractéristique est égal au polynôme minimal sont denses dans l'ensemble des matrices. En effet une matrice dont le polynôme minimal n'est pas égal au polynôme caractéristique a un polynôme caractéristique avec une racine double. Il est possible, en modifiant arbitrairement peu la matrice, de séparer la racine double en deux racines distinctes.

8.16.2 Réduction de Frobenius

LEMooKUQDooKFeIYq

Lemme 8.289.

Soit un endomorphisme $f: E \rightarrow E$ sur l'espace vectoriel de dimension finie n . Nous notons μ et χ les polynômes minimal et caractéristique. Si f est cyclique, alors $\mu = \chi$.

Le théorème 8.302 donnera une version plus complète de ce lemme.

Démonstration. Soit v un vecteur cyclique de f , c'est-à-dire que $\{f^k(v)\}_{k=0,\dots,n-1}$ est libre. Donc si P est un polynôme de degré jusqu'à $n-1$ nous ne pouvons pas avoir $P(f) = 0$ parce que, appliqué à v , ce serait une combinaison nulle non triviale des $f^k(v)$. Donc le polynôme minimal est au minimum de degré n . Mais le polynôme caractéristique est annulateur de degré n (Cayley-Hamilton 8.117), donc il est le polynôme minimal. $\square$

THOooDOWUooOzxzxm

Théorème 8.290 (Réduction de Frobenius [344, 345, 346]).

Soit E , un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et $f \in \text{End}(E)$. Alors il existe une suite de sous-espaces $E_1, \dots, E_r$ stables par f tels que

ItemmpwjnSs

- (1) $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$;
- (2) pour chaque E_i , l'endomorphisme restreint $f_i = f|_{E_i}$ est cyclique ;
- (3) si μ_i est le polynôme minimal de f_i alors μ_{i+1} divise μ_i ;

Une telle décomposition vérifie automatiquement $\mu_1 = \mu_f$ et $\mu_1 \cdots \mu_r = \chi_f$, et la suite $(\mu_i)_{i=1,\dots,r}$ ne dépend que de f , et non du choix de la décomposition du point (1).

Les polynômes μ_i sont les **invariants de similitude** de l'endomorphisme f .

Démonstration. Nous commençons par montrer que si une telle décomposition existe, alors $\chi_f = \prod_{i=1}^r \mu_i$ subEqzcGouz

$$\chi_f = \prod_{i=1}^r \mu_i \quad (8.618a)$$

EqTaxsvb

$$\mu_f = \mu_1 \quad (8.618b)$$

où χ_f est le polynôme caractéristique de f et μ_f est le polynôme minimal. D'abord le polynôme caractéristique de f devra être égal au produit des polynômes caractéristiques des $f|_{E_i}$, mais ces derniers endomorphismes étant cycliques¹¹⁶, leurs polynômes caractéristiques sont égaux à leurs polynômes minimaux (lemme 8.289). Cela prouve l'égalité (8.618a). Ensuite tous les μ_i doivent diviser le polynôme minimal, donc $\text{ppcm}(\mu_1, \dots, \mu_r)$ divise μ_f . Cependant le polynôme minimal doit contenir une et une seule fois chacun des facteurs irréductibles du polynôme caractéristique,

116. Définition 8.102.

et chacun de ces facteurs sont dans les polynômes μ_i . Par conséquent $\text{ppcm}(\mu_1, \dots, \mu_r) = \mu_f$. Mais par ailleurs $\mu_1 = \text{ppcm}(\mu_1, \dots, \mu_r)$ parce qu'on a supposé $\mu_{i+1} \mid \mu_i$, donc $\mu_1 = \mu_f$.

Soit d , le degré du polynôme minimal de f et $y \in E$ tel que $\mu_f = \mu_{f,y}$ (voir lemme 8.101). Le plus petit espace stable sous f contenant y est

$$E_y = \text{Span}\{y, f(y), \dots, f^{d-1}(y)\}. \quad (8.619)$$

Nous notons $e_i = f^{i-1}(y)$. Notons que les vecteurs donnés forment bien une base de E_y parce que si les e_i n'étaient pas linéairement indépendants, alors nous aurions des a_k tels que $\sum_k a_k e_k = 0$ et avec lesquels

$$\left(\sum_k a_k X^k\right)(f)y = 0, \quad (8.620)$$

ce qui contredirait la minimalité de $\mu_{f,y}$.

La difficulté du théorème est de trouver un complément de E_y qui soit également stable sous f . Nous commençons par étendre¹¹⁷ $\{e_1, \dots, e_d\}$ en une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E . Ensuite nous allons montrer que

$$E = E_y \oplus F \quad (8.621)$$

avec

$$F = \{x \in E \text{ tel que } e_d^*(f^k(x)) = 0, \forall k \in \mathbb{N}\}. \quad (8.622)$$

qui fait appel aux définitions d'espace dual (définition 4.135) et de base duale (définition 4.136).

Par construction, F est invariant sous f . Montrons pour commencer que $E_y \cap F = \{0\}$. Un élément de E_y s'écrit

$$z = a_1 e_1 + \dots + a_k e_k \quad (8.623)$$

avec $k \leq d$. Étant donné que f décale les vecteurs de base, nous avons $e_d^*(f^{d-k}(z)) = a_k$. Du coup $z \in F$ si et seulement si $a_1 = \dots = a_d = 0$, c'est-à-dire que $E_y \cap F = \{0\}$.

Nous montrons maintenant que $\dim F = n - d$. Pour cela nous considérons l'application

$$\begin{aligned} T: \mathbb{K}[f] &\rightarrow E^* \\ g &\mapsto e_d^* \circ g. \end{aligned} \quad (8.624)$$

Cette application est injective. En effet un élément général de $\mathbb{K}[f]$ est

$$g = a_1 \text{Id} + a_2 f + \dots + a_p f^{p-1} \quad (8.625)$$

avec $p \leq d$. Si $T(g) = 0$, alors nous avons en particulier

$$0 = T(g)e_{d-p+1} = e_d^*(a_1 e_{d-p+1} + a_2 e_{d-p+2} + \dots + a_p e_d) = a_p. \quad (8.626)$$

Donc $a_p = 0$ et en appliquant maintenant $T(g)$ à e_{d-p} nous obtenons $a_{p-1} = 0$. Au final nous trouvons que $g = 0$ et donc que T est injective.

Étant donné que $\dim \mathbb{K}[f] = d$ et que T est injective, $\dim \text{Image}(T) = d$. Étudions l'orthogonal¹¹⁸ de l'image de T :

$$(\text{Image}(T))^\perp = \{x \in E \text{ tel que } T(g)x = 0, \forall g \in \mathbb{K}[f]\} \quad (8.627a)$$

$$= \{x \in E \text{ tel que } e_d^*(g(x)) = 0, \forall g \in \mathbb{K}[f]\} \quad (8.627b)$$

$$= F. \quad (8.627c)$$

Par conséquent $F^\perp = \text{Image}(T)$. Puisque $\dim \text{Image}(T) = d$, nous avons donc $\dim F = n - d$ et il est établi que $E = E_y \oplus F$.

Nous avons donc trouvé F , stable par f et tel que $E = E_y \oplus F$. Nous devons maintenant nous assurer que cette décomposition tombe bien pour les polynômes minimaux. Si P_1 est le polynôme minimal de $f|_{E_y}$, alors par le lemme 8.103 nous avons $P_1 = \mu_{f,y} = \mu_f$ parce que $f|_{E_y}$ est cyclique

117. Pour autant que j'aie compris, cette extension manque dans [344]. Corrigez-moi si je me trompe.

118. Définition 4.143.

sur E_y . Mettons P_2 , le polynôme minimal de $f|_F$. Étant attendu que F est stable par f , le polynôme P_2 divise P_1 . En recommençant la construction sur F , nous construisons un nouvel espace F' stable sous F et vérifiant $\mu_{f|_{F'}} = P_2$, etc.

Nous passons maintenant à la partie unicité du théorème. Soient deux suites $F_1, \dots, F_r$ et $G_1, \dots, G_s$ de sous-espaces stables par f et vérifiant

- (1) $E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$,
- (2) $f|_{F_i}$ est cyclique,
- (3) $\mu_{f|_{F_{i+1}}}$ divise $\mu_{f|_{F_i}}$,

et, *mutatis mutandis*, les mêmes conditions pour la famille $\{G_i\}$. Nous posons $P_i = \mu_{f|_{F_i}}$ et $Q_i = \mu_{f|_{G_i}}$. Nous allons montrer par récurrence que $P_i = Q_i$ et $\dim F_i = \dim G_i$. Il ne sera cependant pas garanti que $F_i = G_i$. D'abord, $P_1 = Q_1$ parce qu'ils sont tous deux égaux à μ_f par les relations (8.618). Nous supposons que $P_i = Q_i$ pour $1 \leq i \leq j-1$ et nous tentons de montrer que $P_j = Q_j$.

Nous avons

$$P_j(f) = P_j(f)|_{F_1} \oplus \dots \oplus P_j(f)|_{F_{j-1}}. \quad (8.628) \quad \text{EqMrCtZQ}$$

En effet étant donné que P_{j+k} divise P_j , il existe un polynôme A tel que $P_j = AP_{j+k}$, et donc tel que ¹¹⁹ $P_j(f) = A(f) \circ P_{j+k}(f)$, mais $P_{j+k}(f)F_{j+k} = 0$, donc $P_j(f)F_{j+k} = 0$. Les espaces G_i n'ayant à priori aucun rapport avec les polynômes P_i , nous écrivons

$$P_j(f) = P_j(f)|_{G_1} \oplus \dots \oplus P_j(f)|_{G_{j-1}} \oplus P_j(f)|_{G_j} \oplus \dots \oplus P_j(f)|_{G_s}. \quad (8.629) \quad \text{EqJreLiQ}$$

Pour $1 \leq i \leq j-1$, nous avons supposé $P_i = Q_i$. Étant donné que la matrice de $f|_{F_i}$ est semblable à C_{P_i} et celle de $f|_{G_i}$ est semblable à C_{Q_i} , la matrice de $f|_{F_i}$ est semblable à la matrice de $f|_{G_i}$. En particulier,

$$\dim P_j(f)F_i = \dim P_j(f)G_i. \quad (8.630)$$

En prenant les dimensions des images dans les égalités (8.628) et (8.629), nous trouvons que

$$P_j(f)|_{G_j} = \dots = P_j(f)|_{G_s} = 0. \quad (8.631)$$

Par conséquent P_j est annulateur de $f|_{G_j}$, et il divise donc Q_j , qui est générateur de l'idéal des polynômes annulateurs de $f|_{G_j}$. La situation étant symétrique entre P et Q , nous montrons de même que Q_j divise P_j et donc que $P_j = Q_j$.

Ceci achève la démonstration du théorème de réduction de Frobenius. □

REMOoPVL EooYDRXQI

Remarque 8.291.

Sous forme matricielle, ce théorème dit que toute matrice est semblable à une matrice de la forme bloc-diagonale

$$f = \begin{pmatrix} C_{\mu_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{\mu_r} \end{pmatrix} \quad (8.632)$$

où les C_{μ_i} sont des matrices compagnons (définition 8.285).

En particulier, et ceci est très important, deux applications sont semblables si et seulement si elles ont même suite d'invariants de similitude.

Remarque 8.292.

Si nous travaillons sur $\mathbb{R}$, la réduite de Frobenius restera une matrice réelle, même si les valeurs propres sont complexes. En effet le procédé de Frobenius ne regarde absolument pas les valeurs propres, mais seulement les facteurs irréductibles du polynôme caractéristique. La réduite de Frobenius ne tente pas de résoudre ces polynômes, mais se contente d'en utiliser les matrices compagnon.

La situation sera différente dans le cas de la forme normale de Jordan.

¹¹⁹. En vertu du lemme 8.90.

8.16.3 Forme normale de Jordan

Il existe une preuve directe de la réduction de Jordan ne nécessitant pas la réduction de Frobenius[347]. Cette dernière passe par les espaces caractéristiques¹²⁰ et est à mon avis plus compliquée que la démonstration de Frobenius elle-même. Nous allons donc nous contenter de donner la réduction de Jordan comme un cas particulier de réduction de Frobenius.

ThoGMYooPzMVpe

Théorème 8.293 (Réduction de Jordan).

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et $f \in \text{End}(E)$ un endomorphisme dont le polynôme caractéristique χ_f est scindé¹²¹. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f s'écrit sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & & \\ & \ddots & & \\ & & J_{n_k}(\lambda_k) & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (8.633)$$

où les λ_i sont les valeurs propres de f (avec éventuelles répétitions) et $J_{n_i}(\lambda)$ représente le bloc $n_i \times n_i$

$$J_{n_i}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & \\ & \lambda & 1 & 0 & \\ 0 & & \lambda & & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}. \quad (8.634)$$

En d'autres termes, $J_{n_i}(\lambda)_{ii} = \lambda$ et $J_{n_i}(\lambda)_{i-1,i} = 1$.

Démonstration. Nous commençons par le cas où f est nilpotente ; nous notons M sa matrice. Dans ce cas la seule valeur propre est zéro et le polynôme caractéristique est X^m pour un certain m . Nous savons par le lemme 8.287 que (la matrice de) f est semblable à sa matrice compagnon. En l'occurrence pour f nous avons

$$C_{X^m} = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.635)$$

Ensuite le changement de base (qui est une similitude) $(e_1, e_2, \dots, e_n) \mapsto (e_n, \dots, e_2, e_1)$ montre que C_{X^m} est semblable à un bloc de Jordan $J_m(0)$.

Supposons à présent que f ne soit pas nilpotente. Par l'hypothèse de polynôme caractéristique scindé, nous supposons que f a m valeurs propres distinctes et que son polynôme caractéristique est

$$\chi_f = (X - \lambda_1)^{l_1} \dots (X - \lambda_m)^{l_m}. \quad (8.636)$$

Le lemme des noyaux (théorème 8.91) nous enseigne que

$$E = \bigoplus_{i=1}^m \underbrace{\ker(f - \lambda_i \mathbb{1})^{l_i}}_{F_i}. \quad (8.637)$$

La restriction de $f - \lambda_i \mathbb{1}$ à F_i est par construction un endomorphisme nilpotent, et donc peut s'écrire comme un bloc de Jordan avec des zéros sur la diagonale. En utilisant la décomposition

$$f|_{F_i} = (f - \lambda_i \mathbb{1})|_{F_i} + \lambda_i \mathbb{1}_{F_i}, \quad (8.638)$$

nous voyons que $f|_{F_i}$ s'écrit comme un bloc de Jordan avec λ_i sur la diagonale. □

120. Aussi appelés « espaces propres généralisés ».

121. Définition 6.39. C'est à cause de cette hypothèse que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ n'est pas le bon exemple de contexte de travail.

Remarque 8.294.

Nous pouvons calculer la forme normale de Jordan pour une matrice complexe ou réelle, mais dans les deux cas nous devons nous attendre à obtenir une matrice complexe parce que les valeurs propres d'une matrice réelle peuvent être complexes. Cependant nous demandons que le polynôme caractéristique de f soit scindé sur $\mathbb{K}$. En pratique, la décomposition de Jordan n'est garantie que sur les corps algébriquement clos, c'est-à-dire sur $\mathbb{C}$.

La suite des invariants de similitude sur laquelle repose la réduction de Frobenius, elle, est disponible sur tout corps, y compris $\mathbb{R}$.

8.17 Commutant et endomorphismes cycliques**8.17.1 Endomorphisme cyclique**

LemSGmdnE

Lemme 8.295.

Si A est la matrice de l'endomorphisme f alors nous avons équivalence des propriétés suivantes :

- (1) La matrice A est cyclique.
- (2) L'endomorphisme f est cyclique.

Si f est un endomorphisme de l'espace vectoriel E et si $x \in E$, nous notons

$$E_{f,x} = \text{Span}\{f^k(x) \text{ tel que } k \in \mathbb{N}\}. \quad (8.639)$$

DEFooIDMMooHipUmT

Définition 8.296 (Commutant $\mathcal{C}(f)$ de f).

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et un endomorphisme $f: E \rightarrow E$. Le **commutant** de f est l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f :

$$\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E, E) \text{ tel que } g \circ f = f \circ g\}. \quad (8.640)$$

Il n'est pas très compliqué de vérifier que $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, E)$.

Notons l'inclusion évidente $\mathbb{K}[f] \subset \mathcal{C}(f)$. L'inclusion inverse va un peu nous occuper durant les prochaines pages.

8.17.2 Commutant : cas diagonalisable

PROPooRHHEooIRGmtl

Proposition 8.297 ([348]).

Si f est diagonalisable, alors

$$\dim(\mathcal{C}(f)) = \sum_{\lambda \in \text{Spec}(f)} \dim(E_\lambda)^2. \quad (8.641)$$

EQooOTFLooPUKAos

où les E_λ sont les espaces propres de f .

Démonstration. D'abord, soit $g \in \mathcal{C}(f)$ alors E_λ est stable par g . En effet si $v \in E_\lambda$ alors $f(g(v)) = g(f(v)) = g(\lambda v) = \lambda g(v)$, ce qui montre que $g(v)$ est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ , et donc que $g(v) \in E_\lambda$.

Nous considérons ensuite l'application

$$\begin{aligned} \psi: \mathcal{C}(f) &\rightarrow \text{End}(E_1) \times \dots \times \text{End}(E_r) \\ g &\mapsto g|_{E_1} \times \dots \times g|_{E_r} \end{aligned} \quad (8.642)$$

qui est bien définie parce que g se restreint aux espaces propres de f . Nous allons noter $\psi(g)_\lambda$ la restriction de g à E_λ .

- (1) ψ est injective

Supposons que $g, h \in \mathcal{C}(f)$ tels que $\psi(g) = \psi(h)$. Puisque f est diagonalisable nous pouvons décomposer $x \in E$ en ses composantes sur les espaces propres ¹²² :

$$x = \sum_{\lambda \in \text{Spec}(f)} x_{\lambda} \quad (8.643)$$

avec $x_{\lambda} \in E_{\lambda}$. Nous avons alors

$$g(x) = \sum_{\lambda} g(x_{\lambda}) = \sum_{\lambda} \psi(g)_{\lambda}(x_{\lambda}). \quad (8.644)$$

Par hypothèse nous avons $\psi(g)_{\lambda} = \psi(h)_{\lambda}$, et donc aussi

$$g(x) = \sum_{\lambda} \psi(g)_{\lambda}(x_{\lambda}) = \sum_{\lambda} \psi(h)_{\lambda}(x_{\lambda}) = \sum_{\lambda} h(x_{\lambda}) = h(x). \quad (8.645)$$

Cela prouve $g = h$ et donc que ψ est injective.

- (2) ψ est surjective Si nous avons pour chaque $\lambda \in \text{Spec}(f)$ un endomorphisme g_{λ} de E_{λ} alors en posant

$$g(x) = \sum_{\lambda \in \text{Spec}(f)} g_{\lambda}(x_{\lambda}) \quad (8.646)$$

nous avons bien

$$\psi(g) = (g_{\lambda_1}, \dots, g_{\lambda_r}). \quad (8.647)$$

Nous pouvons donc conclure en écrivant

$$\dim(\mathcal{C}(f)) = \sum_{\lambda \in \text{Spec}(f)} \dim(\text{End}(E_{\lambda})) = \sum_{\lambda \in \text{Spec}(f)} \dim(E_{\lambda})^2. \quad (8.648)$$

□

REMooUGFQooVzCOvV

Remarque 8.298.

Nous avons alors immédiatement

$$\dim(\mathcal{C}(f)) \geq \dim(E) \quad (8.649)$$

lorsque f est diagonalisable.

En suivant la notation (8.212), un endomorphisme est cyclique lorsqu'il existe $x \in E$ tel que $E_x = E$.

PropooQALUooTluDif

Proposition 8.299 ([348]).

Si f est un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E de dimension n . Nous avons équivalence des points suivants.

ITEMooSOYYooZVibjrrii

- (1) Le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique : $\mu_f = \chi_f$

ITEMooSOYYooZVibjrvi

- (2) L'endomorphisme f est cyclique.

ITEMooSOYYooZVibjrv

- (3) $\mathcal{C}(f) = \mathbb{K}[f]$ ¹²³.

ITEMooSOYYooZVibjriv

- (4) $\dim(\mathcal{C}(f)) = n$

ITEMooSOYYooZVibjrrii

- (5) L'endomorphisme f possède n valeurs propres distinctes.

ITEMooSOYYooZVibjri

- (6) $\dim(\mathbb{K}[f]) = n$

Démonstration. Le point important de cette proposition réside dans les équivalences (1)-(3). Les autres sont des résultats intermédiaires. En particulier, dans le cas diagonalisable, nous allons voir que le point (5) est essentiellement une reformulation de (1).

- (1) **(4) implique (5)** Par la formule (8.641), les espaces propres de f ont tous une dimension de 1. Par conséquent f possède n valeurs propres distinctes.

¹²². Théorème 8.218(5).

¹²³. Rappel : $\mathcal{C}(f)$ est le commutant de f , définition 8.296.

- (2) **(5) implique (6)** Le théorème 8.218 nous dit que le polynôme minimal est scindé à racines simples. Puisque f possède n valeurs propres distinctes, μ est de degré n . Par l'isomorphisme $\mathbb{K}[f] = \mathbb{K}[X]/(\mu)$ de la proposition 8.109 nous avons $\dim(\mathbb{K}[f]) = \deg(\mu) = n$ par la proposition 6.44.
- (3) **(6) implique (1)** Par l'isomorphisme $\mathbb{K}[f] = \mathbb{K}[X]/(\mu)$ de la proposition 8.109 et la proposition 6.44 nous avons $n = \dim(\mathbb{K}[f]) = \deg(\mu)$. Comme χ est un polynôme annulateur (Caley-Hamilton 8.117), il est divisé par μ . Maintenant μ et χ sont des polynômes unitaires de degré n et μ divise χ . Ils sont donc égaux.
- (4) **(1) implique (2)** Le fait que f soit diagonalisable permet d'utiliser le théorème 8.218 pour dire que μ est scindé à racines simples. L'égalisation avec χ nous permet de dire que f possède n valeurs propres distinctes. Soient $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de diagonalisation, et prouvons que le vecteur $v = e_1 + \dots + e_n$ est cyclique. Nous avons

$$f^k(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k e_i. \quad (8.650)$$

Pour prouver que cette famille (avec $k = 0, \dots, n-1$) est libre¹²⁴ nous en prenons une combinaison linéaire nulle et nous prouvons que les coefficients sont tous nuls. Soit donc

$$0 = \sum_{l=0}^{n-1} a_l f^l(v) = \sum_{l=0}^{n-1} a_l \sum_{i=1}^n \lambda_i^l e_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{l=0}^{n-1} a_l \lambda_i^l \right) e_i. \quad (8.651)$$

Par hypothèse, la double somme est nulle, et nous avons pour tout i :

$$\sum_{l=0}^{n-1} a_l \lambda_i^l = 0. \quad (8.652)$$

En posant la matrice $A_{ij} = \lambda_i^j$, cela revient à étudier le système $\sum_j A_{ij} a_j = 0$. Ce système n'a des solutions non nulles que si $\det(A) = 0$; sinon il possède une unique solution qui est $a_j = 0$ pour tout j . Nous devons donc calculer le déterminant

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}. \quad (8.653)$$

Il s'agit du déterminant de Vandermonde déjà étudié par la proposition 4.126. Nous avons $\det(A) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$. Ce déterminant est bien non nul parce que toutes les valeurs propres sont distinctes.

- (5) **(2) implique (3)** Soit v un vecteur cyclique¹²⁵ de f . Si g est un endomorphisme, nous définissons des coefficients $(a_k(g))_{k=0, \dots, n-1}$ par

$$g(v) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(g) f^k(v). \quad (8.654)$$

C'est une bonne définition parce que $\{f^k(v)\}$ est une base.

Nous définissons alors l'application

$$\begin{aligned} \psi: \mathcal{C}(f) &\rightarrow \mathbb{K}[f] \\ g &\mapsto \sum_{k=0}^{n-1} a_k(g) f^k. \end{aligned} \quad (8.655)$$

124. Ce sera alors une base parce que n vecteurs libres dans un espace de dimension n est toujours une base, proposition 4.19.

125. Définition 8.296.

C'est une application injective parce que si $\psi(g) = 0$ alors $g(v) = 0$ et pour tout k nous avons $g(f^k(v)) = f^k(g(v)) = 0$. L'endomorphisme g s'annulant sur une base, il est nul.

L'application ψ est surjective. En effet si un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$ est donné, il suffit de poser

$$g(x) = \sum_k a_k f^k(x) \quad (8.656)$$

pour avoir $\psi(g) = P$.

- (6) **(3) implique (4)** Si $n_1, \dots, n_r$ sont les dimensions des différents espaces propres de f , nous avons les inégalités

$$\dim(\mathbb{K}[f]) = \deg(\mu) \leq n = n_1 + \dots + n_r \leq n_1^2 + \dots + n_r^2 = \dim(\mathcal{C}(f)). \quad (8.657)$$

Par hypothèse d'égalité entre le premier et le dernier terme de cette suite d'inégalités, toutes les inégalités sont des égalités et en particulier $\dim(\mathcal{C}(f)) = n$.

Nous avons fini de prouver toutes les équivalences demandées. $\square$

Exemple 8.300.

Pour mieux comprendre pourquoi le fait d'avoir n valeurs propres distinctes est équivalent à être cyclique, notons que si deux valeurs propres sont identiques, alors un morceau de la matrice de f serait par exemple $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, et dans ce cas n'importe quelle combinaison $ae_i + be_j$ reste proportionnelle à elle-même après application de f . Si nous avons des valeurs propres différentes par contre, nous avons par exemple dans $\mathbb{R}^2$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ qui donne $f(e_1 + e_2) = e_1 + 2e_2$. La partie $\{e_1 + e_2, e_1 + 2e_2\}$ est une base. $\triangle$

8.17.3 Commutant : cas général

Nous considérons encore un espace vectoriel E de dimension finie n et un endomorphisme $f: E \rightarrow E$. Nous notons μ son polynôme minimal et μ_x le polynôme minimal ponctuel en x .

LEM00DFFDooJTQkRu

Lemme 8.301 ([349, 344, 152]).

Nous avons

$$\dim(\mathcal{C}(f)) \geq \dim(E) \quad (8.658)$$

Démonstration. Si f est donnée, l'espace $\mathcal{C}(f)$ est l'espace des solutions de $fg = gf$. Supposons avoir choisi une base de E et notons A la matrice de f et X celle de g . L'équation est $AX - XA = 0$.

- (1) **Si A est trigonalisable** Nous supposons avoir choisi la base de telle sorte que A soit triangulaire supérieure, et nous allons nous contenter de chercher les solutions X qui sont également triangulaires supérieure. Si il y en a déjà plus que n , a fortiori le résultat sera vrai. Le produit de deux matrices triangulaires supérieures étant une matrice triangulaire supérieure, l'équation $AX - XA$ contient, pour les coefficients de X , $n(n+1)/2$ équations. Mais il se fait que les termes diagonaux ne sont pas de vraies équations parce que

$$(AX - XA)_{kk} = \sum_i (A_{ki}X_{ik} - X_{ki}A_{ik}) = \sum_{k \leq i \leq k} (A_{ki}X_{ik} - X_{ki}A_{ik}) = 0. \quad (8.659)$$

Nous avons donc au maximum

$$\frac{n(n+1)}{2} - n \quad (8.660)$$

équations linéairement indépendantes pour un minimum de $n(n+1)/2$ inconnues. L'espace des solutions est donc de dimension au minimum n .

Cela a l'air d'être une majoration assez large, mais il existe des cas d'égalité.

- (2) **Si A n'est pas trigonalisable**

La preuve que nous donnons ici est valable même pour les endomorphismes trigonalisables.

Nous considérons le résultat de Frobenius 8.290. Nous avons donc la structure suivante :

- une décomposition en somme directe $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$,
- les espaces E_i sont fixés par f ,
- les endomorphismes $f_i = f|_{E_i}$ sont cycliques
- le polynôme minimal de f_i est μ_i et $\prod_{i=1}^r \mu_i = \chi_f$.

Les endomorphismes f_i^k commutent évidemment avec f_j , et la partie $\{f_i^k\}_{k=0, \dots, \deg(\mu_i)-1}$ est libre. Libre en tout cas en tant que partie de $\text{End}(E_i)$. Mais en prolongeant par 0 sur E , ça reste libre en tant que partie de $\text{End}(E)$.

Bien entendu les f_j^k et les f_i^k ($i \neq j$) sont linéairement indépendants dans $\text{End}(E)$ parce qu'ils n'agissent pas sur les mêmes vecteurs. Donc les endomorphismes $f_i^{k_i}$ avec $k_i = 0, \dots, \deg(\mu_i) - 1$ forment une partie libre de $\text{End}(E)$ composée d'endomorphismes qui commutent avec f . Il y en a en tout

$$\sum_{i=1}^r \deg(\mu_i) = \deg(\chi_f) = n. \quad (8.661)$$

Par conséquent $\dim(\mathcal{C}(f)) \geq \dim(E)$.

□

THOooGLMSooYewNxW

Théorème 8.302 ([322]).

Soit un endomorphisme $f: E \rightarrow E$ sur l'espace vectoriel de dimension finie n . Nous notons μ et χ les polynômes minimal et caractéristique. Nous avons équivalence entre les points suivants :

ITEMooLRXlooLWaYqJii

(1) $\mu = \chi$,

ITEMooLRXlooLWaYqJii

(2) f est cyclique,

ITEMooLRXlooLWaYqJiii

(3) $\mathcal{C}(f) = \mathbb{K}[f]$.

Démonstration. Plusieurs implications. Notons que (2) implique (1) a déjà été démontré par le lemme 8.289.

- (1) **(1) implique (2)** Conformément à ce que nous permet le lemme 8.101 nous choisissons¹²⁶ $a \in E$ de telle sorte à avoir $\mu_a = \mu$. De plus pour $x \in E$ nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi_x: \mathbb{K}[X] &\rightarrow E \\ P &\mapsto P(f)x. \end{aligned} \quad (8.662)$$

Nous avons $\varphi_a(P) = P(f)a$. Étant donné que E_a est engendré par les $f^k(a)$ nous avons $\varphi_a(\mathbb{K}[X]) = E_a$. De plus l'application φ_a passe aux classes pour (μ_a) . Pour rappel, un élément de $\mathbb{K}[X]/(\mu_a)$ est de la forme

$$[P] = \{P + Q\mu_a\}_{Q \in \mathbb{K}[X]}. \quad (8.663)$$

Nous considérons donc l'application quotient

$$\begin{aligned} \psi: \frac{\mathbb{K}[X]}{(\mu_a)} &\rightarrow E_a \\ [P] &\mapsto \varphi_a(P), \end{aligned} \quad (8.664)$$

et nous prouvons que c'est un isomorphisme d'espace vectoriel.

(1a) **Linéaire** Parce que $(\lambda P + Q)(f) = (\lambda P)(f) + Q(f)$.

(1b) **Injectif** Si $\psi([P]) = 0$, alors $\varphi_a(P) = 0$, c'est-à-dire que $P \in \ker(\varphi_a)$. Mais, par définition 8.97 du polynôme minimal ponctuel, μ_a est générateur de $\ker(\varphi_a)$; donc il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = Q\mu_a$. Par conséquent $[P] = 0$, ce que nous voulions.

(1c) **Surjectif** Si $x \in E_a$ alors il existe des coefficients $x_k \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{k=0}^{\deg(\mu_a)-1} x_k f^k(a)$, c'est-à-dire $x = P(f)a = \varphi_a(P) = \psi([P])$.

¹²⁶. Dans toute la suite, nous devrions écrire μ_f et $\mu_{f,a}$ mais nous omettons d'indiquer explicitement la dépendance en f .

Mais par hypothèse et par choix de a nous avons $\mu_a = \mu = \chi$, donc en fait $E_a = \mathbb{K}[X]/(\chi)$. Nous savons aussi que $\deg(\chi) = \dim(E)$ et que $\dim(\mathbb{K}[X]/P) = \deg(P)$ par la proposition 8.109. Au final nous avons $\dim(E_a) = \deg(\chi) = \dim(E)$. Et par conséquent $E_a = E$. Cela prouve que a est un vecteur cyclique pour f .

- (2) **(2) implique (3)** Soit $g \in \mathcal{C}(f)$; nous devons prouver que g est un polynôme de f . Par hypothèse nous avons un vecteur cyclique que nous notons v . Nous avons un polynôme P (dépendant de g) tel que $g(v) = P(f)v$. Nous allons voir que $g = P(f)$. Soient $y \in E$ et Q un polynôme tels que $y = Q(f)v$; en notant que g commute avec $P(f)$ nous avons

$$g(y) = g(Q(f)v) = Q(f)(g(v)) = Q(f)(P(f)v) = P(f)Q(f)v = P(f)y. \quad (8.665)$$

Donc $g = P(f)$.

- (3) **(3) implique (1)**

Nous avons les inégalités :

$$n \leq \dim(\mathcal{C}(f)) = \dim(\mathbb{K}[f]) = \deg(\mu) \leq \deg(\chi) = n. \quad (8.666)$$

La première inégalité est le lemme 8.301. Ensuite, toutes les inégalités se trouvent être des égalités. En particulier $\deg(\mu) = n$, ce qui signifie que $\mu = \chi$ parce que μ est un polynôme diviseur de χ , de même degré que χ et unitaire tout comme χ . □

CORooAKQEooSliXPp

Corolaire 8.303 ([152]).

En suivant les notations sur les extensions de corps de base de la section 8.15, l'endomorphisme $f: E \rightarrow F$ est cyclique si et seulement si l'endomorphisme $f_{\mathbb{L}}: E_{\mathbb{L}} \rightarrow F_{\mathbb{L}}$ est cyclique.

Démonstration. Nous savons par le théorème 8.302 qu'un endomorphisme est cyclique si et seulement si son polynôme minimal est égal à son polynôme caractéristique. Or par les propositions 8.283 et 8.284, nous savons que ces polynômes sont identiques pour f et pour $f_{\mathbb{L}}$. □

THOooHUFBooReKZWG

Théorème 8.304 (Similitude et extension de corps[152]).

Les applications linéaires $f, g: E \rightarrow E$ sont semblables si et seulement si $f_{\mathbb{L}}$ et $g_{\mathbb{L}}$ le sont.

Démonstration. En ce qui concerne le sens direct, si il existe $m \in \text{GL}(E)$ tel que $f = mgm^{-1}$ alors il suffit d'appliquer le lemme 8.279 pour avoir $f_{\mathbb{L}} = m_{\mathbb{L}}g_{\mathbb{L}}m_{\mathbb{L}}^{-1}$.

Nous considérons les invariants de similitude de f du théorème 8.290. Il existe une unique suite de polynômes unitaires μ_i ($i = 1, \dots, s$) tels que $\mu_{i+1} \mid \mu_i$ et pour laquelle nous avons une décomposition $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_s$ pour laquelle $f|_{E_i}: E \rightarrow E_i$ est cyclique et de polynôme minimal μ_i .

Nous avons aussi $E_{\mathbb{L}} = (E_1)_{\mathbb{L}} \oplus \dots \oplus (E_s)_{\mathbb{L}}$ et les $(E_i)_{\mathbb{L}}$ sont stables sous $f_{\mathbb{L}}$ qui y sera également cyclique (corolaire 8.303). De plus le polynôme minimal de $f_{\mathbb{L}}|_{(E_i)_{\mathbb{L}}}$ est également μ_i .

Autrement dit, la suite μ_i est également la suite des invariants de similitude de $f_{\mathbb{L}}$. La remarque 8.291 nous permet de conclure que f et g sont semblables si et seulement si $f_{\mathbb{L}}$ et $g_{\mathbb{L}}$ le sont. □

8.18 Hyperplans et formes linéaires

DEFooEWDTooQbUQws

Proposition-Définition 8.305 ([1, 350, 351]).

Soient un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$, et un sous-espace vectoriel H . Il y a équivalence entre

ITEMooUCWQooToKrop

- (1) E possède une droite vectorielle supplémentaire¹²⁷ à H ,

ITEMooXVIPooNxijzA

- (2) Il existe une forme linéaire non nulle $f: E \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $H = \ker(f)$.

Quand ces conditions sont vérifiées, nous disons que H est un **hyperplan** de E .

¹²⁷ Définition 4.22.

Démonstration. En deux parties.

- (1) **(1) $\Rightarrow$ (2)** Soit V une droite vectorielle supplémentaire de H : pour tout $x \in E$, il existe des uniques $x_H \in H$ et $x_V \in V$ tels que $x = x_H + x_V$. Si $\{e_i\}_{i \in I}$ est une base de H , nous prouvons que $B = \{e_i\}_{i \in I} \cup \{v\}$ est une base de E . Le fait que B soit générateur est immédiat. Pour que ce soit libre, nous supposons que $\sum_{i \in I} a_i e_i + bv = 0$ ($a_i \neq 0$ que pour une partie finie de I).

Le vecteur 0 s'écrit dans la décomposition $E = H \oplus V$ de façon unique $0 = 0 + 0$. Nous avons donc $\sum_i a_i e_i = 0$ et $b = 0$. Vu que $\{e_i\}_{i \in I}$ est libre, nous en déduisons également $a_i = 0$ pour tout i .

Maintenant nous posons

$$\begin{aligned} f: E &\rightarrow \mathbb{K} \\ x_H + bv &\mapsto b. \end{aligned} \tag{8.667}$$

C'est une application linéaire et $H = \ker(f)$.

- (2) **(2) $\Rightarrow$ (1)** Nous considérons une application linéaire $f: E \rightarrow \mathbb{K}$ et $H = \ker(f)$. Vu que $f \neq 0$, nous pouvons considérer un élément $v \in E$ tel que $f(v) \neq 0$. Par linéarité nous avons aussi $\text{Image}(f) = \mathbb{K}$. Donc $\{f(v)\}$ est une base de $\text{Image}(f)$.

Nous sortons maintenant le théorème du rang 4.49. Si B est une base de H , alors $B \cup \{v\}$ est une base de E . Donc $V = \mathbb{K}v$ est un supplémentaire de H dans E .

□

PROPOUZZDooPAKmvN

Proposition 8.306 ([352]).

Soit un espace vectoriel de dimension finie n . Une partie est un hyperplan si et seulement si c'est un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$.

Proposition 8.307 ([151]).

Soit un espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 2$. Soit un sous-espace vectoriel V de E de dimension s . Alors V est une intersection de $n - s$ hyperplans de E .

Démonstration. Nous considérons une base de V que nous complétons¹²⁸ en une base de E : si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, nous avons $x \in V$ si et seulement si $x_{s+1} = \dots = x_n = 0$. Nous considérons les formes linéaires

$$\begin{aligned} \varphi_i: E &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x_i, \end{aligned} \tag{8.668}$$

et nous considérons les parties $H_i = \ker(\varphi_i)$ qui sont de hyperplans (définition 8.305). Les H_i avec $s + 1 \leq i \leq n$ sont une famille de $n - s$ hyperplans qui vérifient

$$V = \bigcap_{i=s+1}^n \ker(\varphi_i) \tag{8.669}$$

parce que $x \in \ker(\varphi_i)$ si et seulement si $x_i = 0$.

Donc V peut être écrit comme intersection de $n - s$ hyperplans de E .

□

PROPOoRCLNooJpIMMI

Proposition 8.308 ([151]).

Soit un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 2$. Si H_i sont des hyperplans de E , alors

$$\dim \left(\bigcap_{i=1}^m H_i \right) \geq n - m. \tag{8.670}$$

Démonstration. N'oubliez pas de prouver que $\bigcap_{i=1}^m H_i$ est un espace vectoriel. À part ça, nous faisons une petite récurrence.

128. Théorème de la base incomplète, 4.14(4).

- (1) **Pour $m = 2$** Nous savons déjà par la proposition 4.50 que

$$\dim(H_1 + H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 \cap H_2). \quad (8.671)$$

De plus $\dim(H_1 + H_2) \leq n$. En remplaçant, par les valeurs,

$$\dim(H_1 \cap H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 + H_2) \quad (8.672a)$$

$$= n - 1 + n - 1 - \dim(H_1 + H_2) \quad (8.672b)$$

$$\geq 2n - 2 - n \quad (8.672c)$$

$$= n - 2. \quad (8.672d)$$

Donc $\dim(H_1 \cap H_2) \geq n - 2$.

- (2) **La récurrence** Nous calculons $\dim(H_1 \cap \dots \cap H_m \cap H_{m+1})$ en commençant encore par la proposition 4.50 :

$$\dim(H_1 \cap \dots \cap H_m \cap H_{m+1}) = \underbrace{\dim(H_1 \cap \dots \cap H_m)}_{\leq n-m} + \dim(H_{m+1}) \quad (8.673a)$$

$$- \underbrace{\dim((H_1 \cap \dots \cap H_m) + H_{m+1})}_{\leq n} \quad (8.673b)$$

$$\geq n - m + (n - 1) - n \quad (8.673c)$$

$$= n - m - 1. \quad (8.673d)$$

C'est bon pour la récurrence.

□

8.18.1 Trouver la matrice d'une symétrie donnée

SubSecMtrSym

Les notions de déterminants, produit scalaire et vectoriels¹²⁹ donnent une bonne intuition géométrique des matrices. Nous pouvons alors chercher les matrices de quelques symétries dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

8.18.1.1 Symétrie par rapport à un plan

Comment trouver par exemple la matrice A qui donne la symétrie autour du plan $z = 0$? La définition d'une telle symétrie est que les vecteurs du plan $z = 0$ ne bougent pas, tandis que les vecteurs perpendiculaires changent de signe. Ces informations vont permettre de trouver comment A agit sur une base de $\mathbb{R}^3$. En effet :

- (1) Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est dans le plan $z = 0$, donc il ne bouge pas,

- (2) le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est également dans le plan, donc il ne bouge pas non plus,

- (3) et le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est perpendiculaire au plan $z = 0$, donc il va changer de signe.

Cela nous donne directement les valeurs de A sur la base canonique et nous permet d'écrire

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (8.674)$$

129. Définitions 8.15, 8.164 et 10.36.

Pour écrire cela, nous avons juste mis en colonne les images des vecteurs de base. Les deux premiers n'ont pas changé et le troisième a changé.

Et si maintenant on donne un plan moins facile que $z = 0$? Le principe reste le même : il faudra trouver deux vecteurs qui sont dans le plan (et dire qu'ils ne bougent pas), et puis un vecteur qui est perpendiculaire au plan¹³⁰, et dire qu'il change de signe.

Voyons ce qu'il en est pour le plan $x = -z$. Il faut trouver deux vecteurs linéairement indépendants dans ce plan. Prenons par exemple

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (8.675)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} Af_1 &= f_1 \\ Af_2 &= f_2. \end{aligned} \quad (8.676)$$

Afin de trouver un vecteur perpendiculaire au plan, calculons le produit vectoriel :

$$f_3 = f_1 \times f_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -e_1 - e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (8.677)$$

Nous avons

$$Af_3 = -f_3. \quad (8.678)$$

Afin de trouver la matrice A , il faut trouver Ae_1 , Ae_2 et Ae_3 . Pour ce faire, il faut d'abord écrire $\{e_1, e_2, e_3\}$ en fonction de $\{f_1, f_2, f_3\}$. La première des équations (8.675) dit que

$$f_1 = e_2. \quad (8.679)$$

Ensuite, nous avons

$$\begin{aligned} f_2 &= e_1 - e_3 \\ f_3 &= -e_1 - e_3. \end{aligned} \quad (8.680)$$

La somme de ces deux équations donne $-2e_3 = f_2 + f_3$, c'est-à-dire

$$e_3 = -\frac{f_2 + f_3}{2} \quad (8.681)$$

Et enfin, nous avons

$$e_1 = \frac{f_2 - f_3}{2}. \quad (8.682)$$

Maintenant nous pouvons calculer les images de e_1 , e_2 et e_3 en faisant

$$\begin{aligned} Ae_1 &= \frac{Af_2 - Af_3}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ Ae_2 &= Af_1 = f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ Ae_3 &= -\frac{f_2 - f_3}{2} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8.683)$$

La matrice A s'écrit maintenant en mettant les trois images trouvées en colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.684)$$

¹³⁰. Pour le trouver, penser au produit vectoriel.

8.18.1.2 Symétrie par rapport à une droite

Le principe est exactement le même : il faut trouver trois vecteurs f_1 , f_2 et f_3 sur lesquels on connaît l'action de la symétrie. Ensuite il faudra exprimer e_1 , e_2 et e_3 en termes de f_1 , f_2 et f_3 .

Le seul problème est de trouver les trois vecteurs f_i . Le premier est tout trouvé : c'est n'importe quel vecteur sur la droite. Pour les deux autres, il faut un peu ruser parce qu'il faut impérativement qu'ils soient perpendiculaire à la droite. Pour trouver f_2 , on peut écrire

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}, \quad (8.685)$$

et puis fixer le x pour que le produit scalaire de f_2 avec f_1 soit nul. Si il n'y a pas moyen (genre si f_1 a sa troisième composante nulle), essayer avec $\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Une fois que f_2 est trouvé (il y a des milliards de choix possibles), trouver f_3 est super facile : prendre le produit vectoriel entre f_1 et f_2 .

8.18.1.3 En résumé

La marche à suivre est

- (1) Trouver trois vecteurs f_1 , f_2 et f_3 sur lesquels on connaît l'action de la symétrie. Typiquement : des vecteurs qui sont sur l'axe ou le plan de symétrie, et puis des perpendiculaires. Pour la perpendiculaire, penser au produit scalaire et au produit vectoriel.
- (2) Exprimer la base canonique e_1 , e_2 et e_3 en termes de f_1 , f_2 , f_3 .
- (3) Trouver Ae_1 , Ae_2 et Ae_3 en utilisant leur expression en termes des f_i , et le fait que l'on connaisse l'action de A sur les f_i .
- (4) La matrice s'obtient en mettant les images des e_i en colonnes.

8.19 Théorème de Burnside

LemwXXzIt

Lemme 8.309.

Soit P , un polynôme sur $\mathbb{K}$. Une racine de P est une racine simple si et seulement si elle n'est pas racine de P' .

ThoBurnsideoPuCtS

Théorème 8.310.

Toute représentation¹³¹ d'un groupe abélien d'exposant fini sur $\mathbb{C}^n$ a une image finie.

Démonstration. Étant donné que G est d'exposant fini, il existe $\alpha \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^\alpha = e$ pour tout $g \in G$. Le polynôme $P(X) = X^\alpha - 1$ est scindé à racines simples. En effet tout polynôme sur $\mathbb{C}$ est scindé. Le fait qu'il soit à racines simples provient du lemme 8.309 parce que si $a^\alpha = 1$, alors il n'est pas possible d'avoir $\alpha a^{\alpha-1} = 0$.

Par ailleurs $P(g) = 0$. Le fait que nous ayons un polynôme annulateur de g scindé à racines simples implique que g est diagonalisable (théorème 8.218). Le fait que G soit abélien montre qu'il existe une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle tous les éléments de G sont diagonaux. Nous devons par conséquent montrer qu'il existe un nombre fini de matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (8.686)$$

Nous savons que $\lambda_i^\alpha = 1$ parce que $g^\alpha = \mathbb{1}$, par conséquent chacun des λ_i est une racine de l'unité dont il n'existe qu'un nombre fini. $\square$

131. Définition 4.145.

ThooJLTit

Théorème 8.311 (Burnside[136, 353]).*Un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est fini si et seulement si il est d'exposant¹³² fini.*

Démonstration. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Si G est fini, l'ordre de ses éléments divise $|G|$ (corolaire 2.15 au théorème de Lagrange) et l'exposant est le PPCM qui est donc fini également. Le théorème est déjà démontré dans un sens.

Dans l'autre sens, nous notons $e < \infty$ l'exposant de G , et nous allons prouver que l'ensemble G est fini. Nous commençons par remarquer que tous les éléments de G sont des racines du polynôme $X^e - 1$, et ensuite nous nous lançons dans le travail.

(1) Générateurs

Le groupe G est une partie de $\mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ dont nous considérons l'algèbre engendrée¹³³ $\mathcal{G}$. Soit $C_1, \dots, C_r$ une famille génératrice de $\mathcal{G}$ constituée d'éléments de G et la fonction

$$\begin{aligned} \tau: G &\rightarrow \mathbb{C}^r \\ A &\mapsto (\mathrm{Tr}(AC_1), \dots, \mathrm{Tr}(AC_r)). \end{aligned} \quad (8.687)$$

- (2) **τ est injective** Soient $A, B \in G$ tels que $\tau(A) = \tau(B)$. Si C_i est un générateur de G , nous avons $\mathrm{Tr}(AC_i) = \mathrm{Tr}(BC_i)$ et par la linéarité de la trace, nous avons

$$\mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(BM) \quad (8.688) \quad \text{EqnCymKW}$$

pour tout $M \in G$. Notons par ailleurs

$$N = AB^{-1} - \mathbb{1}, \quad (8.689)$$

qui est diagonalisable parce que $AB^{-1} \in G$ et donc est annulé par le polynôme $X^e - 1$ qui est scindé à racines simples. Du coup AB^{-1} est diagonalisable ; posons $PAB^{-1}P^{-1} = D$, alors $P(AB^{-1} - \mathbb{1})P^{-1} = D - \mathbb{1}$ qui est encore diagonale. Donc N est diagonalisable.

Par ailleurs nous avons

$$\mathrm{Tr}((AB^{-1})^p) = \mathrm{Tr}(AB^{-1}(AB^{-1})^{p-1}) \quad (8.690a)$$

$$= \mathrm{Tr}(BB^{-1}(AB^{-1})^{p-1}) \quad (8.688) \quad (8.690b)$$

$$= \mathrm{Tr}((AB^{-1})^{p-1}). \quad (8.690c)$$

En continuant nous obtenons

$$\mathrm{Tr}((AB^{-1})^p) = \mathrm{Tr}(\mathbb{1}) = n. \quad (8.691)$$

D'autre part,

$$N^k = (AB^{-1} - \mathbb{1})^k = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} (-1)^{k-p} (AB^{-1})^p \quad (8.692)$$

En prenant la trace, et en tenant compte du fait que $\mathrm{Tr}((AB^{-1})^p) = n$,

$$\mathrm{Tr}(N^k) = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} (-1)^{k-p} n = n(1-1)^k = 0. \quad (8.693)$$

Donc la trace de N^k est nulle et le lemme 8.210 nous enseigne que N est alors nilpotente. Étant donné qu'elle est aussi diagonalisable, elle est nulle. Nous en concluons que $AB^{-1} = \mathbb{1}$ et donc que $A = B$. La fonction τ est donc injective.

132. Définition 1.413.

133. Définition 1.451.

(3) **Nombre fini de valeurs**

Les éléments de G sont annulés par $X^e - 1$ qui est un polynôme scindé à racines simples. Donc le polynôme minimal d'un élément de G est (a fortiori) scindé à racines simples et le théorème 8.218 nous assure alors que ces éléments sont diagonalisables. Du coup les valeurs propres des matrices de G sont des racines e ïèmes de l'unité. Par conséquent les traces des éléments de G ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs : toutes les sommes de n racines e ïèmes de l'unité. Mais vu que les C_i sont dans G , nous avons

$$\text{Image}(\tau) = \{\text{Tr}(A) \text{ tel que } A \in G\}^r, \quad (8.694)$$

qui est un ensemble fini. Par conséquent G est fini parce que τ est injective. □

8.20 Ellipsoïde

Lemme 8.312.

Toute matrice peut être décomposée de façon unique en une partie symétrique et une partie antisymétrique. Cette décomposition est donnée par

$$S = \frac{M + M^t}{2}, \quad A = \frac{M - M^t}{2} \quad (8.695)$$

Démonstration. L'existence est une vérification immédiate de $S + A = M$ en utilisant (8.695). Pour l'unicité, si $S + A = S' + A'$ alors $S - S' = A - A'$. Mais $S - S'$ est symétrique et $A - A'$ est antisymétrique ; l'égalité implique l'annulation des deux membres, c'est-à-dire $S = S'$ et $A = A'$. □

Définition 8.313.

Un **ellipsoïde** dans $\mathbb{R}^n$ centré en v est le lieu des points x vérifiant l'équation

$$\langle x - v, M(x - v) \rangle = 1 \quad (8.696)$$

où M est une matrice symétrique strictement définie positive¹³⁴.

Lorsque nous parlons d'ellipsoïde plein, il suffit de changer l'égalité en une inégalité.

Remarque 8.314.

Le fait que M soit symétrique n'est pas tout à fait obligatoire ; la chose importante est que toutes les valeurs propres soient strictement positives. En effet si M a toutes ses valeurs propres strictement positives, nous nommons S la partie symétrique de M et A la partie antisymétrique (lemme 8.312). Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ nous avons

$$x^t A x = \langle x, A x \rangle = \langle A^t x, x \rangle = -\langle A x, x \rangle = -\langle x, A x \rangle, \quad (8.697)$$

donc $x^t A x = 0$. L'équation $x^t M x = 1$ est donc équivalente à $x^t S x = 1$ (elles ont les mêmes solutions).

De plus S reste strictement définie positive parce que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ nous avons

$$0 < x^t M x = x^t S x. \quad (8.698)$$

Proposition 8.315.

Si $\mathcal{E}$ est un ellipsoïde centrée à l'origine, il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle son équation est :

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1. \quad (8.699)$$

134. Définition 8.229.

Démonstration. Nous avons une matrice symétrique strictement définie positive S telle que l'équation soit $\langle x, Sx \rangle = 1$. Le théorème spectral 8.226 nous fournit une base orthonormale $\{e_i\}$ dans laquelle $Se_i = \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i > 0$. En substituant dans l'équation $\langle x, Sx \rangle = 1$ nous trouvons l'équation

$$\sum_i \lambda_i x_i^2 = 1. \quad (8.700)$$

En posant $a_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$, nous trouvons le résultat. Cette définition des a_i est toujours possible parce que $\lambda_i > 0$. □

CorKGJooOmcBzh

Corolaire 8.316.

Un ellipsoïde plein centré en l'origine admet une équation de la forme $q(x) \leq 1$ où q est une forme quadratique strictement définie positive.

Pour rappel de notation, l'ensemble des formes quadratiques strictement définies positives sur l'espace vectoriel E est noté $Q^{++}(E)$.

Démonstration. Soit $\{e_i\}$ une base de $\mathbb{R}^n$ telle que l'ellipsoïde $\mathcal{E}$ ait pour équation

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i^2} \leq 1. \quad (8.701)$$

Nous considérons la forme quadratique

$$\begin{aligned} q: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{i=1}^n \frac{\langle x, e_i \rangle^2}{a_i^2}. \end{aligned} \quad (8.702)$$

Nous avons évidemment $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } q(x) \leq 1\}$. De plus la forme q est strictement définie positive parce que dès que $x \neq 0$, au moins un des produits scalaires $\langle x, e_i \rangle$ est non nul et $q(x) > 0$. □

8.21 Système d'équations linéaires : méthode de Gauss

Pour résoudre un système d'équations linéaires, on procède comme suit :

- (1) Écrire le système sous forme matricielle.

$$\text{p.ex. } \begin{cases} 2x + 3y &= 5 \\ x + 2y &= 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

- (2) Se ramener à une matrice avec un maximum de 0 dans la partie de gauche en utilisant les transformations admissibles :

- (2a) Remplacer une ligne par elle-même + un multiple d'une autre ;

$$\text{p.ex. } \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 - 2 \cdot L_2 \mapsto L'_1} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

- (2b) Remplacer une ligne par un multiple d'elle-même ;

$$\text{p.ex. } \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{-L_1 \mapsto L'_1} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

- (2c) Permuter des lignes.

$$\text{p.ex. } \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \mapsto L'_2 \text{ et } L_2 \mapsto L'_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

(3) Retransformer la matrice obtenue en système d'équations.

$$\text{p.ex. } \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x &= -2 \\ y &= 3 \end{cases}$$

Remarque 8.317. — Si on obtient une ligne de zéros, on peut l'enlever :

$$\text{p.ex. } \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

— Si on obtient une ligne de zéros suivie d'un nombre non-nul, le système d'équations n'a pas de solution :

$$\text{p.ex. } \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} \dots \\ \dots \\ 0x + 0y + 0z = 7 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{Impossible}$$

— Si on a moins d'équations que d'inconnues, alors il y a une infinité de solutions qui dépendent d'un ou plusieurs paramètres :

$$\text{p.ex. } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2z = 2 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$