Le Frido 2022,
volume 2
Laurent Claessens

Plusieurs extensions et versions de ce livre.

1. La version courante, régulièrement mise à jour et qui deviendra petit à petit le Frido 2023. Téléchargeable sur

   `https://laurent.claessens-donadello.eu/pdf/lefrido.pdf`

2. La version la plus complète, contenant beaucoup de géométrie différentielle

   `https://laurent.claessens-donadello.eu/pdf/giulietta.pdf`

3. Et bien entendu les sources LaTeX

   `https://github.com/LaurentClaessens/mazhe`

ISBN : 979-10-97085-31-5

Chapitre 10

Analyse réelle : topologie et continuité

10.1 Intervalles

Définition 10.1 (Intervalle)**.**
*Une partie I de $\mathbb{R}$ est un **intervalle** si pour tout $a, b \in I$ nous avons $t \in I$ dès que $a \leqslant t \leqslant b$.*

Proposition 10.2.
À propos d'intervalles.

Un intervalle[1] *est ouvert si il est de la forme $]a, b[$ avec éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.*

Un intervalle est fermé si il est de la forme $[a, b]$ ou $]-\infty, b]$ ou $[a, +\infty[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Remarque 10.3.
L'ensemble $\mathbb{R}$ ne contient pas $+\infty$ et $-\infty$. L'intervalle $[-\infty, 5]$ par exemple, n'est pas une partie de $\mathbb{R}$.

Exemple 10.4. (1) Les ensembles $]3, 7[$ et $]-\infty, \pi[$ sont des intervalles ouverts.

(2) Les ensembles $[10, 15]$ et $[-1, +\infty[$ sont des intervalles fermés.

(3) L'ensemble $]-4, -2[\cup]2, 9[$ n'est pas un intervalle (il y a un « trou » entre -2 et 2).

(4) L'ensemble $\mathbb{R}$ lui-même est un intervalle ; par convention, il est à la fois ouvert et fermé.

Un intervalle peut n'être ni ouvert ni fermé ; par exemple $]4, 8]$. Cet intervalle est « ouvert en 4 et fermé en 8 » . △

Définition 10.5 (Fonction, domaine, image, graphe)**.**
*Soient X et Y deux ensembles. Une **fonction** f définie sur X et à valeurs dans Y est une partie de $X \times Y$ telle que pour tout $x \in X$, il existe un unique $y \in Y$ tel que $(x, y) \in f$.*

Notons qu'il n'est pas demandé que pour tout x, il existe y tel que $(x, y) \in f$. Autrement dit, la notation « $f \colon X \to Y$ » ne suppose pas que f est surjective sur Y. Mais elle doit être définie sur tout X.

Nous écrivons $y = f(x)$ pour dire $(x, y) \in f$.

— *La partie de X qui contient tous les x sur lesquels f peut opérer est dite **domaine** de f. Le domaine de f est indiqué par $\operatorname{Domaine} f$.*

— *L'élément de $y \in Y$ associé par f à un élément $x \in \operatorname{Domaine} f$ (c'est-à-dire $f(x) = y$) est appellé **image** de x par f. L'**image** de la fonction f est la partie de Y qui contient les images de tous les éléments de $\operatorname{Domaine} f$. L'image de f est indiquée par $\Im f$.*

— *Le **graphe** de f est l'ensemble de tous les couples $(x, f(x))$ pour $x \in \operatorname{Domaine} f$. Le graphe de f est une partie de l'ensemble noté $X \times Y$ et il est indiqué par $\operatorname{Graph} f$. Dans ce chapitre $X = \mathbb{R}$ et $Y = \mathbb{R}$, donc le graphe de f est contenu dans le plan cartésien.*

1. Définition 10.1.

Définition 10.6 (Fonction croissante, décroissante et monotone)**.**
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

(1) La fonction f est ***croissante*** *sur I si pour tout $x < y$ dans I nous avons $f(x) \leqslant f(y)$. Elle est* strictement *croissante si $f(x) < f(y)$ dès que $x < y$.*

(2) La fonction f est ***décroissante*** *sur I si pour tout $x < y$ dans I nous avons $f(x) \geqslant f(y)$. Elle est* strictement *décroissante si $f(x) > f(y)$ dès que $x < y$.*

(3) La fonction f est dite ***monotone*** *sur I si elle est, soit croissante, soit décroissante, sur I.*

Exemple 10.7.
La fonction $x \mapsto x^2$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ et croissante sur l'intervalle $[0, \infty[$. Elle n'est par contre ni croissante ni décroissante sur l'intervalle $[-4, 3]$. △

10.2 Application réciproque

10.2.1 Définitions

Les définitions d'injection, surjection, bijection et d'application réciproque sont les définitions 7.176 et 7.177.

Exemple 10.8. (1) La fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ parce qu'il n'existe aucun x tel que $x^2 = -1$.

(2) Nous verrons un peu plus tard (12.385) que la fonction

$$\begin{aligned} f\colon [0, +\infty[&\to [0, +\infty[\\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \tag{10.1}$$

est une bijection. Notez que c'est la même fonction que celle de l'exemple précédent. Seul l'intervalle sur lequel nous nous plaçons a changé.

(3) La fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to [0, \infty[\\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \tag{10.2}$$

n'est pas une bijection parce qu'il existe plusieurs x pour lesquels $f(x) = 4$.

En conclusion : il est très important de préciser les domaines des fonctions considérées. △

Remarque 10.9.
Dire que la fonction $f\colon I \to J$ est bijective, c'est dire que l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x peut être résolue de façon univoque pour tout $y \in J$.

Lemme 10.10.
Toute fonction strictement monotone sur un intervalle I est injective.

Exemple 10.11.
Trouvons la fonction réciproque de la fonction affine $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x - 2$. Si $y \in \mathbb{R}$, le nombre $f^{-1}(y)$ est la valeur de x pour laquelle $f(x) = y$. Il s'agit donc de résoudre

$$3x - 2 = y \tag{10.3}$$

par rapport à x. La solution est $x = \frac{y+2}{3}$ et donc nous écrivons

$$f^{-1}(y) = \frac{y+2}{3}. \tag{10.4}$$

△

10.2.2 Graphe de la fonction réciproque

Par définition le graphe de la fonction f est l'ensemble des points de la forme (x, y) vérifiant $y = f(x)$. Afin de déterminer le graphe de la bijection réciproque nous pouvons faire le raisonnement suivant.

Le point (x_0, y_0) est sur le graphe de f

$\Leftrightarrow$

La relation $f(x_0) = y_0$ est vérifiée

$\Leftrightarrow$

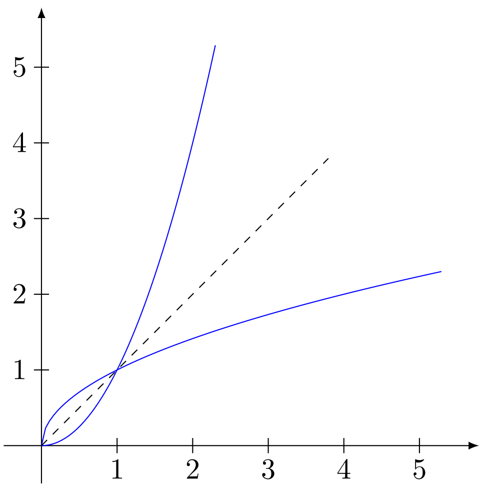
La relation $x_0 = f^{-1}(y_0)$ est vérifiée

$\Leftrightarrow$

Le point (y_0, x_0) est sur le graphe de f^{-1}.

À retenir 10.12
Dans un repère orthonormal, le graphe de la bijection réciproque est obtenu à partir du graphe de f en effectuant une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Le dessin suivant montre le cas de la courbe de la fonction carré comparé à celle de la racine carrée.



10.3 Topologie sur l'ensemble des réels

Nous allons à présent donner la topologie sur $\mathbb{R}$ et ainsi résoudre les questions laissées en suspens lors de la construction des réels, voir 1.350.

Afin de pouvoir étudier la topologie des espaces métriques, il faut connaître quelques propriétés des réels, parce que nous allons étudier la fonction « distance » qui est une fonction continue à valeurs dans les réels.

La valeur absolue de la définition 1.318(2) permet de définir une norme sur $\mathbb{R}$.

Lemme 10.13.
L'application

$$x \mapsto |x| \tag{10.5}$$

est une norme[2] *sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Grâce au lemme 1.322 et à la remarque 1.323, on a, pour tous $x,\ y,\ \lambda \in \mathbb{R}$:

(1) $|x| = 0$ implique $x = 0$,

2. Définition 7.136.

(2) $|\lambda x| = |\lambda||x|$,

(3) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$,

et donc, les conditions de la définition 7.136 sont immédiatement vérifiées. $\square$

Définition 10.14 (Topologie sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{Q}$)**.**
Le lemme 10.13 donne une norme sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ à partir de la valeur absolue. La définition 7.98 donne alors une structure d'espace topologique. Hors cas rarissimes qui seront signalés, nous utiliserons toujours cette topologie sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{Q}$.

Proposition 10.15.
Les rationnels sont denses dans les réels[3]*.*

Démonstration. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\epsilon \in \mathbb{R}^+$. Nous devons prouver l'existence d'un rationnel dans $B(x,\epsilon)$. Le lemme 1.375 dit qu'il existe un rationnel dans $]x-\epsilon/2, x+\epsilon/2[$ et donc dans $B(x,\epsilon)$. $\square$

Proposition 10.16 ([1])**.**
Quel que soit le réel x, il existe une suite croissante de rationnels convergente vers x.

Démonstration. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\delta \in \mathbb{R}$; comme $x-\delta$ et x sont des réels, le lemme 1.375 donne un élément $q_\delta \in \mathbb{Q}$ tel que

$$x - \delta < x_\delta < x. \tag{10.6}$$

Il suffit alors de pêcher parmi ces q_δ pour trouver une suite croissante, et on montrera que cette suite converge vers x.

Soit x_0 un rationnel plus petit que x. Nous posons $\delta_0 = x - x_0$ et ensuite :

$$\begin{cases} \delta_i = x - x_i & (10.7a)\\ x_{i+1} = q_{\delta_i/2} \in \mathbb{Q}. & (10.7b)\end{cases}$$

Ainsi nous avons pour tout i les inégalités

$$x_i = x - \delta_i < x - \frac{\delta_i}{2} < x_{i+1} < x. \tag{10.8}$$

La suite (x_i) est donc une suite de rationnels, croissante et toujours plus petite que x. Mais nous avons à chaque étape $\delta_{i+1} < \frac{\delta_i}{2}$, ce qui implique que la suite des δ_i converge vers 0. Soit $\epsilon > 0$. Il existe k_0 tel que pour tout $k > k_0$, $\delta_k < \epsilon$. Pour un tel k, nous avons alors

$$x_{k+1} \in B(x, \frac{\delta_k}{2}) \subset B(x,\epsilon). \tag{10.9}$$

Tous les x_k, pour $k > k_0 + 1$, sont tels que $|x - x_k| < \epsilon$: la suite des x_k converge donc vers x. $\square$

10.3.1 Compacité pour les réels

Proposition 10.17.
Les parties compactes[4] *de $\mathbb{R}$ sont fermées et bornées.*

Démonstration. Prouvons d'abord qu'un ensemble compact est borné. Pour cela, supposons que K est un compact non borné vers le haut[5]. Donc il existe une suite infinie de nombres strictement croissante $x_1 < x_2 < \ldots$ tels que $x_i \in K$. Prenons n'importe quel recouvrement ouvert de la partie de K plus petite ou égale à x_1, et complétons ce recouvrement par les ouverts $\mathcal{O}_i =]x_{i-1}, x_i[$. Le tout forme bien un recouvrement de K par des ouverts.

3. Pour les topologies usuelles données en la définition 10.14.
4. Définition 7.66.
5. Nous laissons à titre d'exercice le cas où K est borné par le haut et pas par le bas.

Il n'y a cependant pas moyen d'en tirer un sous-recouvrement fini parce que si on ne prend qu'un nombre fini parmi les $\mathcal{O}_i$, on en aura fatalement un maximum, disons $\mathcal{O}_k$. Dans ce cas, les points x_{k+1}, x_{k+1},…ne seront pas dans le choix fini d'ouverts.

Cela prouve que K doit être borné.

Pour prouver que K est fermé, nous allons prouver que le complémentaire est ouvert. Et pour cela, nous allons prouver que si le complémentaire n'est pas ouvert, alors nous pouvons construire un recouvrement de K dont on ne peut pas extraire de sous-recouvrement fini.

Si $\mathbb{R}\backslash K$ n'est pas ouvert, il possède un point, disons x, tel que tout voisinage de x intersecte K. Soit $B(x, \epsilon_1)$, un de ces voisinages, et prenons $k_1 \in K \cap B(x, \epsilon_1)$. Ensuite, nous prenons ϵ_2 tel que k_1 ne soit pas dans $B(x, \epsilon_2)$, et nous choisissons $k_2 \in K \cap B(x, \epsilon_2)$. De cette manière, nous construisons une suite de $k_i \in K$ tous différents et de plus en plus proches de x. Prenons un recouvrement quelconque par des ouverts de la partie de K qui n'est pas dans $B(x, \epsilon_1)$. Les nombres k_i ne sont pas dans ce recouvrement.

Nous ajoutons à ce recouvrement les ensembles $\mathcal{O} =]k_i, k_{i+1}[$. Le tout forme un recouvrement (infini) par des ouverts dont il n'y a pas moyen de tirer un sous-recouvrement fini, pour exactement la même raison que la première fois. □

Théorème 10.18 (Borel-Lebesgue)**.**
Un intervalle de $\mathbb{R}$ est compact si et seulement si il est de la forme $[a, b]$.

Démonstration. Tous les intervalles de $\mathbb{R}$ sont listés dans la proposition 1.396. Un compact est fermé et borné (proposition 10.17). Donc les intervalles dont une borne est $\pm\infty$ ne sont pas compacts. Parmi les intervalles $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$ et $[a, b]$, seul le dernier est fermé. Nous avons prouvé que si un intervalle est compact, alors il est de la forme $[a, b]$.

Nous prouvons à présent l'implication inverse : tous les intervalles de la forme $[a, b]$ sont compacts.

Soit Ω, un recouvrement du segment $[a, b]$ par des ouverts, c'est-à-dire que

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{\mathcal{O} \in \Omega} \mathcal{O}. \tag{10.10}$$

Nous notons par M le sous-ensemble de $[a, b]$ des points m tels que l'intervalle $[a, m]$ peut être recouvert par un sous-ensemble fini de Ω. C'est-à-dire que M est le sous-ensemble de $[a, b]$ sur lequel le théorème est vrai. Le but est maintenant de prouver que $M = [a, b]$.

M **est non vide** En effet, $a \in M$ parce qu'il existe un ouvert $\mathcal{O} \in \Omega$ tel que $a \in \mathcal{O}$. Donc $\mathcal{O}$ tout seul recouvre l'intervalle $[a, a]$.

M **est un intervalle** Soient m_1, $m_2 \in M$. Le but est de montrer que si $m' \in [m_1, m_2]$, alors $m' \in M$. Il y a un sous-recouvrement fini de l'intervalle $[a, m_2]$ (par définition de $m_2 \in M$). Ce sous-recouvrement fini recouvre évidemment aussi $[a, m']$ parce que $[a, m'] \subseteq [a, m_2]$, donc $m' \in M$.

M **est un ensemble ouvert** Soit $m \in M$. Le but est de prouver qu'il y a un ouvert autour de m qui est contenu dans M. Admettons que Ω' soit un sous-recouvrement fini qui contienne l'intervalle $[a, m]$. Dans ce cas, on a un ouvert $\mathcal{O} \in \Omega'$ tel que $m \in \mathcal{O}$. Tous les points de $\mathcal{O}$ sont dans M, puisqu'ils sont tous recouverts par Ω'. Donc $\mathcal{O}$ est un voisinage de m contenu dans M.

M **est un ensemble fermé** M est un intervalle qui commence en a, en contenant a, et qui finit on ne sait pas encore où. Il est donc soit de la forme $[a, m]$, soit de la forme $[a, m[$. Nous allons montrer que M est de la première forme en démontrant que M contient son supremum s. Ce supremum est un élément de $[a, b]$, et donc il est contenu dans un des ouverts de Ω. Disons $s \in \mathcal{O}_s$. Soit c, un élément de $\mathcal{O}_s$ strictement plus petit que s ; étant donné que s est supremum de M, cet élément c est dans M, et donc on a un sous-recouvrement fini Ω' qui recouvre $[a, c]$. Maintenant, le sous-recouvrement constitué de Ω' et de $\mathcal{O}_s$ est fini et recouvre $[a, s]$.

Nous pouvons maintenant conclure : le seul intervalle non vide de $[a, b]$ qui soit à la fois ouvert et fermé est $[a, b]$ lui-même (proposition 7.62), ce qui prouve que $M = [a, b]$, et donc que $[a, b]$ est compact [6]. □

Lemme 10.19 ([258]).
Si $a < b \in \mathbb{R}$ alors le segment $[a, b]$ est compact [7].

Démonstration. Soit $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ un recouvrement de $[a, b]$ par des ouverts. Nous posons

$$M = \{x \in [a, b] \text{ tel que } [a, x] \text{ admet un sous-recouvrement fini extrait de } \{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}\}. \tag{10.11}$$

Notre but est de prouver que $b \in M$.

(i) **a est dans M** Le point a est naturellement dans un des $\mathcal{O}_i$. L'intervalle $[a, a]$ est donc recouvert par un seul des $\mathcal{O}_i$.

(ii) **M est un intervalle** Soient $m \in M$ et $m' \in [a, m[$. Le sous-recouvrement fini qui recouvre $[a, m]$ recouvre a fortiori $[a, m']$.

(iii) **Les trois possibilités restantes** À ce niveau de la preuve, il reste trois possibilités pour M soit il est de la forme $[a, c]$ ou $[a, c[$ avec $c < b$, soit il est de la forme $[a, b]$. Nous allons maintenant éliminer les deux premiers cas.

(iv) **Ce que M n'est pas** D'abord M n'est pas de la forme $[a, c[$ avec $c < b$. Par l'absurde, commençons par considérer $\mathcal{O}_{i_0}$ un ouvert du recouvrement qui contient c ; choisissons $m \in \mathcal{O}_{i_0}$ tel que $m < c$. Alors $m \in M$, et, si nous joignons $\mathcal{O}_{i_0}$ à un recouvrement fini de $[a, m]$ alors nous avons un recouvrement fini de $[a, c]$. On en déduit $c \in M$.

Ensuite M n'est pas de la forme $[a, c]$ avec $c < b$. En effet si on a un recouvrement fini de $[a, c]$ par des ouverts, alors un de ces ouverts contient c et donc contient des éléments de $[a, b]$ plus grands que c.

Nous déduisons que $M = [a, b]$ et qu'il est possible d'extraire un sous-recouvrement fini recouvrant $[a, b]$. □

Lemme 10.20 ([1]).
Si K_1 et K_2 sont des compacts dans $\mathbb{R}$ alors $K_1 \times K_2$ est compact dans $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. Soit $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$ un recouvrement de $K_1 \times K_2$ par des ouverts ; grâce au lemme 7.80 nous pouvons supposer que ce sont des carrés. Pour chaque $x \in K_1$, l'ensemble $\{x\} \times K_2$ est compact et donc recouvert par un nombre fini des $\mathcal{O}_i$. Soit R_x un ensemble fini des $\mathcal{O}_i$ recouvrant $\{x\} \times K_2$.

Comme R_x est une collection finie de carrés, nous pouvons considérer m_x, le minimum des rayons. L'ensemble K_1 est recouvert par les boules $B(x, m_x)$ et il existe donc une collection finie de $\{x_i\}_{i\in A}$ tels que $B(x_i, m_{x_i})$ recouvre K_1.

Alors $\{R_{x_i}\}_{i\in A}$ recouvre $K_1 \times K_2$ parce que R_{x_i} recouvre l'ensemble $B(x_i, m_{x_i}) \times \{K_2\}$. □

10.3.2 Conséquence : les fermés bornés sont compacts

Théorème 10.21 (Théorème de Borel-Lebesgue).
Une partie d'un espace vectoriel normé réel de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Démonstration. Sens direct.

6. Si vous n'aimez pas le coup du fermé et ouvert, le lemme 10.19 donne une autre preuve.
7. Définition 7.66

(i) **Compact implique borné** En effet si K est non borné dans E alors K contient une suite (x_n) avec $\|x_n\| > n$. Les boules $B_i(x_i, \frac{1}{3})$ sont disjointes. On pose $\mathcal{O}_0 = \complement \bigcup_i \overline{B(x_i, \frac{1}{5})}$, qui est ouvert comme complément d'un fermé. Pour $i \geqslant 1$ nous posons $\mathcal{O}_i = B(x_i, \frac{1}{4})$. Nous avons

$$K \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_i \tag{10.12}$$

mais puisque x_i est uniquement dans $\mathcal{O}_i$, nous ne pouvons pas extraire de sous-recouvrement fini.

(ii) **Compact implique fermé** C'est le lemme 7.82(2).

Sens réciproque.

(i) **Un intervalle fermé et borné est compact dans $\mathbb{R}$** C'est le lemme 10.19.

(ii) **Un produit de segments est compact** Le produit de deux compacts de $\mathbb{R}$ est un compact dans $\mathbb{R}^2$ par le lemme 10.20.

(iii) **Un fermé et borné est compact** Soit K fermé et borné. Puisque K est borné, il est contenu dans un produit de segments. L'ensemble K est donc compact parce que fermé dans un compact, lemme 7.82.

□

Exemple 10.22 (Compacité de la boule unité)**.**
La boule unité fermée $\overline{B(0,1)}$ d'un espace vectoriel normé de dimension finie est compacte parce que fermée et bornée. En dimension infinie, cela n'est plus le cas. Certes la boule unité est encore fermée et bornée, mais elle n'est plus compacte. En effet nous allons donner un recouvrement par des ouverts duquel il ne sera pas possible d'extraire un sous-recouvrement fini.

Autour de chacune des extrémités des vecteurs de base, nous considérons la boule $A_i = B(e_i, \frac{1}{3})$. Ensuite nous considérons aussi l'ouvert

$$B(0,1) \backslash \bigcup_i \overline{B(e_i, \frac{1}{4})}. \tag{10.13}$$

Le tout recouvre $B(0,1)$ mais toutes les premières boules sont nécessaires. △

Le théorème de Bolzano-Weierstrass 7.250 nous permettra de prouver plus simplement la non compacité en dimension infinie. Voir l'exemple 7.125.

10.3.3 Suites et limites dans les réels

10.3.3.1 Limites, convergence

Dans le cas de suites réelles, nous avons la caractérisation suivante qui est souvent donnée comme une définition lorsque seule la topologie sur $\mathbb{R}$ est considérée.

Proposition 10.23 (Limite d'une suite numérique)**.**
La suite (x_n) est convergente si et seulement si il existe un réel ℓ tel que

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geqslant N, |x_n - \ell| < \epsilon. \tag{10.14}$$

Dans ce cas, le nombre ℓ est la limite de la suite (x_n).

Proposition 10.24.
Une suite (x_n) dans un espace vectoriel normé E est convergente[8] *si et seulement si il existe un élément $\ell \in E$ tel que*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geqslant N \Rightarrow \|x_n - \ell\| < \varepsilon. \tag{10.15}$$

Dans ce cas, ℓ est la limite de la suite (x_n).

8. Définition 7.12.

Démonstration. En deux parties.

(i) **Sens direct** Si $x_n \to \ell$ et si $\epsilon > 0$ il existe N_ϵ tel que pour tout $n \geqslant N$ nous avons $x_n \in B(\ell, \epsilon)$ (parce que cette boule est un ouvert contenant ℓ). Considérant la définition d'une boule, cette condition s'écrit bien $\|x_n - \ell\| < \epsilon$.

(ii) **Sens inverse** Dans l'autre sens, soit $\mathcal{O}$ un ouvert contenant ℓ. Par définition de la topologie, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(\ell, \epsilon) \subset \mathcal{O}$. La condition (10.14) nous assure qu'il existe N_ϵ tel que pour tout $n \geqslant N_\epsilon$ nous ayons

$$x_n \in B(\ell, \epsilon) \subset \mathcal{O}, \tag{10.16}$$

ce qui assure que la suite (x_n) converge vers ℓ pour la topologie métrique de E.

□

Une façon équivalente d'exprimer le critère (10.14) est de dire que pour tout ϵ positif, il existe un rang $N \in \mathbb{R}$ tel que l'intervalle $[\ell - \epsilon, \ell + \epsilon]$ contient tous les termes x_n au-delà de N.

Il est à noter que le rang N dont il est question dans la définition de suite convergente dépend de ϵ.

10.3.4 Opérations sur les limites

Proposition 10.25 ([1]).
Soient des suites à valeurs réelles (a_i) et (b_j). Si elles sont convergentes, alors la suite ab est convergente et

$$\big(\lim_i a_i\big)\big(\lim_j b_j\big) = \lim_i (a_i b_i). \tag{10.17}$$

Démonstration. Nous nommons a et b les limites des suites (a_i) et (b_j). Soit $\epsilon > 0$ ainsi que $i \in \mathbb{N}$. Nous avons la majoration

$$|a_i b_i - ab| \leqslant |a_i b_i - a_i b| + |a_i b - ab| \tag{10.18a}$$
$$\leqslant |a_i||b_i - b| + |b||a_i - a|. \tag{10.18b}$$

Comme la suite (a_i) est convergente, elle est bornée[9]. Nous pouvons donc majorer $|a_i|$ par $R > 0$ qui ne dépend pas de i. Soit $\eta > 0$ tel que $(R + b)\eta < \epsilon$. Alors en prenant i assez grand pour que $|b_i - b| < \eta$ et $|a_i - a| < \eta$, nous avons bien

$$|a_i b_i - ab| \leqslant (R + b)\eta < \epsilon. \tag{10.19}$$

□

Proposition 10.26.
Soient des suites (x_n) et (y_n) dans un espace vectoriel normé E. Si $x_n \xrightarrow{E} x$ et $y_n \xrightarrow{E} y$, alors

$$x_n + y_n \xrightarrow{E} x + y. \tag{10.20}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Nous considérons N tel que si $n \geqslant N$, alors $\|x_n - x\| \leqslant \epsilon$ et $\|y_n - y\| \leqslant \epsilon$. En utilisant l'inégalité 7.136(4),

$$\|x_y + y_n - (x + y)\| \leqslant \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \leqslant 2\epsilon. \tag{10.21}$$

Donc la suite $(x_n + y_n)$ converge vers $x + y$. □

Lemme 10.27.
La fonction

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned} \tag{10.22}$$

est continue.

9. Par 7.101. Attention : soyez capable d'adapter au cas présent.

Démonstration. Pour rappel, la topologie considérée sur $\mathbb{R}^n$ est celle de la définition 7.191. En vertu de la proposition 7.220, il est suffisant de prouver la continuité séquentielle. Soit donc une suite convergente

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} (x, y). \tag{10.23}$$

Nous devons prouver que

$$f(x_n, y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} f(x, y). \tag{10.24}$$

La proposition 7.56 nous permet de déduire la convergence composante par composante : $x_n \xrightarrow{\mathbb{R}} x$ et $y_n \xrightarrow{\mathbb{R}} x$. En permutant somme et limite (proposition 10.26) nous avons le calcul

$$f(x_n, y_n) = x_n + y_n \xrightarrow{\mathbb{R}} x + y = f(x, y). \tag{10.25}$$

D'où la convergence demandée. □

10.3.5 Exemples

Lemme 10.28.
Quelques suites usuelles.

(1) La suite $x_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0.
(2) La suite $x_n = (-1)^n$ ne converge pas.

10.3.6 Limites infinies

Deux limites pour voir comment ça fonctionne.

Lemme 10.29.
Si $r > 1$ nous avons :

(1) $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$.
(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{n} = \infty$.

Démonstration. Puisque $r > 1$ nous pouvons écrire $r = 1 + \delta$ avec $\delta > 0$. La formule du binôme de Newton (3.65) nous donne

$$(1+\delta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta^k > \binom{n}{1} \delta = n\delta. \tag{10.26}$$

La proposition 1.374 ($\mathbb{R}$ est archimédien) nous indique que $n\delta$ est arbitrairement grand lorsque n est grand, quelle que soit $\delta > 0$. Cela finit la preuve de la première limite.

Pour la seconde, nous posons $a_n = \frac{r^n}{n}$. Nous avons

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} r. \tag{10.27}$$

Comme $\frac{n}{n+1} \to 1$, la suite $\frac{n}{n+1} r$ tend vers $r > 1$, et en particulier pour tout $\delta > 0$ tel que $r > 1 + \delta$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n > N$,

$$\frac{n}{n+1} r > 1 + \delta. \tag{10.28}$$

Soit maintenant $k \in \mathbb{N}$. En utilisant un produit télescopique,

$$a_{N+k} = a_N \frac{a_{N+1}}{a_N} \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdots \frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}} > a_N (1+\delta)^{k-1}. \tag{10.29}$$

Or $(1+\delta)^{k-1}$ tend vers ∞ lorsque $k \to \infty$ par le premier point. Donc nous avons $\lim_{n\to\infty} r^n/n = \infty$. □

Définition 10.30.
*Nous disons que deux suites (u_n) et (v_n) sont **équivalentes** si il existe une application $\alpha \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que*

(1) pour tout n à partir d'un certain rang, $u_n = v_n \alpha(n)$
(2) $\alpha(n) \to 1$.

10.3.7 Suites croissantes et bornées

Une suite est dite **contenue** dans un ensemble A si $x_n \in A$ pour tout n. Une suite est **bornée supérieurement** si il existe un M tel que $x_n \leqslant M$ pour tout n. De la même manière, la suite est bornée inférieurement si il existe un m tel que $x_n \geqslant m$ pour tout n.

Le lemme suivant est souvent utilisé pour prouver qu'une suite est convergente. Une version pour les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sera la proposition 12.39.

Lemme 10.31 ([1]).
Une suite croissante et bornée supérieurement converge. Une suite décroissante bornée inférieurement est convergente.

Démonstration. Supposons que (x_n) soit une suite croissante non convergente. En particulier, par le théorème 7.247, cette suite n'est pas de Cauchy et il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $p > N$ vérifiant

$$|x_p - x_N| > \epsilon. \tag{10.30}$$

Vu que $p > N$, et vu que la suite est croissante, nous pouvons récrire cette condition sous la forme $x_p \geqslant x_N + \epsilon$.

Nous définissons ainsi une application $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

$$x_{p(N)} > x_N + \epsilon. \tag{10.31}$$

Une telle application n'est pas du tout unique, mais nous en considérons une telle.

Il est vite vu par récurrence que

$$x_{p^k(0)} \geqslant x_0 + k\epsilon. \tag{10.32}$$

La suite $n \mapsto x_{p^n(0)}$ est donc une sous-suite qui tend vers l'infini. Or cela n'est pas possible parce que la suite (x_n) est bornée. Donc contradiction, donc (x_n) est convergente. □

Une erreur courante est de croire que la borne est la limite : le lemme n'affirme pas ça. Par contre il est vrai que la borne donne …hum …une borne inférieure (ou supérieure) pour la limite.

Proposition 10.32.
Une suite (x_n) dans $\mathbb{R}^m$ est convergente dans $\mathbb{R}^m$ si et seulement si les suites de chaque composante sont convergentes dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas nous avons

$$\lim x_n = \Big(\lim(x_n)_1, \lim(x_n)_2, \ldots, \lim(x_n)_m \Big) \tag{10.33}$$

où $(x_n)_k$ dénote la k-ième composante de (x_n).

Exemple 10.33.
La suite $x_n = \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$ converge vers $(0, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$. En effet, en utilisant la proposition 10.32, nous devons calculer séparément les limites

$$\begin{aligned} \lim \frac{1}{n} &= 0 \\ \lim \left(1 - \frac{1}{n}\right) &= 1. \end{aligned} \tag{10.34}$$

△

Exemple 10.34.
Étant donné que la suite $(-1)^n$ n'est pas convergente, la suite $x_n = \left((-1)^n, \frac{1}{n}\right)$ n'est pas convergente dans $\mathbb{R}^2$. △

10.3.8 Suites adjacentes

Définition 10.35 ([259]).
Les suites (a_n) et (b_n) sont ***adjacentes*** *si l'une est croissante, l'autre décroissante et si $a_n - b_n \to 0$.*

Théorème 10.36 (Théorème des suites adjacentes).
Nous considérons des suites adjacentes (a_n) et (b_n) avec (a_n) croissante et (b_n) décroissante. Alors

(1) $b_n \geqslant a_n$ pour tout n,

(2) $a_n \leqslant b_q$ pour tout n et q. C'est-à-dire que toute la suite a est plus petite que toute la suite b.

(3) les suites a et b sont convergentes,

(4) les suites a et b convergent vers la même limite, notée ℓ,

(5) nous avons $a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$ pour tout n.

Démonstration. La suite $n \mapsto b_n - a_n$ est décroissante parce que $b_n - a_n \geqslant b_{n+1} - a_{n+1}$. Comme en plus $b_a - a_n \to 0$ nous avons

$$b_n - a_n \geqslant 0 \tag{10.35}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus $a_n \leqslant b_0$ pour tout n parce que si $a_N > b_0$ alors, b étant décroissante, $a_N > b_0 \geqslant b_N$ qui est contraire à ce que nous venons de prouver. La suite a étant croissante et majorée, elle est convergente [10] ; notons ℓ sa limite.

La suite b peut maintenant être écrite par

$$b_n = (b_n - a_n) + a_n \tag{10.36}$$

qui est une somme de deux suites convergentes. Elle est donc convergente et sa limite est la somme des limites [11], donc

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) + \lim_{n\to\infty} a_n = 0 + \ell = \ell. \tag{10.37}$$

Voilà. Donc les suites a et b convergent et ont la même limite.

Pour tout $n, q \in \mathbb{N}$ nous avons l'inégalité $a_n \leqslant b_q$. En prenant la limite $n \to \infty$ nous trouvons

$$\ell \leqslant b_q \tag{10.38}$$

pour tout q. Et de la même façon, $b_n \geqslant a_q$ donne $\ell \geqslant a_q$. L'un avec l'autre donne

$$a_q \leqslant \ell \leqslant b_q \tag{10.39}$$

pour tout $q \in \mathbb{N}$. □

Proposition 10.37 ([260]).
Soit une suite (a_n) dans $\mathbb{R}$. Nous supposons que les suites extraites (a_{2n}) et (a_{2n+1}) convergent vers la même limite notée ℓ.

Alors $a_n \to \ell$.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Il existe N_1 tel que $|a_{2n} - \ell| \leqslant \epsilon$ dès que $n \geqslant N_1$. Il existe également N_2 dès que $|a_{2n+1} - \ell| \leqslant \epsilon$ dès que $n \geqslant N_2$.

Nous posons $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 2\}$ et nous avons, pour tout $n \geqslant N$:

$$|a_n - \ell| \leqslant \epsilon, \tag{10.40}$$

c'est-à-dire que $a \to \ell$. □

10. Proposition 10.31.
11. Proposition 10.26.

10.3.9 Limite supérieure et inférieure

Lemme-Définition 10.38.
Soit (a_n) *une suite dans* $\bar{\mathbb{R}}$*. Les limites suivantes existent dans* $\bar{\mathbb{R}}$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \big(\sup_{k\geqslant n} a_k\big) \tag{10.41}$$

et

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \big(\inf_{k\geqslant n} a_k\big). \tag{10.42}$$

Elles sont nommées ***limite supérieure*** *et* ***limite inférieure*** *de la suite* (a_n)*.*

Démonstration. Pour la limite supérieure, l'ensemble des $k \geqslant n$ est de plus en plus petit lorsque n grandit. Donc les ensembles $A_n = \{a_k \text{ tel que } k \geqslant n\}$ sont emboîtés et la suite $n \to \sup A_n$ est une suite décroissante. Elle a donc une limite dans $\bar{\mathbb{R}}$. □

10.39.
En ce qui concerne les suites d'ensembles, utiles en théorie des probabilités, nous définissons de même. Si les A_n sont des parties d'un ensemble Ω, nous définissons la **limite supérieure** et la **limite inférieure** de la suite A_n par

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{k\geqslant n} A_k \tag{10.43}$$

et

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\geqslant 1} \bigcap_{k\geqslant n} A_k \tag{10.44}$$

Nous avons

$$\limsup A_n = \{\omega \in \Omega \text{ tel que } \omega \in A_n \text{ pour une infinité de } n\}. \tag{10.45}$$

Lemme 10.40.
Nous avons les formules pratiques suivantes :

$$\limsup a_n = \inf_{n\geqslant 1} \big(\sup_{k\geqslant n} a_k\big) \tag{10.46a}$$

$$\liminf a_n = \sup_{n\geqslant 1} \big(\inf_{k\geqslant n} a_k\big). \tag{10.46b}$$

Démonstration. La suite $n \mapsto \sup_{k\geqslant n} a_k$ est une suite décroissante, donc la limite est l'infimum. Même argument pour l'autre. □

Lemme 10.41.
La suite (a_n) *dans* $\mathbb{R}$ *converge si et seulement si*

$$\limsup a_n = \liminf a_n. \tag{10.47}$$

Dans ce cas, $\lim a_n = \limsup a_n = \liminf a_n$*.*

Démonstration. Nous commençons par supposer que $\limsup a_n = \liminf a_n = l$, et nous prouvons que $\lim a_n$ existe et vaut l. Soit $\epsilon > 0$. Il existe N tel que si $n \geqslant N$ nous avons

$$\big|\sup_{k\geqslant n} a_k - l\big| < \epsilon \tag{10.48}$$

et

$$\big|\inf_{k\geqslant n} a_k - l\big| < \epsilon. \tag{10.49}$$

Si $i \geqslant N$, alors[12] $a_i \leqslant \sup_{k\geqslant N}(a_k) \leqslant \ell+\epsilon$, et $a_i \geqslant \inf_{k\geqslant N}(a_k) \geqslant \ell-\epsilon$. Cela signifie que $a_n \in B(l,\epsilon)$, c'est-à-dire $a_k \to l$ par la proposition 10.23.

Dans l'autre sens, nous supposons que $\lim_n a_n = l$ et nous prouvons que la limite supérieure est égale à l[13]. Soit $\epsilon > 0$ et N_ϵ tel que $|a_n - l| < \epsilon$ pour tout $n \geqslant N_\epsilon$. Si $n \geqslant N_\epsilon$ nous avons

$$\big|\sup_{k\geqslant n} a_k - l\big| \leqslant \epsilon \tag{10.50}$$

et donc la limite de $\sup_{k\geqslant n} a_k$ lorsque $n \to \infty$ est bien l. □

Lemme 10.42.
Soit une suite (a_i) dans $\mathbb{R}$. Notons $L = \limsup_i(a_i)$. Pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble

$$S_\epsilon = \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } a_n \geqslant L + \epsilon\} \tag{10.51}$$

est fini.

Démonstration. Nous y allons par récurrence. Juste pour le sport, nous allons au passage montrer en détail comment on utilise le théorème 1.44.

Supposons que S_ϵ est infini. Alors pour tout n, la partie $S_\epsilon\backslash\{0,\ldots,n\}$ est non viede (lemme 1.121) et nous pouvons considérer l'application

$$\begin{aligned} g\colon S_\epsilon &\to S_\epsilon \\ n &\mapsto \min\big(S_\epsilon\backslash\{0,\ldots,n\}\big). \end{aligned} \tag{10.52}$$

Nous prenons $b > 1$ dans S_ϵ et considérons la fonction $f\colon \mathbb{N} \to S_\epsilon$ donnée par le théorème 1.44.

L'application f est strictement croissante parce que $f(n+1) = g\big(f(n)\big) \in \mathbb{N}\backslash\{0,\ldots,f(n)\}$. En particulier $f(n) > n$ parce que nous avons décidé de commencer avec $f(0) = b > 1$.

Nous sommes maintenant armés pour contredire la définition 10.38 de la limite supérieure. Soit $n \in \mathbb{N}$. Vu que $f(n) \in S_\epsilon$ nous avons

$$a_{f(n)} \geqslant L + \epsilon, \tag{10.53}$$

et donc $\sup_{k\geqslant n} a_k \geqslant a_{f(n)} \geqslant L + \epsilon$ parce que $f(n) \geqslant n$.

Nous avons prouvé que $\sup_{k\geqslant n} a_k \geqslant L + \epsilon$ pour tout n, donc

$$\lim_{n\to\infty}\big(\sup_{k\geqslant n} a_k\big) \geqslant L + \epsilon > L. \tag{10.54}$$

Voila. Donc si S_ϵ est infini, $\limsup_i a_i \geqslant L + \epsilon > L$. □

10.3.10 Ouverts, voisinage, topologie

Lorsque $x \in E$, nous rappelons qu'un voisinage[14] de x est n'importe quel sous-ensemble de E qui contient une boule ouverte centrée en x. La proposition 7.7 nous dit qu'un ensemble est ouvert si il contient un voisinage de chacun de ses points. Au passage, rappelons que l'ensemble vide est ouvert.

Pour rappel, la proposition 7.99 dit que l'ensemble des boules ouvertes d'un espace métrique génère la topologie de l'espace.

Nous rappelons qu'une partie A d'un espace métrique est dite bornée[15] si il existe une boule[16] qui contient A.

Mais revenons à $\mathbb{R}$…

---

12. Voir le lemme 1.324(1).
13. Je vous laisse faire la démonstration correspondante pour la limite inférieure. Contactez-moi si ça pose un problème.
14. Définition 7.4.
15. Définition 7.120.
16. À titre d'exercice, convainquez-vous que l'on peut dire boule *ouverte* ou *fermée* au choix sans changer la définition.

Lemme 10.43.
Une partie ouverte de $\mathbb{R}$ ne contient pas son supremum.

Démonstration. Soit $\mathcal{O}$, un ensemble ouvert et s, son supremum. Si s était dans $\mathcal{O}$, on aurait un voisinage $B = B(s, r)$ de s contenu dans $\mathcal{O}$. Le point $s + r/2$ est alors à la fois dans $\mathcal{O}$ et plus grand que s, ce qui contredit le fait que s soit un supremum de $\mathcal{O}$. □

Par le même genre de raisonnement, on montre que l'union et l'intersection de deux ouverts, sont encore des ouverts.

Remarque 10.44.
L'intersection d'une infinité d'ouverts n'est pas spécialement un ouvert comme le montrent les parties $\{\mathcal{O}_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ donnés par

$$\mathcal{O}_k =]1, 2 + \frac{1}{k}[. \tag{10.55}$$

Tous les ensembles $\mathcal{O}_k$ contiennent le point 2 qui est donc dans l'intersection. Mais nous allons montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe n tel que $2 + \epsilon \notin \mathcal{O}_n$. Il suffit de prendre n tel que $\frac{1}{n} < \epsilon$ (lemme 1.375(2)).

Proposition 10.45.
Quelles que soient les parties A et B de $\mathbb{R}$, nous avons

$$\sup(A \cap B) \leqslant \sup A \leqslant \sup(A \cup B). \tag{10.56}$$

Démonstration. En deux parties.

(i) $\underline{\sup(A \cap B) \leqslant \sup(A)}$ Soit $s = \sup(A)$. En particulier, s est un majorant de A. Si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ et $s \geqslant x$. Donc s est également un majorant de $A \cap B$. Le lemme 1.394 conclut que $s \geqslant \sup(A \cap B)$.

(ii) $\underline{\sup(A) \leqslant \sup(A \cup B)}$ Soit $s = \sup(A \cup B)$. Par définition, s est un majorant de $A \cup B$. A fortiori, s est un majorant de A et donc est plus grand ou égal à $\sup(A)$.

□

10.3.11 Intervalles et connexité

Nous allons déterminer tous les sous-ensembles connexes[17] de $\mathbb{R}$. Pour cela nous relisons d'abord la notion d'intervalle donnée en 1.20 ainsi que la proposition 1.396 qui liste tous les intervalles de $\mathbb{R}$. La partie $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle si pour tout $a, b \in I$, tout nombre entre a et b est également dans I. Cette définition englobe tous les exemples connus d'intervalles ouverts, fermés avec ou sans infini : $[a, b]$, $[a, b[$, $]-\infty, a]$, ...L'ensemble $\mathbb{R}$ lui-même est un intervalle.

Si I est un intervalle, les nombres $\inf(I)$ et $\sup(I)$[18] sont les **extrémités** de I.

Définition 10.46.
*Étant donnés deux points a et b dans $\mathbb{R}^p$ on appelle **segment** d'extrémités a et b, et on note $[a, b]$, l'image de $[0, 1]$ par l'application $s : [0, 1] \to \mathbb{R}^p$, $s(t) = (1 - t)a + tb$. On pose $]a, b[= s(]0, 1[)$, et $]a, b] = s(]0, 1])$.*

Il faut observer que le segment $[a, b]$ est une courbe orientée : certes en tant que ensembles, $[a, b] = [b, a]$, mais si nous regardons la fonction de t correspondante à $[b, a]$, nous voyons qu'elle va dans le sens inverse de celle qui correspond à $[a, b]$. Nous approfondirons ces questions lorsque nous parlerons d'arcs paramétrés autour de la section 21.7.

Le segment $[b, a]$ est l'image de l'application $r : [0, 1] \to \mathbb{R}^p$ donnée par $r(t) = (1 - t)b + ta$.

Proposition 10.47.
Une partie de $\mathbb{R}$ est connexe si et seulement si c'est un intervalle[19].

17. Définition 7.60.
18. Qui existent par la proposition 1.393, quitte à poser $\pm\infty$ comme infimum et supremum lorsque I n'est pas borné.
19. Définition 1.20.

Démonstration. La preuve est en deux parties. D'abord nous démontrons que si un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est connexe, alors c'est un intervalle ; et ensuite nous démontrons que tout intervalle est connexe.

Afin de prouver qu'un ensemble connexe est toujours un intervalle, nous allons prouver que si un ensemble n'est pas un intervalle, alors il n'est pas connexe. Prenons A, une partie de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un intervalle. Il existe donc a, $b \in A$ et un x_0 entre a et b qui n'est pas dans A. Comme le but est de prouver que A n'est pas connexe, il faut couper A en deux ouverts disjoints. L'élément x_0 qui n'est pas dans A est le bon candidat pour effectuer cette coupure. Prenons M, un majorant de A et m, un minorant de A, et définissons

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_1 &=]m, x_0[\\ \mathcal{O}_2 &=]x_0, M[.\end{aligned}$$

Si A n'a pas de minorant, nous remplaçons la définition de $\mathcal{O}_1$ par $]-\infty, x_0[$, et si A n'a pas de majorant, nous remplaçons la définition de $\mathcal{O}_2$ par $]x_0, \infty[$. Dans tous les cas, ce sont deux ensembles ouverts dont l'union recouvre tout A. En effet, $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ contient tous les nombres entre un minorant de A et un majorant sauf x_0, mais on sait que x_0 n'est pas dans A. Cela prouve que A n'est pas connexe.

Jusqu'à présent nous avons prouvé que si un ensemble n'est pas un intervalle, alors il ne peut pas être connexe. Pour remettre les choses à l'endroit, prenons un ensemble connexe, et demandons-nous si il peut être autre chose qu'un intervalle ? La réponse est *non* parce que si il était autre chose, il ne serait pas connexe.

Prouvons à présent que tout intervalle est connexe. Pour cela, nous refaisons le coup de la contraposée. Nous allons donc prendre une partie A de $\mathbb{R}$, supposer qu'elle n'est pas connexe et prouver qu'elle n'est alors pas un intervalle. Nous avons deux ouverts disjoints $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ tels que $A \subset \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$. Notons $A_1 = A \cap \mathcal{O}_1$ et $A_2 = A \cap \mathcal{O}_2$; et prenons $a \in A_1$ et $b \in A_2$. Pour fixer les idées, on suppose que $a < b$. Maintenant, le jeu est de montrer qu'il existe un point x_0 entre a et b qui ne soit pas dans A (cela montrerait que A n'est pas un intervalle). Nous allons prouver que c'est le cas du point

$$x_0 = \sup\{x \in \mathcal{O}_1 \text{ tel que } x < b\}.$$

Étant donné que l'ensemble $\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{O}_1 \text{ tel que } x < b\}$ est ouvert [20], le point x_0 n'est pas dans l'ensemble par le lemme 10.43. Nous avons donc

- soit x_0 n'est pas dans $\mathcal{O}_1$,
- soit $x_0 \leqslant b$,
- soit les deux en même temps.

Nous allons montrer qu'un tel x_0 ne peut pas être dans A. D'abord, remarquons que $\sup \mathcal{A} \leqslant \sup \mathcal{O}$ parce que $\mathcal{A}$ est une intersection de $\mathcal{O}$ avec quelque chose. Ensuite, il n'est pas possible que x_0 soit dans $\mathcal{O}_2$ parce que tout élément de $\mathcal{O}_2$ possède un voisinage contenu dans $\mathcal{O}_2$. Un point de $\mathcal{O}_2$ est donc toujours strictement plus grand que le supremum de $\mathcal{O}_1$.

Maintenant, en remarquant que si $x_0 \leqslant b$, alors $x_0 = b$ sinon b serait un majorant de $\mathcal{A}$ plus petit que x_0, ce qui n'est pas possible puisque x_0 est le supremum de $\mathcal{A}$ et donc le plus petit majorant. Oui mais si $x_0 = b$, c'est que $x_0 \in \mathcal{O}_2$, ce qu'on vient de montrer être impossible. Nous voilà déjà débarrassés des deuxièmes et troisièmes possibilités.

Si la première possibilité est vraie, alors x_0 n'est pas dans A parce qu'on a aussi prouvé que $x_0 \notin \mathcal{O}_2$. Or n'être ni dans $\mathcal{O}_1$ ni dans $\mathcal{O}_2$ implique de ne pas être dans A. Ce point $x_0 = \sup \mathcal{A}$ est donc hors de A.

Oui, mais comme $a \in \mathcal{A}$, on a obligatoirement $x_0 \geqslant a$. Mais par construction, on a aussi $x_0 \leqslant b$ (ici, l'inégalité est même stricte, mais ce n'est pas important). Donc

$$a \leqslant x_0 \leqslant b$$

avec a, $b \in A$, et $x_0 \notin A$. Cela finit de prouver que A n'est pas un intervalle. □

20. C'est l'intersection entre l'ouvert $\mathcal{O}_1$ et l'ouvert $\{x \text{ tel que } x < b\}$.

Le lemme suivant dit que si on recouvre un intervalle avec des ouverts, alors on peut ordonner ces ouverts de telle sorte qu'ils s'enchainent bien : on peut sauter de l'un à l'autre en passant par les intersections. C'est donc un lemme qui permet de passer du local au global.

Lemme 10.48.
Soient un intervalle I de $\mathbb{R}$ ainsi qu'un recouvrement $\{\mathcal{O}_i\}_{i=1,\ldots,n}$ de I par des ouverts connexes tels que $\mathcal{O}_i \cap I \neq \emptyset$ pour tout i[21]*. Alors il existe une bijection $\psi\colon \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ telle que*

(1)
$$\bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{O}_{\psi(i)} \tag{10.57}$$
est connexe pour tout m.

(2)
$$\mathcal{O}_{\psi(m)} \cap \bigcup_{i=1}^{m-1} \mathcal{O}_{\psi(i)} \neq \emptyset. \tag{10.58}$$

Démonstration. Nous allons construire ψ par récurrence ; plus précisément nous allons construire des applications $\psi_k\colon \{1,\ldots,k\} \to \{1,\ldots,n\}$ telle que

(1) ψ_k est injective.

(2) Si $i \leqslant k$ alors $\psi_k(i) = \psi_i(i)$.

(3) La partie
$$\bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{O}_{\psi_k(i)} \tag{10.59}$$
est connexe pour tout $m \leqslant k$.

(4) Nous avons
$$\mathcal{O}_{\psi_k(m)} \cap \bigcup_{i=1}^{m-1} \mathcal{O}_{\psi_k(i)} \neq \emptyset \tag{10.60}$$
pour tout $m \leqslant k$.

Nous commençons en douceur par

$$\begin{aligned} \psi_1\colon \{1\} &\to \{1,\ldots,n\} \\ 1 &\mapsto 1. \end{aligned} \tag{10.61}$$

Ai-je besoin de vous prouver que c'est injectif ?

Nous supposons que les applications ψ_i sont correctement définies pour $i \leqslant k$, et nous construisons ψ_{k+1}. Nous posons

$$A = \psi_k\big(\{1,\ldots,k\}\big) \tag{10.62a}$$
$$B = \{1,\ldots,n\} \setminus A \tag{10.62b}$$
$$P = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{O}_{\psi_k(i)} \tag{10.62c}$$
$$Q = \bigcup_{i=k+1}^{n} \mathcal{O}_{\psi_k(i)} \tag{10.62d}$$

En tant qu'unions d'ouverts, les parties P et Q sont ouvertes dans $\mathbb{R}$. Elles recouvrent l'intervalle I qui est connexe par la proposition 10.47. De plus $P \cap I \neq \emptyset$ et $Q \cap I \neq \emptyset$; donc, par définition de la connexité nous avons $P \cap Q \neq \emptyset$.

21. Il est cependant possible que les $\mathcal{O}_i$ ne soient pas inclus dans I.

Il existe donc $i_0 \in B$ tel que $P \cap \mathcal{O}_{i_0} \neq \emptyset$. Nous posons

$$\begin{aligned}\psi_{k+1}\colon \{1,\ldots,k+1\} &\to \{1,\ldots,n\}\\ i &\mapsto \begin{cases} \psi_k(i) & \text{si } i \neq k+1\\ i_0 & \text{si } i = k+1.\end{cases}\end{aligned} \tag{10.63}$$

Vérifions que ce ψ_{k+1} vérifie les conditions.

(1) ψ_{k+1} est injective. Soient i, j tels que $\psi_{k+1}(i) = \psi_{k+1}(j)$. Si $i = k+1$ et $j \neq k+1$ alors $\psi_{k+1}(i) = i_0 \in B$, alors que $\psi_{k+1}(j) = \psi_k(j) \in A$. Donc le cas $i = k+1$, $j \neq k+1$ n'est pas possible.
   Si $i, j \neq k+1$, alors $\psi_{k+1}(i) = \psi_k(i)$ et $\psi_{k+1}(j) = \psi_k(j)$. L'injectivité de ψ_k implique que $i = j$.

(2) Si $i \leqslant k$, nous avons $\psi_{k+1}(i) = \psi_k(i) = \psi_i(i)$ en utilisant la récurrence.

(3) Nous séparons les cas $m = k+1$ et $m \neq k+1$. Si $m \neq k+1$ alors tous les ψ_{k+1} dans (10.59) [22] sont des ψ_k et la récurrence fonctionne. Si $m = k+1$ alors

$$\bigcup_{i=1}^{k+1} \mathcal{O}_{\psi_{k+1}(i)} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{O}_{\psi_k(i)} \cup \mathcal{O}_{\psi_{k+1}(k+1)} = P \cup \mathcal{O}_{i_0}. \tag{10.64}$$

   Le nombre i_0 a été choisi pour avoir $\mathcal{O}_{i_0} \cap P \neq \emptyset$. Comme $\mathcal{O}_{i_0}$ et P sont des connexes, la proposition 7.64(1) implique que $P \cup \mathcal{O}_{i_0}$ est connexe.

(4) Encore une fois, si $m \neq k+1$, tous les ψ_{k+1} de (10.60) deviennent des ψ_k et la récurrence fonctionne. Avec $m = k+1$ nous avons

$$\mathcal{O}_{\psi_{k+1}(k+1)} \cap \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{O}_{\psi_{k+1}(i)} = \mathcal{O}_{i_0} \cap P. \tag{10.65}$$

   Cette intersection est non vide, par choix du i_0.

Quand tous les ψ_k ($k = 1, \ldots, n$) sont construits, en posant $\psi = \psi_n$ nous avons le résultat annoncé. □

Théorème 10.49 (Théorème des bornes atteintes)**.**
Une fonction à valeurs réelles continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

C'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in K$ tel que $f(x_0) = \inf\{f(x)$ tel que $x \in K\}$ ainsi que x_1 tel que $f(x_1) = \sup\{f(x)$ tel que $x \in K\}$.

Démonstration. Soient un espace topologique compact K et une fonction continue $f\colon K \to \mathbb{R}$. Alors le théorème 7.186 indique que $f(K)$ est compact. Par conséquent $f(K)$ est un fermé borné de $\mathbb{R}$ par le théorème de Borel-Lebesgue 10.21. Puisque $f(K)$ est borné, la fonction f est bornée.

De plus $f(K)$ étant fermé, son infimum est un minimum et son supremum est un maximum : il existe $x \in K$ tel que $f(x) = \sup f(K)$ et il existe $y \in K$ tel que $f(y) = \inf f(K)$. □

Le théorème suivant est essentiellement inutile pour les raisons suivantes :

— Il est un cas particulier du théorème 7.124 qui donne pour tout espace métrique, l'équivalence entre la compacité et la compacité séquentielle.

— Il est un cas particulier du théorème 7.250 qui le donne pour tous les espaces compacts.

Bref, nous ne le laissons que pour le lecteur qui n'aurait pas en tête d'autres définitions de « compact » à part « fermé borné ».

Théorème 10.50 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**.**
Toute suite contenue dans un compact de $\mathbb{R}^m$ admet une sous-suite convergente.

22. Nous sommes en train de parler de cette équation avec $k+1$ au lieu de k, parce que nous sommes dans un processus de récurrence. Il est donc normal de dire qu'il y a des ψ_{k+1} dans cette équation.

Démonstration. Nous rappelons qu'une partie compacte de $\mathbb{R}^m$ est fermée et bornée par le théorème de Borel-Lebesgue 10.21.

Soit (x_n) une suite contenue dans une partie bornée de $\mathbb{R}^m$. Considérons (a_n), la suite réelle des premières composantes des éléments de (x_n) : pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le nombre a_n est la première composante de x_n. Étant donné que la suite (x_n) est bornée, il existe un M tel que $\|x_n\| < M$. La croissance de la fonction racine carrée donne

$$|a_n| \leqslant \|x_n\| \leqslant M. \tag{10.66}$$

La suite (a_n) est donc une suite réelle bornée et donc contient une sous-suite convergente par le théorème correspondant dans $\mathbb{R}$: 7.124. Soit a_{I_1} une sous-suite convergente de a_n. Nous considérons maintenant x_{I_1}, c'est-à-dire la suite de départ dont on a enlevé tous les éléments qu'il faut pour qu'elle converge en ce qui concerne la première composante.

Si nous considérons la suite b_{I_1} des *secondes* composantes de x_{I_1}, nous en extrayons, de la même façon que précédemment, une sous-suite convergente, c'est-à-dire que nous avons un $I_2 \subset I_1$ tel que b_{I_2} est convergent. Notons que a_{I_2} est une sous-suite de la (sous) suite convergente x_{I_1}, et donc a_{I_2} est encore convergente.

En continuant ainsi, nous construisons une sous-sous-sous-suite x_{I_3} telle que la suite des *troisièmes* composantes est convergente. Lorsque nous avons effectué cette procédure m fois, la suite x_{I_m} est une suite dont toutes les composantes convergent, et donc est une suite convergente par la proposition 10.32.

Le tableau suivant donne un petit schéma de la façon dont nous procédons. Les $\bullet$ sont les éléments de la suite que nous gardons, et les $\times$ sont ceux que nous « jetons ».

$$\begin{array}{cccccccccccc}
x_{\mathbb{N}} & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \ldots \\
x_{I_1} & \times & \bullet & \bullet & \times & \bullet & \times & \times & \bullet & \bullet & \bullet & \ldots \\
x_{I_2} & \times & \bullet & \times & \times & \bullet & \times & \times & \bullet & \bullet & \times & \ldots \\
\vdots & & & & & & & & & & & \\
x_{I_m} & \times & \times & \times & \times & \bullet & \times & \times & \times & \bullet & \times & \ldots
\end{array} \tag{10.67}$$

La première ligne, $x_{\mathbb{N}}$, est la suite de départ. □

Corolaire 10.51.
Si une suite est croissante et bornée alors elle est convergente.

Démonstration. Nous nommons (x_n) la suite et nous prenons un majorant M. Toute la suite est alors contenue dans le compact $[x_0, M]$, ce qui donne une sous-suite $(x_{\alpha(n)})$ convergente par le théorème de Bolzano-Weierstrass 7.250. Si ℓ est la limite de cette sous-suite alors nous avons $\ell \geqslant x_n$ pour tout n.

Pour tout $\epsilon > 0$ il existe K tel que si $n > K$ alors $|\ell - x_{\alpha(n)}| < \epsilon$. Comme ℓ majore la suite nous avons même

$$x_{\alpha(n)} + \epsilon > \ell. \tag{10.68}$$

Puisque la suite est croissante pour tout $m > \alpha(K)$ nous avons $x_m + \epsilon > \ell$, ce qui signifie $|x_m - \ell| < \epsilon$. □

Nous aurons une version pour les fonctions croissantes et bornées en la proposition 12.57.

La proposition suivante dit que la notion d'ensemble non dénombrable ne prend pas réellement de force entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$: il n'y a pas moyen de caser $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ de façon à ce qu'il y tienne à son aise.

Proposition 10.52.
Une partie non dénombrable de $\mathbb{R}^n$ possède un point d'accumulation[23].

23. Définition 7.39.

Démonstration. Soit une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ sans point d'accumulation. Nous allons prouver que A est dénombrable.

Soient les compacts $K_n = \overline{B(0,n)}$. La partie $A \cap K_n$ est finie ; sinon elle aurait une partie en bijection avec $\mathbb{N}$ (proposition 1.135) et donc une suite. Or une suite dans un compact possède un point d'accumulation par le théorème 7.250.

Donc tous les $A \cap K_n$ sont finis. Puisque $A = \bigcup_n A \cap K_n$, l'ensemble A est une réunion dénombrable d'ensembles finis. Il est donc dénombrable. □

10.3.12 Recouvrement par des intervalles ouverts

Soit un ensemble E et un ensemble $\mathcal{A}$ de parties de E. Soit $A \in \mathcal{A}$. Nous aimerions savoir quels sont les éléments de $\mathcal{A}$ qui sont atteignables en partant de A et en ne « sautant » que d'intersection en intersection.

Nous notons $\mathcal{A} = \{B_i\}_{i \in I}$ où I est un ensemble d'indices (un ensemble quelconque).

$$s_1(A) = \{i \in I \text{ tel que } B_i \cap A \neq \varnothing\} \tag{10.69a}$$
$$\sigma_1(A) = \bigcup_{B \in s_1(A)} B. \tag{10.69b}$$

Et ensuite :

$$s_{k+1}(A) = \{i \in I \text{ tel que } B_i \cap \sigma_k(A) \neq \varnothing\} \tag{10.70a}$$
$$\sigma_{k+1}(A) = \bigcup_{B \in s_{k+1}(A)} B \tag{10.70b}$$

Lemme 10.53.
Soient un intervalle A de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{A} = \{I_i\}_{i=1,\ldots,N}$ un recouvrement de A par des intervalles ouverts. Si $I_1 \cap A \neq \varnothing$ alors

(1) $\sigma_N = \sigma_{N+1}$

(2) $A \subset \sigma_N(I_1)$.

Démonstration. Si $\sigma_{k+1} = \sigma_k$, alors tous les σ_{k+l} sont identiques. De plus si $\sigma_{k+1} \neq \sigma_k$, alors σ_{k+1} contient au moins un élément de plus que σ_k. Donc $\operatorname{Card}(\sigma_k) \geqslant k$ et en particulier $N \leqslant \operatorname{Card}(\sigma_N) \leqslant N$. Cela prouve le premier point.

L'ensemble $\sigma_N(I_1)$ est une union d'ouverts et est donc un ouvert. Quitte à renuméroter, nous écrivons

$$\sigma_N(I_1) = I_1 \cup \ldots \cup I_n. \tag{10.71}$$

L'ensemble

$$\tau = \bigcup_{k=n+1}^{N} I_k \tag{10.72}$$

est ouvert et est disjoint de $\sigma_N(I_1)$ parce que si I_l ($I_l \geqslant n+1$) intersectait $\sigma_N(I_1)$, nous aurions $l \in s_{N+1}$ ou encore $I_l \subset \sigma_{N+1} \backslash \sigma_N$.

Donc τ et σ_N sont deux ouverts disjoints qui recouvrent A. Puisque A est un intervalle, il est connexe[24]. Donc, soit $A \subset \tau$, soit $A \subset \sigma_N$. Comme $I_1 \cap A \neq \varnothing$ nous sommes dans le cas $A \subset \sigma_N$. □

Lemme 10.54.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $\mathcal{A} = \{I_s\}_{s \in S}$ est un ensemble d'intervalles contenant x, alors $I = \bigcup_{s \in S} I_s$ est un intervalle[25].

24. Définition 7.60 et proposition 10.47.
25. Définition 1.20.

Démonstration. Soient $a, b \in I$ (nous supposons $a < b$). Nous devons prouver que $[a, b] \subset I$. Pour cela nous considérons $y \in [a, b]$; il y a deux possibilités : soit $y < x$ soit $y > x$ (si $y = x$ alors $y \in I_s$).

Si $y < x$, alors $a \leqslant y < x$ et donc $y =\in I$. Si $y > x$, alors $x < y \leqslant b$ et $y \in I$. □

Proposition 10.55 ([261, 262]).
Un ouvert de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme union au plus dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.

Plus précisément, si $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, il existe un ensemble $\mathcal{F} = \{I_s\}_{s\in S}$ où

(1) Chaque I_s est un intervalle ouvert contenu dans $\mathcal{O}$,

(2) Pour $s, t \in S$, si $I_s \neq I_t$, alors $I_s \cap I_t = \varnothing$.

(3) S est dénombrable,

Démonstration. Pour $x \in \mathcal{O}$, nous définissons J_x comme étant l'union de tous les intervalles ouverts contenus dans $\mathcal{O}$ et contenant x. Les J_x ne sont pas vides parce qu'ils contiennent toujours une boule centrée en x[26].

En tant qu'union d'intervalles, J_x est un intervalle par le lemme 10.54. De plus, J_x est ouvert parce que toute union d'ouverts est ouverte[27].

Nous notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des intervalles ouverts contenus dans $\mathcal{O}$, et

$$\mathcal{A}_x = \{I \in \mathcal{A} \text{ tel que } x \in I\}. \tag{10.73}$$

(i) <u>**Si $y \in J_x$, alors $J_x = J_y$**</u> Puisque $y \in J_x$, nous pouvons considérer $J =\in \mathcal{A}_x \cap \mathcal{A}_y$. Nous avons

$$J_y = \bigcup_{I\in\mathcal{A}_y} I \subset \bigcup_{I\in\mathcal{A}_y} \underbrace{(I \cup J)}_{\in\mathcal{A}_x} \subset \bigcup_{I\in\mathcal{A}_x} I = J_x. \tag{10.74}$$

L'inclusion dans l'autre sens s'obtient en écrivant la même équation en échangeant x et y.

(ii) <u>**Les J_x sont disjoints**</u> Nous prouvons à présent que pour $x, y \in \mathcal{O}$, nous avons $J_x = J_y$ ou $J_x \cap J_y = \varnothing$. En effet si $a \in J_x \cap J_y$, alors $J_a = J_x$ et $J_a = J - y$. Donc $J_x = J_y$.

(iii) <u>**Dénombrable**</u> C'est le moment d'écrire $\mathcal{F} = \{J_x\}_{x\in\mathcal{O}}$. Comme tout intervalle contient au moins un rationnel (proposition 10.15), nous avons aussi

$$\mathcal{F} = \{J_x\}_{x\in\mathcal{O}} = \{J_q\}_{q\in\mathbb{Q}\cap\mathcal{O}}. \tag{10.75}$$

Cet ensemble $\mathcal{F}$ vérifie les conditions demandées.

□

10.3.13 Connexité par arcs

Définition 10.56.
*Une partie A d'un espace topologique est **connexe par arcs** si pour tout $a, b \in A$, il existe une application continue $\gamma\colon [0, 1] \to A$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.*

10.57.
Un exemple d'ensemble connexe mais pas connexe par arcs est donné par la proposition 21.57. L'idée de cet exemple est de construire un ensemble en deux parties reliées par un chemin de longueur infinie.

Un espoir fou nous prend alors de croire que nous pouvons produire un exemple plus simple avec $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ parce que, dans cet ensemble, 1 et $+\infty$ sont reliés par un chemin de longueur infinie. La proposition 12.58 nous montrera que non.

26. C'est la définition 7.92 de la topologie métrique.
27. C'est dans la définition 7.1 d'une topologie.

10.3.14 Un peu de connexité par arcs

Lemme 10.58.
Soient deux espaces topologiques E et F, et $f : E \to F$ un homéomorphisme. E est connexe par arcs[28] *si et seulement si F l'est.*

10.59.
Voici une idée de la preuve.

On montre en réalité que l'image d'un connexe par arcs par une application continue est un connexe par arcs, ce qui implique chaque sens de l'équivalence de l'énoncé.

Soient p et q des points de F. Il existe un chemin reliant un antécédent de p et un antécédent de q (dans E). L'image de ce chemin est un chemin reliant p et q (dans F) puisque composé d'applications continues.

Lemme 10.60.
Une sphère de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs si $n > 1$

10.61.
Une idée de la preuve.

On voit qu'un cercle est connexe par arcs car on a un paramétrage en sinus et cosinus. Pour une sphère S de centre a en dimension $n > 2$, on se donne p et q sur S et on définit P le plan affine passant par a, p et q. Alors $P \cap S$ est un cercle, donc on peut relier p à q par un chemin dans cette intersection.

Pour voir sur une formule que $P \cap S$ est un cercle, on peut écrire $x - a = \lambda(a-p) + \mu(a-q)$ l'équation (en x) du plan P, et $|x-a|^2 = R^2$ l'équation (en x) de la sphère. En injectant, on obtient une équation du second degré en λ, μ qui se révèle être l'équation d'un cercle à une transformation affine près.

Lemme 10.62.
Un ouvert connexe par arcs dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ reste connexe par arcs même si on lui enlève un point.

10.63.
Une idée de la preuve.

En effet, soit U un tel ouvert connexe par arcs, et p un point de U. Soient x et y sur $U \backslash \{p\}$. Il existe un chemin γ de x à y. Si le chemin ne passe pas par p, c'est gagné. Si il passe par p, on choisit une boule B fermée (de rayon non-nul) centrée en p qui ne contient ni x ni y. On note $E = \gamma^{-1}(B) \subset [0;1]$ c'est un ensemble compact (fermé, par continuité de γ, et borné) dont on regarde le maximum $\bar{t}$ et le minimum $\underline{t}$.

Il reste enfin à définir un chemin entre p et q par morceaux

(1) Les points p et $\gamma(\underline{t})$ sont reliés par γ,

(2) Par connexité par arcs, il existe un chemin sur la sphère qui relie $\gamma(\underline{t})$ à $\gamma(\bar{t})$,

(3) et enfin $\gamma(\bar{t})$ et q sont reliés via γ ;

ce qui achève la construction d'un chemin continu entre p et q.

Pour conclure l'exercice, par l'absurde, on prend un voisinage connexe et ouvert V de 0 dans le cône, homéomorphe à un ouvert connexe U de $\mathbb{R}^2$. Or $V \backslash \{0\}$ n'est pas connexe par arcs, alors que l'ouvert dont on retire un point reste connexe par arcs. C'est impossible, donc l'homéomorphisme n'existe pas, et le cône n'est pas une variété de dimension 2.

28. Définition 10.56

10.3.15 Des exemples

Exemple 10.64.
Nous étudions l'exemple suivant :

$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2y^2 + 4y + 2 < x \leqslant \sqrt{4-y^2},\, y \in [-1.5, 0.5[\}. \tag{10.76}$$

On commence par tracer la parabole $x = 2y^2+4y+2$, la circonférence $x^2+y^2 = 4$ et les droites $y = -1.5$ et $y = 1/2$. On voit tout de suite que l'aire délimitée par les quatre courbes est donnée par l'union de deux parties. Dans la première $\sqrt{4-y^2} \leqslant x \leqslant 2y^2+4y+2$, $y \in [0, 0.5]$ et dans l'autre $2y^2+4y+2 \leqslant x \leqslant \sqrt{4-y^2}$, $y \in [-1.5, 0]$. L'ensemble A_1 est contenu dans la deuxième, 10.1. L'intérieur de A_1 est donné par $\mathrm{Int}(A_1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2y^2+4y+2 < x < \sqrt{4-y^2},\, y \in]-1.5, 0[\}$, et sa frontière est l'union de 3 morceaux de courbe ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 :

$$\begin{aligned}
\ell_1 &= \{(x,y) \,|\, x = 2y^2+4y+2,\, y \in [-1.5, 0]\}\\
\ell_2 &= \{(x,y) \,|\, x = \sqrt{4-y^2},\, y \in [-1.5, 0]\}\\
\ell_3 &= \{(x,y) \,|\, x \in [0.5, \sqrt{7/4}]\, y = -1.5\}.
\end{aligned} \tag{10.77}$$

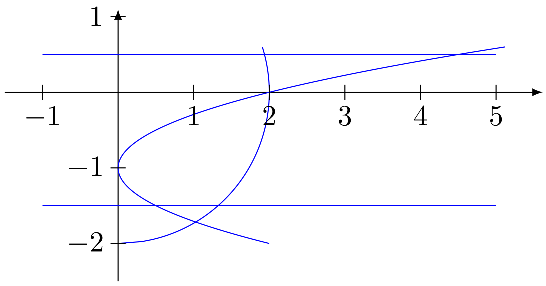


FIGURE 10.1 –

△

Exemple 10.65.
Nous étudions

$$A_3 = \mathbb{N} \times \mathbb{Q} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Q}\}. \tag{10.78}$$

L'ensemble A_3 n'est pas ouvert, ni fermé, ni borné dans la topologie de $\mathbb{R}^2$. Le lemme 7.36 dit que $\mathbb{Q}$ a un intérieur vide et sa fermeture est $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{N}$, par contre est fermé et non borné. On peut remarquer que tous les points de $\mathbb{N}$ sont points isolés. La fermeture de A_3 est alors $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ et son intérieur est vide. On peut dessiner la fermeture de cet ensemble comme une famille de droites verticales $x = n$, pour tout n dans $\mathbb{N}$. △

Exemple 10.66.
Nous étudions l'ensemble

$$A_3 = \{(t, 2t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0,1]\ \}. \tag{10.79}$$

L'ensemble A_3 est un petit segment de droite. Son intérieur est vide parce que toute boule centrée en un point de la droite intersecte l'extérieur de la droite. Son adhérence et sa frontière sont A_3 lui-même parce que nous considérons les valeurs de t dans $[0,1]$ qui est un intervalle fermé. Si l'intervalle avait été ouvert, l'adhérence et la frontière auraient été trouvés en fermant :

$$\overline{\{(t,2t) \text{ tels que } t \in [0,1[\,\}} = \{(t,2t) \text{ tels que } t \in [0,1]\} \tag{10.80}$$

Étant donné que son adhérence est égal à lui-même, cet ensemble est fermé (et donc pas ouvert). Il est également borné parce qu'il est contenu dans une boule de rayon 3. △

Exemple 10.67.
Nous étudions l'ensemble

$$A_4 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\}. \tag{10.81}$$

Dans $\mathbb{R}$ nous savons que $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\operatorname{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ et $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ parce que toute boule centrée en un rationnel contient un irrationnel, et inversement, toute boule centrée en un irrationnel contient un rationnel. Dans $\mathbb{R}^2$ nous avons le même phénomène parce dans la boule $B\big((p,q), r\big)$ avec $(p,q) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, se trouvent en particulier les points de la forme (p, x) avec $x \in B(q, r) \subset \mathbb{R}$. Évidement, certains de ces x ne sont pas dans $\mathbb{Q}$ et par conséquent, la boule $B\big((p,q), r\big)$ contient les points $(p, x) \notin \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

De la même manière, si (x, y) est un point de $\mathbb{R}^2$, dans toute boule centrée en (x, y), il y aura un élément de $\mathbb{Q}^2$.

Par conséquent, $\operatorname{Int}(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) = \varnothing$, $\overline{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $\partial(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) = \mathbb{R}^2$.

Il n'est ni ouvert ni fermé (parce qu'il n'est égal ni à son intérieur ni à sa fermeture). Il n'est pas borné non plus parce qu'il existe des nombres rationnels arbitrairement grands. △

Exemple 10.68.
Nous étudions l'ensemble

$$A_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in]0, 1[, \sin\frac{1}{x} < y < 3\}. \tag{10.82}$$

La fonction $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ est une des fonctions dont le graphe doit être connu. La figure 10.2 montre la situation. Comme d'habitude, il est fortement recommandé de refaire le dessin soi-même.

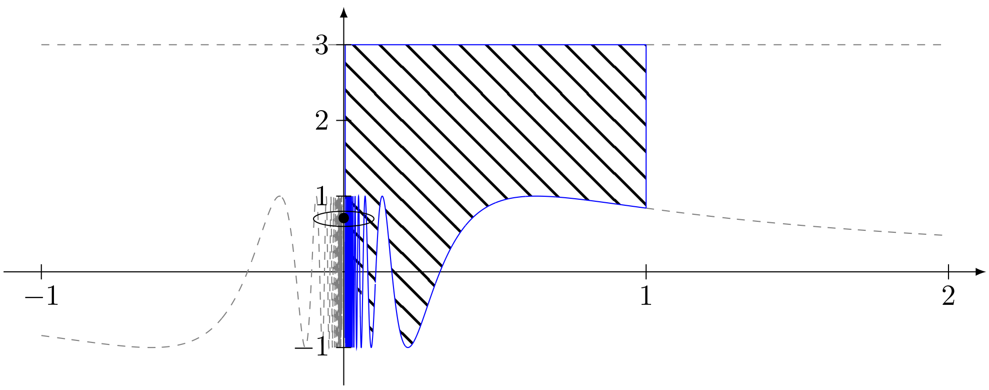


FIGURE 10.2 – Les points qui sont sur l'axe vertical entre 0 et 3 sont sur la frontière, mais pas dans l'ensemble A_5.

L'ensemble A_5 est ouvert parce que les conditions $x \in]0, 1[$ et $\sin\frac{1}{x} < y < 3$ sont des conditions « ouvertes » au sens où si un point les vérifient, alors on peut trouver une boule dans lequel ces conditions restent vérifiées. Cela prouve que $\operatorname{Int}(A_5) = A_5$.

La fermeture de A_5 contient en outre les points tels que $\sin\frac{1}{x} = y$ entre $x = 0$ et $x = 1$ (les bornes étant incluses) ainsi que les points des trois segments de droites suivants :

$$\begin{aligned} \{(0, y) \text{ tels que } y \in [-1, 3]\} \\ \{(x, 3) \text{ tels que } x \in [0, 1]\} \\ \{(1, y) \text{ tels que } y \in [\sin(1), 3]\}. \end{aligned} \tag{10.83}$$

La frontière est composée de ces trois segments et du graphe de la fonction $\sin\frac{1}{x}$ entre 0 et 1.

L'ensemble A_5 est borné parce qu'il est contenu par exemple dans la boule centrée en $(0, 0)$ et de rayon 10. Il est ouvert et donc pas fermé. △

Exemple 10.69.
Nous étudions l'ensemble

$$A_6 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \{(\frac{1}{n}, y) \mid y \in [0,1]\}. \tag{10.84}$$

L'ensemble A_6 est une union infinie de segments de droites verticaux, voir figure 10.3

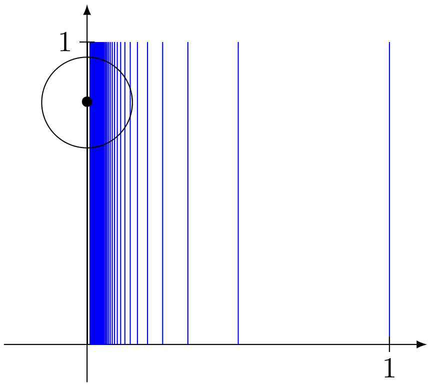


FIGURE 10.3 – Le segment sur l'axe vertical entre $y = 0$ et $y = 1$ fait partie de l'adhérence et de la frontière, mais pas de l'ensemble A_6 lui-même.

L'intérieur est vide parce qu'autour de tout réel de la forme $\frac{1}{n}$, il y a un réel qui n'est pas de cette forme. En ce qui concerne la frontière et l'adhérence, il s'agit de l'union de tous ces segments plus le segment en $x = 0$.

En effet, la boule de rayon r autour du point $(0, y)$ contient le point $(\frac{1}{n}, y)$ avec n assez grand pour que $\frac{1}{n} < r$. △

10.3.16 Quelques mots à propos de la droite réelle achevée

Définition 10.70.
La ***droite réelle achevée*** *est l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ où $\pm\infty$ sont deux nouveaux éléments. Nous la notons $\overline{\mathbb{R}}$ pour des raisons que nous verrons à peine plus bas.*

Cette définition ne servirait à rien si nous n'y mettions pas une topologie pour positionner les éléments $\pm\infty$ par rapport à ceux qui existaient déjà dans $\mathbb{R}$.

Définition 10.71 (Topologie sur $\bar{\mathbb{R}}$)**.**
La topologie sur $\bar{\mathbb{R}}$ est celle sur $\mathbb{R}$ à laquelle nous ajoutons les voisinages de $\pm\infty$ de la façon suivante. Une partie V de $\bar{\mathbb{R}}$ est un voisinage de $+\infty$ si il existe $m > 0$ tel que $]m, +\infty] \subset V$.

Le lemme suivant justifie la notation $\overline{\mathbb{R}}$ pour la droite réelle achevée[29].

Lemme 10.72.
L'adhérence[30] de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ est $\overline{\mathbb{R}}$.

Démonstration. Il suffit de prouver que $+\infty$ et $-\infty$ sont dans l'adhérence de $\mathbb{R}$. Nous le faisons pour $+\infty$. Ce n'est pas très compliqué : si A est un ouvert contenant $+\infty$, il contient une partie de la forme $]a, +\infty]$, et donc contient des éléments de $\mathbb{R}$. □

Pour la suite nous utilisons la notation (pratique en probabilité)

$$\{f < a\} = \{x \in S \text{ tel que } f(x) < a\}. \tag{10.85}$$

29. Notez que l'espace métrique $\mathbb{R}$ est déjà complet. Il ne s'agit donc pas d'une completion.
30. Définition 7.28.

10.4 Continuité

La définition de fonction continue est la définition 7.41. Dans le cas d'une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, elle devient ceci.

Proposition 10.73.
Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in A$. La fonction $f\colon A \to \mathbb{R}$ est continue[31] *en a si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que si $x \in B(a, \delta) \cap A$ alors $|f(x) - f(a)| \leqslant \epsilon$.*

Démonstration. En deux parties.

(i) **Si f est continue** Soit $\epsilon > 0$. L'ouvert $W = B\big(f(a), \epsilon\big)$ contient $f(a)$. La définition de la continuité en a dit qu'il existe un ouvert V de A contenant a et tel que $f(V) \subset B\big(f(a), \epsilon\big)$. Vu que V est un ouvert de A[32], il contient une partie de la forme $B(a, \delta) \cap A$ pour un certain $\delta > 0$. Pour ce δ, nous avons bien que $f(x) \in B\big(f(a), \epsilon\big)$ dès que $x \in B(a, \sigma) \cap A$.

(ii) **Si f dans l'autre sens** Soit un ouvert W de $\mathbb{R}$ contenant $f(a)$. Nous avons un $\epsilon > 0$ tel que $B\big(f(a), \epsilon\big) \subset W$. Il existe donc un $\delta > 0$ tel que

$$f\big(B(a, \delta) \cap A\big) \subset B\big(f(a), \epsilon\big) \subset W. \tag{10.86}$$

La partie $B(a, \delta) \cap A$ est un voisinage de a dans A.

□

Nous allons maintenant étudier quelques conséquences de la continuité sur $\mathbb{R}$.

(1) D'abord on voit que la continuité n'a été définie qu'en un point. On peut dire que la fonction f est continue *en tel point donné*, mais nous n'avons pas dit ce qu'est une fonction continue *dans son ensemble*.

(2) Le théorème 7.170 nous précise que si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, la fonction f est continue sur I si et seulement si elle est continue en chaque point de I.

(3) Comme la définition de f continue en a fait intervenir $f(x)$ pour tous les x pas trop loin de a, il faut au moins déjà que f soit définie sur ces x. En d'autres termes, dire que f est continue en a demande que f existe sur un intervalle autour de a.
Ceci couplé à la définition précédente laisse penser qu'il est surtout intéressant d'étudier les fonctions qui sont continues sur un intervalle.

(4) L'intuition qu'une fonction continue doit pouvoir être tracée sans lever la main correspond aux fonctions continues sur des intervalles. Au moins sur l'intervalle où elle est continue, elle devrait être traçable en un coup. Cette intuition est complètement fausse (comme pratiquement toutes les intuitions), comme le montre l'exemple 10.74.

Exemple 10.74.
Il est très possible d'être continue en un seul point. Par exemple la fonction

$$f(x) = x(1 - \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)) \tag{10.87}$$

où $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. △

Proposition 10.75.
Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue au point $a \in \mathbb{R}$ et si $f(a) \neq 0$, alors il existe un voisinage de a sur lequel f ne s'annule pas.

Démonstration. Si f s'annulait sur tout voisinage de a (mais pas en a lui-même), nous aurions, pour tout n un réel

$$x_n \in B\big(a, \frac{1}{n}\big)\backslash\{a\} \tag{10.88}$$

31. Définition 7.41(1).
32. Topologie induite et tout ça.

tel que $f(x_n) = 0$. Cela donnerait une suite $x_n \to a$ avec $f(x_n) \to 0$, ce qui contredit la continuité de f en a en vertu de la proposition 7.215 sur la continuité séquentielle en un point. □

Notons que ce résultat se généralise : si f est continue et pas égale à r en a, alors il existe un voisinage de a sur lequel elle ne prend pas la valeur r.

10.4.1 Opération sur la continuité

Nous allons démontrer maintenant une série de petits résultats qui permettent de simplifier la démonstration de la continuité de fonctions.

Théorème 10.76.
Si la fonction f est continue au point a, alors la fonction λf est également continue en a.

Démonstration. Commençons par exprimer la continuité de f en a. Soit $\epsilon_1 > 0$. Il existe $\delta_1 > 0$ tel que
$$(|x-a| \leqslant \delta_1) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \epsilon_1.$$
En travaillant avec λf au lieu de f,
$$(|x-a| \leqslant \delta_1) \Rightarrow |(\lambda f)(x) - (\lambda f)(a)| \leqslant |\lambda|\epsilon_1. \tag{10.89}$$

Passons à la continuité de λf. Soit $\epsilon > 0$. Nous posons $\epsilon_1 = \epsilon/|\lambda|$ et nous considérons le δ_1 correspondant :
$$(|x-a| \leqslant \delta_1) \Rightarrow |(\lambda f)(x) - (\lambda f)(a)| \leqslant |\lambda|\epsilon_1 = \epsilon.$$
Ce δ_1 est celui que l'on cherchait. □

Théorème 10.77.
Si f et g sont deux fonctions continues en a, alors la fonction $f + g$ est également continue en a.

Démonstration. La continuité des fonctions f et g au point a fait en sorte que pour tout choix de ϵ_1 et ϵ_2, il existe δ_1 et δ_2 tels que
$$(|x-a| \leqslant \delta_1) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \epsilon_1.$$
et
$$(|x-a| \leqslant \delta_2) \Rightarrow |g(x) - g(a)| \leqslant \epsilon_2.$$
La quantité que nous souhaitons analyser est $|f(x)+g(x)-f(a)-g(a)|$. Tout le jeu de la démonstration de la continuité est de triturer cette expression pour en tirer quelque chose en termes de ϵ_1 et ϵ_2. Si nous supposons avoir pris $|x-a|$ plus petit en même temps que δ_1 et que δ_2, nous avons
$$|f(x) + g(x) - f(a) - g(a)| \leqslant |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(a)| \leqslant \epsilon_1 + \epsilon_2$$
en utilisant la formule générale $|a + b| \leqslant |a| + |b|$. Maintenant, si on choisit ϵ_1 et ϵ_2 tels que $\epsilon_1 + \epsilon_2 < \epsilon$, et les δ_1, δ_2 correspondants, on a
$$|f(x) + g(x) - f(a) - g(a)| \leqslant \epsilon,$$
pourvu que $|x-a|$ soit plus petit que δ_1 et δ_2. Le bon δ à prendre est donc le minimum de δ_1 et δ_2 qui eux-mêmes sont donnés par un choix de ϵ_1 et ϵ_2 tels que $\epsilon_1 + \epsilon_2 \leqslant \epsilon$. □

Pour résumer ces deux théorèmes, on dit que si f et g sont continues en a, alors la fonction $\alpha f + \beta g$ est également continue en a pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Proposition 10.78.
Soient des parties Ω_f et Ω_g dans $\mathbb{R}$. Soient $f\colon \Omega_f \to \mathbb{R}$ ainsi que $g\colon \Omega_g \to \mathbb{R}$ telles que

(1) g est continue en a et vaut $g(a) = \ell$.

(2) f est continue en ℓ et vaut $f(\ell) = b$.

(3) $g(\Omega_g) \subset \Omega_f$.

Alors $f \circ g$ *est continue en* a.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. La continuité de f dit que il existe $\eta > 0$ tel que

$$y \in B(\ell, \eta) \cap \Omega_f \Rightarrow |f(y) - f(\ell)| < \epsilon. \tag{10.90}$$

La continuité de g donne $\delta > 0$ tel que

$$x \in B(a, \delta) \cap \Omega_g \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \eta. \tag{10.91}$$

Si $x \in B(a, \delta) \cap \Omega_g$, alors $g(x) \in B(\ell, \eta) \cap \Omega_f$. Donc

$$|(f \circ g)(x) - f(\ell)| < \epsilon. \tag{10.92}$$

Mais $f(\ell) = (f \circ g)(a)$. Tout cela est la continuité de $f \circ g$ en a. □

Parmi les propriétés immédiates de la continuité d'une fonction, nous avons ceci qui est souvent bien utile.

Corolaire 10.79.
Si la fonction f *est continue en* a *et si* $f(a) > 0$*, alors* f *est positive sur un intervalle autour de* a.

Démonstration. Prenons $\epsilon < f(a)$ et voyons[33] ce que la continuité de f en a nous offre : il existe un δ tel que

$$(|x - a| \leqslant \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \epsilon < f(a).$$

Nous en retenons que sur un intervalle (de largeur δ), nous avons $|f(x) - f(a)| \leqslant f(a)$. Par hypothèse, $f(a) > 0$, donc si $f(x) < 0$, alors la différence $f(x) - f(a)$ donne un nombre encore plus négatif que $-f(a)$, c'est-à-dire que $|f(x) - f(a)| > f(a)$, ce qui est contraire à ce que nous venons de démontrer. D'où la conclusion que $f(x) > 0$. □

10.4.2 La fonction la moins continue du monde

Parmi les exemples un peu sales de fonctions non continues, il y a celle-ci :

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Par exemple, $\chi_{\mathbb{Q}}(0) = 1$, et[34] $\chi_{\mathbb{Q}}(\pi) = \chi_{\mathbb{Q}}(\sqrt{2}) = 0$. Bien que $\chi_{\mathbb{Q}}(0) = 1$, il n'existe *aucun* voisinage de 1 sur lequel la fonction reste proche de 1, parce que tout voisinage va contenir au moins un irrationnel. À chaque millimètre, cette fonction fait une infinité de bonds !

Cette fonction n'est donc continue nulle part.

À partir de là, nous pouvons construire la fonction suivante qui n'est continue qu'en un point :

$$f(x) = x\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction est continue en zéro. En effet, prenons $\delta > 0$; il nous faut un ϵ tel que $|x| \leqslant \epsilon$ implique $f(x) \leqslant \delta$ parce que $f(0) = 0$. Bon ben prendre simplement $\epsilon = \delta$ nous contente. Cette fonction est donc très facilement continue en zéro.

Et pourtant, dès que l'on s'écarte un tant soit peu de zéro, elle fait des bons une infinité de fois par millionième de millimètre ! Cette fonction est donc la plus discontinue du monde en tous les points, sauf un (zéro), où c'est une fonction continue !

33. ici, nous insistons sur le fait que nous prenons ϵ *strictement* plus petit que $f(a)$.

34. Pour prouver que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, c'est pas trop compliqué, mais pour prouver que π ne l'est pas non plus, il faudra encore manger de la soupe.

10.4.3 Approche topologique

Nous avons vu que sur tout ensemble métrique, nous pouvons définir ce qu'est un ouvert : c'est un ensemble qui contient une boule ouverte autour de chacun de ses points. Quand on est dans un ensemble ouvert, on peut toujours un peu se déplacer sans sortir de l'ensemble.

Le théorème suivant est une très importante caractérisation des fonctions continues (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) en termes de topologie, c'est-à-dire en termes d'ouverts.

Théorème 10.80.
Si I est un intervalle ouvert contenu dans dom f*, alors f est continue sur I si et seulement si pour tout ouvert $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{R}$, l'image inverse $f|_I^{-1}(\mathcal{O})$ est ouvert.*

Par abus de langage, nous exprimons souvent cette condition par « une fonction est continue si et seulement si l'image inverse de tout ouvert est un ouvert ».

Démonstration. Dans un premier temps, nous allons transformer le critère de continuité en termes de boules ouvertes, et ensuite, nous passerons à la démonstration proprement dite. Le critère de continuité de f au point x dit que

$$\forall\delta > 0, \exists\,\epsilon > 0 \text{ tel que } \big(|x-a| < \epsilon\big) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta. \tag{10.93}$$

Cette condition peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\forall\delta > 0, \exists\epsilon \text{ tel que } a \in B(x,\epsilon) \Rightarrow f(a) \in B\big(f(x),\delta\big),$$

ou encore

$$\forall\delta > 0, \exists\epsilon \text{ tel que } f\big(B(x,\epsilon)\big) \subset B\big(f(x),\delta\big). \tag{10.94}$$

Jusque ici, nous n'avons fait que du jeu de notations. Nous avons exprimé en termes de topologie des inégalités analytiques. La condition (10.94) est le plus souvent utilisée comme définition de la continuité d'une fonction en x, lorsque le contexte ne demande pas de définitions plus générales. Si tel est le choix, il faut pouvoir retrouver (10.93) à partir de (10.94).

Passons maintenant à la démonstration proprement dite du théorème.

D'abord, supposons que f est continue sur I, et prenons $\mathcal{O}$, un ouvert quelconque. Le but est de prouver que $f|_I^{-1}(\mathcal{O})$ est ouvert. Pour cela, nous prenons un point $x_0 \in f|_I^{-1}(\mathcal{O})$ et nous allons trouver un ouvert autour de ce point, contenu dans $f|_I^{-1}(\mathcal{O})$. Nous écrivons $y_0 = f(x_0)$. Évidemment, $y_0 \in \mathcal{O}$, donc on a une boule autour de y_0 qui est contenue dans $\mathcal{O}$, soit donc $\delta > 0$ tel que

$$B(y_0,\delta) \subset \mathcal{O}.$$

Par hypothèse, f est continue en x_0, et nous pouvons donc y appliquer le critère (10.94). Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que

$$f\big(B(x_0,\epsilon)\big) \subset B\big(f(x_0),\delta\big) \subset \mathcal{O}.$$

Cela prouve que $B(x_0,\epsilon) \subset f|_I^{-1}(\mathcal{O})$.

Dans l'autre sens, maintenant. Nous prenons $x_0 \in I$ et nous voulons prouver que f est continue en x_0, c'est-à-dire que pour tout δ, nous cherchons un ϵ tel que $f\big(B(x_0,\epsilon)\big) \subset B\big(f(x_0),\delta\big)$. Oui, mais $B\big(f(x_0),\delta\big)$ est ouverte, donc par hypothèse, $f|_I^{-1}\Big(B\big(f(x_0),\delta\big)\Big)$ est ouvert, inclus dans I et contient x_0. Donc il existe un ϵ tel que

$$B(x_0,\epsilon) \subset f|_I^{-1}\Big(B\big(f(x_0),\delta\big)\Big),$$

et donc tel que

$$f\big(B(x_0,\epsilon)\big) \subset B\big(f(x_0),\delta\big),$$

ce qu'il fallait prouver. □

Lemme 10.81.
L'image d'un ensemble connexe par une fonction continue est connexe.

Démonstration. Nous allons encore prouver la contraposée. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ telle que $f(A)$ ne soit pas connexe. Nous allons prouver que A elle-même n'est pas connexe. Dire que $f(A)$ n'est pas connexe, c'est dire qu'il existe $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$, deux ouverts disjoints qui recouvrent $f(A)$. Je prétends que $f^{-1}(\mathcal{O}_1)$ et $f^{-1}(\mathcal{O}_2)$ sont ouverts, disjoints et qu'ils recouvrent A.

— Ces deux ensembles sont ouverts parce qu'ils sont images inverses d'ouverts par une fonction continue (théorème 10.80).
— Si $x \in f^{-1}(\mathcal{O}_1) \cap f^{-1}(\mathcal{O}_2)$, alors $f(x) \in \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$, ce qui contredirait le fait que $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ sont disjoints. Il n'y a donc pas d'éléments dans l'intersection de $f^{-1}(\mathcal{O}_1)$ et de $f^{-1}(\mathcal{O}_2)$.
— Si $f^{-1}(\mathcal{O}_1)$ et $f^{-1}(\mathcal{O}_2)$ ne recouvrent pas A, il existe un x dans A qui n'est dans aucun des deux. Dans ce cas, $f(x)$ est dans $f(A)$, mais n'est ni dans $\mathcal{O}_1$, ni dans $\mathcal{O}_2$, ce qui contredirait le fait que ces deux derniers recouvrent $f(A)$.

Nous déduisons que A n'est pas connexe. Et donc le lemme. □

Théorème 10.82 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.**
Soit f, une fonction continue sur $[a,b]$, et supposons que $f(a) < f(b)$. Alors pour tout y tel que $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$, il existe un $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = y$.

Démonstration. Nous savons que $[a,b]$ est connexe parce que c'est un intervalle (proposition 10.47). Donc $f\big([a,b]\big)$ est connexe (lemme 10.81) et donc est un intervalle (à nouveau la proposition 10.47). Étant donné que $f\big([a,b]\big)$ est un intervalle, il contient toutes les valeurs intermédiaires entre n'importe quels deux de ses éléments. En particulier toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$. □

10.83.
Une façon classique d'utiliser le théorème des valeurs intermédiaires 10.82. Si $f\colon [0,\infty[\to [0,\infty[$ est continue et vérifie $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, alors f est surjective.

En effet si $y \in [0,\infty[$, alors il existe $a \in [0,\infty[$ tel que $f(a) > y$. Donc il existe $x \in [0,a]$ tel que $f(x) = y$.

Corolaire 10.84.
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Démonstration. Soient I un intervalle, $\alpha < \beta \in f(I)$ et $\gamma \in]\alpha,\beta[$. Nous considérons $a,b \in I$ tels que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires 10.82, il existe $t \in]a,b[$ tel que $f(t) = \gamma$. Par conséquent $\gamma \in f(I)$. □

Corolaire-Définition 10.85 (Existence de la racine carrée)**.**
*Si $x \geqslant 0$ dans $\mathbb{R}$ alors il existe un unique réel $y \geqslant 0$ tel que $y^2 = x$. Ce nombre est noté $\sqrt{x}$ et est nommé **racine carrée** de x.*

Démonstration. La fonction $f\colon t \mapsto t^2$ est continue et strictement croissante. Nous avons $f(0) = 0$ et [35] $f(x+1) > x$. Donc le théorème des valeurs intermédiaires 10.82 nous assure qu'il existe un unique $y \in [0, x+1]$ tel que $f(y) = x$. □

Lemme 10.86.
Quelques formules.

(1) $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ *si* $x,y \geqslant 0$.
(2) $\sqrt{\lambda^2 x} = |\lambda|\sqrt{x}$ *si* $x \geqslant 0$.

Lemme 10.87.
La fonction racine carrée est strictement croissante.

Démonstration. Supposons que $x < y$. Si $\sqrt{x} > \sqrt{y}$, alors la croissance de la fonction carré donne $x > y$ qui est contraire à l'hypothèse.. □

35. Faites deux cas suivant $x \geqslant 1$ ou non si vous le voulez, moi je prends $x + 1$.

10.4.4 Module sur les nombres complexes

Lemme-Définition 10.88.
Si $z \in \mathbb{C}$, alors $z\bar{z}$ est un réel positif.

*Nous définissons le **module** sur $\mathbb{C}$ par*[36]

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}. \tag{10.95}$$

Démonstration. Prouvons que $z\bar{z}$ est un réel positif. En effet si $z = a + bi$ alors

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi + b^2 = a^2 + b^2 \geqslant 0. \tag{10.96}$$

□

Lemme 10.89.
Si $z \in \mathbb{C}$ nous avons

$$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z). \tag{10.97}$$

Démonstration. Soit $z = a + bi$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a = 2\operatorname{Re}(z). \tag{10.98}$$

□

Proposition 10.90.
Pour tout nombres complexes $z = a + bi$ et z', nous avons

(1) $z\bar{z} = a^2 + b^2$;
(2) $\bar{\bar{z}} = z$;
(3) $|z| = |\bar{z}|$;
(4) $|zz'| = |z|\,|z'|$;
(5) $|z + z'| = \sqrt{|z|^2 + |z'|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}')}$.
(6) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$
(7) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ *si et seulement si* $z_1\bar{z}_2 \in \mathbb{R}^+$.
(8) *Nous avons* $|\operatorname{Re}(z)| \leqslant |z|$ *et nous avons l'égalité si et seulement si* $z \in \mathbb{R}$.

Démonstration. En plusieurs points.

(i) **Pour (1)** Calcul direct :

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi + b^2 = a^2 + b^2. \tag{10.99}$$

(ii) **Pour (2)** On a :

$$\bar{\bar{z}} = \overline{(a - bi)} = a + bi. \tag{10.100}$$

(iii) **Pour (3)** Même calcul que pour (1).

(iv) **Pour (4)** Puisque les deux membres de l'égalité à prouver sont positifs, il est suffisant de prouver l'égalité des carrés (lemme 10.87). Nous avons

$$zz' = (a + bi)(a' + b'i) = aa' - bb' + i(ab' + ba'), \tag{10.101}$$

36. Définition de la racine carrée : 10.85.

donc

$$\begin{aligned}
|zz'|^2 &= (aa'-bb')^2+(ab'+ba')^2 && (10.102a)\\
&= (aa')^2+(bb')^2-2aa'bb'+(ab')^2+(ba')^2+2ab'ba' && (10.102b)\\
&= a^2(a'^2+b'^2)+b^2(b'^2+a'^2) && (10.102c)\\
&= (a^2+b^2)(a'^2+b'^2). && (10.102d)
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\big(|z||z'|\big)^2 = |z|^2|z'|^2 = (a^2+b^2)(a'^2+b'^2). \qquad (10.103)$$

(v) **Pour (5)** En utilisant la formule (10.97) pour $z'\bar z$, nous avons :

$$|z+z'|^2 = (z+z')(\bar z+\bar z') = z\bar z + z\bar z' + z'\bar z + z'\bar z' = |z|^2+|z'|^2+2\operatorname{Re}(z\bar z'). \qquad (10.104)$$

(vi) **Pour (8)** En plusieurs points.

(i) **L'inégalité** Par croissance de la fonction racine carrée nous avons, en posant $z=a+bi$:

$$|\operatorname{Re}(z)| = |a| = \sqrt{|a|^2} \leqslant \sqrt{|a|^2+|b|^2} = |z|. \qquad (10.105)$$

(ii) **Égalité dans un sens** Si $|\operatorname{Re}(z)| = |z|$, alors toutes les inégalités dans (10.105) sont des égalités. En particulier

$$\sqrt{|a|^2} = \sqrt{|a|^2+|b|^2}. \qquad (10.106)$$

Par stricte croissance de la fonction racine carré, nous déduisons que $|b|^2=0$ et donc que $b=0$.

(iii) **Égalité dans l'autre sens** Si $z\in\mathbb{R}$, alors $\operatorname{Re}(z)=z$, et nous avons l'égalité.

(vii) **Pour (6)** Nous posons $z_1=a_1+b_1i$ et $z_2=a_2+b_2i$. Ensuite nous calculons, en utilisant (10.103) :

$$\big(|z_1|+|z_2|\big)^2 = |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2| = a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2+2\sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)}. \qquad (10.107)$$

et

$$\begin{aligned}
|z_1+z_2|^2 &= |(a_1+a_2)^2+i(b_1+b_2)|^2 && (10.108a)\\
&= (a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2 && (10.108b)\\
&= a_1^2+a_2^2+2a_1a_2+b_1^2+b_2^2+2b_1b_2. && (10.108c)
\end{aligned}$$

En faisant la différence,

$$\big(|z_1|+|z_2|\big)^2 - |z_1+z_2|^2 = 2\sqrt{(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)} - 2(a_1a_2+b_1b_2). \qquad (10.109)$$

Pour prouver que cette différence est positive, nous comparons les carrés des deux termes :

$$\begin{aligned}
A &= (a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2) && (10.110a)\\
B &= (a_1a_2+b_1b_2)^2. && (10.110b)
\end{aligned}$$

Nous avons :

$$A = a_1^2a_2^2+a_1^2b_2^2+b_1^2a_2^2+b_1^2b_2^2 \qquad (10.111)$$

et

$$B = a_1^2a_2^2+b_1^2b_2^2+2a_1a_2b_1b_2. \qquad (10.112)$$

Et un petit calcul montre enfin que

$$A-B = a_1^2b_2^2+b_1^2a_2^2-2a_1a_2b_1b_2 = (a_1b_2-b_1a_2)^2 \geqslant 0. \qquad (10.113)$$

□

Lemme 10.91.
Si deux nombres complexes $a, b \in \mathbb{C}$ vérifient $a\bar{b} \in \mathbb{R}$, alors nous sommes dans un des deux cas suivants :

— $b = 0$

— *il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $a = \lambda b$.*

De façon équivalente, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ non tous deux nuls tels que $\alpha a + \beta b = 0$.

Démonstration. Nous écrivons $a = a_1 + ia_2$ et $b = b_1 + ib_2$ avec $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. Nous supposons $b \neq 0$. Nous effectuons la multiplication $a\bar{b} = (a_1 + ia_2)(b_1 - ib_2)$ et nous annulons la partie imaginaire :

$$a_2 b_1 - a_1 b_2 = 0. \tag{10.114}$$

Si $b_1 = 0$ alors $a_1 b_2 = 0$ avec $b_2 \neq 0$, ce qui implique $a_1 = 0$. Donc $a = ia_2$, $b = ib_2$. Résultat obtenu.

Si $b_1 \neq 0$ alors

$$a_2 = \frac{a_1 b_2}{b_1}, \tag{10.115}$$

et nous avons alors

$$a = \frac{a_1}{b_1} b. \tag{10.116}$$

Mission accomplie.

Nous prouvons à présent la formulation équivalente. Si $b = 0$ il suffit de prendre $\alpha = 0$. Si $a = \lambda b$ il faut prendre $\alpha = \beta/\lambda$.

Dans l'autre sens, si $\alpha \neq 0$ alors $a = -(\beta/\alpha)b$ et si $\alpha = 0$ alors $\beta \neq 0$ et il reste $b = 0$. □

Proposition 10.92.
La paire $(\mathbb{C}, |.|)$ est un espace vectoriel normé[37].

Démonstration. Nous devons prouver les différents points de la définition 7.136.

(1) $|z| \geqslant 0$ parce que la racine carrée prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

(2) Si $|z| = 0$, alors, en notant $z = a + bi$ nous avons $a^2 + b^2 = 0$. Cela implique $a = b = 0$ (vous pouvez soit inovque le lemme 1.368, soit ne rien dire et faire comme si c'était évident).

(3) Si $\lambda \geqslant 0$, alors $(\lambda z)(\overline{\lambda z}) = \lambda^2 z\bar{z}$ et nous avons

$$|\lambda z| = \sqrt{\lambda^2 z\bar{z}} = |\lambda|\sqrt{z\bar{z}} = |\lambda||z|. \tag{10.117}$$

(4) L'inégalité $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ est la proposition 10.90(7).

□

Proposition 10.93.
Si z_1 et z_2 sont des nombres complexes, alors

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|. \tag{10.118}$$

Nous avons aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|z^n| = |z|^n. \tag{10.119}$$

Démonstration. D'abord $(a + bi)(c + di) = ac - db + (ad + bc)i$, de telle sorte que

$$|(a + bi)(c + di)|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2. \tag{10.120}$$

Mais en calculant d'autre part $|a + bi|^2 |c + di|^2$, nous tombons sur la même valeur.

Une simple récurrence permet de conclure que $|z^n| = |z|^n$. □

37. Définition d'une norme : 7.136.

Voilà. Vous êtes déjà content d'apprendre que l'on peut démontrer $|z^n| = |z|^n$ sans faire appel à la forme trigonométrique des nombres complexes.

Lemme 10.94.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ nous avons $z\bar{z} = \bar{z}z = |z|^2$.

10.5 Norme à partir d'un produit scalaire

Proposition 10.95 ([1])**.**
Soit un espace vectoriel complexe E muni d'une forme sesquilinéaire $\langle .,. \rangle$. La formule[38]

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \tag{10.121}$$

est une norme sur E.

Définition 10.96.
Dans le cas de $\mathbb{C}^n$, nous considérons toujours la norme associée à la forme (9.322) par la proposition 10.95, c'est à dire, pour rappel :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}, \tag{10.122}$$

et

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \tag{10.123}$$

pour tout $x \in \mathbb{C}^n$.

10.5.1 Continuité de la racine carrée, invitation à la topologie induite

Pourquoi nous intéresser particulièrement à la fonction racine carrée ? Parce qu'elle a une sale condition d'existence : son domaine de définition n'est pas ouvert. Or dans tous les théorèmes de continuité d'approche topologique que nous avons vus, nous avons donné des conditions *pour tout ouvert*. Nous nous attendons donc à avoir des difficultés avec la continuité de $\sqrt{x}$ en zéro.

Prenons I, n'importe quel intervalle ouvert dans $\mathbb{R}^+$, et voyons que la fonction [39]

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned} \tag{10.124}$$

est continue sur I. Remarquons déjà que si I est un ouvert dans $\mathbb{R}^+$, il ne peut pas contenir zéro. Avant de nous lancer dans notre propos, nous prouvons un lemme qui fera tout le travail [40].

Lemme 10.97.
Soit $\mathcal{O}$, un ouvert dans $\mathbb{R}^+$. Alors $\mathcal{O}^2 = \{x^2 \text{ tel que } x \in \mathcal{O}\}$ est également ouvert.

Démonstration. Un élément de $\mathcal{O}^2$ s'écrit sous la forme x^2 pour un certain $x \in \mathcal{O}$. Le but est de trouver un ouvert autour de x^2 qui soit contenu dans $\mathcal{O}^2$. Étant donné que $\mathcal{O}$ est ouvert, on a une boule centrée en x contenue dans $\mathcal{O}$. Nous appelons δ le rayon de cette boule :

$$B(x, \delta) \subset \mathcal{O}.$$

Étant donné que cet ensemble est connexe, nous savons par le lemme 10.81 que $B(x, \delta)^2$ est également connexe (parce que la fonction $x \mapsto x^2$ est continue). Son plus grand élément est $(x + \delta)^2 = x^2 + \delta^2 + 2x\delta > x^2 + \delta^2$, et son plus petit élément est $(x - \delta)^2 = x^2 + \delta^2 - 2x\delta$.

38. Pour la racine carrée, définition 10.85.
39. La racine carrée est définie en 10.85.
40. C'est toujours ingrat d'être un lemme : on fait tout le travail et c'est toujours le théorème qui est nommé.

Ce qui serait pas mal, c'est que ces deux bornes entourent x^2 ; de cette façon elles définiraient un ouvert autour de x^2 qui soit dans $\mathcal{O}^2$. Hélas, c'est pas gagné que $x^2+\delta^2-2x\delta$ soit plus petit que x^2.

Heureusement, en fait c'est vrai, parce que d'une part, comme $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^+$, on a $x>0$, et d'autre part, pour que $\mathcal{O}$ soit positif, il faut que $\delta<x$. Donc on a évidemment $\delta<2x$, et donc

$$x^2+\delta^2-2x\delta=x^2+\delta\underbrace{(\delta-2x)}_{<0}<x^2.$$

Et nous en avons fini : l'ensemble

$$B(x,\delta)^2=]x^2+\delta^2-2x\delta,x^2+\delta^2+2x\delta[\subset\mathcal{O}^2$$

est un intervalle qui contient x^2, et donc qui contient une boule ouverte centrée en x^2. □

Maintenant nous pouvons nous attaquer à la continuité de la racine carrée sur tout ouvert positif en utilisant le théorème 10.80. Soit $\mathcal{O}$ n'importe quel ouvert de $\mathbb{R}$, et prouvons que $f|_I^{-1}(\mathcal{O})$ est ouvert. Par définition,

$$f|_I^{-1}(\mathcal{O})=\{x\in I \text{ tel que } \sqrt{x}\in\mathcal{O}\}. \tag{10.125}$$

Maintenant, c'est un tout petit effort que de remarquer que $f|_I^{-1}(\mathcal{O})=\mathcal{O}^2\cap I$. De là, on a gagné parce que $\mathcal{O}^2$ et I sont des ouverts. Or l'intersection de deux ouverts est un ouvert.

Nous n'en avons pas fini avec la fonction $\sqrt{x}$. Nous avons la continuité de la racine carrée pour tous les réels strictement positifs. Il reste à pouvoir dire que la fonction est continue en zéro, bien qu'elle ne soit pas définie sur un ouvert autour de zéro.

Il est possible de dire que la racine carrée est continue en 0, bien qu'elle ne soit pas définie sur un ouvert autour de 0...en tout cas pas un ouvert au sens que le lecteur a en tête. Nous allons rentabiliser un bon coup notre travail sur les espaces métriques.

Nous pouvons définir la notion de boule ouverte sur n'importe quel espace métrique A en disant que

$$B(x,r)=\{y\in A \text{ tel que } d(x,y)<r\}.$$

Définition 10.98.
Soit $f\colon A\to B$, une application entre deux espaces métriques. Nous disons que f est ***continue*** *au point $a\in A$ si $\forall\delta>0$, $\exists\epsilon>0$ tel que*

$$f\big(B(a,\epsilon)\big)\subset B\big(f(a),\delta\big). \tag{10.126}$$

Nous reconnaissons évidemment la condition (10.94). Nous l'avons juste recopiée. Nous remarquerons cependant que cette définition généralise immensément la continuité que l'on avait travaillé à propos des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Maintenant on peut prendre n'importe quel espace métrique et c'est bon.

Nous n'allons pas faire un tour complet des conséquences et exemples de cette définition. Au lieu de cela, nous allons juste montrer en quoi cette définition règle le problème de la continuité de la racine carrée en zéro.

La fonction que nous étudions est

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^+&\to\mathbb{R}^+\\ x&\mapsto\sqrt{x}. \end{aligned} \tag{10.127}$$

Mais cette fois, nous ne la voyons pas comme étant une fonction dont le domaine est une partie de $\mathbb{R}$, mais comme fonction dont le domaine est $\mathbb{R}^+$ vu comme un espace métrique en soi. Quelles sont les boules ouvertes dans $\mathbb{R}^+$ autour de zéro ? Réponse : la boule ouverte de rayon r autour de zéro dans $\mathbb{R}^+$ est :

$$B(0,r)_{\mathbb{R}^+}=\{x\in\mathbb{R}^+ \text{ tel que } d(x,0)<r\}=[0,r[.$$

Cet intervalle est un ouvert. Aussi incroyable que cela puisse paraître !

Testons la continuité de la racine carrée en zéro dans ce contexte. Il s'agit de prendre $A = \mathbb{R}^+$, $B = \mathbb{R}^+$ et $a = 0$ dans la définition 10.98. Nous avons que $B(\sqrt{0}, \delta) = B(0, \delta) = [0, \delta[$ pour la topologie de $\mathbb{R}^+$.

Il s'agit maintenant de trouver un ϵ tel que $f\big(B(0, \epsilon)\big) \subset [0, \delta[$. Par définition, nous avons

$$f\big(B(0, \epsilon)\big) = [0, \sqrt{\epsilon}[,$$

le problème revient dont à trouver ϵ tel que $\sqrt{\epsilon} \leqslant \delta$. Prendre $\epsilon < \delta^2$ fait l'affaire.

Donc voilà. Au sens de la topologie induite[41], de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^+$, nous pouvons dire que la fonction racine carrée est partout continue.

10.5.2 Second degré

Nous résolvons à présent le polynôme du second degré.

Proposition 10.99 ([263]).
Soit la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax^2 + bx + c \end{aligned} \tag{10.128}$$

avec $a \neq 0$. Nous notons $\Delta = b^2 - 4ac$.

(1) Nous avons la formule

$$f(x) = a\big(x + \frac{b}{2a}\big)^2 + c - \frac{b^2}{4a}. \tag{10.129}$$

(2) Si $a > 0$, alors f a un minimum global en $x_m = -b/2a$.

(3) Si $a < 0$, alors f a un maximum global en $x_M = -b/2a$.

(4) Si $\Delta < 0$ alors f ne possède pas de racine réelle.

(5) Si $\Delta = 0$, alors f possède une unique racine $x_0 = -b/2a$.

(6) Si $\Delta > 0$ alors f possède exactement deux racines distinctes données par

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}. \tag{10.130}$$

Démonstration. En plusieurs parties.

(i) **Pour (1)** C'est un calcul immédiat.

(ii) **Pour (2)** Nous partons de la formule du point (1). Puisque $c - \frac{b^2}{4a}$ est constant, minimiser f revient à minimiser $x \mapsto \big(x + \frac{b}{2a}\big)^2$. Comme cette dernière fonction est toujours positive, elle a un minimum global là où elle est nulle, c'est-à-dire en $x_m = -b/2a$.

(iii) **Pour (3)** Idem que pour (2).

Pour la suite nous effectuons quelques manipulations à partir de (10.129). Nous avons $f(x) = 0$ lorsque

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \tag{10.131}$$

(i) **Pour (4)** À gauche de (10.131) nous avons un nombre toujours positif ou nul. À droite, $4a^2 > 0$. Donc si $b^2 - 4ac < 0$, l'égalité est impossible et il n'y a pas de x vérifiant $f(x) = 0$.

(ii) **Pour (5)** Si $b^2 - 4ac = 0$, alors la condition (10.131) devient

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0, \tag{10.132}$$

et donc $x = -b/2a$ est l'unique solution.

41. Définition 7.33.

(iii) **Pour (6)** Si $b^2-4ac > 0$, nous pouvons prendre la racine carré [42] des deux côtés de (10.131), et la condition devient

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}, \tag{10.133}$$

ce qui donne

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{10.134}$$

Ce sont là les deux seuls candidats pour vérifier $f(x) = 0$.

Un calcul direct montre que

$$f\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0 \tag{10.135}$$

et que

$$f\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0. \tag{10.136}$$

Donc ce sont bien des racines de f et ce sont les seules. Notez aussi qu'elles sont distinctes parce que $\Delta \neq 0$.

□

42. Définition 10.85.

Chapitre 11

Espaces vectoriels normés

Plusieurs notions sur les espaces vectoriels normés (dont la définition 7.136) ont déjà été abordées dans la section 7.14. Voir aussi le thème 24.

11.0.1 Norme, produit scalaire et Cauchy-Schwarz (cas réel)

Dans la suite, le produit scalaire de x et y pourra être noté indifféremment par $x \cdot y$, $\langle x, y\rangle$ ou $b(x, y)$ lorsque une forme bilinéaire est donnée.

Nous rappelons au passage que les espaces vectoriels réels sont susceptibles de recevoir un produit scalaire, alors que les espaces vectoriels complexes sont susceptibles de recevoir un produit hermitien. Bien que de nombreux résultats soient identiques ou très similaires, ces deux notions sont à ne pas confondre.

Nous commençons par prouver qu'un produit scalaire étant donné, nous pouvons définir une norme par la formule $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$. Pour cela nous aurons besoin de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Théorème 11.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas réel)**.**
Soit un espace vectoriel réel E muni d'un produit scalaire[1] $(x, y) \mapsto x \cdot y$*. Nous posons*[2]

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}. \tag{11.1}$$

Alors :

(1) Il y a l'inégalité

$$|x \cdot y| \leqslant \|x\|\|y\|. \tag{11.2}$$

pour tout $x, y \in E$.

(2) Il y a égalité $|x \cdot y| = \|x\|\|y\|$. si et seulement si x et y sont multiples l'un de l'autre.

(3) L'opération $\|.\|$ est une norme[3]*.*

(4) Cette norme vérifie l'identité du parallélogramme :

$$\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \tag{11.3}$$

Démonstration. Étant donné que les deux membres de l'inéquation sont positifs, nous allons travailler en passant au carré afin d'éviter les racines carrés dans le second membre.

Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} P\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ t &\mapsto \|x+ty\|, \end{aligned} \tag{11.4}$$

1. Produit scalaire, définition 9.155.

2. Attention à la notation : pour l'instant nous ne savons pas que c'est une norme ; c'est justement un des points de ce théorème. Par ailleurs, la racine carré est définie par 10.85.

3. Définition 7.136.

et nous calculons un peu :

$$\begin{aligned}
0 \geqslant \|x+ty\|^2 && (11.5a)\\
= (x+ty)\cdot(x+ty) && (11.5b)\\
= x\cdot x + x\cdot ty + ty\cdot x + t^2 y\cdot y && (11.5c)\\
= \|y\|^2 t^2 + 2(x\cdot y)t + \|x\|^2. && (11.5d)
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé la bilinéarité (pour sortir les t) et la symétrique du produit scalaire.

Nous voyons que P est un polynôme du second degré en t à valeurs dans $[0,\infty[$. Par la proposition 10.99 nous en déduisons que le fameux b^2-4ac doit être négatif ou nul. Nous avons donc

$$\Delta = 4(x\cdot y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leqslant 0, \tag{11.6}$$

ce qui donne immédiatement

$$(x\cdot y)^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2. \tag{11.7}$$

En ce qui concerne le cas d'égalité, si nous avons $x\cdot y = \|x\|\|y\|$, alors le discriminant Δ ci-dessus est nul et le polynôme P admet une racine double t_0. Pour cette valeur nous avons

$$P(t_0) = |x+t_0y| = 0, \tag{11.8}$$

ce qui implique $x+t_0y=0$ et donc que x et y sont liés.

(i) **C'est une norme** Nous allons nous contenter de prouver l'inégalité triangulaire. Si $x,y\in E$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|x+y\| &= \sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2+2x\cdot y} && (11.9a)\\
&\leqslant \sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2+2|x\cdot y|} && (11.9b)\\
&\leqslant \sqrt{\|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\|} && (11.9c)\\
&= \sqrt{\big(\|x\|+\|y\|\big)^2} && (11.9d)\\
&= \|x\|+\|y\|. && (11.9e)
\end{aligned}$$

Justifications.

— Pour (11.9b). La fonction racine carrée est croissante, lemme 10.87.

— Pour (11.9c). Inégalité de Cauchy-Schwarz 11.1.

(ii) **Inégalité du parallélogramme** Cette assertion est seulement un calcul :

$$\begin{aligned}
\|x-y\|^2+\|x+y\|^2 &= (x-y)\cdot(x-y)+(x+y)\cdot(x+y)\\
&= x\cdot x - x\cdot y - y\cdot x + y\cdot y\\
&\quad + x\cdot x + x\cdot y + y\cdot x + y\cdot y\\
&= 2x\cdot x + 2y\cdot y\\
&= 2\|x\|^2+2\|y\|^2.
\end{aligned} \tag{11.10}$$

□

Toute norme dérivant d'un produit scalaire vérifie l'identité du parallélogramme. Ce résultat sert souvent à prouver que des normes ne dérivent pas d'un produit scalaire. C'est le cas de la norme $N(x,y)=|x|+|y|$ du lemme 11.12 ainsi que du théorème de Weinersmith 27.45.

Proposition 11.2.
La norme euclidienne[4] *a les propriétés suivantes :*

4. Un espace euclidien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, définition 9.159. Ici nous considérons la norme associée par le théorème 11.1.

(1) Pour tout vecteur x et réel λ,

$$\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|. \tag{11.11}$$

(2) Pour tout vecteurs x et y,

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \tag{11.12}$$

Démonstration. Un produit scalaire est en particulier une forme bilinéaire, et vérifie les conditions de la définition 9.118.

Pour le premier point nous avons

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x) \cdot (\lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 x \cdot x} = |\lambda|\|x\|. \tag{11.13}$$

Nous avons utilisé la formule du lemme 10.86(2).

Pour le second point, nous avons les inégalités suivantes :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2x \cdot y \tag{11.14a}$$

$$\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|x \cdot y| \tag{11.14b}$$

$$\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2 \tag{11.14c}$$

Nous avons utilisé d'abord la majoration $|x| \geqslant x$ qui est évidente pour tout nombre x ; et ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwarz 11.1. □

Définition 11.3 (Norme sur $\mathbb{R}^n$)**.**
Sauf mention du contraire, nous considérons toujours sur $\mathbb{R}^n$ la norme (et donc la topologie) associée au produit scalaire de la proposition 9.160 par le théorème 11.1, c'est à dire

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{11.15}$$

Proposition 11.4 ([264])**.**
Soit b une forme bilinéaire et symétrique. Alors

(1) $\ker(b) \subset C(b)$ *(cône d'isotropie, définition 9.124)*

(2) si b est positive alors $\ker(b) = C(b)$.

Démonstration. (1) Si $z \in \ker(b)$ alors pour tout $y \in E$ nous avons $b(z, y) = 0$. En particulier pour $y = z$ nous avons $b(z, z,) = 0$ et donc $z \in C(b)$.

(2) Soit b positive et $x \in C(b)$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (proposition 11.1) nous avons

$$|b(x, y)| \leqslant \sqrt{b(x, x)b(y, y)} = 0. \tag{11.16}$$

Donc pour tout y nous avons $b(x, y) = 0$.

□

Lemme 11.5.
Soit un espace vectoriel euclidien[5] E sur le corps $\mathbb{K}$. Si $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$ est une base orthonormée de E et si $f\colon E \to E$ est un endomorphisme, alors

$$\det(f) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \langle e_{\sigma(i)}, f(e_i)\rangle. \tag{11.17}$$

Démonstration. Nous utilisons la définition 9.8 du déterminant d'un endomorphisme $\det(f) = \det_B\big(f(B)\big)$ en prenant la liste des vecteurs $\{e_i\}$ comme B. En l'occurrence, le i^{e} vecteur de la famille B est $f(e_i)$.

Puisque la base est orthonormée, nous avons $e_k^*(v) = \langle e_k, v\rangle$ et donc aussi

$$e_{\sigma(i)}^*(v_i) = \langle e_{\sigma(i)}^*, f(e_i)\rangle. \tag{11.18}$$

□

5. C'est-à-dire qu'il possède un produit scalaire, voir la définition 9.159.

Et si vous avez tout suivi, vous aurez remarqué que les produits scalaires impliqués dans la formule (11.17) sont les éléments de la matrice de f dans la base $\{e_i\}$ parce que $\langle e_i, f(e_j)\rangle$ est la composante i de l'image de e_j par f. Si la matrice est composée en mettant en colonne les images des vecteurs de base, le compte est bon.

11.1 Théorème spectral autoadjoint

Théorème 11.6 (Théorème spectral autoadjoint)**.**
Un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien

(1) est diagonalisable dans une base orthonormée,

(2) a son spectre réel.

Démonstration. Nous procédons par récurrence sur la dimension de E, et nous commençons par $n = 1$[6]. Soit donc $f\colon E \to E$ avec $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$. Étant donné que f est également linéaire, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda x$ pour tout $x \in E$. Tous les vecteurs de E sont donc vecteurs propres de f.

Passons à la récurrence. Nous considérons $\dim(E) = n + 1$ et $f \in \mathrm{S}(E)$. Nous considérons la forme bilinéaire symétrique Φ_f et la forme quadratique associée ϕ_f. Pour rappel,

$$\Phi_f(x, y) = \langle x, f(y)\rangle \tag{11.19a}$$

$$\phi_f(x) = \Phi_f(x, x). \tag{11.19b}$$

Et nous allons laisser tomber les indices f pour noter simplement Φ et ϕ. Étant donné que $\overline{B(0,1)}$ est compacte et que ϕ est continue, il existe $x_0 \in \overline{B(0,1)}$ tel que

$$\lambda = \phi(x_0) = \sup_{x\in\overline{B(0,1)}} \phi(x). \tag{11.20}$$

Notons aussi que $\|x_0\| = 1$: le maximum est pris sur le bord. Nous posons

$$g = \lambda \operatorname{Id} - f \tag{11.21}$$

ainsi que

$$\Phi_1(x, y) = \langle x, g(y)\rangle. \tag{11.22}$$

C'est une forme bilinéaire et symétrique parce que

$$\Phi_1(y, x) = \langle y, g(x)\rangle = \langle g(y), x\rangle = \langle x, g(y)\rangle = \Phi_1(x, y) \tag{11.23}$$

où nous avons utilisé le fait que g était autoadjoint et la symétrie du produit scalaire. De plus Φ_1 est semi-définie positive parce que

$$\Phi_1(x, x) = \langle x, \lambda x - f(x)\rangle = \lambda\|x\|^2 - \phi(x). \tag{11.24}$$

Puisque λ est le maximum, nous avons tout de suite $\Phi_1(x) \geqslant 0$ tant que $\|x\| = 1$. Et si x n'est pas de norme 1, c'est le même prix parce qu'on se ramène à $\|x\| = 1$ en multipliant par un nombre positif. Attention cependant :

$$\Phi_1(x_0, x_0) = \lambda\|x_0\|^2 - \phi(x_0) = 0. \tag{11.25}$$

Donc Φ_1 a un noyau contenant x_0 par la proposition 11.4. Nous en déduisons que $\operatorname{Image}(g) \neq E$ en effet, $x_0 \in \operatorname{Image}(g)^\perp$, mais nous avons la proposition 4.125 sur les dimensions :

$$\dim E = \dim(\operatorname{Image}(g)) + \dim(\operatorname{Image}(g)^\perp). \tag{11.26}$$

6. Dans [89], l'auteur commence avec $n = 0$ mais moi je n'en ai pas le courage..

Comme $\text{Image}(g)^\perp$ est un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$, la dimension de $\text{Image}(g)$ ne peut pas être celle de E. L'endomorphisme g n'étant pas surjectif, il ne peut pas être injectif non plus parce que nous sommes en dimension finie ; il existe donc $e_1 \in E$ tel que $g(e_1) = 0$ et tant qu'à faire nous choisissons $\|e_1\| = 1$ (ici la norme est bien celle de l'espace euclidien considéré). Par définition,

$$f(e_1) = \lambda e_1, \tag{11.27}$$

c'est-à-dire que $\lambda \in \text{Spec}(f)$. Et ϕ étant une forme quadratique réelle nous avons $\lambda \in \mathbb{R}$.

Nous posons à présent $H = \text{Span}\{e_1\}^\perp$. C'est un sous-espace stable par f parce que si $x \in H$ alors

$$\langle e_1, f(x)\rangle = \langle f(e_1 j), x\rangle = \lambda\langle e_1, x\rangle = 0. \tag{11.28}$$

Nous pouvons donc considérer la restriction de f à H : $f_H \colon H \to H$. Cet endomorphisme est bilinéaire et symétrique sur l'espace H de dimension inférieure à celle de E, donc la récurrence nous donne une base orthonormée

$$\{e_2, \ldots, e_n\} \tag{11.29}$$

de vecteurs propres de f_H. De plus les valeurs propres sont réelles, toujours par récurrence. Donc

$$\text{Spec}(f) = \{\lambda\} \cup \text{Spec}(f_H) \subset \mathbb{R}. \tag{11.30}$$

Notons pour être complet que si $i \geqslant 2$ alors

$$\langle e_1, e_i\rangle = 0 \tag{11.31}$$

parce que le vecteur e_i est par construction choisi dans l'espace $H = e_1^\perp$. Nous avons donc bien une base orthonormée de E construite sur des vecteurs propres de f. □

Corolaire 11.7.
Soit E un espace vectoriel ainsi que ϕ et ψ des formes quadratiques sur E avec ψ définie positive. Alors il existe une base ψ-orthonormale dans laquelle ϕ est diagonale.

Démonstration. Il suffit de considérer l'espace euclidien E muni du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \psi(x, y)$. Ensuite nous diagonalisons la matrice (symétrique) de ϕ pour ce produit scalaire à l'aide du théorème 11.6. □

Définition 11.8.
*La **norme euclidienne** d'un élément de $\mathbb{R}^m$ est définie par $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$[7].*

Cette définition est motivée par le fait que le produit scalaire $u \cdot u$ donne exactement la norme usuelle donnée par le théorème de Pythagore :

$$u \cdot u = \sum_{i=1}^m u_i u_i = \sum_{i=1}^m u_i^2 = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_m^2. \tag{11.32}$$

Le fait que $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ signifie que la base canonique est **orthonormée**, c'est-à-dire que les vecteurs de la base canonique sont orthogonaux deux à deux et qu'ils ont tout 1 comme norme.

Lemme 11.9.
Pour tout $u \in \mathbb{R}^m$, il existe un $\xi \in \mathbb{R}^m$ tel que $\|u\| = \xi \cdot u$ et $\|\xi\| = 1$.

Démonstration. Vérifions que le vecteur $\xi = u/\|u\|$ ait les propriétés requises. D'abord $\|\xi\| = 1$ parce que $u \cdot u = \|u\|^2$. Ensuite

$$\xi \cdot u = \frac{u \cdot u}{\|u\|} = \frac{\|u\|^2}{\|u\|} = \|u\|. \tag{11.33}$$

□

7. La racine carrée est définie en 10.85.

11.1.1 Inégalité de Minkowski

Ce qui est couramment nommé « inégalité de Minkowski » est la proposition 27.38 dans les espaces L^p. Nous allons en donner ici un cas très particulier.

Proposition 11.10.
Si q est une forme quadratique[8] *sur $\mathbb{R}^n$ et si $x, y \in \mathbb{R}^n$ alors*

$$\sqrt{q(x+y)} \leqslant \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}. \tag{11.34}$$

Démonstration. La proposition 9.235 nous permet de « diagonaliser » la forme quadratique q. Quitte à ne plus avoir une base orthonormale, nous pouvons renormaliser les vecteurs de base pour avoir

$$q(x) = \sum_i x_i^2. \tag{11.35}$$

Le résultat n'est donc rien d'autre que l'inégalité triangulaire pour la norme euclidienne usuelle, laquelle est démontrée dans le théorème 11.1. □

11.11.
Un produit scalaire fournit donc toujours une norme et donc une topologie. Il ne faudrait cependant pas croire que toute norme dérive d'un produit scalaire, même pas en dimension finie. Et ce, malgré l'équivalence de toutes les normes du théorème 11.45 dont vous avez déjà peut-être entendu parler.

L'intérêt du lemme suivant sera apparent en 11.47.

Lemme 11.12.
Sur $\mathbb{R}^2$, l'application $N(x,y) = |x| + |y|$ est une norme[9] *qui ne dérive pas d'un produit scalaire*[10].

Démonstration. Nous commençons par montrer que N est une norme. Il faut vérifier les trois conditions de la définition 7.136.

(1) Il faut utiliser le lemme 1.322(1) dans les deux sens. Si $(x,y) = (0,0)$, alors évidemment $N(x,y) = 0$. Dans l'autre sens, si $N(x,y) = 0$ nous avons

$$0 = |x| + |y| \geqslant |x|. \tag{11.36}$$

Donc $|x| \leqslant 0$, mais comme $|x| \geqslant 0$, nous avons $|x| = 0$ et donc $x = 0$. Le même raisonnement tient pour y.

(2) En tenant compte du fait que $|\lambda x| = |\lambda||x|$, nous avons

$$N\big(\lambda(x,y)\big) = N(\lambda x, \lambda y) = |\lambda||x| + |\lambda||y| = |\lambda|(|x| + |y|) = |\lambda| N(x,y). \tag{11.37}$$

(3) Nous avons le calcul

$$N\big((x,y) + (a,b)\big) = N(x+a, y+b) \tag{11.38a}$$
$$= |x+a| + |y+b| \tag{11.38b}$$
$$\leqslant |x| + |a| + |y| + |b| = N(x,y) + N(a,b) \tag{11.38c}$$

Justification : pour (11.38c) nous avons utilisé $|a+b| \leqslant |a| + |b|$, du lemme 1.322.

Pour voir qu'elle ne dérive pas d'un produit scalaire, nous montrons qu'elle ne vérifie pas l'identité du parallélogramme du théorème 11.1.

Voici un petit bout de code qui nous permet de ne pas faire de recherches à la main :

8. Définition 9.126.
9. Définition 7.136.
10. La norme d'un produit scalaire est le théorème 11.1.

```
# Dans un cas réel, vous avez nettement intérêt à
# créer une classe 'Vecteur' qui implémente somme, différence
# et norme.
def N(v):
    return abs( v[0] )+abs(v[1])

def parall(v,w):
    # La différence v-w
    d=( v[0]-w[0],v[1]-w[1] )
    # La somme v+w
    s=( v[0]+w[0],v[1]+w[1] )

    return N(d)**2+N(s)**2-2*N(v)**2-2*N(w)**2
```

tex/sage/sageSnip018.sage

Il est vite vu qu'avec $v = (-1, 1)$ et $w = (1, 1)$, l'identité du parallélogramme n'est pas vérifiée. □

Lemme 11.13 ([89]).
Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire[11] *et de la norme associée. Si $x, y \in V$ satisfont à $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, alors il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $x = \lambda y$.*

Démonstration. Quitte à raisonner avec $x/\|x\|$ et $y/\|y\|$, nous supposons que $\|x\| = \|y\| = 1$. Dans ce cas l'hypothèse signifie que $\|x+y\|^2 = 4$. D'autre part en écrivant la norme en termes de produit scalaire,

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle, \tag{11.39}$$

ce qui nous mène à affirmer que $\langle x, y\rangle = 1 = \|x\|\|y\|$. Nous sommes donc dans le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz[12], ce qui nous donne un λ tel que $x = \lambda y$. Étant donné que $\|x\| = \|y\| = 1$ nous avons obligatoirement $\lambda = \pm 1$, mais si $\lambda = -1$ alors $\langle x, y\rangle = -1$, ce qui est le contraire de ce qu'on a prétendu plus haut. Par souci de cohérence, nous allons donc croire que $\lambda = 1$. □

Proposition 11.14 ([265]).
si $v_1, \cdots, v_k$ sont des vecteurs non nuls, orthogonaux deux à deux, alors ces vecteurs forment une famille libre.

Démonstration. Soit une combinaison linéaire nulle des v_i : $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0$. Nous multiplions scalairement par v_k :

$$0 = \sum_i \lambda_i v_k \cdot v_i = \sum_i \lambda_i \delta_{ki} \|v_i\|^2 = \lambda_k \|v_k\|^2. \tag{11.40}$$

Donc $\lambda_k = 0$. □

Lemme 11.15.
Une isométrie d'un espace euclidien fixe l'origine.

Démonstration. Soit une isométrie f d'un espace euclidien : $f(x) \cdot f(y) = x \cdot y$ pour tout $x, y \in E$. En particulier pour $x = 0$ nous avons

$$f(0) \cdot f(y) = 0 \tag{11.41}$$

pour tout y. Parce que f est une bijection, nous avons $f(0) \cdot x = 0$ pour tout x. Comme le produit scalaire est non dégénéré[13] cela implique que $f(0) = 0$. □

11. Définition 9.155.
12. Théorème 11.1.
13. Lemme 9.158.

11.1.2 Cauchy-Schwarz etc. cas complexe

Théorème 11.16 (Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas complexe[266])**.**
Soit un espace vectoriel complexe muni d'un produit hermitien $\langle .,. \rangle$. Alors pour tous vecteurs x, y nous avons

$$|\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\| \tag{11.42}$$

où nous avons posé $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$.

Démonstration. Si $\langle x,y\rangle = 0$, le résultat est évident. Nous nous concentrons donc sur le cas où $\langle x,y\rangle \neq 0$. Nous posons

$$\theta = \frac{\langle x,y\rangle}{|\langle x,y\rangle|}. \tag{11.43}$$

C'est un élément de $\mathbb{C}$ de norme 1. Nous avons

$$\langle \frac{1}{\theta}x, y\rangle = \frac{|\langle x,y\rangle|}{\langle x,y\rangle}\langle x,y\rangle = |\langle x,y\rangle| \geqslant 0 \tag{11.44}$$

où le symbole « $\geqslant$ » signifie « est réel et positif ». Nous posons $x' = \frac{1}{\theta}x$ et nous considérons $t \in \mathbb{R}$. Remarquons que $\|x'\|^2 = \|x\|^2$:

$$\|x'\|^2 = \langle x', x'\rangle = \frac{1}{\theta\bar\theta}\langle x,x\rangle = \|x\|^2 \tag{11.45}$$

parce que $|\theta| = 1$.

En utilisant le fait que $\langle a,b\rangle + \langle b,a\rangle = \operatorname{Re}(\langle a,b\rangle)$ nous avons :

$$0 \leqslant \|x' + ty\|^2 = \|x'\|^2 + t\langle x',y\rangle + t\langle y,x'\rangle + t^2\|y\|^2 \tag{11.46a}$$

$$= \|y\|^2 t^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x',y\rangle)t + \|x'\|^2. \tag{11.46b}$$

C'est un polynôme de degré 2 en t qui n'est jamais strictement négatif. Autrement dit, il a au maximum une seule racine, ce qui signifie que son discriminant est négatif ou nul :

$$\operatorname{Re}(\langle x',y\rangle)^2 - \|y\|^2\|x'\|^2 \leqslant 0. \tag{11.47}$$

Mais nous avons choisi x' de telle sorte que $\langle x',y\rangle = |\langle x,y\rangle| \in \mathbb{R}$ et $\|x'\|^2 = \|x\|^2$; nous avons donc

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2, \tag{11.48}$$

comme il se devait. □

Proposition 11.17 (Identité du parallélogramme[267])**.**
Soit une espace vectoriel complexe E muni d'un produit hermitien $\langle .,. \rangle$. Nous posons $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$. Nous avons

(1) $\|.\|$ est une norme.

(2) Elle vérifie l'identité du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|b\|^2 \tag{11.49}$$

pour tout $x, y \in E$.

Démonstration. En ce qui concerne le fait que $\|.\|$ soit une norme, tout est essentiellement dans la définition 9.163 d'un produit hermitien. Voyons tout de même l'inégalité triangulaire. Nous avons :

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle \tag{11.50a}$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle \tag{11.50b}$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re\big(\langle x,y\rangle\big) \tag{11.50c}$$

$$\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\big|\Re\big(\langle x,y\rangle\big)\big| \tag{11.50d}$$

$$\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| \tag{11.50e}$$

$$\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \tag{11.50f}$$

$$= \big(\|x\| + \|y\|\big)^2. \tag{11.50g}$$

Pour (11.50f) nous avons utilisé Cauchy-Schwarz 11.16. □

11.1.3 Diagonalisation : cas complexe, ce qu'on a

Lemme 11.18 (Théorème spectral hermitien)**.**
Nous considérons un espace vectoriel complexe hermitien. Pour un opérateur hermitien[14]*,*

(1) le spectre est réel,

(2) deux vecteurs propres pour des valeurs propres distinctes sont orthogonaux[15]*.*

Démonstration. Soit v un vecteur de valeur propre λ. Nous avons d'une part

$$\langle Av, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle = \lambda\|v\|^2, \tag{11.51}$$

et d'autre part, en utilisant le fait que A est hermitien,

$$\langle Av, v\rangle = \langle v, A^*v\rangle = \langle v, Av\rangle = \bar{\lambda}\|v\|^2, \tag{11.52}$$

par conséquent $\lambda = \bar{\lambda}$ parce que $v \neq 0$.

Soient λ_i et v_i $(i = 1, 2)$ deux valeurs propres de A avec leurs vecteurs propres correspondants. Alors d'une part

$$\langle Av_1, v_2\rangle = \lambda_1\langle v_1, v_2\rangle, \tag{11.53}$$

et d'autre part

$$\langle Av_1, v_2\rangle = \langle v_1, Av_2\rangle = \lambda_2\langle v_1, v_2\rangle. \tag{11.54}$$

Nous avons utilisé le fait que λ_2 était réel. Par conséquent, soit $\lambda_1 = \lambda_2$, soit $\langle v_1, v_2\rangle = 0$. □

Remarque 11.19.
Un opérateur de la forme A^*A est évidemment hermitien. De plus ses valeurs propres sont toutes positives parce que si $A^*Ax = \lambda v$ alors

$$0 \leqslant \langle Av, Av\rangle = \langle A^*Av, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle. \tag{11.55}$$

Donc $\lambda \geqslant 0$.

11.1.4 Projection et orthogonalité

La définition du produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ est 9.160 et le lien avec la matrice d'une application linéaire est la proposition 9.171.

Remarque 11.20.
Outre l'orthogonalité, le produit scalaire permet de connaître l'angle entre deux vecteurs à travers la définition 18.49. D'autres interprétations géométriques du déterminant sont listées dans le thème 43.

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer, pour deux vecteurs quelconques u et v, la projection orthogonale de u sur v. Ce sera le vecteur $\bar{u}$ parallèle à v tel que $u - \bar{u}$ est orthogonal à v. Nous avons donc

$$\bar{u} = \lambda v \tag{11.56}$$

et

$$(u - \lambda v) \cdot v = 0. \tag{11.57}$$

La seconde équation donne $u \cdot v - \lambda v \cdot v = 0$, ce qui fournit λ en fonction de u et v :

$$\lambda = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2}. \tag{11.58}$$

14. Définition 9.166.
15. Pour la forme (9.322).

Nous avons par conséquent

$$\bar{u} = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v. \tag{11.59}$$

Armés de cette interprétation graphique du produit scalaire, nous comprenons pourquoi nous disons que deux vecteurs sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul.

Nous pouvons maintenant savoir quel est le coefficient directeur d'une droite orthogonale à une droite donnée. En effet, supposons que la première droite soit parallèle au vecteur X et la seconde au vecteur Y. Les droites seront perpendiculaires si $X \cdot Y = 0$, c'est-à-dire si

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0. \tag{11.60}$$

Cette équation se développe en

$$x_1 y_1 = -x_2 y_2. \tag{11.61}$$

Le coefficient directeur de la première droite est $\frac{x_2}{x_1}$. Isolons cette quantité dans l'équation (11.61) :

$$\frac{x_2}{x_1} = -\frac{y_1}{y_2}. \tag{11.62}$$

Donc le coefficient directeur de la première est l'inverse et l'opposé du coefficient directeur de la seconde.

Exemple 11.21.
Soit la droite $d \equiv y = 2x + 3$. Le coefficient directeur de cette droite est 2. Donc le coefficient directeur d'une droite perpendiculaires doit être $-\frac{1}{2}$. △

Preuve alternative. La preuve peut également être donnée en ne faisant pas référence au produit scalaire. Il suffit d'écrire toutes les quantités en termes des coordonnées de X et Y. Si nous posons

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \tag{11.63}$$

l'inégalité à prouver devient

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 \leqslant (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2). \tag{11.64}$$

Nous considérons la fonction

$$\varphi(t) = (x_1 + t y_1)^2 + (x_2 + t y_2)^2 + (x_3 + t y_3)^2 \tag{11.65}$$

En tant que norme, cette fonction est évidemment positive pour tout t. En regroupant les termes de chaque puissance de t, nous avons

$$\varphi(t) = (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) t^2 + 2(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) t + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2). \tag{11.66}$$

C'est un polynôme du second degré en t. Par conséquent le discriminant doit être négatif[16]. Nous avons donc

$$4(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \leqslant 0. \tag{11.67}$$

La thèse en découle aussitôt. □

16. Proposition 10.99.

11.1.5 Théorème de Pythagore

Nous allons donner une preuve du théorème de Pythagore.

Théorème 11.22 (Pythagone[1]).
Soient un espace euclidien[17] *E ainsi que trois points $a, b, c \in E$ formant un triangle rectangle en a, c'est-à-dire tel que*

$$(b-a)\cdot(a-c)=0 \tag{11.68}$$

Alors

$$\|b-c\|^2=\|b-a\|^2+\|a-c\|^2. \tag{11.69}$$

Démonstration. D'abord pour développons l'hypothèse (11.68) :

$$b\cdot a-b\cdot c-\|a\|^2+a\cdot c=0, \tag{11.70}$$

et nous isolons un bout qui va nous servir plus tard :

$$b\cdot a+a\cdot c=b\cdot c+\|a\|^2. \tag{11.71}$$

Maintenant nous calculons un peu :

$$\begin{aligned}
\|b-a\|^2+\|a-c\|^2&=\|b\|^2-2b\cdot a+\|a\|^2+\|a\|-2a\cdot c+\|c\|^2 && \text{(11.72a)}\\
&=2\|a\|^2+\|b\|^2+\|c\|^2-2(b\cdot c+\|a\|^2) && \text{(11.72b)}\\
&=\|b\|^2+\|c\|^2-2b\cdot c && \text{(11.72c)}\\
&=\|b-c\|^2. && \text{(11.72d)}
\end{aligned}$$

Pour (11.72b), nous avons substitué (11.71). □

11.23.
Je profite de l'occasion pour montrer mon scepticisme quant aux preuves de Pythagore basées sur différents pliages et découpages des carrés construits sur les côtés du triangle.

Si, comme ici, nous considérons la géométrie dans $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire, alors le théorème 11.22 est le théorème de Pythagore et il n'est pas loin d'être la définition de la distance entre deux points. Ce serait exactement la définition pour le triangle $A=(0,0)$, $B=(a,0)$, $C=(a,b)$.

Pour autant que je le sache, la géométrie dans « le plan » (celle du collège) ne définit pas « longueur » et « aire ». Donc bon ...Il y a peut-être un moyen de s'en sortir, mais je ne le connais pas.

Bref, soit on se met d'accord sur les définition (et dans ce cas je serais étonné qu'il existe une démonstration de Pythagore très différente de ce qu'on a ici), soit il faudrait se calmer avec les soit-disant preuves du théorème de Pythagore.

11.1.6 Produit vectoriel

Définition 11.24.
*Soient u et v, deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Le **produit vectoriel** de u et v est le vecteur $u\times v$ défini par*

$$u\times v=\det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \tag{11.73}$$

où les vecteurs e_1, e_2 et e_3 sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

17. Définition 9.159.

Lemme 11.25.
Le produit vectoriel $u \times v$ est également exprimé par

$$\begin{aligned} u \times v &= (u_2v_3 - u_3v_2)e_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)e_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)e_3 && (11.74a)\\ &= \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} v_i w_j e_k && (11.74b) \end{aligned}$$

où ϵ_{ijk} est défini par $\epsilon_{xyz} = 1$ et ensuite ϵ_{ijk} est 1 ou -1 suivant que la permutation des x, y et z est paire ou impaire. C'est-à-dire que ϵ_{ijk} est la signature de la permutation qui amène $(1, 2, 3)$ sur (i, j, k).

Démonstration. Il s'agit seulement de développer explicitement le déterminant (11.73). □

11.26.
Admettons que $a \times b = v$. En calculant le même produit vectoriel dans la base $f_i = -e_i$, les composantes de a et b changent de signe et la formule (11.74) dit que le produit vectoriel ne change pas. On serait tenté d'écrire, dans la base $\{f_i\}$

$$(-a) \times (-b) = v, \qquad (11.75)$$

tout en pleurant parce que dans la base des f_i, le vecteur v devient $-v$.

Il y a des personnes que cela tracasse tellement qu'on entend parler de « le produit vectoriel est une pseudo-vecteur sous $SO(2)$ ». Les physiciens en théorie quantique des champs –pourtant la plus plaisante des matières– sont terribles sur ce sujet.

Il suffit d'être clair. Le produit vectoriel n'est défini que sur $\mathbb{R}^3$, et est défini par sa formule dans la base canonique, point barre. Si vous avez des vecteurs a et b dont vous connaissez les composantes dans une autre base, vous devez calculer les composantes dans la base canonique, utiliser la formule pour trouver les composantes de $a \times b$ dans la base canonique. Ensuite, si ça vous chante, vous pouvez calculer à nouveau les composantes de $a \times b$ dans une autre base.

Tout cela pour dire que le produit vectoriel n'est pas une opération très généralisable. Il est possible, pour sembler plus intrinsèque, de tenter cette définition : le produit vectoriel $a \times b$ est le vecteur perpendiculaire à a et b, de longueur égale à l'aire du parallélogramme construit sur a et b.

Cette « définition » a plusieurs inconvénients.

— Elle demande quand même un produit scalaire et des aires ; bref, elle demande une structure métrique,

— Elle ne donne pas le sens. En effet, dans $\mathbb{R}^3$, il y a deux vecteurs de longueur donnée perpendiculaires à a et b. Il faut donc préciser le sens. Cela revient à donner une orientation et donc, fondamentalement, à choisir une base.

Bref, on retiendra que le produit vectoriel est une opération accrochée à $\mathbb{R}^3$ et à sa base canonique.

Lemme-Définition 11.27.
Nous avons l'égalité suivante pour tout $u, v, w \in \mathbb{R}^3$:

$$(u \times v) \cdot w = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}. \qquad (11.76)$$

*Le résultat est nommé le **produit mixte** de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.*

11.28.
Nous avons donné un nom à la combinaison $(u \times v) \cdot w$. J'imagine que vous voyez pourquoi nous ne considérons pas la combinaison $(u \cdot v) \times w$.

Le lemme suivant donne un moyen compliqué et peu pratique de calculer la valeur absolue du produit mixte. La formule (11.77) ne sera utilisée que pour faire le lien entre un jacobien et un élément de volume en dimension trois lorsque nous verrons les intégrales sur des variétés. Voir l'équation (20.38).

Lemme 11.29 ([1]).
Le produit mixte peut également être exprimé par

$$|(u\times v)\cdot w|^2=\det\begin{pmatrix} \|u\|^2 & u\cdot v & u\cdot w\\ v\cdot u & \|v\|^2 & v\cdot w\\ w\cdot u & w\cdot v & \|w\|^2 \end{pmatrix}. \tag{11.77}$$

Démonstration. Si nous notons

$$a=\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}, \tag{11.78}$$

il faut simplement remarquer que

$$\begin{pmatrix} \|u\|^2 & u\cdot v & u\cdot w\\ v\cdot u & \|v\|^2 & v\cdot w\\ w\cdot u & w\cdot v & \|w\|^2 \end{pmatrix}=aa^t. \tag{11.79}$$

Donc au niveau des déterminants, en utilisant les propositions 9.231 et le lemme 4.76 nous avons

$$\det\begin{pmatrix} \|u\|^2 & u\cdot v & u\cdot w\\ v\cdot u & \|v\|^2 & v\cdot w\\ w\cdot u & w\cdot v & \|w\|^2 \end{pmatrix}=\det(aa^t)=\det(a)\det(a^t)=\det(a)^2. \tag{11.80}$$

Et maintenant, par définition, $\det(a)=(u\times w)\cdot w$. Donc le résultat annoncé. □

Proposition 11.30.
Les applications produit scalaire, vectoriel et mixte sont multilinéaires. Spécifiquement, nous avons les propriétés suivantes.

(1) *Les applications produit scalaire et vectoriel sont bilinéaires. C'est-à-dire que pour tout vecteurs a, b, c et pour tout nombre α et β nous avons*

$$\begin{aligned} a\times(\alpha b+\beta c)&=\alpha(a\times b)+\beta(a\times c)\\ (\alpha a+\beta b)\times c&=\alpha(a\times c)+\beta(b\times c). \end{aligned} \tag{11.81}$$

(2) *Le produit mixte est trilinéaire.*

(3) *Le produit vectoriel est antisymétrique, c'est-à-dire $u\times v=-v\times u$.*

(4) *Nous avons $u\times v=0$ si et seulement si u et v sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si l'équation $\alpha u+\beta v=0$ a une solution différente de la solution triviale $(\alpha,\beta)=(0,0)$.*

Proposition 11.31 (Identité de Lagrange[268]).
Si $x,y\in\mathbb{R}^n$, alors

$$\|x\|^2\|y\|^2-(x\cdot y)^2=\sum_j\sum_{i<j}(x_iy_j-x_jy_i)^2. \tag{11.82}$$

Et si $n=3$ alors

$$\|x\times y\|=\|y\|^2\|y\|^2-(x\cdot y)^2. \tag{11.83}$$

Démonstration. C'est un calcul. D'abord nous avons

$$\|x\|^2\|y\|^2-(x\cdot y)^2=\sum_i x_i^2\sum_j y_j^2-\big(\sum_k x_ky_k\big)^2=\sum_{ij}x_i^2y_j^2-\sum_{kl}x_ky_kx_ly_l. \tag{11.84}$$

Ensuite nous coupons les sommes de la façon suivante

$$\sum_{ij} = \sum_j \sum_{i<j} + \sum_j (i=j) + \sum_j \sum_{i>j} \tag{11.85}$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} \|x\|^2\|y\|^2 - (x\cdot y)^2 = &\sum_j \sum_{i<j} x_i^2 y_j^2 + \sum_j x_j^2 y_j^2 + \sum_j \sum_{i>j} x_i^2 y_j^2 \\ &- \sum_l \sum_{k<l} x_k y_k x_l y_l - \sum_k x_k^2 y_k^2 - \sum_l \sum_{k>l} x_k y_k x_l y_l. \end{aligned} \tag{11.86}$$

Il y a deux termes qui se simplifient. Notez que si A_{kl} est symétrique en kl nous avons

$$\sum_l \sum_{k<l} A_{kl} = \sum_k \sum_{l<k} A_{lk} = \sum_k \sum_{l<k} A_{kl}. \tag{11.87}$$

La première égalité était seulement un renommage des indices. Le coup des indices symétriques est justement ce qu'il se passe dans les deux termes en$x_k y_k x_l y_l$, donc nous les regroupons :

$$\|x\|^2\|y\|^2 - (x\cdot y)^2 = \sum_j \Big(\sum_{i<j} x_i^2 x_j^2 + \sum_{i>j} x_i^2 y_j^2 - 2\sum_{i>j} x_i y_i x_j y_j \Big) \tag{11.88a}$$

$$= \sum_j \sum_{i<j} (x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - 2 x_i y_i x_j y_j) \tag{11.88b}$$

$$= \sum_j \sum_{i<j} (x_i y_j - x_j y_i)^2. \tag{11.88c}$$

Voilà qui prouve la première formule. Pour la seconde, il faut seulement poser $n = 3$ et écrire les sommes explicitement.

— Pour $j = 1$, la somme sur i est $\sum_{i<1}$, c'est-à-dire aucun termes.
— Pour $j = 2$, il y a seulement $i = 1$, donc le terme $(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2$.
— Pour $j = 3$, il y a les termes $i = 1$ et $i = 2$, donc les termes $(x_1 y_3 - x_3 y_1)^2 + (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2$.

Ces trois termes collectés sont justement les composants (au carré) de $x \times y$ données dans la formule (11.74a). □

Les trois vecteurs de base e_x, e_y et e_y ont des produits vectoriels faciles à retenir :

$$\begin{aligned} e_x \times e_y &= e_z \\ e_y \times e_z &= e_x \\ e_z \times e_x &= e_y \end{aligned} \tag{11.89}$$

Les deux formules suivantes, qui mêlent le produit scalaire et le produit vectoriel, sont souvent utiles en analyse vectorielle :

$$\begin{aligned} (u\times v)\cdot w &= u\cdot (v\times w) \\ (u\times v)\times w &= -(v\cdot w)u + (u\cdot w)v \end{aligned} \tag{11.90}$$

pour tout vecteurs u, v et w dans $\mathbb{R}^3$. Nous les admettons sans démonstration. La seconde formule est parfois appelée **formule d'expulsion**.

Exemple 11.32.
Calculons le produit vectoriel $v \times w$ avec

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{11.91}$$

Les vecteurs s'écrivent sous la forme $v = 3e_x - e_y + e_z$ et $w = e_x + 2e_y - e_z$. Le produit vectoriel s'écrit

$$\begin{aligned}(3e_x - e_y + e_z) \times (e_x + 2e_y - e_z) &= 6e_x \times e_y - 3e_x \times e_z \\ &\quad - e_y \times e_x + e_y \times e_z \\ &\quad + e_z \times e_x + 2e_z \times e_y \\ &= 6e_z + 3e_y + e_z + e_x + e_y - 2e_x \\ &= -e_x + 4e_y + 7e_z.\end{aligned} \tag{11.92}$$

△

11.1.7 Produit mixte

Si a, b et c sont trois vecteurs, leur **produit mixte** est le nombre $a \cdot (b \times c)$. En écrivant le produit vectoriel sous forme de somme de trois déterminants 2×2, nous avons

$$\begin{aligned}&a \cdot (b \times c) \\ &= (a_1 e_x + a_2 e_y + a_3 e_z) \cdot \left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} e_x - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} e_y + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right) \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.\end{aligned} \tag{11.93}$$

Le produit mixte s'écrit donc sous forme d'un déterminant. Nous retenons cette formule :

$$a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{11.94}$$

Un grand intérêt du produit vectoriel est qu'il fournit un vecteur qui est simultanément perpendiculaire aux deux vecteurs donnés.

Proposition 11.33.
Le produit vectoriel[18] *$a \times b$ est un vecteur orthogonal à a et b.*

Démonstration. Vérifions que $a \perp (a \times b)$. Pour cela, nous calculons $a \cdot (a \times b)$, c'est-à-dire le produit mixte

$$a \cdot (a \times b) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{11.95}$$

L'annulation de ce déterminant est due au fait que deux de ses lignes sont égales. □

Ces résultats admettent une intéressante généralisation.

Lemme 11.34.
Soit $X \in \mathbb{R}^n$ ainsi que $v_1, \ldots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Alors

(1) Nous avons

$$\det(X, v_1, \ldots, v_{n-1}) = X \cdot \det \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \\ & v_1 & \\ & \vdots & \\ & v_{n-1} & \end{pmatrix} \tag{11.96}$$

18. Définition 11.24.

(2) Le vecteur

$$\det\begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \\ & v_1 & \\ & \vdots & \\ & v_{n-1} & \end{pmatrix} \tag{11.97}$$

est orthogonal à tous les v_i.

Démonstration. Puisque les deux côtés de (11.96) vus comme fonctions de X, sont des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, il suffit de vérifier l'égalité sur une base.

Nous posons $\tau_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$,

$$\tau_i(v)_k = \begin{cases} v_k & \text{si } k < i \\ v_{k+1} & \text{si } k \geqslant i. \end{cases} \tag{11.98}$$

et nous avons d'une part

$$e_k \cdot \det\begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \\ & v_1 & \\ & \vdots & \\ & v_{n-1} & \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \tau_k v_1 \\ \vdots \\ \tau_k v_{n-1} \end{pmatrix} \tag{11.99}$$

et d'autre part,

$$\det(e_k, v_1, \ldots, v_{n-1}) = \det\begin{pmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 1 & v_1 & \cdots & v_{n-1} \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \det(\tau_k v_1, \ldots, \tau_k v_{n-1}). \tag{11.100}$$

La première assertion est démontrée.

En ce qui concerne la seconde, il suffit d'appliquer la première et se souvenir qu'un déterminant est nul lorsque deux lignes sont égales [19]. En effet :

$$v_k \cdot \det\begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \\ & v_1 & \\ & \vdots & \\ & v_{n-1} & \end{pmatrix} = \det(v_k, v_1, \ldots, v_n) = 0. \tag{11.101}$$

□

11.1.8 Procédé de Gram-Schmidt

Proposition 11.35 (Procédé de Gram-Schmidt)**.**
Un espace euclidien possède une base orthonormée.

Démonstration. Soit E un espace euclidien et $\{v_1, \ldots, v_n\}$, une base quelconque de E. Nous posons d'abord

$$f_1 = v_1, \quad e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}. \tag{11.102}$$

Ensuite

$$f_2 = v_2 - \langle v_2, e_1\rangle e_1, \quad e_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|}. \tag{11.103}$$

19. Corolaire 4.79.

Notons que $\{e_1, e_2\}$ est une base de $\operatorname{Span}\{v_1, v_2\}$. De plus elle est orthogonale :

$$\langle e_1, f_2\rangle = \langle e_1, v_2\rangle - \langle v_2, e_1\rangle \underbrace{\langle e_1, e_1\rangle}_{=1} = 0. \tag{11.104}$$

Le fait que $\|e_1\| = \|e_2\| = 1$ est par construction. Nous avons donc donné une base orthonormée de $\operatorname{Span}\{v_1, v_2\}$.

Nous continuons par récurrence en posant

$$f_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, e_i\rangle e_i, \quad e_k = \frac{f_k}{\|f_k\|}. \tag{11.105}$$

Pour tout $j < k$ nous avons

$$\langle e_j, f_k\rangle = \langle e_j, v_k\rangle - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, e_i\rangle \underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{=\delta_{ij}} = 0 \tag{11.106}$$

□

Cet algorithme de Gram-Schmidt nous donne non seulement l'existence de bases orthonormée pour tout espace euclidien, mais aussi le moyen d'en construire à partir de n'importe quelle base.

11.1.9 Pseudo-réduction simultanée

Corolaire 11.36 (Pseudo-réduction simultanée[269]).
Soient $A, B \in S(n, \mathbb{R})$ avec A définie positive[20]*. Alors il existe $Q \in GL(n, \mathbb{R})$ telle que Q^tBQ soit diagonale et $Q^tAQ = \mathbb{1}$.*

Démonstration. Nous allons noter $x \cdot y$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ et $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$ sa base canonique.

Comme A est définie positive, l'expression $\langle x, y\rangle = x \cdot Ay$ donne un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Nous avons donc deux produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$, et nous allons travailler avec les deux.

La proposition 11.35 appliquée à l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, \langle ., .\rangle)$ dit qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ orthonormée $(f_i)_{i=1,\ldots,n}$ pour ce produit scalaire. Nous considérons l'application linéaire P définie par

$$Pe_i = f_i. \tag{11.107}$$

Nous démontrons à présent que $P^tAP = \mathbb{1}$. Pour cela, nous calculons

$$\begin{aligned}
\delta_{ij} &= \langle f_i, f_j\rangle && (11.108a)\\
&= f_i \cdot Af_j && (11.108b)\\
&= Pe_i \cdot APe_j && (11.108c)\\
&= e_i \cdot P^tAPe_j && (11.108d)\\
&= (P^tAP)_{ij}. && (11.108e)
\end{aligned}$$

Justifications :

— Pour (11.108a), la base (f_j) est orthonormée pour le produit scalaire $\langle ., .\rangle$.

— Pour (11.108d), la proposition 9.173 sur la transposée.

— Pour (11.108e), la formule du produit scalaire usuel pour avoir les éléments de matrice, proposition 9.171.

La matrice P^tBP est une matrice symétrique, donc le théorème spectral 9.212 nous donne une matrice $R \in O(n, \mathbb{R})$ telle que R^tP^tBPR soit diagonale. En posant maintenant $Q = PR$ nous avons la matrice cherchée. □

20. Définition 9.215.

Remarque 11.37.
Plusieurs remarques

(1) Nous n'avons pas prouvé l'existence d'une matrice P telle que $P^{-1}BP$ et $P^{-1}AP$ soient diagonales. Au contraire, nous avons Q^tBQ et Q^tAQ qui sont diagonales. Tant que Q n'est pas orthogonales, ce n'est pas la même chose.

Autrement dit, nous n'avons pas ici une réelle diagonalisation, parce que les matrices A et B ne sont pas semblables à des matrices diagonales. Voir les définitions 9.200 (diagonalisable) et 9.187 (semblable).

C'est pour cela que nous parlons de *pseudo*-diagonalisation.

(2) Dans le même ordre d'idée, la démonstration de la pseudo-diagonalisation simultanée parle clairement de formes bilinéaires, et non d'endomorphismes. Or en comparant les lois de transformations (4.223) et (9.274), nous voyons bien que la réduction en passant par Q^tAQ est bien une réduction de forme bilinéaire et non une réduction d'endomorphismes.

(3) Nous avons prouvé la pseudo-réduction simultanée comme corolaire du théorème de diagonalisation des matrices symétriques 9.212. Il aurait aussi pu être vu comme un corolaire du théorème spectral 11.6 sur les opérateurs autoadjoints via son corolaire 11.7.

11.2 Approximations

Le lemme suivant est surtout intéressant en dimension infinie.

Lemme 11.38.
Soit un espace vectoriel normé V et un sous-espace vectoriel dense A. Soit $v \in V$; il existe une suite (v_n) dans A telle que $v_n \xrightarrow{V} v$ et $\|v_n\| \leqslant \|v\|$ pour tout n.

Démonstration. Puisque A est dense, il existe une suite a_n dans A telle que $a_n \to v$. Ensuite il suffit de poser

$$v_n = \frac{n}{n+1}\frac{\|v\|}{\|a_n\|}a_n. \tag{11.109}$$

Par construction nous avons toujours

$$\|v_n\| = \frac{n}{n+1}\|v\| \leqslant \|v\|. \tag{11.110}$$

Et de plus, la norme étant continue [21],

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\lim_{n\to\infty}\frac{\|v\|}{\|v_n\|}\lim_{n\to\infty} v_n = v. \tag{11.111}$$

Le fait que v_n soit dans A est dû au fait que A soit vectoriel. □

Proposition 11.39.
Soit un espace vectoriel normé V et un sous-espace vectoriel dense A. Soit $v \in V$; pour tout $a \in \mathbb{R}$ nous avons

$$\sup\{|v \cdot a| \text{ tel que } a \in A \text{ et } \|a\| \leqslant \lambda\} = \lambda\|v\|. \tag{11.112}$$

Démonstration. D'abord pour tout $a \in A$ vérifiant $\|a\| \leqslant \lambda$ l'inégalité de Cauchy-Schwarz 11.1 donne

$$|v \cdot a| \leqslant \|v\|\|a\| \leqslant \lambda\|v\|. \tag{11.113}$$

Donc le supremum dont on parle est majoré par $\lambda\|v\|$.

Il nous faut l'inégalité dans l'autre sens. Par densité nous pouvons choisir une suite $v_n \in A$ tel que $v_n \to v$. Ensuite nous posons

$$a_n = \frac{\lambda}{\|v_n\|}v_n. \tag{11.114}$$

21. Où dans le calcul suivant utilisons-nous la continuité de la norme ? Posez vous la question.

Nous avons $\|a_n\| = \lambda$ pour tout n et

$$|v \cdot a_n| = \frac{\lambda}{\|v_n\|}|v \cdot v_n|, \tag{11.115}$$

et en passant à la limite,

$$\lim_{n\to\infty} |v \cdot a_n| = \frac{\lambda}{\|v\|}\|v \cdot v\| = \lambda\|v\|. \tag{11.116}$$

Donc l'ensemble sur lequel nous prenons le supremum contient une suite convergente vers $\lambda\|v\|$. Le supremum est donc au moins aussi grand que cela. □

11.2.1 Quelques exemples de normes sur $\mathbb{R}^n$

Il est possible de définir de nombreuses normes sur $\mathbb{R}^n$. Citons-en quelques-unes parmi les normes $\|.\|_p$. Le cas général $p \geqslant 1$ sera fait dans 17.106.

Proposition-Définition 11.40 ([270, 183])**.**
Les formules suivantes définissent des normes[22] *sur* $\mathbb{R}^n$*.*

(1) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$,
(2) $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$,
(3) $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$.

La norme $\|.\|_\infty$ *est nommée* ***norme supremum****.*

Démonstration. Point par point.

(i) **Pour (1)** Déjà fait dans le lemme 11.12.
(ii) **Pour (2)** Le cas $p = 2$ provient de l'inégalité

$$\sqrt{(a+b)^2} \leqslant \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}, \tag{11.117}$$

laquelle se démontre en passant au carré :

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leqslant a^2 + b^2 + 2|ab| = \big(\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}\big)^2. \tag{11.118}$$

(iii) **Pour (3)** Pour l'inégalité triangulaire, nous faisons

$$\|x+y\|_\infty = \max_i |x_i + y_i| \leqslant \max_i \big(|x_i| + |y_i|\big) \leqslant \max_i |x_i| + \max_i |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty. \tag{11.119}$$

Les autres points de la définition 7.136 sont faciles quand on se rappelle que $x = 0$ si et seulement si $x_i = 0$ pour tout i.

□

Parmi ces normes, celles qui seront le plus souvent utilisées sont les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ qui, pour des raisons que nous verrons beaucoup plus tard[23] sont souvent notées $\|.\|_{L^p}$:

$$\begin{aligned} \|x\|_{L^1} &= \sum_{i=1}^n |x_i|, \\ \|x\|_{L^2} &= \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\Big)^{1/2}. \end{aligned} \tag{11.120}$$

22. Définition 7.136.
23. La proposition 27.16, par exemple.

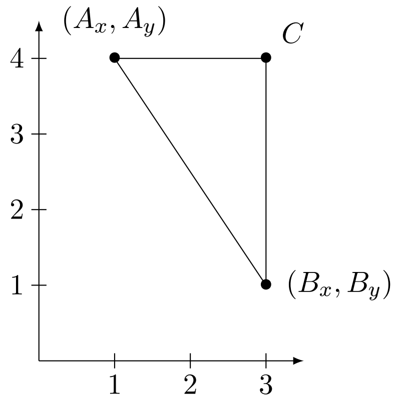


FIGURE 11.1 – La *norme* euclidienne induit la *distance* euclidienne. D'où son nom. Le point C est construit aux coordonnées (A_x, B_y).

Soient $A = (A_x, A_y)$ et $B = (B_x, B_y)$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$. La distance[24] euclidienne entre A et B est donnée par $\|A - B\|_2$. En effet, sur la figure 11.1, la distance entre les points A et B est donnée par

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |CB|^2 = |A_x - B_x|^2 + |A_y - B_y|^2, \tag{11.121}$$

par conséquent,

$$|AB| = \sqrt{|A_x - B_x|^2 + |A_y - B_y|^2} = \|A - B\|_2. \tag{11.122}$$

Remarque 11.41.
Si A, B et C sont trois points dans le plan $\mathbb{R}^2$, alors l'inégalité triangulaire $|AB| \leqslant |AC| + |CB|$ est précisément la propriété (4) de la norme (définition 7.136). En effet l'inégalité triangulaire s'exprime de la façon suivante en termes de la norme $\|.\|_2$:

$$\|A - B\|_2 \leqslant \|A - C\|_2 + \|C - B\|_2. \tag{11.123}$$

En notant $u = A - C$ et $v = C - B$, l'équation (11.123) devient exactement la propriété de définition de la norme :

$$\|u + v\|_2 \leqslant \|u\|_2 + \|v\|_2. \tag{11.124}$$

Ceci explique pourquoi cette propriété des normes est appelée « inégalité triangulaire ».

11.3 Équivalence des normes

Au premier coup d'œil, les notions dont nous parlons dans ce chapitre ont l'air très générales. Nous prenons en effet n'importe quel espace vectoriel V de dimension finie, et nous le munissons de n'importe quelle norme. Rien que dans $\mathbb{R}^m$ nous allons en définir une infinité par l'équation (17.435)). À partir de ces données, nous définissons les boules, la topologie, l'adhérence, etc.

11.3.1 En dimension finie

Dans $\mathbb{R}^n$, les normes $\|.\|_{L^1}$, $\|.\|_{L^2}$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas égales. Cependant elles ne sont pas complètement indépendantes au sens où l'on sent bien que si un vecteur sera grand pour une norme, il sera également grand pour les autres normes ; les normes « vont dans le même sens ». Cette notion est précisée par le concept de norme équivalente.

Proposition-Définition 11.42 ([271])**.**
Soient deux normes N_1 et N_2 sur l'espace vectoriel E de dimension finie. Nous disons que $N_1 \sim N_2$ si et seulement si il existe des réels strictement positifs k_1, k_2 tels que

$$k_1 N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant k_2 N_1(x). \tag{11.125}$$

24. Ne pas confondre « distance » et « norme ».

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence[25] *sur l'ensemble des normes de E. Si $N_1 \sim N_2$ nous disons que les normes N_1 et N_2 sur $\mathbb{R}^m$ sont **équivalentes**.*

Démonstration. Vu que tous les nombres sont strictement positifs, nous pouvons multiplier et diviser sans changer le sens des inégalités. Gardant cela en tête, nous faisons les trois vérifications.

(i) **réflexive** Nous avons $N_1 \sim N_1$ avec $k_1 = k_2 = 1$.

(ii) **Symétrique** Supposons avoir k_1, k_2 tels que $k_1 N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant k_2 N_1(x)$. Alors nous avons aussi
$$\frac{1}{k_2} N_2(x) \leqslant N_1(x) \leqslant \frac{1}{k_1} N_2(x). \tag{11.126}$$

(iii) **Transitive** Supposons $N_1 \sim N_2$ et $N_2 \sim N_3$. Nous avons donc des nombres k_1, k_2, l_1 et l_2 tels que
$$\begin{aligned} k_1 N_1(x) &\leqslant N_2(x) \\ N_2(x) &\leqslant k_2 N_1(x) \\ l_1 N_2(x) &\leqslant N_3(x) \\ N_3(x) &\leqslant l_2 N_2(x). \end{aligned} \tag{11.127}$$

En combinant,
$$k_1 l_1 N_1(x) \leqslant l_1 N_2(x) \leqslant N_3(x) \leqslant l_2 N_2(x) \leqslant l_2 k_2 N_1(x). \tag{11.128}$$
En particulier, $k_1 l_1 N_1(x) \leqslant N_3(x) \leqslant l_2 k_2 N_1(x)$. □

Proposition 11.43.
Pour $\mathbb{R}^N$, nous avons les équivalences de normes $\|.\|_{L^1} \sim \|.\|_{L^2}$, $\|.\|_{L^1} \sim \|.\|_\infty$ et $\|.\|_{L^2} \sim \|.\|_\infty$. Plus précisément nous avons les inégalités[26]

(1) $\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2$

(2) $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty$

(3) $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty$

Démonstration. En mettant au carré la première inégalité nous voyons que nous devons vérifier l'inégalité
$$|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 \leqslant \big(|x_1| + \cdots + |x_n|\big)^2 \tag{11.129}$$
qui est vraie parce que le membre de droite est égal au carré de chaque terme plus les double produits. La seconde inégalité provient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (théorème 11.1) sur les vecteurs
$$v = \begin{pmatrix} 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix}. \tag{11.130}$$
Nous trouvons
$$\frac{1}{n}\sum_i |x_i| \leqslant \sqrt{n \cdot \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_i |x_i|^2}, \tag{11.131}$$
et par conséquent
$$\sum_i |x_i| \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2. \tag{11.132}$$

La première inégalité de (3) se démontre en remarquant que si a et b sont positifs, $a \leqslant \sqrt{a^2 + b}$. En appliquant cela à $a = \max_i |x_i|$, nous avons
$$\max_i |x_i| \leqslant \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2} \tag{11.133}$$

25. Définition 1.29.
26. Les racines carrés sont définies en 10.85.

parce que $\max_i |x_i|$ est évidemment un des termes de la somme. Pour la seconde inégalité de (3), nous avons

$$\sqrt{\sum_k |x_k|^2} \leqslant \left(\sum_k \max_i |x_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{n}\|x\|_\infty. \tag{11.134}$$

Pour obtenir cette inégalité, nous avons remplacé tous les termes $|x_k|$ par le maximum. □

Pour les autres normes $\|.\|_p$, il y a des inégalités dans 17.107 et 17.99 ; voir aussi le thème 24. Une dernière avant l'équivalence de toutes les normes.

Proposition-Définition 11.44.
Les topologies suivantes sont égales sur $\mathbb{R}^n$.

(1) La topologie produit $\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ des espaces topologiques $(\mathbb{R}, |.|)$,

(2) La topologie de la norme

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max_i\{|x_i|\}, \tag{11.135}$$

(3) La topologie de la norme

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \tag{11.136}$$

Elle est la topologie que nous allons toujours considérer sur $\mathbb{R}^n$ (sauf mention très explicite du contraire).

Démonstration. Les topologies (1) et (2) sont identiques par le lemme 7.192. Les topologies (2) et (3) sont identiques par la proposition 11.43. □

En réalité, toutes les normes $\|.\|_{L^p}$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes et, plus généralement, en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Théorème 11.45 ([272, 273])**.**
Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Démonstration. Soit un espace vectoriel V de dimension finie. Nous allons montrer que toutes les normes sont équivalentes à la norme $\|.\|_\infty$. Soit donc une norme N sur V.

(i) **Inégalité dans un sens** Vu que V est de dimension finie, il accepte une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$. En posant $D = \sum_{i=1}^n N(e_i)$, nous avons

$$N(x) = N(\sum_i x_i e_i) \leqslant \sum_i x_i N(e_i) \leqslant n\|\|_\infty D. \tag{11.137}$$

Nous avons donc l'inégalité [27]

$$N(x) \leqslant nD\|x\|_\infty. \tag{11.138}$$

(ii) **Dans l'autre sens** La proposition 7.137 donne

$$\big|N(x) - N(y)\big| \leqslant N(x-y) \leqslant Dn\|x-y\|_\infty. \tag{11.139}$$

Donc l'application $N\colon (V, \|.\|_\infty) \to \mathbb{R}$ est continue. Vu que la sphère

$$S = \{x \in V \text{ tel que } \|x\|_\infty = 1\} \tag{11.140}$$

est compacte [28], la fonction continue N y prend un minimum [29]. Il existe donc $m > 0$ tel que $m \leqslant N(x)$ pour tout $x \in S$.

27. Dans 11.45, le n n'apparaît pas dans la majoration. C'est lui ou moi qui fait une erreur ? Pourquoi ?
28. La partie S est fermée et bornée de $(V, \|.\|_\infty)$, voir le théorème 10.21.
29. Théorème de Weierstrass 7.126.

Soit $x \in V$. Nous avons $x/\|x\|_\infty \in S$, de telle sorte que

$$m \leqslant N(\frac{x}{\|x\|_{\hat{\imath}}}) = \frac{1}{\|x\|_\infty} N(x), \tag{11.141}$$

ou encore $N(x) \geqslant m\|x\|_\infty$.

(iii) **Conclusion** Pour tout $x \in V$ nous avons les inégalités

$$m\|x\|_\infty \leqslant N(x) \leqslant nD\|x\|_\infty. \tag{11.142}$$

Donc toutes les normes sont équivalentes à la norme $\|.\|_\infty$.

Comme l'équivalence de norme est transitive, toutes les normes sont équivalentes.

□

Corolaire 11.46.
Soit V un espace vectoriel de dimension finie et $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ deux normes sur V. Alors l'identité $\mathrm{Id}\colon V \to V$ est un isomorphisme d'espace topologique $(V, \|.\|_1) \to (V, \|.\|_2)$.

De plus les ouverts sont les mêmes : une partie de V est ouverte dans $(V, \|.\|_1)$ si et seulement si elle est ouverte dans $(V, \|.\|_2)$.

Démonstration. Le théorème 11.45 nous dit qu'il existe des nombres $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$\alpha\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta\|x\|_2 \tag{11.143}$$

pour tout $x \in V$. Soit un 2-ouvert $\mathcal{O}$. Nous prouvons que $i^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$ est un 1-ouvert. Pour cela, soit $a \in \mathcal{O}$. Vu que $\mathcal{O}$ est un 2-ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_2(a, r) \subset \mathcal{O}$. Prouvons que $B_1(a, r/\beta) \subset B_2(a, r)$. En effet si $y \in B_1(a, r/\beta)$, alors

$$\|y - a\|_2 \leqslant \beta\|y - a\|_1 \leqslant r. \tag{11.144}$$

Nous avons donc

$$B_1(a, r/\beta) \subset B_2(a, r) \subset \mathcal{O} = i^{-1}(\mathcal{O}). \tag{11.145}$$

Donc $i^{-1}(\mathcal{O})$ contient un 1-ouvert autour de chacun de ses points. Il est donc 1-ouvert.

Pour prouver que i^{-1} est continue, c'est la même chose. □

11.47.
Le lemme 11.12 donnera une norme sur $\mathbb{R}^2$ qui ne dérive pas d'un produit scalaire. Vu que toutes les normes sur $\mathbb{R}^2$ produisent la même topologie (c'est le corolaire 11.46), il y a parfaitement moyen pour deux espaces vectoriels topologiques d'être isomorphes alors que l'un a une norme dérivant d'un produit scalaire et l'autre non.

11.48.
Le théorème d'équivalence de norme sera utilisé pour montrer que l'ensemble des formes quadratiques non dégénérées de signature (p, q) est ouvert dans l'ensemble des formes quadratiques, proposition 17.118. Plus généralement il est utilisé à chaque fois que l'on fait de la topologie sur les espaces de matrices en identifiant $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^{n^2}$, pour se rassurer en se disant que ce qu'on fait ne dépend pas de la norme choisie.

Voir aussi ce qu'on en fait en 12.303 pour démontrer la différentiabilité à partir des dérivées partielles.

Proposition 11.49 ([1])**.**
Soit un espace vectoriel V de dimension finie sur $\mathbb{C}$. Pour une base $B = \{e_i\}$ de V nous définissons

$$\|\sum_k v_k e_k\|_B = \sqrt{\sum_k |v_k|^2}. \tag{11.146}$$

(1) La formule (11.146) définit une norme sur V.

(2) Si B et B' sont des bases de V, alors les topologies induites par le norme $\|.\|_B$ et $\|.\|_{B'}$ sont égales.

Démonstration. Nous commençons par fixer une base $B = \{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$ de V. Cette base nous permet de définir

$$\begin{aligned}\varphi\colon V &\to \mathbb{C}^n\\ \sum_k v_k e_k &\mapsto (v_1,\ldots,v_n).\end{aligned} \tag{11.147}$$

Cette application linéaire permet d'écrire

$$\|v\|_V = \|\varphi(v)\|_{\mathbb{C}^n}. \tag{11.148}$$

À partir de là, la vérification des propriétés de la définition 7.136 est immédiate. Par exemple :

$$\|v+w\| = \|\varphi(v+w)\| = \|\varphi(v)+\varphi(w)\| \leqslant \|\varphi(v)\| + \|\varphi(w)\| = \|v\| + \|w\|. \tag{11.149}$$

En ce qui concerne la seconde assertion, c'est le théorème 11.45. □

11.3.2 Contre-exemple en dimension infinie

Lorsque nous considérons des espaces vectoriels de dimension infinie, les choses ne sont plus aussi simples. Nous voyons ici sur l'exemple de l'espace des polynômes que le théorème 11.45 n'est plus valable si on enlève l'hypothèse de dimension finie.

On considère l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients réels sur l'intervalle $[0,1]$.

$$\mathcal{P}_{\mathbb{R}}([0,1]) = \{p : [0,1] \to \mathbb{R} \,|\, p : x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,\ a_i \in \mathbb{R},\ \forall i \in \mathbb{N}\}. \tag{11.150}$$

Cet ensemble, muni des opérations usuelles de somme entre polynômes et multiplications par les scalaires, est un espace vectoriel.

Sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ on définit les normes suivantes

$$\begin{aligned}\|p\|_\infty &= \sup_{x\in[0,1]}\{p(x)\},\\ \|p\|_1 &= \int_0^1 |p(x)|\,dx,\\ \|p\|_2 &= \left(\int_0^1 |p(x)|^2\,dx\right)^{1/2}.\end{aligned} \tag{11.151}$$

Les inégalités suivantes sont immédiates

$$\begin{aligned}\|p\|_1 &= \int_0^1 |p(x)|\,dx \leqslant \|p\|_\infty,\\ \|p\|_2 &= \left(\int_0^1 |p(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \leqslant \|p\|_\infty,\end{aligned} \tag{11.152}$$

mais la norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est équivalente ni à $\|\cdot\|_1$, ni à $\|\cdot\|_2$. Soit $p_k(x) = x^k$. Alors

$$\begin{aligned}\|p_k\|_\infty &= 1,\\ \|p_k\|_1 &= \int_0^1 x^k\,dx = \frac{1}{k+1},\\ \|p_k\|_2 &= \left(\int_0^1 x^{2k}\,dx\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{2k+1}}.\end{aligned} \tag{11.153}$$

Pour $k\to\infty$ les normes $\|p_k\|_1$, $\|p_k\|_2$ tendent vers zéro, alors que la norme $\|p_k\|_\infty$ est constante, donc les normes ne sont pas équivalentes parce que il n'existe pas un nombre positif m tel que

$$\begin{aligned}m\|p_k\|_\infty &\leqslant \|p_k\|_1,\\ m\|p_k\|_\infty &\leqslant \|p_k\|_2,\end{aligned} \tag{11.154}$$

uniformément pour tout k dans $\mathbb{N}$.

11.4 Norme opérateur

La proposition suivante donne une norme (au sens de la définition 7.136) sur $\mathcal{L}(V,W)$ dès que V et W sont des espaces vectoriels normés.

Proposition-Définition 11.50 (Norme opérateur[274], thème 38)**.**
Soit une application linéaire $T\colon V\to W$, et le nombre

$$\|T\|_{\mathcal{L}}=\sup_{\substack{x\in V\\x\neq 0}}\frac{\|T(x)\|_W}{\|x\|_V}. \tag{11.155}$$

(1) Si V est de dimension finie, alors $\|T\|_{\mathcal{L}}<\infty$.

(2) L'application $T\mapsto\|T\|_{\mathcal{L}}$ est une norme sur l'espace vectoriel des applications linéaires $V\to W$.

(3) Nous avons la formule

$$\|T\|_{\mathcal{L}}=\sup_{x\in V}\frac{\|T(x)\|_W}{\|x\|_V}=\sup_{\|x\|_V=1}\|T(x)\|_W \tag{11.156}$$

Le nombre $\|T\|_{\mathcal{L}}$ est la ***norme opérateur*** *de T. Nous disons que cette norme est* ***subordonnée*** *aux normes choisies sur V et W.*

Démonstration. Si V est de dimension finie alors l'ensemble $\{\|x\|=1\}$ est compact par le théorème de Borel-Lebesgue 10.21. Alors la fonction

$$x\mapsto\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \tag{11.157}$$

est une fonction continue sur un compact. Le corolaire 7.255 nous dit alors qu'elle est bornée. Le supremum est donc un nombre réel fini.

Nous vérifions que l'application $\|.\|$ de $\mathcal{L}(V,W)$ dans $\mathbb{R}$ ainsi définie est effectivement une norme.

(1) $\|T\|_{\mathcal{L}}=0$ signifie que $\|T(x)\|=0$ pour tout x dans V. Comme $\|\cdot\|_W$ est une norme nous concluons que $T(x)=0_n$ pour tout x dans V, donc T est l'application nulle.

(2) Pour tout a dans $\mathbb{R}$ et tout T dans $\mathcal{L}(V,W)$ nous avons

$$\|aT\|_{\mathcal{L}}=\sup_{\|x\|_V\leqslant 1}\|aT(x)\|_W=|a|\sup_{\|x\|_V\leqslant 1}\|T(x)\|_W=|a|\|T\|_{\mathcal{L}}. \tag{11.158}$$

(3) Pour tous T_1 et T_2 dans $\mathcal{L}(V,W)$ nous avons

$$\begin{aligned}\|T_1+T_2\|_{\mathcal{L}}&=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|T_1(x)+T_2(x)\|\leqslant\\&\leqslant\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|T_1(x)\|+\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|T_2(x)\|\\&=\|T_1\|\|T_2\|.\end{aligned}$$

Enfin nous prouvons la formule alternative (11.156). Nous allons montrer que les ensembles sur lesquels ont prend le supremum sont en réalité les mêmes :

$$\underbrace{\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\right\}_{x\neq 0}}_{A}=\underbrace{\{\|Ax\|\text{ tel que }\|x\|=1\}}_{B}. \tag{11.159}$$

Attention : ce sont des sous-ensembles de réels ; pas de sous-ensembles de $\mathbb{M}(\mathbb{R})$ ou des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$.

Pour la première inclusion, prenons un élément de A, et prouvons qu'il est dans B. C'est-à-dire que nous prenons $x \in V$ et nous considérons le nombre $\|Ax\|/\|x\|$. Le vecteur $y = x/\|x\|$ est un vecteur de norme 1, donc la norme de Ay est un élément de B, mais

$$\|Ay\| = \frac{\|Ax\|}{\|x\|}. \tag{11.160}$$

Nous avons donc $A \subset B$.

L'inclusion $B \subset A$ est immédiate. □

Lemme 11.51.
Si A est une matrice bloc-diagonale formée des sous-matrices (A_i), alors A^k ($k \in \mathbb{Z}$) est une matrice bloc-diagonale formée des sous-matrices $(A_i)^k$.

Proposition 11.52 ([1])**.**
Si A est une matrice bloc-diagonale, alors la norme de A majore la norme de chacun de ses blocs.

En d'autres termes, il y a autant de normes opérateur sur $\mathcal{L}(E,F)$ qu'il y a de paires de choix de normes sur E et F. En particulier, cela donne lieu à toutes les normes $\|A\|_p$ qui correspondent aux normes $\|.\|_p$ sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 11.53.
Voyons la norme opérateur subordonnée à la norme $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$ sur $\mathbb{C}^n$. Par définition (et surtout par la propriété 11.50(3)),

$$\|A\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty=1} = \|Ax\|_\infty. \tag{11.161}$$

Vu que $(Ax)_i = \sum_k A_{ik}x_k$, lorsque $\|x\|_\infty \leqslant 1$ nous avons $|(Ax)_i| \leqslant \sum_k |A_{ik}|$. Donc nous avons toujours

$$\|A\|_\infty \leqslant \max_i \sum_k |A_{ik}|. \tag{11.162}$$

△

Définition 11.54.
*La **topologie forte** sur l'espace des opérateurs est la topologie de la norme opérateur.*

Lorsque nous considérons un espace vectoriel d'applications linéaires, nous considérons toujours[30] dessus la topologie liée à cette norme.

11.4.1 Norme d'algèbre

Définition 11.55 (Norme d'algèbre[274])**.**
*Si A est une algèbre[31], une **norme d'algèbre** sur A est une norme telle que pour toute $x, y \in A$,*

$$\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|. \tag{11.163}$$

La norme opérateur est une norme d'algèbre, comme nous le verrons dans le lemme 11.60.

Un des intérêts d'utiliser une norme d'algèbre est que l'on a l'inégalité $\|x^k\| \leqslant \|x\|^k$. Cela sera particulièrement utile lors de l'étude des séries entières, voir par exemple 15.13.

Définition 11.56 ([275])**.**
*Le **rayon spectral** d'une matrice carrée A, noté $\rho(A)$, est défini de la manière suivante :*

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i| \tag{11.164}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de A.

30. Sauf lorsque les événements nous forceront à trahir.
31. Définition 1.291.

11.57.
Quelques remarques sur la définition du rayon spectral.

— Même si A est une matrice réelle, les valeurs propres sont dans $\mathbb{C}$. Donc dans (11.164), $|\lambda_i|$ est le module dans $\mathbb{C}$ de λ_i.

— Puisque les valeurs propres de A sont les racines de son polynôme caractéristique (théorème 9.110), il y en a un nombre fini et le maximum est bien défini.

— La définition s'applique uniquement pour les espaces de dimension finie.

Lemme 11.58.
Soient des espaces vectoriels normés E et F, sur les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tout $A \in \mathcal{L}(E,F)$, et pour tout $u \in E$ nous avons la majoration

$$\|Au\| \leqslant \|A\|\|u\| \tag{11.165}$$

où la norme sur A est la norme opérateur subordonnée à la norme sur u.

Démonstration. Si $u \in E$ alors, étant donné que le supremum d'un ensemble est plus grand ou égal à chacun des éléments qui le compose,

$$\|A\| = \sup_{x\in E} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geqslant \frac{\|Au\|}{\|u\|}, \tag{11.166}$$

donc le résultat annoncé : $\|Au\| \leqslant \|A\|\|u\|$. □

Le lemme suivant est valable en dimension infinie. Nous en toucherons un mot dans l'exemple 11.65.

Lemme 11.59.
Soient des espaces vectoriels normés E et F. Soit $x \in E$. Alors l'application d'évaluation

$$\begin{aligned} ev_x \colon \mathcal{L}(E,F) &\to F \\ f &\mapsto f(x) \end{aligned} \tag{11.167}$$

est continue.

Démonstration. Si $x = 0$, alors par linéarité de f nous avons $ev_0(f) = 0$ pour tout f. Donc d'accord pour la continuité.

Soit une suite convergente $f_k \xrightarrow{\mathcal{L}(E,F)} f$. Nous voulons prouver que $ev_x(f_k) \xrightarrow{F} ev_x(f)$, c'est-à-dire que

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k(x) - f(x)\| = 0. \tag{11.168}$$

Par hypothèse si k est grand, alors $\|f_k - f\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leqslant \epsilon$, c'est-à-dire que[32]

$$\sup_{y\in E} \frac{\|f_k(y) - f(y)\|}{\|y\|} \leqslant \epsilon. \tag{11.169}$$

En particulier pour notre x nous avons

$$\frac{\|f_k(x) - f(x)\|}{\|x\|} \leqslant \epsilon, \tag{11.170}$$

c'est-à-dire $\|f_k(x) - f(x)\| \leqslant \|x\|\epsilon$. Vu que $\|x\|$ est une simple constante et que ϵ est arbitraire, cela implique $f_k(x) \to f(x)$. □

32. Définition 11.50 de la norme sur $\mathcal{L}(E,F)$.

11.5 Application linéaire continue et bornée

Lemme 11.60 (La norme opérateur est une norme d'algèbre[1])**.**
Soient des espaces vectoriels normés E, F et G. Soient des opérateurs linéaires bornés $B\colon E\to F$, $A\colon F\to G$. Alors

$$\|AB\|\leqslant\|A\|\|B\|. \tag{11.171}$$

C'est-à-dire que la norme opérateur est une norme d'algèbre[33]*.*

Démonstration. Nous avons les (in)égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\|AB\|&=\sup_{x\in E}\frac{\|ABx\|_G}{\|x\|_E} && (11.172a)\\
&=\sup_{\substack{x\in E\\Bx\neq 0}}\frac{\|ABx\|}{\|x\|}\frac{\|Bx\|_F}{\|Bx\|_F} && (11.172b)\\
&=\sup_{\substack{x\in E\\Bx\neq 0}}\frac{\|ABx\|}{\|Bx\|}\frac{\|Bx\|}{\|x\|} && (11.172c)\\
&\leqslant\underbrace{\sup_{\substack{x\in E\\Bx\neq 0}}\frac{\|ABx\|}{\|Bx\|}}_{\leqslant\|A\|}\underbrace{\sup_{\substack{y\in E\\By\neq 0}}\frac{\|Bx\|}{\|y\|}}_{=\|B\|} && (11.172d)\\
&\leqslant\|A\|\|B\|. && (11.172e)
\end{aligned}$$

La dernière inégalité provient que dans $\sup_{\substack{x\in E\\Bx\neq 0}}\|ABx\|/\|x\|$, le supremum est pris sur un ensemble plus petit que celui sur lequel porte la définition de la norme de A : seulement l'image de B au lieu de tout l'espace de départ de A. □

Proposition 11.61 (Bornée si et seulement si continue[276])**.**
Soient E et F des espaces vectoriels normés. Une application linéaire $E\to F$ est bornée si et seulement si elle est continue.

Démonstration. Nous commençons par supposer que A est bornée. Par le lemme 11.60, pour tout $x,y\in E$, nous avons

$$\|A(x)-A(y)\|=\|A(x-y)\|\leqslant\|A\|\|x-y\|. \tag{11.173}$$

En particulier si $x_n\xrightarrow{E}x$ alors

$$0\leqslant\|A(x_n)-A(x)\|\leqslant\|A\|\|x_n-x\|\to 0 \tag{11.174}$$

et A est continue en vertu de la caractérisation séquentielle de la continuité, proposition 7.117.

Nous supposons maintenant que $\|A\|$ n'est pas borné : l'ensemble $\{\|A(x)\|\text{ tel que }\|x\|=1\}$ contient des valeurs arbitrairement grandes. Alors pour tout $k\geqslant 1$ il existe $x_k\in B(0,1)$ tel que $\|A(x_k)\|>k$. La suite x_k/k tend vers zéro parce que $\|x_k\|=1$, mais $\|A(x_k)\|\geqslant 1$ pour tout k. Cela montre que A n'est pas continue. □

Nous avons vu dans la proposition 11.61 que pour une application linéaire, être bornée est équivalent à être continue. Nous allons maintenant voir un certain nombre d'exemples illustrant ce fait.

Exemple 11.62 (Une application linéaire non continue)**.**
Soit V l'espace vectoriel normé des suites *finies* de réels muni de la norme usuelle $\|c\|=\sqrt{\sum_{i=0}^{\infty}|c_i|^2}$ où la somme est finie. Nous nommons $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ la base usuelle de cet espace, et nous considérons l'opérateur $f\colon V\to V$ donnée par $f(e_k)=ke_k$. C'est évidemment linéaire, mais ce n'est pas continu en zéro. En effet la suite $u_k=e_k/k$ converge vers 0 alors que $f(u_k)=e_k$ ne converge pas. △

33. Définition 11.55.

Cet exemple aurait pu également être donnée dans un espace de Hilbert, mais il aurait fallu parler de domaine.

Exemple 11.63 (Une autre application linéaire non continue[277]).
En dimension infinie, une application linéaire n'est pas toujours continue. Soit E l'espace des polynômes à coefficients réels sur $[0,1]$ muni de la norme uniforme. L'application de dérivation $\varphi\colon E \to E$, $\varphi(P) = P'$ n'est pas continue.

Pour la voir nous considérons la suite $P_n = \frac{1}{n}X^n$. D'une part nous avons $P_n \to 0$ dans E parce que $P_n(x) = \frac{x^n}{n}$ avec $x \in [0,1]$. Mais en même temps nous avons $\varphi(P_n) = X^{n-1}$ et donc $\|\varphi(P_n)\| = 1$.

Nous n'avons donc pas $\lim_{n\to\infty} \varphi(P_n) = \varphi(\lim_{n\to\infty} P_n)$ et l'application φ n'est pas continue en 0. Elle n'est donc continue nulle part par linéarité.

Nous avons utilisé le critère séquentiel de la continuité, voir la définition 7.173 et la proposition 7.117. △

Remarque 11.64.
Cette proposition permet de retrouver l'exemple 11.62 plus simplement. Si $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une base d'un espace vectoriel normé formée de vecteurs de norme 1, alors l'opérateur linéaire donné par $u(e_k) = ke_k$ n'est pas borné et donc pas continu.

C'est également ce résultat qui montre que le produit scalaire est continu sur un espace de Hilbert par exemple.

Exemple 11.65.
Nous avons vu dans le lemme 11.59 que pour un $x \in E$ donné, l'application

$$\begin{aligned} ev_x\colon \mathcal{L}(E,F) &\to F \\ f &\mapsto f(x) \end{aligned} \tag{11.175}$$

est continue. Puisque ev_x est linéaire, la proposition 11.61 nous indique que ev_x est bornée. Vérifions-le directement. Le calcul n'est pas très compliqué :

$$\|ev_x\| = \sup_{\|f\|=1} \|ev_x(f)\| = \sup_{\|f\|=1} \|f(x)\| \leqslant \sup_{\|f\|=1} \|x\|\|f\| = \|x\| \tag{11.176}$$

où nous avons utilisé le lemme 11.58 en passant. Donc la norme de ev_x est majorée par $\|x\|$.

Elle est même égale à $\|x\|$. En effet, pour chaque $f \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que $\|f\| = 1$, nous avons

$$\|ev_x\| \geqslant \|ev_x(f)\| = \|f(x)\|. \tag{11.177}$$

En prenant $f = \mathrm{Id}$ nous trouvons $\|ev_x\| \geqslant \|x\|$. △

11.5.0.1 Mini bonus

11.66 ([187]).
Vous vous souvenez de la définition 7.151 d'une somme directe topologique ? Si V est normé, il existe une façon plus directe (mais pas spécialement plus simple) de prouver l'implication (1) ⇒ (2), et en particulier la continuité de s^{-1}. Rappelons que dans le cas normé, nous avons plusieurs façons équivalentes de décrire les topologies[34].

— Sur V_1 et V_2 nous avons la topologie induite, définition 7.33, qui est la même que celle de la restriction de la norme de V (lemme 7.102).

— La topologie sur $V_1 \times V_2$ est la définition 7.14. C'est la même que celle de la norme produit par le lemme 7.192.

— La topologie sur V/V_1 est la topologie quotient 7.20. La proposition 7.297 dit que la norme induite donne la même topologie.

34. Voir le thème 26.

L'espace $V_1 \times V_2$ est muni de sa norme produit de la définition 7.192 : $\|(v_1, v_2)\| = \max\{\|v_1\|, \|v_2\|\}$. Par hypothèse $\psi^{-1} \colon V_1 \oplus V_2 \to V_1 \times V_2$ est linéaire et continue. La proposition 11.61 nous indique qu'elle est alors bornée. Il existe donc un nombre $C \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\|\psi^{-1}(v_1 + v_2)\| = \max\{\|v_1\|, \|v_2\|\} \leqslant C\|v_1 + v_2\|. \tag{11.178}$$

Nous allons montrer que s^{-1} est séquentiellement continue[35] en partant d'une suite $\alpha_n \xrightarrow{V/V_1} 0$. En vertu de la proposition 7.297, nous avons $d(\alpha_n, V_1) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$.

Chacun des α_n contient un unique élément x_n de V_1, qui est donné par $s^{-1} : x_n = s^{-1}(\alpha_n)$. Nous avons

$$\|\alpha_n\| = \inf_{u \in \alpha_n} \|u\| = \inf_{v \in V_1} \|x_n + v\|. \tag{11.179}$$

Vu que $\|\alpha_n\|$ est donné par un infimum, nous pouvons, pour chaque n, choisir $v \in V_1$ de telle sorte que $x_n + v_n$ ne soit pas trop loin d'être l'infimum :

$$\big|\|x_n - v_n\| - \|\alpha_n\|\big| \leqslant \frac{1}{n}. \tag{11.180}$$

Un tel choix nous donne une suite (v_n) dans V_1 telle que

$$\big|\|x_n - v_n\| - \|\alpha_n\|\big| \to 0. \tag{11.181}$$

Vu que $\|\alpha_n\| \to 0$, cela implique $\|x_n + v_n\| \to 0$.

En remettant tout ensemble,

$$\|x_n\| \leqslant \max\{\|x_n\|, \|v_n\|\} \leqslant C\|x_n + v_n\| \to 0. \tag{11.182}$$

Donc $s^{-1}(\alpha_n) = x_n \to 0$, et s^{-1} est séquentiellement continue.

11.5.1 Suites

Nous allons maintenant parler de suites dans $V \times W$. Nous noterons (v_n, w_n) la suite dans $V \times W$ dont l'élément numéro n est le couple (v_n, w_n) avec $v_n \in V$ et $w_n \in W$. La notions de convergence de suite découle de la définition de la norme via la proposition 10.24. Il se fait que dans le cas des produits d'espaces, la convergence d'une suite est équivalente à la convergence des composantes. Plus précisément, nous avons le lemme suivant.

Lemme 11.67.
La suite (v_n, w_n) converge vers (v, w) dans $V \times W$ si et seulement les suites (v_n) et (w_n) convergent séparément vers v et w respectivement dans V et W.

Démonstration. Pour le sens direct, nous devons étudier le comportement de la norme de $(v_n, w_n) - (v, w)$ lorsque n devient grand. En vertu de la définition de la norme dans $V \times W$ nous avons

$$\Big\|(v_n, w_n) - (v, w)\Big\|_{V \times W} = \max\big\{\|v_n - v\|_V, \|w_n - w\|_W\big\}. \tag{11.183}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence de la suite (v_n, w_n), il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $n > N$ implique

$$\max\big\{\|v_n - v\|_V, \|w_n - w\|_W\big\} < \varepsilon, \tag{11.184}$$

et donc en particulier les deux inéquations

$$\|v_n - v\| < \varepsilon \tag{11.185a}$$
$$\|w_n - w\| < \varepsilon. \tag{11.185b}$$

De la première, il ressort que $(v_n) \to v$, et de la seconde que $(w_n) \to w$.

35. Définition 7.173. La continuité séquentielle est équivalente à la continuité par la proposition 7.220.

Pour le sens inverse, nous avons pour tout ε un N_1 tel que $\|v_n - v\|_V \leqslant \varepsilon$ pour tout $n > N_1$ et un N_2 tel que $\|w_n - w\|_W \leqslant \varepsilon$ pour tout $n > N_2$. Si nous posons $N = \max\{N_1, N_2\}$ nous avons les deux inégalités simultanément, et donc

$$\max\left\{\|v_n - v\|_V, \|w_n - w\|_W\right\} < \varepsilon, \tag{11.186}$$

ce qui signifie que la suite (v_n, w_n) converge vers (v, w) dans $V \times W$. □

Proposition 11.68 ([1]).
Soit un espace E muni d'un produit scalaire à valeurs dans $\mathbb{K}$ (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ nous supposons le produit hermitien, mais ce n'est pas très important ici). Alors l'application

$$\begin{aligned} a\colon E \times E &\to \mathbb{K} \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y\rangle \end{aligned} \tag{11.187}$$

est continue.

Démonstration. Nous ne disons pas que l'espace $V \times V$ est muni d'un produit scalaire. Mais en tout cas c'est un espace métrique, et $\mathbb{K}$ l'est aussi. Donc a est une application entre deux espaces métriques et elle sera continue si et seulement si elle est séquentiellement continue (proposition 7.1177.215).

Soit donc une suite convergente dans $E \times E$, c'est-à-dire $(x_k, y_k) \xrightarrow{E\times E} (x, y)$. Nous devons démontrer que $\langle x_k, y_k\rangle \xrightarrow{\mathbb{R}} \langle x, y\rangle$. Les majorations usuelles donnent

$$\begin{aligned} \big|\langle x_k, y_k\rangle - \langle x, y\rangle\big| &\leqslant \big|\langle x_k, y_k\rangle - \langle x, y_k\rangle\big| + \big|\langle x, y_k\rangle - \langle x, y\rangle\big| && \text{(11.188a)} \\ &= \big|\langle x_k - x, y_k\rangle\big| + \big|\langle x, y_k - y\rangle\big|. && \text{(11.188b)} \end{aligned}$$

Nous savons du lemme 11.67 que les suites (x_k) et (y_k) sont séparément convergentes : $x_k \xrightarrow{E} x$ et $y_k \xrightarrow{E} y$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz 11.2 nous trouvons

$$\big|\langle x_k - x, y_k\rangle\big| \leqslant \|x_k - x\|\|y_k\|. \tag{11.189}$$

Nous avons $\|x_k - x\| \to 0$ et $\|y_k\| \to \|y\|$, et par la règle du produit de limites dans $\mathbb{R}$ nous avons que $\big|\langle x_k - x, y_k\rangle\big| \to 0$. □

Remarque 11.69.
Il faut remarquer que la norme (7.173) est une norme *par défaut*. C'est la norme qu'on met quand on ne sait pas quoi mettre. Or il y a au moins un cas d'espace produit dans lequel on sait très bien quelle norme prendre : les espaces $\mathbb{R}^m$. La norme qu'on met sur $\mathbb{R}^2$ est

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{11.190}$$

et non la norme « par défaut » de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ qui serait

$$\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}. \tag{11.191}$$

Les théorèmes que nous avons donc démontré à propos de $V \times W$ ne sont donc pas immédiatement applicables au cas de $\mathbb{R}^2$.

Cette remarque est valables pour tous les espaces $\mathbb{R}^m$. À moins de mention contraire explicite, nous ne considérons jamais la norme par défaut (7.173) sur un espace $\mathbb{R}^m$.

Étant donné la remarque 11.69, nous ne savons pas comment calculer par exemple la fermeture du produit d'intervalle $]0, 1, [\times[4, 5[$. Il se fait que, dans $\mathbb{R}^m$, les fermetures de produits sont quand même les produits de fermetures.

Proposition 11.70.
Soit $A \subset \mathbb{R}^m$ et $B \subset \mathbb{R}^m$. Alors dans $\mathbb{R}^{m+n}$ nous avons $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$.

11.5.2 Continuité du produit de matrices

Nous avons introduit des normes sur $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$, entre autres la norme opérateur de la définition 11.50. Qui dit norme dit topologie. Il advient alors la question évidente : est-ce que des opérations aussi élémentaires que le produit de matrices sont continues pour ces topologies ?

Une façon simple de répondre à cela est d'introduire sur $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ une nouvelle norme très simple : celle de $\mathbb{K}^n$. C'est la topologie par composante. Pour cette topologie, il est simple de voir que le produit matriciel est continu parce que les éléments de AB sont des polynômes en les éléments de A B. Ensuite il suffit d'invoquer l'équivalence de toutes les normes (théorème 11.45).

Voyons comment montrer cela de façon plus directe (bien que le raisonnement précédent soit une démonstration qui devrait déjà avoir convaincu les plus sceptiques). La preuve suivante va donc s'amuser à bien préciser les topologies et caractérisations utilisées.

Lemme 11.71.
Si $\|.\|$ est une norme algébrique sur $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ ($\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) alors l'application

$$\begin{aligned} p\colon \mathbb{M}(n, \mathbb{K}) \times \mathbb{M}(n, \mathbb{K}) &\to \mathbb{M}(n, \mathbb{K}) \\ (A, B) &\mapsto AB \end{aligned} \tag{11.192}$$

est continue.

Démonstration. L'espace $\mathbb{M}(n, \mathbb{K}) \times \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ est métrique (définition 7.191), donc la caractérisation séquentielle de la continuité (proposition 7.220) s'applique. Nous considérons donc une suite (A_k, B_k) dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{K}) \times \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ convergente vers AB.

Nous savons que la topologie sur $\mathbb{M}(n, \mathbb{K}) \times \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ est la topologie produit (lemme 7.191) et que celle-ci donne la convergence composante par composante dès que nous avons convergence d'une suite ; c'est la proposition 7.56. Nous avons donc $A_k \xrightarrow{\mathbb{M}(n,\mathbb{K})} A$ et $B_k \xrightarrow{\mathbb{M}(n,\mathbb{K})} B$.

Voilà pour le contexte. Maintenant, la preuve de la continuité. Nous effectuons les majorations suivantes :

$$\|p(A_k, B_K) - AB\| \leqslant \|p(A_k, B_k) - p(A_k, B)\| + \|p(A_k, B) - AB\| \tag{11.193a}$$
$$= \|A_K b_k - A_k B\| + \|A_k B - AB\| \tag{11.193b}$$
$$= \|A_k(B_k - B)\| + \|(A_k - A)B\| \tag{11.193c}$$
$$\leqslant \underbrace{\|A_k\|}_{\to\|A\|} \underbrace{\|B_k - B\|}_{\to 0} + \underbrace{\|A_k - A\|}_{\to 0} \|B\|. \tag{11.193d}$$

□

11.6 Applications multilinéaires

Définition 11.72 (Application multilinéaire)**.**
*Une application $T : \mathbb{R}^{m_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{m_k} \to \mathbb{R}^p$ est dite **k-linéaire** si pour tout $X = (x_1, \ldots, x_k)$ dans $\mathbb{R}^{m_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{m_k}$ les applications $x_i \mapsto T(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k)$ sont linéaires pour tout i dans $\{1, \ldots, k\}$, c'est-à-dire*

$$\begin{aligned} T(\ \cdot\ , x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_k) &\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{m_1}, \mathbb{R}^p), \\ T(x_1, \ \cdot\ , \ldots, x_i, \ldots, x_k) &\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{m_2}, \mathbb{R}^p), \\ &\vdots \\ T(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_{k-1}, \ \cdot\ ) &\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{m_k}, \mathbb{R}^p). \end{aligned} \tag{11.194}$$

*En particulier lorsque $k = 2$, nous parlons d'applications **bilinéaires**. Vous pouvez deviner ce que sont les applications* tri*linéaire ou* quadri*linéaire.*

L'ensemble des applications k-linéaires de $\mathbb{R}^{m_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{m_k}$ dans $\mathbb{R}^p$ est noté $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{m_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{m_k}, \mathbb{R}^p)$ ou $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{m_1}, \ldots, \mathbb{R}^{m_k}; \mathbb{R}^p)$.

Exemple 11.73.
Soit A une matrice avec m lignes et n colonnes. L'application bilinéaire de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ associée à A est définie par

$$T_A(x, y) = x^T A y = \sum_{i,j} a_{i,j} x_i y_j, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^m,\, y \in \mathbb{R}^n.$$

△

Nous énonçons la proposition suivante dans le cas d'espaces vectoriels normés [36] parce que nous allons l'utiliser dans ce cas, mais le cas particulier $E_i = \mathbb{R}^{m_i}$ et $F = \mathbb{R}^p$ est important.

Proposition 11.74.
Soient des espaces vectoriels normés E_i et F. Une application n-linéaire

$$T\colon E_1 \times \ldots \times E_n \to F \tag{11.195}$$

est est continue si et seulement si il existe un réel $L \geqslant 0$ tel que

$$\|T(x_1, \ldots, x_n)\|_F \leqslant L\|x_1\|_{F_1} \cdots \|x_n\|_{F_n}, \qquad \forall x_i \in E_i. \tag{11.196}$$

Démonstration. Pour simplifier l'exposition nous nous limitons au cas $n = 2$ et nous notons $T(x, y) = x * y$

Supposons que l'inégalité (11.196) soit satisfaite.

$$\begin{aligned}\|x * y - x_0 * y_0\| &= \|(x - x_0) * y - x_0 * (y - y_0)\|\\ &\leqslant \|(x - x_0) * y\| + \|x_0 * (y - y_0)\|\\ &\leqslant L\|x - x_0\|\|y\| + L\|x_0\|\|y - y_0\|.\end{aligned} \tag{11.197}$$

Si $x \to x_0$ et $y \to y_0$ on voit que T est continue en passant à la limite aux deux côtés de l'inégalité (11.197).

Soit T continue en $(0, 0)$. Évidemment [37] $0 * 0 = 0$, donc il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in B_{E_1}(0, \delta)$ et $y \in B_{E_2}(0, \delta)$ alors $\|x * y\| \leqslant 1$. En particulier si $(x, y) \in B_{E_1 \times E_2}(0, \delta)$ nous sommes dans ce cas. Soient maintenant $x \in E_1 \backslash \{0\}$ et $y \in E_2 \backslash \{0\}$

$$x * y = \left(\frac{\|x\|}{\delta} \frac{\delta x}{\|x\|}\right) * \left(\frac{\|y\|}{\delta} \frac{\delta y}{\|y\|}\right) = \frac{\|x\|\|y\|}{\delta^2} \left(\frac{\delta x}{\|x\|}\right) * \left(\frac{\delta y}{\|y\|}\right). \tag{11.198}$$

On remarque que $\delta x / \|x\|_m$ est dans la boule de rayon δ centrée en 0_m et que $\delta y / \|y\|_n$ est dans la boule de rayon δ centrée en 0_n. On conclut

$$x * y \leqslant \frac{\|x\|_m \|y\|_n}{\delta^2}.$$

Il faut prendre $L = 1/\delta^2$. □

La norme de T est alors définie comme la plus petite constante L qui fait fonctionner la proposition 11.74.

Définition 11.75.
La norme sur l'espace $\mathcal{L}(E_1 \times \cdots \times E_n, F)$ des applications k-linéaires et continues est

$$\|T\|_{E_1 \times \ldots \times E_n} = \sup\{\|T(u_1, \ldots, u_k)\|_F \mid \|u_i\|_{E_i} \leqslant 1, i = 1, \ldots, k\}. \tag{11.199}$$

Nous avons donc automatiquement

$$\|T(u, v)\| \leqslant \|T\|\|u\|\|v\|. \tag{11.200}$$

Et nous notons que cette norme est uniquement définie pour les applications linéaires continues. Ce n'est pas très grave parce qu'alors nous définissons $\|T\| = \infty$ si T n'est pas continue. Cela pour retrouver le principe selon lequel on est continue si et seulement si on est borné.

36. Sans hypothèses sur la dimension.
37. Dans la formule suivante, les trois zéros sont les zéros de trois espaces différents.

Proposition 11.76.
On définit les fonctions

$$\begin{array}{llll} \omega_g : & \mathcal{L}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) & \to & \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)), \\ \omega_d : & \mathcal{L}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) & \to & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)), \end{array} \tag{11.201}$$

par

$$\omega_g(T)(x) = T(x, \ \cdot\ ), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^m,$$

et

$$\omega_d(T)(y) = T(\ \cdot\ , y), \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Les fonctions ω_g et ω_d sont des isomorphismes qui préservent les normes.

11.7 Séries

La notion de somme sur un ensemble infini est donnée en 11.96, voir aussi le thème 51 pour plus de notions de sommes finies et infinies.

Définition 11.77.
*Soit (a_k) une suite dans un espace vectoriel normé $(V, \|.\|)$. La suite des **sommes partielles** associée est la suite (s_k) définie par*

$$s_k = \sum_{i=0}^{k} a_i \tag{11.202}$$

*La **série** associée est la limite des sommes partielles*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \tag{11.203}$$

si elle existe.

*Si une telle limite existe nous disons que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ **converge** dans V. Si la limite de la suite des sommes partielles n'existe pas nous disons que la série **diverge**.*

Remarque 11.78.
Si la limite de la suite des sommes partielles n'existe pas dans V, alors elle peut parfois exister dans des extensions de V. Par exemple une série de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$ dans $\mathbb{R}$ ne converge pas dans $\mathbb{Q}$. Autre exemple : avec une bonne topologie sur $\bar{\mathbb{R}}$, une série peut ne pas converger dans $\mathbb{R}$ mais converger vers $\pm\infty$ dans $\bar{\mathbb{R}}$.

Dans le cas des espaces de fonctions, nous avons une norme importante : la norme uniforme définie par $\|f\|_\infty = \sup\{f(x)\}$ où le supremum est pris sur l'ensemble de définition de f.

Lemme 11.79.
Soit une suite (a_k) dans un espace métrique complet[38] dont la série converge.

(1) Pour tout N nous avons

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k. \tag{11.204}$$

(2) La suite des queues de série converge vers 0, c'est-à-dire que

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=N}^{\infty} a_k = 0. \tag{11.205}$$

38. Définition 7.228.

Démonstration. Voici un petit calcul :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=0}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{n} a_k\Big) \tag{11.206a}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{N} a_k + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=N+1}^{n} a_k \tag{11.206b}$$

$$= \sum_{k=0}^{N} a_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k. \tag{11.206c}$$

Justifications :

— Pour (11.206a). Pour chaque n, la somme est finie et nous pouvons la décomposer. Si vous voulez vraiment couper les cheveux en quatre, vous devez fixer un ϵ, et un n de telle sorte à avoir $n > N$, parce que N est fixé dans l'énoncé du lemme.

— Pour (11.206b). Nous sommes dans un cas $\lim_{n\to\infty}(u_n + v_n)$ où (u_n) est constante et où $(u_n + v_n)$ converge. Nous pouvons donc permuter limite et somme[39].

Voilà que (1) est prouvé.

Nous écrivons $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$; l'hypothèse est que la suite (s_n) est une suite convergente dans un espace métrique. Elle est donc de Cauchy par la proposition 7.234.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q > N$, nous ayons $\|s_p - s_q\| \leqslant \epsilon$. Soit $p > N$. Pour tout $n \geqslant 0$ nous avons

$$\epsilon > \|s_{p+n} - s_{p+1}\| = \|\sum_{k=p}^{p+n} a_k\|. \tag{11.207}$$

En prenant la limite $n \to \infty$ nous avons

$$\|\sum_{k=p}^{\infty} a_k\| \leqslant \epsilon. \tag{11.208}$$

Nous avons donc démontré qu'il existe N tel que si $p > N$, alors $\|\sum_{k=p}^{\infty} a_k\| \leqslant \epsilon$. Cela signifie exactement que $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty} a_k = 0$. □

11.7.1 Les trois types de convergence

Trois notions de convergence à ne pas confondre :

(1) La convergence absolue,

(2) la convergence normale. C'est la même que la convergence absolue, mais dans le cas particulier d'un espace de fonctions muni de la norme uniforme.

(3) la convergence uniforme.

Voici les définitions.

Définition 11.80 (Convergence absolue)**.**
Nous disons que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ dans l'espace vectoriel normé V ***converge absolument*** *si la série $\sum_{n=0}^{\infty}\|a_n\|$ converge dans $\mathbb{R}$.*

Définition 11.81 (Convergence normale)**.**
Une série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge ***normalement*** *si la série de nombres $\sum_n \|u_n\|_\infty$ converge. C'est-à-dire si la série converge absolument pour la norme $\|f\|_\infty$.*

39. Pour rappel, la proposition 10.26 demande la convergence des deux suites pour fonctionner.

Définition 11.82 (Convergence uniforme)**.**
La somme $\sum_n f_n$ ***converge uniformément*** *vers la fonction F si la suite des sommes partielles converge uniformément, c'est-à-dire si*

$$\lim_{N\to\infty} \| \sum_{n=1}^{N} f_n - F\|_\infty = 0. \tag{11.209}$$

Lemme 11.83.
Soient un espace topologique X, un espace vectoriel normé, et une suite de fonctions $f_n\colon X\to V$. Si la série $\sum_n f_n$ converge normalement, alors elle converge uniformément.

Proposition 11.84.
Une série absolument convergente dans un espace de Banach[40] *y converge au sens usuel.*

Démonstration. Soit (a_k) une suite dans un espace vectoriel normé complet dont la série converge absolument. Nous allons montrer que la suite des sommes partielles est de Cauchy. Cela suffira à montrer sa convergence par hypothèse de complétude.

Nous avons

$$\|s_p - s_l\| = \| \sum_{k=l+1}^{p} a_k\| \leqslant \sum_{k=l+1}^{p} \|a_k\| = \bar s_p - \bar s_l \tag{11.210}$$

où $\bar s_n = \sum_{k=0}^{n} \|a_k\|$ est la suite des sommes partielles de la série des normes (qui converge). Vu que la suite $(\bar s_n)$ converge dans $\mathbb{R}$, elle y est de Cauchy par la proposition 1.341. Donc il existe un N tel que $p, l > N$ implique

$$\|s_p - s_l\| = \bar s_p - \bar s_l \leqslant \epsilon. \tag{11.211}$$

Cela signifie que (s_n) est une suite de Cauchy et donc convergente. □

Exemple 11.85 (Si l'espace n'est pas complet[1])**.**
Dans un espace qui n'est pas complet, il est possible de construire un série qui converge absolument sans converger au sens usuel.

Nous allons trouver dans $\mathbb{Q}$ une série qui converge simplement vers $\sqrt{2}$ (et donc ne converge pas dans $\mathbb{Q}$) mais absolument vers 4.

La base est que si $A, B\in\mathbb{Q}$ avec $A < B$ il est possible de résoudre

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = A & (11.212a)\\ |r_1| + |r_2| = B & (11.212b)\end{cases}$$

pour $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$. Ce n'est pas très compliqué : la solution est $r_1 = (A+B)/2$ et $r_2 = (A-B)/2$.

Nous considérons l'espace $\mathbb{Q}$ qui n'est pas complet dans $\mathbb{R}$. Soit une série (a_k) dans $\mathbb{Q}$ qui converge vers $\sqrt{2}$ (convergence dans $\mathbb{R}$) nous nommons (s_k) la suite des ses sommes partielles. Soit aussi la suite (b_k) qui converge vers 4 (zéro serait encore plus facile mais bon, juste pour faire un peu de généralité).

Nous supposons que $a_k < b_k$ pour tout k et que les deux suites sont constituées de rationnels positifs. Nous nommons (s_k) et (s'_k) les sommes partielles. En particulier $s_n < s'_n$ et ce sont des suites croissantes.

Nous savons comment trouver $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ tels que $r_1 + r_2 = s_1$ et $|r_1| + |r_2| = s'_1$. Par récurrence, si nous savons $r_1, \ldots, r_k$ tels que

$$\begin{cases} r_1 + \ldots + r_k = s_n & (11.213a)\\ |r_1| + \ldots + |r_k| = s'_n & (11.213b)\end{cases}$$

(avec, soit dit en passant $k = 2n$), alors nous pouvons trouver des rationnels r_{k+1}, r_{k+2} tels que

$$\begin{cases} r_1 + \ldots + r_k + r_{k+1} + r_{k+2} = s_{n+1} & (11.214a)\\ |r_1| + \ldots + |r_k| + |r_{k+1}| + |r_{k+2}| = s'_{n+1}, & (11.214b)\end{cases}$$

40. Un espace vectoriel normé complet. Typiquement $\mathbb{R}$.

en effet il s'agit de résoudre

$$\begin{cases} r_{k+1} + r_{k+2} = s_{n+1} - r_1 - \ldots - r_k = s_{n+1} - s_n > 0 & (11.215a)\\ |r_{k+1}| + |r_{k+2}| = s'_{n+1} - |r_1| - \ldots - |r_k| = s'_{n+1} - s'_n > 0. & (11.215b) \end{cases}$$

Cela se résout comme ci-dessus. Au final nous pouvons construire une suite (r_k) dans $\mathbb{Q}$ telle que

$$\sum_{k=0}^{2n} r_k = s_n \tag{11.216}$$

et

$$\sum_{k=0}^{2n} |r_k| = s'_n. \tag{11.217}$$

$\triangle$

Remarque 11.86.
Nous savons que sur les espaces vectoriels de dimension finie toutes les normes sont équivalentes (théorème 11.42). La notion de convergence de série ne dépend alors pas du choix de la norme. Il n'en est pas de même sur les espaces de dimension infinie. Une série peut converger pour une norme mais pas pour une autre.

Lorsque nous verrons la convergence de séries, nous verrons que la convergence normale est la convergence absolue pour la norme uniforme.

Lemme 11.87.
Si E et F sont des espaces de Banach[41]*, l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ est également de Banach.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E,F)$; si $x \in E$ il existe N tel que si $l,m > N$ alors $\|u_l - u_m\| < \epsilon$, c'est-à-dire que pour tout $\|x\| = 1$ on a $\|u_l(x) - u_n(x)\| < \epsilon$. Cela signifie que $u_n(x)$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet F. Cette suite converge et nous pouvons définir l'application $u\colon E \to F$ par

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x). \tag{11.218}$$

Il suffit maintenant de prouver que u est linéaire, ce qui est une conséquence directe de la linéarité de la limite :

$$u(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} \big(\alpha u_n(x) + \beta u_n(y)\big). \tag{11.219}$$

$\square$

Proposition 11.88.
Si une série converge dans un espace complet, la norme de son terme général converge vers 0.

Démonstration. Soit une suite (a_n) dont la série converge vers s. Soit $\epsilon > 0$. La suite des sommes partielles (s_n) est de Cauchy et converge vers s : $s_n \to s$. En particulier il existe un N tel que si $n > N$, nous avons $\|s_n - s_{n-1}\| < \epsilon$. Pour de telles valeurs de n nous avons :

$$\|a_n\| = \|s_n - s_{n-1}\| \leqslant \epsilon. \tag{11.220}$$

Cela prouve que $a_n \to 0$. $\square$

Dans le même ordre d'idée nous avons la convergence des queues de suites.

Lemme 11.89 ([1]).
Soit une suite $a\colon \mathbb{N} \to V$ où V est un espace vectoriel normé. Si $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge, alors

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = 0. \tag{11.221}$$

41. Je crois qu'il ne faut pas que E soit complet.

Démonstration. Ne nous en voulez pas si on décale l'énoncé de 1 : nous allons prouver que $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \to 0$. Nous nommons (s_n) la suite des sommes partielles de a : $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Soit n fixé dans $\mathbb{N}$; pour tout $N > n$ nous avons

$$\sum_{k=0}^{N} a_k = s_n + \sum_{k=n+1}^{N} a_k \tag{11.222}$$

En prenant la limite $N \to \infty$ nous trouvons

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s_n + \lim_{N\to\infty} \sum_{k=n+1}^{N} a_k = s_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k. \tag{11.223}$$

Cela étant valable pour tout n, nous prenons la limite $n \to \infty$. Par définition $s_n \to \sum_{k=0}^{\infty} a_k$; pour le reste

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k. \tag{11.224}$$

La dernière somme est donc nulle et nous avons prouvé le lemme. □

Proposition 11.90.
Si la série converge alors la somme est associative : $\sum_k (a_k + b_k) = \sum_k a_k + \sum_k b_k$.

Démonstration. Associativité. Supposons que $\sum_k a_k$ et $\sum_k b_k$ convergent tous deux. Alors nous avons pour tout N :

$$\sum_{k=0}^{N} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{N} a_k + \sum_{k=0}^{N} b_k. \tag{11.225}$$

Mais si deux limites existent alors la somme commute avec la limite. C'est le cas pour la limite $N \to \infty$, donc

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} b_k. \tag{11.226}$$

□

11.7.2 Séries dans une algèbre normée

Nous allons parler d'exponentielle de matrice. Avant cela, quelques propriétés qui sont valables sur des algèbres normées. Le principal exemple que nous avons en tête est $\mathbb{A} = \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$.

Proposition 11.91 (Distributivité de la somme infinie[1]).
Soit une algèbre normée $\mathbb{A}$. Soient une suite d'éléments $A_k \in \mathbb{A}$ et un élément B. Nous supposons que la somme $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ converge. Alors

$$B \sum_k A_k = \sum_k (BA_k). \tag{11.227}$$

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}$. Nous avons :

$$\| \sum_{k=0}^{N} BA_k - B \sum_{k=0}^{\infty} A_k \| = \|B \sum_{k=N+1}^{\infty} A_k\| \tag{11.228a}$$

$$\leqslant \|B\| \| \sum_{k=N+1}^{\infty} A_k\| \tag{11.228b}$$

Justifications :

— Pour (11.228a). Linéarité du produit matriciel.

— Pour (11.228b). La norme est une norme d'algèbre[42].

À droite, la limite $N \to \infty$ donne zéro car $\|B\|$ est un simple nombre, et $\|\sum_{k=N+1}^{\infty} A_k\|$ est une queue de suite convergente par hypothèse.

Nous avons donc bien convergence

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} BA_k = B\sum_{k=0}^{\infty} A_k. \tag{11.229}$$

□

Proposition 11.92 (Produit de Cauchy dans une algèbre normée[1])**.**
Soient une algèbre normée $\mathbb{A}$, un élément $A \in \mathbb{A}$, ainsi que des séries convergentes $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ et $\sum_{l=0}^{\infty} b_l A^l$. Alors

$$\Big(\sum_k a_k A^k\Big)\Big(\sum_l b_l A^l\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\big(\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m}\big)A^n. \tag{11.230}$$

Démonstration. Un calcul :

$$\Big(\sum_k a_k A^k\Big)\Big(\sum_l b_l A^l\Big) = \sum_k \big(\sum_l b_l A^l\big) a_k A^k \tag{11.231a}$$
$$= \sum_k \big(\sum_l b_l a_k A^{l+k}\big) \tag{11.231b}$$
$$= \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K} \big(\lim_{L\to\infty}\sum_{l=0}^{L} b_l a_k A^{k+l}\big) \tag{11.231c}$$
$$= \lim_{K\to\infty}\lim_{L\to\infty} \sum_{k=0}^{K}\sum_{l=0}^{L} b_l a_k A^{k+l} \tag{11.231d}$$
$$= \lim_{K\to\infty}\lim_{L\to\infty} \sum_{n=0}^{K+L}\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} A^n \tag{11.231e}$$
$$= \lim_{K\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} A^m \tag{11.231f}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} A^m \tag{11.231g}$$

Justifications :

— Pour (11.231a), la proposition 11.91 nous permet d'entrer l'élément $\sum_l b_l A^l \in \mathbb{A}$ dans la somme sur k.

— Pour (11.231b), c'est la même chose.

— Pour (11.231d), la somme sur k étant finie (pour chaque K), elle commute avec la limite sur L.

— Pour (11.231e), c'est une manipulation de sommes finies. On regroupe les termes selon les puissances de A.

— Pour (11.231f), c'est effectuer la limite sur L pour K fixé.

— Pour (11.231g), l'expression dans la limite sur K ne dépend pas de K. Donc nous pouvons simplement supprimer la limite.

□

42. Définition 11.55. Pour rappel, la norme opérateur en est une par le lemme 11.60.

11.8 Sommes de familles infinies

11.8.1 Convergence commutative

Définition 11.93.
Soit x_k une suite dans un espace vectoriel normé E. Nous disons que la suite ***converge commutativement*** *vers $x \in E$ si $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ et si pour toute bijection $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nous avons aussi*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{\tau(k)} - x\| = 0. \tag{11.232}$$

La notion de convergence commutative est surtout intéressante pour les séries. La somme

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k \tag{11.233}$$

converge commutativement vers x si $\lim_{N\to\infty} \|x - \sum_{k=0}^{N} x_k\| = 0$ et si pour toute bijection $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nous avons

$$\lim_{N\to\infty} \|x - \sum_{k=0}^{N} x_{\tau(k)}\| = 0. \tag{11.234}$$

Nous démontrons maintenant qu'une série converge réelle commutativement si et seulement si elle converge absolument.

Proposition 11.94.
Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite absolument convergente[43] dans $\mathbb{C}$. Alors elle converge commutativement.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Nous posons $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = a$ et nous considérons N tel que

$$|\sum_{i=0}^{N} a_i - a| < \epsilon. \tag{11.235}$$

Étant donné que la série des $|a_i|$ converge, il existe N_1 tel que pour tout $p, q > N_1$ nous ayons $\sum_{i=p}^{q} |a_i| < \epsilon$. Nous considérons maintenant une bijection $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Prouvons que la série $\sum_{i=0}^{\infty} |a_{\tau(i)}|$ converge. Nous choisissons M de telle sorte que pour tout $n > M$, $\tau(n) > N_1$. Si s_k est la somme partielle de la suite $(a_{\tau(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ et si $M < p < q$ nous avons

$$|s_q - s_p| = |\sum_{i=p}^{q} a_{\tau(i)}| \leqslant \sum_{i=p}^{q} |a_{\tau(i)}| < \epsilon. \tag{11.236}$$

Cela montre que (s_k) est une suite de Cauchy. Elle est alors convergente et nous en déduisons que la série

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_{\tau(i)} \tag{11.237}$$

converge. Nous devons montrer à présent qu'elle converge vers la même limite que la somme « usuelle » $\lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N} a_i$.

Soit $n > \max\{M, N\}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} a_{\tau(k)} - \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{M} a_{\tau(k)} - \sum_{k=0}^{N} a_k + \underbrace{\sum_{M+1}^{n} a_{\tau(k)}}_{<\epsilon} - \underbrace{\sum_{k=N+1}^{n} a_k}_{<\epsilon}. \tag{11.238}$$

Par construction les deux derniers termes sont plus petits que ϵ parce que M et N sont les constantes de Cauchy pour les séries $\sum a_{\tau(i)}$ et $\sum a_i$. Afin de traiter les deux premiers termes, quitte à redéfinir M, nous supposons que $\{1, \ldots, N\} \subset \tau\{1, \ldots, M\}$; par conséquent tous les a_i

43. Définition 11.80.

avec $i < N$ sont atteints par les $a_{\tau(i)}$ avec $i < M$. Dans ce cas, les termes qui restent dans la différence

$$\sum_{k=0} a_{\tau(k)} - \sum_{k=0}^{N} a_k \tag{11.239}$$

sont des a_k avec $k > N$. Cette différence est donc en valeur absolue plus petite que ϵ, et nous avons en fin de compte que

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_{\tau(k)} - \sum_{k=0}^{n} a_k\right| < \epsilon. \tag{11.240}$$

□

Proposition 11.95 ([278]).
Soit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ une série réelle qui converge mais qui ne converge pas absolument. Alors pour tout $b \in \mathbb{R}$, il existe une bijection $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\sum_{i=0}^{\infty} a_{\tau(i)} = b$.

Pour une revue des définitions de sommes dans le cas de $\{0,\ldots,n\}$, des ensembles finis quelconques, voir le thème 51. Maintenant nous donnons la définition pour une somme sur un ensemble infini.

Définition 11.96.
*Si $\{v_i\}_{i\in I}$ est une famille de vecteurs dans un espace vectoriel normé indexée par un ensemble quelconque I. Nous disons que cette famille est **sommable** de somme v si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un J_0 fini dans I tel que pour tout ensemble fini K tel que $J_0 \subset K$ nous avons*

$$\| \sum_{j\in K} v_j - v\| < \epsilon. \tag{11.241}$$

Si tel est le cas, nous notons[44]

$$\sum_{i\in I} v_i = v. \tag{11.242}$$

Dans cette définition, il faut comprendre que J_0 est l'ensemble minimum de termes qu'il faut prendre pour être ϵ-proche de v. Ensuite, K est là pour dire qu'en prenant plus de termes, on ne s'éloignera pas tellement.

Lemme 11.97.
Soit une famille sommable $(v_i)_{i\in I}$ dans un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la famille $(\lambda v_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I} \lambda v_i = \lambda \sum_{i\in I} v_i. \tag{11.243}$$

Lemme 11.98.
Soit une famille sommable $(a_i)_{i\in I}$. Si $J \subset I$, alors la famille $(a_j)_{j\in J}$ est sommable

Lemme 11.99.
Soit une famille sommable $(a_i)_{i\in I}$ de réels positifs. Si $J \subset I$, alors la famille $(a_j)_{j\in J}$ est sommable et

$$\sum_{j\in J} a_j \leqslant \sum_{i\in I} a_i. \tag{11.244}$$

Dans le cas de familles de nombres réels positifs, nous avons une caractérisation plus comode.

Proposition 11.100 (Somme de réels positifs[1]).
Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels positifs indexés par un ensemble quelconque I.

44. Attention que pour définir ça, il faut prouver l'unicité ; je n'ai pas vérifié. Écrivez-moi si vous avez une preuve.

(1) La famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable[45] *si et seulement si*

$$\sup_{J \text{ fini dans } I} \sum_{j\in J} a_j < \infty. \tag{11.245}$$

(2) Si la famille est sommable, alors

$$\sum_{i\in I} a_i = \sup_{J \text{ fini dans } I} \sum_{j\in J} a_j. \tag{11.246}$$

Démonstration. En plusieurs parties.

(i) **Pour (1), $\Rightarrow$** Soit v comme dans la définition. Soit $\epsilon > 0$. Nous considérons une partie finie $J_0 \subset I$ comme il faut. Vu que tous les termes sont positifs,

$$\sup_{J \text{ fini dans } I} \sum_{j\in J} a_j = \sup_{\substack{J \text{ fini dans } I\\ J_0\subset J}} \sum_{j\in J} a_j. \tag{11.247}$$

Pour chaque J fini contenant J_0 dans I nous avons $\| \sum_{j\in J} a_j - v\| \leqslant \epsilon$ et donc

$$\| \sum_{j\in J} a_j\| \leqslant \|v\| + \epsilon. \tag{11.248}$$

Donc le supremum sur les J est majoré par $\|v\| + \epsilon$.
Vu que cela est valable pour tout ϵ, c'est aussi majoré par $\|v\|$ lui-même, mais ce n'est pas utile pour notre propos.

(ii) **Pour (1), $\Leftarrow$** Nous supposons maintenant que $\sup_{J \text{ fini dans } I} \sum_{j\in J} a_j < \infty$. Soit $v < \infty$ ce supremum. Il existe un J_0 fini dans I tel que

$$\| \sum_{j\in J_0} a_j - v\| \leqslant \epsilon. \tag{11.249}$$

Étant donné que tous les termes sont positifs, nous pouvons même dire que

$$\sum_{j\in J_0} a_j \in [v - \epsilon, v]. \tag{11.250}$$

Pour tout K contenant J_0 nous avons la même majoration et donc

$$v - \epsilon \leqslant \sum_{j\in J_0} a_j \leqslant \sum_{k\in K} a_k \leqslant v. \tag{11.251}$$

(iii) **Pour (2)** Nous avons directement que

$$\sum_{i\in I} a_i \leqslant \sup_{J \text{ fini dans } I} \sum_{j\in J} a_j \tag{11.252}$$

parce que le supremum à droite est pris sur un ensemble plus grand. Nous devons prouver l'inégalité dans le sens inverse.
Nous nommons $v = \sup_{J \text{ fini dans } I} \sum_{j\in J} a_j$. Soit $\epsilon > 0$; il existe J_0 fini dans I tel que

$$v - \epsilon \leqslant \sum_{j\in J_0} a_j \leqslant v. \tag{11.253}$$

Pour tout K contenant J_0 nous avons aussi $\sum_{j\in J_0} a_j \leqslant \sum_{k\in K} a_k$ et donc

$$\sum_{k\in K} a_k \in [v - \epsilon, v]. \tag{11.254}$$

Au final nous avons bien prouvé que

$$\| \sum_{k\in K} a_k - v\| \leqslant \epsilon. \tag{11.255}$$

45. Définition 11.96.

□

Lemme 11.101.
Soient un espace vectoriel normé V ainsi qu'une suite sommable $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans V. Alors

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N} a_k. \tag{11.256}$$

La somme à gauche est celle de la définition 11.96 et celle de droite est donnée par la définition 1.81.

Exemple 11.102.
La suite $a_i = (-1)^i$ n'est pas sommable parce que quel que soit J_0 fini dans $\mathbb{N}$, nous pouvons trouver J fini contenant J_0 tel que $\sum_{j\in J}(-1)^j > 10$. Pour cela il suffit d'ajouter à J_0 suffisamment de termes pairs. De la même façon en ajoutant des termes impairs, on peut obtenir $\sum_{j\in J'}(-1)^i < -10$. △

Exemple 11.103.
De temps en temps, la somme peut sortir d'un espace. Si nous considérons l'espace des polynômes $[0,1]\to\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme, la somme de l'ensemble

$$\{1,-1,\pm\frac{x^n}{n!}\}_{n\in\mathbb{N}} \tag{11.257}$$

est zéro.

Par contre la somme de l'ensemble $\{1,\frac{x^n}{n!}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est l'exponentielle qui n'est pas un polynôme. △

Proposition 11.104 ([1]).
Soient un espace vectoriel normé V, deux ensembles disjoints A et B ainsi que $v\colon A\cup B\to V$. Si $\sum_{k\in A} v_k$ et $\sum_{k\in B} v_k$ sont sommables[46]*, alors*

$$\sum_{k\in A\cup B} v_k = \sum_{k\in A} v_k + \sum_{k\in B} v_k. \tag{11.258}$$

11.8.2 Somme non dénombrables

Nous allons voir que les sommes non dénombrables ne sont pas intéressantes : si le nombre de valeurs non nulles parmi les $(x_i)_{i\in I}$ est non dénombrable, alors la somme est infinie. La bonne généralisation de somme infinie dans le cas non dénombrable est l'intégrale qui viendra seulement avec la définition 14.156 et la mesure de Lebesgue 14.132.

Lemme 11.105.
Si A est non dénombrable dans $\mathbb{R}$, alors il existe $\delta>0$ tel que $A\cap\{|x|\geqslant\delta\}$ est non dénombrable.

Démonstration. Nous y allons par l'absurde, et nous supposons que A ne contient pas zéro (sinon il faut ajouter zéro aux A_n ci-dessous, et ça alourdit les notations). Nous supposons donc que les parties

$$A_n = A\cap\{|x|\geqslant\frac{1}{n}\} \tag{11.259}$$

sont dénombrables. Mais

$$A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{11.260}$$

Une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable[47]. Vu qu'un ensemble non dénombrable ne peut être inclus dans un ensemble dénombrable[48], nous avons une contradiction. □

46. Définition 11.96.
47. Proposition 1.132.
48. Proposition 1.136.

Lemme 11.106.
Soit un ensemble I et une « suite » $(x_i)_{i\in I}$ avec $x_i \geqslant 0$ pour tout i. Si l'ensemble

$$F = \{i \in I \text{ tel que } x_i > 0\} \tag{11.261}$$

est non dénombrable, alors

$$\sum_{i\in I} x_i = \infty. \tag{11.262}$$

Démonstration. Nous considérons l'ensemble des valeurs non nulles atteintes par x :

$$V = \{x_i \text{ tel que } i \in F\}. \tag{11.263}$$

Il y a deux possibilités : soit V est dénombrable (ou fini), soit il est non dénombrable.

(i) **V est fini ou dénombrable** Dans ce cas, l'application $x\colon F \to [0, \infty[$ est une application d'un ensemble indénombrable vers un ensemble dénombrable. Le lemme 1.137 nous indique qu'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $x^{-1}(y)$ est indénombrable et en particulier infini. La somme $\sum_{i\in x^{-1}(y)} x_i$ est une somme indénombrable de termes tous égaux et strictement positifs. Elle est infinie.

(ii) **V est indénombrable** La partie V de $\mathbb{R}$ est non dénombrable ; elle est donc sujette au lemme 11.105 : il existe $\delta > 0$ tel que $W = V \cap \{x \geqslant \delta\}$ est indénombrable. Vu que $x_i \geqslant \delta$ pour tout i dans $x^{-1}(W)$ nous avons

$$\sum_{i\in x^{-1}(W)} x_i = \infty. \tag{11.264}$$

□

11.8.3 Sommes dénombrables

La proposition suivante nous enseigne que les sommes infinies se comportent normalement au moins en ce qui concerne les majorations termes à termes.

Proposition 11.107 ([1]).
Soit I un ensemble dénombrable.

(1) Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$, deux familles de réels positifs telles que $a_i \leqslant b_i$ et telles que (b_i) est sommable[49]. Alors (a_i) est sommable.

(2) Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de réels telle que $(|a_i|)$ est sommable, alors (a_i) est sommable.

(3) Si $(z_i)_{i\in I}$ est une famille de complexes telle que $(|z_i|)$ est sommable, alors (z_i) est sommable.

Démonstration. En plusieurs parties.

(i) **Pour (1)** Nous pouvons utiliser la caractérisation 11.100 ; dans un premier temps nous avons

$$\sum_{i\in I} b_i = \sup_{J \text{ fini dans } I} b_i < \infty. \tag{11.265}$$

Pour chaque J fini dans I, le lemme 1.258 nous assure que

$$\sum_{j\in J} a_j \leqslant \sum_{j\in J} b_j \tag{11.266}$$

Donc le supremum existe et est plus petit pour (a_j) que pour (b_j). En utilisant à nouveau la caractérisation de la proposition 11.100(1) (mais dans l'autre sens), nous concluons que $(a_i)_{i\in I}$ est sommable.

49. Définition 11.96.

(ii) **Pour (2)** Nous posons $I^+ = \{i \in I \text{ tel que } a_i \geqslant 0\}$ et $I^- = \{i \in I \text{ tel que } a_i < 0\}$.
Vu que $(|a_i|)_{i\in I}$ est sommable, la famille $(a_i)_{i\in I^+}$ est sommable par le lemme 11.98. La famille $(a_i)_{i\in I^-}$ est également sommable par le même lemme appliqué à $(-a_i)_{i\in I^-}$ qui est sommable par le lemme 11.97. Nous posons

$$S^+ = \sum_{i\in I^+} a_i \tag{11.267a}$$
$$S^- = \sum_{i\in I^-} a_i, \tag{11.267b}$$

et nous allons prouver que $(a_i)_{i\in I}$ est sommable de somme $S^+ + S^-$. Soit $\epsilon > 0$. Nous choisissons J_0^+ et J_0^- tels que $J_0^+ \subset I^+$, $J_0^- \subset I^-$ et

$$\| \sum_{k\in K^+} a_k - S^+ \| \leqslant \epsilon \tag{11.268a}$$
$$\| \sum_{k\in K^-} a_k - S^- \| \leqslant \epsilon \tag{11.268b}$$

pour tout K^+ et K^- vérifiant $J_0^+ \subset K^+ \subset I^+$ et $J_0^- \subset K^- \subset I^-$.
Nous posons $J_0 = J_0^+ \cup J_0^-$ (qui est une union disjointe). Pour tout K fini dans I contenant J_0, nous avons

$$\| \sum_{k\in K} a_k - (S^+ + S^-) \| = \| \sum_{k\in K\cap I^+} a_k + \sum_{k\in K\cap I^-} a_k - S^+ - S^- \| \tag{11.269a}$$
$$\leqslant \| \sum_{k\in K\cap I^+} a_k - S^+ \| + \| \sum_{k\in K\cap I^-} a_k - S^- \| \tag{11.269b}$$
$$\leqslant 2\epsilon \tag{11.269c}$$

parce que $J_0^+ \subset K \cap I^+$ et $J_0^- \subset K \cap I^-$.

(iii) **Pour (3)** Similaire à (2), mais en coupant en 4 morceaux au lieu de 2 : les parties réelles et imaginaires en plus des parties positives et négatives.

□

Exemple 11.108.
Au sens de la définition 11.96 la famille

$$\frac{(-1)^n}{n} \tag{11.270}$$

n'est pas sommable. En effet la somme des termes pairs est ∞ alors que la somme des termes impairs est $-\infty$. Quel que soit $J_0 \in \mathbb{N}$, nous pouvons concocter, en ajoutant des termes pairs, un J avec $J_0 \subset J$ tel que $\sum_{j\in J}(-1)^j/j$ soit arbitrairement grand. En ajoutant des termes négatifs, nous pouvons également rendre $\sum_{j\in J}(-1)^j/j$ arbitrairement petit. △

Proposition 11.109.
Si (a_{ij}) est une famille de nombres positifs indexés par $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ alors

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\Big). \tag{11.271}$$

Démonstration. Nous allons utiliser la proposition 11.100 pour traiter la somme de gauche. Nous considérons $J_{m,n} = \{0,\ldots,m\}\times\{0,\ldots,n\}$ et nous avons pour tout m et n :

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_{ij} \geqslant \sum_{(i,j)\in J_{m,n}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big). \tag{11.272}$$

Si nous fixons m et que nous prenons la limite $n \to \infty$ (qui commute avec la somme finie sur i) nous trouvons

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_{ij} \geqslant= \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\Big). \tag{11.273}$$

Cela étant valable pour tout m, c'est encore valable à la limite $m \to \infty$ et donc

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_{ij} \geqslant \sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\Big). \tag{11.274}$$

Pour l'inégalité inverse, il faut remarquer que si J est fini dans $\mathbb{N}^2$, il est forcément contenu dans $J_{m,n}$ pour m et n assez grand. Alors

$$\sum_{(i,j)\in J} a_{ij} \leqslant \sum_{(i,j)\in J_{m,n}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\Big). \tag{11.275}$$

Cette inégalité étant valable pour tout ensemble fini $J \subset \mathbb{N}^2$, elle reste valable pour le supremum. □

La définition générale de la somme 11.96 est compatible avec la définition usuelle dans les cas où cette dernière s'applique.

Proposition 11.110 (commutative sommabilité)**.**
Soit I un ensemble dénombrable et une bijection $\tau\colon \mathbb{N} \to I$. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille dans un espace vectoriel normé. Si $\sum_{i\in I} a_i$ existe, alors il est donné par

$$\sum_{i\in I} a_i = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N} a_{\tau(k)}. \tag{11.276}$$

Démonstration. Nous posons $a = \sum_{i\in I} a_i$. Soit $\epsilon > 0$ et J_0 comme dans la définition. Nous choisissons

$$N > \max_{j\in J_0}\{\tau^{-1}(j)\}. \tag{11.277}$$

En tant que sommes sur des ensembles finis, nous avons l'égalité

$$\sum_{k=0}^{N} a_{\tau(k)} = \sum_{j\in J_0} a_j \tag{11.278}$$

où J est un sous-ensemble de I contenant J_0. Soit J fini dans I tel que $J_0 \subset J$. Nous avons alors

$$\|\sum_{k=0}^{N} a_{\tau(k)} - a\| = \|\sum_{j\in J} a_j - a\| < \epsilon. \tag{11.279}$$

Nous avons prouvé que pour tout ϵ, il existe N tel que $n > N$ implique $\|\sum_{k=0}^{n} a_{\tau(k)} - a\| < \epsilon$. □

La réciproque n'est pas vraie. Même en supposant que $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} a_n$ existe, il n'est pas forcé que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ existe. Cela est une conséquence de l'exemple 11.108.

Proposition 11.111 ([1])**.**
Soit un espace vectoriel normé E et une famille sommable[50] $\{v_i\}_{i\in I}$ d'éléments de E. Soit $f\colon E \to \mathbb{C}$ une application sur laquelle nous supposons

(1) f est linéaire et continue ;

(2) la partie $\{f(v_i)_{i\in I}\}$ est sommable.

50. Définition 11.96.

Alors nous pouvons permuter la somme et f :

$$f\big(\sum_{i\in I} v_i\big) = \sum_{i\in I} f(v_i). \tag{11.280}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$; vu que les familles $\{v_i\}_{i\in I}$ et $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ sont sommables, nous pouvons considérer les parties finies J_1 et J_2 de I telles que

$$\|\sum_{j\in J_1} v_j - \sum_{i\in I} v_i\| \leqslant \epsilon \tag{11.281}$$

et

$$\|\sum_{j\in J_2} f(v_j) - \sum_{i\in I} f(v_i)\| \leqslant \epsilon \tag{11.282}$$

Ensuite nous posons $J = J_1 \cup J_2$. Avec cela nous calculons un peu avec les majorations usuelles :

$$\|f(\sum_{i\in I} v_i) - \sum_{i\in I} f(v_i)\| \leqslant \|f(\sum_{i\in I} v_i) - f(\sum_{j\in J} v_j)\| + \|f(\sum_{j\in J} v_j) - \sum_{i} \in If(v_i)\|. \tag{11.283}$$

Le second terme est majoré par ϵ, tandis que le premier, en utilisant la linéarité de f possède la majoration

$$\|f(\sum_{i\in I} v_i) - f(\sum_{j\in J} v_j)\| = \|f(\sum_{i\in I} v_i - \sum_{j\in J} v_j)\| \leqslant \|f\|\|\sum_{i\in I} v_i - \sum_{j\in J} v_j\| \leqslant \epsilon\|f\|. \tag{11.284}$$

Donc pour tout $\epsilon > 0$ nous avons

$$\|f(\sum_{i\in I} v_i) - \sum_{i\in I} f(v_i)\| \leqslant \epsilon(1 + \|f\|). \tag{11.285}$$

D'où l'égalité (11.280). □

11.9 Série réelle

La notion de série formalise le concept de somme infinie [51]. L'absence de certaines propriétés de ces objets (problèmes de commutativité et même d'associativité) incite à la prudence et montre à quel point une définition précise est importante.

11.9.1 Critères de convergence absolue

Étant donné le terme général d'une série, il est souvent –dans les cas qui nous intéressent– difficile de déterminer la somme de la série. L'exemple de la série géométrique est particulier [52], puisqu'on connaît une formule pour chaque somme partielle, mais pour l'exemple des séries de Riemann il n'y a aucune formule simple pour un α général. D'où l'intérêt d'avoir des critères de convergence ne nécessitant aucune connaissance de l'éventuelle limite de la série.

Lemme 11.112 (Critère de comparaison)**.**
Soient $\sum_i a_i$ et $\sum_j b_j$ deux séries à termes positifs vérifiant

$$0 \leqslant a_i \leqslant b_i$$

alors

(1) si $\sum_i a_i$ diverge, alors $\sum_j b_j$ diverge,

(2) si $\sum_j b_j$ converge, alors $\sum_i a_i$ converge (absolument).

51. La caractérisation qui nous intéresse est celle de la proposition 11.100.
52. Voir la proposition 11.119.

Proposition 11.113 (Critère d'équivalence[272]).
Soient $\sum_i a_i$ et $\sum_j b_j$ deux séries à termes positifs. Supposons l'existence de la limite (éventuellement infinie) suivante

$$\lim_{i\to\infty} \frac{a_i}{b_i} = \alpha \tag{11.286}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Alors

(1) si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq \infty$, alors

$$\sum_i a_i \text{ converge} \iff \sum_j b_j \text{ converge,} \tag{11.287}$$

(2) si $\alpha = 0$ et $\sum_j b_j$ converge, alors $\sum_i a_i$ converge (absolument),

(3) si $\alpha = +\infty$ et $\sum_j b_j$ diverge, alors $\sum_i a_i$ diverge.

Démonstration. (1) Le fait que la suite a_n/b_n converge vers α signifie que tant sa limite supérieure que sa limite inférieure convergent vers α. En particulier la suite $\frac{a_n}{b_n}$ est bornée vers le haut et vers le bas. À partir d'un certain rang N, il existe M tel que

$$\frac{a_n}{b_n} < M \tag{11.288}$$

et il existe m tel que

$$\frac{a_n}{b_n} > m. \tag{11.289}$$

Nous avons donc $a_n < Mb_n$ et $a_n > mb_n$. La série de (a_n) converge donc si et seulement si la série de (b_n) converge.

(2) Si $\alpha = 0$, cela signifie que pour tout ϵ, il existe un rang tel que $\frac{a_n}{b_n} < \epsilon$, et donc tel que $a_n < \epsilon b_k$. La suite de (a_i) converge donc dès que la suite de (b_i) converge.

(3) Pour tout M, il existe un rang dans la suite à partir duquel on a $\frac{a_i}{b_i} > M$, et donc $a_k > Mb_k$. Si la série de (b_k) diverge, la série de (a_k) doit également diverger.

□

Proposition 11.114 (Critère du quotient[279]).
Soit $\sum_i a_i$ une série. Supposons l'existence de la limite (éventuellement infinie) suivante

$$\lim_{i\to\infty} \left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| = L \tag{11.290}$$

avec $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Alors

(1) si $L < 1$, la série converge absolument,

(2) si $L > 1$, la série diverge,

(3) si $L = 1$ le critère échoue : il existe des exemples de convergence et des exemples de divergence.

Démonstration. (1) Soit b tel que $L < b < 1$. À partir d'un certain rang K, on a $\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| < b$. En particulier,

$$|a_{K+1}| < b|a_K|, \tag{11.291}$$

et pour a_{K+2} nous avons

$$|a_{K+2}| < b|a_{K+1}| < b^2|a_K|. \tag{11.292}$$

Au final,

$$|a_{K+n}| < b^n|a_K|. \tag{11.293}$$

Étant donné que la série $\sum_{n\geqslant K} b^n$ converge (parce que $b < 1$), la queue de suite $\sum_{i\geqslant K} a_i$ converge, et par conséquent la suite au complet converge.

(2) Si $L > 1$, on a
$$|a_K| < |a_{K+1}| < |a_{K+2}| < \ldots \tag{11.294}$$
Il est donc impossible que la suite (a_i) converge vers zéro. La série ne peut donc pas converger.

(3) Par exemple la suite harmonique $a_n = \frac{1}{n}$ vérifie $L = 1$, mais la série ne converge pas. Par contre, la suite $a_n = \frac{1}{n^2}$ vérifie aussi le critère avec $L = 1$ tandis que la série $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge. □

Proposition 11.115 (Critère de la racine[272]).
Soit $\sum_i a_i$ une série, et considérons
$$\limsup_{i\to\infty} \sqrt[i]{|a_i|} = L$$
avec $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Alors

(1) si $L < 1$, la série converge absolument,

(2) si $L > 1$, la série diverge,

(3) si $L = 1$ le critère échoue.

Démonstration. (1) Si $L < 1$, il existe un $r \in]0,1[$ tel que $|a_n|^{1/n} < r$ pour les grands n. Dans ce cas, $|a_n| < r^n$, et la série converge absolument parce que la série $\sum_n r^n$ converge du fait que $r < 1$.

(2) Si $L > 1$, il existe un $r > 1$ tel que $|a_n|^{1/n} > r > 1$. Cela fait que $|a_n|$ prend des valeurs plus grandes que n pour une infinité de termes. Le terme général a_n ne peut donc pas être une suite convergente. Par conséquent la suite diverge au sens où elle ne converge pas.

□

11.9.2 Critères de convergence simple

Les critères de comparaison, d'équivalence, du quotient et de la racine sont des critères de convergence absolue. Pour conclure à une convergence simple qui n'est pas une convergence absolue, le critère d'Abel sera notre outil principal.

11.9.2.1 Critère d'Abel

Proposition 11.116 (Critère d'Abel).
Soit la série $\sum_i c_i z_i$ avec

(1) (c_i) est une suite réelle décroissante qui tend vers zéro,

(2) (z_i) est une suite dans $\mathbb{C}$ dont la suite des sommes partielles est bornée dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'il existe un $M > 0$ tel que pour tout n,
$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \leqslant M. \tag{11.295}$$

Alors la série $\sum_i c_i z_i$ est convergente.

Remarquons que ce critère ne donne pas de convergence absolue.

11.9.3 Quelques séries usuelles

Proposition 11.117 (Série harmonique).
*La **série harmonique** converge vers l'infini*[53] *:*
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty. \tag{11.296}$$

53. Vous pouvez aussi dire qu'elle diverge, mais si on met la bonne topologie sur $\mathbb{R}$, la convergence vers $+\infty$ est plus précise que la non-convergence.

Démonstration. Considérons la sommes partielles $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Considérons la différence

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}. \tag{11.297}$$

Cette somme contient $n+1$ termes, tous plus grands que $\frac{1}{2n}$, donc

$$H_{2n} - H_n > n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \tag{11.298}$$

Nous prouvons donc par récurrence que $H_{2^n} \geqslant \frac{n}{2}$. D'abord pour $n = 1$ nous avons

$$H_2 = 1 + \frac{1}{2}. \tag{11.299}$$

Ensuite la récurrence :

$$H_{2^n} > H_{2^{n-1}} + \frac{1}{2} \geqslant \frac{n-1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n}{2}. \tag{11.300}$$

□

11.118.
À quel point la série harmonique diverge-t-elle lentement ? Allez regarder
https://www.youtube.com/watch?v=_AtkIpi6KP0.

Proposition-Définition 11.119 (Série géométrique)**.**
*La **série géométrique** de raison $q \in \mathbb{C}$ est*

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i. \tag{11.301}$$

(1) Elle converge si et seulement si $|q| < 1$.

(2) Si $|q| < 1$ alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}. \tag{11.302}$$

(3) Quand la série géométrique converge, la convergence est absolue.

(4) Si la somme commence en $n = 1$ au lieu de $n = 0$ alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}. \tag{11.303}$$

Démonstration. La somme partielle est déjà donnée dans le lemme 1.417 :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}. \tag{11.304}$$

En vertu de (10.119), la limite $\lim_{N\to\infty} S_N$ existe si et seulement si $|q| \leqslant 1$ et dans ce cas nous avons le résultat parce que $q^{N+1} \to 0$.

Pour le dernier point, il s'agit seulement du calcul

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} - 1 = \frac{q}{1-q}. \tag{11.305}$$

□

Un cas particulier de la formule (1.600) est le calcul de $\sum_{j=1}^{N} q^{-j}$ bien utile lorsque l'on joue avec des nombres binaires (voir l'exemple 34.12). Nous avons

$$\sum_{j=1}^{N} q^{-j} = \sum_{j=0}^{N} q^{-j} - 1 = \frac{1-q^{-N}}{q-1}. \tag{11.306}$$

La série de Riemann est très liée aux intégrales impropres de la proposition 14.261.

Proposition 11.120 (Série de Riemann)**.**
*Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la **série de Riemann***

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \tag{11.307}$$

converge (absolument, puisque réelle et positive) si et seulement si $\alpha > 1$, et diverge sinon.

Exemple 11.121 (Série exponentielle)**.**
La série exponentielle est la série (pour $t \in \mathbb{R}$)

$$\exp(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}. \tag{11.308}$$

Nous montrons qu'elle converge pour tout $t \in \mathbb{R}$. Si $a_k = t^k/k!$ alors $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{t}{k}$ dont la limite $k \to \infty$ est zéro (quel que soit t). En vertu du critère du quotient 11.114 la série exponentielle converge (absolument) pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Pour tout savoir de l'exponentielle et de ses variations, voir le thème 48. △

Exemple 11.122 (Série arithmético-géométrique[280])**.**
Une **suite arithmético-géométrique** est une suite vérifiant pour tout n la relation

$$u_{n+1} = au_n + b \tag{11.309}$$

avec a et b non nuls. Si elle possède une limite, cette dernière doit résoudre $l = al + b$, et donc être donnée par

$$l = \frac{b}{1-a}. \tag{11.310}$$

Comportement amusant : la limite peut exister pour certains valeurs de a_0 et pas pour d'autres. Mais elle ne dépend pas de a_0 parmi ceux pour lesquelles la limite existe.

Il n'est pas très compliqué de trouver le terme général de la suite en fonction de a et de b. Il suffit de considérer la suite $v_n = u_n - r$, et de remarquer que cette suite est géométrique :

$$v_{n+1} = av_n. \tag{11.311}$$

Par conséquent $v_n = a^n v_0$, ce qui donne pour la suite (u_n) la formule

$$u_n = a^n(u_0 - r) + r. \tag{11.312}$$

△

Lemme 11.123 ([281])**.**
Nous avons :

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{N}{N+1}. \tag{11.313}$$

et

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1. \tag{11.314}$$

Démonstration. Nous posons

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \tag{11.315a}$$
$$g(n) = \frac{n}{n+1} \tag{11.315b}$$

et nous montrons par récurrence que $f(n) = g(n)$. Pour $n = 1$ nous avons $f(1) = g(1) = \frac{1}{2}$.

Nous supposons que $f(n) = g(n)$ et nous prouvons que $f(n+1) = g(n+1)$. Facile :

$$f(n+1) = f(n) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \tag{11.316a}$$
$$= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \tag{11.316b}$$
$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \tag{11.316c}$$
$$= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \tag{11.316d}$$
$$= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \tag{11.316e}$$
$$= \frac{n+1}{n+2} \tag{11.316f}$$
$$= g(n+1). \tag{11.316g}$$

En ce qui concerne la seconde formule, par définition[54]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1. \tag{11.317}$$

□

11.9.4 Séries alternées

Théorème 11.124 (Critère des séries alternées[260]).
Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive décroissante à limite nulle, alors

(1) Si nous notons (S_n) la suite des sommes partielles, les sous-suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes[55].

(2) La série $\sum_n (-1)^n a_n$ converge.

(3) Si nous considérons le reste

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k, \tag{11.318}$$

nous avons

$$\operatorname{sgn}(R_n) = (-1)^{n+1} \tag{11.319a}$$
$$|R_n| \leqslant a_{n+1}. \tag{11.319b}$$

Démonstration. En termes de notations, nous allons écrire (S_n) la suite des sommes partielles de $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$. Nous notons (S_{2n}) la suite des termes pairs de cette suite. C'est donc la suite $n \mapsto S_{2n}$. Nous divisons en plusieurs morceaux.

54. Définition d'une série, 11.77.
55. Définition 10.35.

(i) S_{2n} **est croissante** Nous avons simplement

$$S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leqslant 0. \tag{11.320}$$

(ii) (S_{2n+1}) **est décroissante** Même calcul.

(iii) **Les suites** (S_{2n}) **et** S_{2n+1} **sont adjacentes** Nous avons simplement

$$S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \to 0. \tag{11.321}$$

Nous concluons par le théorème des suites adjacentes 10.36 que les sous-suites des termes pairs et impairs sont convergentes et convergent vers la même limite.

C'est le moment d'utiliser la proposition 10.37 qui convaincra la lectrice que (S_n) converge vers la même limite, que nous notons S. Le théorème des suites adjacentes nous dit encore que

$$S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n} \tag{11.322}$$

et donc que $R_{2n} = S - S_{2n} \leqslant 0$. Cela donne la majoration

$$|R_{2n}| = |S - S_n| = S_{2n} - S \leqslant S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1}. \tag{11.323}$$

Nous faisons le même genre de majorations pour R_{2n+1}. □

11.9.5 Moyenne de Cesàro

La moyenne de Cesàro est le premier pas dans la direction des supersommes[2] qui permettent de sommer des choses de moins en moins convergentes, jusqu'à sommer la fameuse série $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = -1/12$.

Définition 11.125.
Si $a \colon \mathbb{N} \to V$ est une suite dans l'espace vectoriel V, alors sa ***moyenne de Cesàro*** *est la limite (si elle existe) de la suite*

$$\sigma_n(a) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{11.324}$$

En un mot, c'est la limite des moyennes partielles.

Lemme 11.126.
Si la suite (a_n) converge vers la limite ℓ alors la suite admet une moyenne de Cesàro qui vaudra ℓ.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $|a_n - \ell| < \epsilon$ pour tout $n > N$. En remarquant que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k - \ell = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (a_k - \ell), \tag{11.325}$$

nous avons

$$\begin{aligned}
|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k - \ell| &\leqslant |\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N} |a_k - \ell|| + |\frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^{n} \underbrace{|a_k - \ell|}_{\leqslant \epsilon}| && \text{(11.326a)}\\
&\leqslant \epsilon + \frac{n - N - 1}{n} \epsilon && \text{(11.326b)}\\
&\leqslant 2\epsilon. && \text{(11.326c)}
\end{aligned}$$

Dans ce calcul nous avons redéfini N de telle sorte que le premier terme soit inférieur à ϵ. □

11.9.6 Écriture décimale d'un réel

Nous avons déjà vu la fonction (1.112) qui permet d'écrire des naturels dans une base $b \geqslant 2$ donnée. Nous allons maintenant construire une fonction du même type, pour la partie décimale d'un réel.

11.127.
Soit $b \geqslant 2$ un entier qui sera la base dans laquelle nous allons écrire les nombres. Nous considérons l'ensemble $\mathbb{D}_b$ des suites dans $\{0, 1, \ldots, b-1\}$ qui n'ont pas une queue de suite uniquement formée de $b-1$. Autrement dit une suite (c_n) est dans $\mathbb{D}_b$ lorsque pour tout N, il existe $k > N$ tel que $c_k \neq b-1$. Associé à cet ensemble nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} \varphi_b \colon \mathbb{D}_b &\to [0,1[\\ c &\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{b^n}. \end{aligned} \tag{11.327}$$

Lemme 11.128.
La fonction φ_b est bien définie au sens où elle converge et prend ses valeurs dans $[0,1[$.

Démonstration. Tout se base sur la somme de la série géométrique (11.302) sous la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{b^k} = \frac{b}{b-1}. \tag{11.328}$$

La somme (11.327) est donc majorée par $\sum_n \frac{b-1}{b^n}$ qui converge.

Pour prouver que l'image de φ_b est bien $[0,1[$, nous savons qu'au moins un des c_n (en fait une infinité) est plus petit que $b-1$, donc nous avons la majoration stricte[56]

$$\varphi_b(c) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b-1}{b^n} = (b-1)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^n} - 1\right) = 1 \tag{11.329}$$

□

Le fait d'introduire l'ensemble $\mathbb{D}$ au lieu de l'ensemble de toutes les suites est justifié par la proposition suivante. Elle explique pourquoi un nombre possède au maximum deux écritures décimales distinctes et que ces deux sont obligatoirement de la forme, par exemple en base 10 :

$$0.34599999999\ldots = 0.34600000\ldots \tag{11.330}$$

mais qu'un nombre commençant par 0.347 ne peut pas être égal. C'est pour cela que dans la définition de $\mathbb{D}_b$ nous avons exclu les suites qui terminent par tout des $b-1$.

La proposition suivante complète ce qui est déjà dit dans le lemme 7.239.

Proposition 11.129.
Soit la fonction

$$\begin{aligned} \varphi \colon \{0, \ldots, b-1\}^{\mathbb{N}} &\to [0,1[\\ x &\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{b^n}. \end{aligned} \tag{11.331}$$

Si $\varphi(x) = \varphi(y)$ et si n_0 est le plus petit entier tel que $x_{n_0} \neq y_{n_0}$ alors soit

$$x_{n_0} - y_{n_0} = 1 \tag{11.332}$$

et $x_n = 0$, $y_n = b-1$ pour tout $n > n_0$, soit le contraire : $y_{n_0} - x_{n_0} = 1$ avec $y_n = 0$ et $x_n = b-1$ pour tout $n > n_0$.

56. Notez que la somme (11.327) commence à un tandis que la série géométrique (11.328) commence à zéro.

Démonstration. Nous nous basons sur la formule (facilement dérivable depuis (11.328)) suivante :

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{b^k}=\frac{1}{b^{n_0+1}}\frac{b}{b-1}. \tag{11.333}$$

Nous avons

$$0=\varphi(x)-\varphi(y)=\frac{x_{n_0}-y_{n_0}}{b^{n_0}}+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{x_n-y_n}{b^n}\geqslant\frac{x_{n_0}-y_{n_0}}{b^{n_0}}-\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{b-1}{b^n}=\frac{x_{n_0}-y_{n_0}-1}{b^{n_0}}. \tag{11.334}$$

Le dernier terme étant manifestement positif[57], il est nul et nous avons $x_{n_0}-y_{n_0}=1$.

Nous avons donc maintenant

$$0=\varphi(x)-\varphi(y)=\frac{1}{b^{n_0}}+\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{x_n-y_n}{b^n}. \tag{11.335}$$

Nous majorons la dernière somme de la façon suivante, en supposant que $|x_n-y_n|\neq b-1$ pour un certain $n>n_0$:

$$\left|\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{x_n-y_n}{b^n}\right|\leqslant\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{|x_n-y_n|}{b^n}<\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{b-1}{b^n}=\frac{1}{b^{n_0}}. \tag{11.336}$$

Étant donné cette inégalité stricte, l'équation (11.335) ne peut pas être correcte (valoir zéro). Nous avons donc $|x_n-b_n|=b-1$ pour tout $n>n_0$. Donc pour chaque $n>n_0$ nous avons soit $x_n=0$ et $y_n=b-1$, soit $a_n=b-1$ et $b_n=0$. Pour conclure il faut encore prouver que le choix doit être le même pour tout n.

Nous nous mettons dans le cas $x_{n_0}-y_{n_0}=1$; dans ce cas nous avons bien l'égalité (11.335) sans petites nuances de signes. Nous écrivons

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{x_n-y_n}{b^n}=(b-1)\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{(-1)^{s_n}}{b^n} \tag{11.337}$$

où s_n est pair ou impair suivant que $x_n=0$, $y_n=b-1$ ou le contraire. Si un des $(-1)^{s_n}$ est pas -1 alors nous avons l'inégalité stricte

$$(b-1)\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{(-1)^{s_n}}{b^n}>(b-1)\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{-1}{b^n}=-\frac{1}{b^{n_0}}. \tag{11.338}$$

Dans ce cas il est impossible d'avoir $\varphi(x)-\varphi(y)=0$. Nous en concluons que $(-1)^{s_n}$ est toujours -1, c'est-à-dire $x_n-y_n=1-b$, ce qui laisse comme seule possibilité $x_n=0$ et $y_n=b-1$. □

Théorème 11.130.
L'application $\varphi_b\colon\mathbb{D}_b\to[0,1[$ *est bijective.*

Démonstration. En ce qui concerne l'injection, nous savons de la proposition 11.129 que si $\varphi_b(x)=\varphi_b(y)$ pour $x,y\in\{0,\ldots,b-1\}^{\mathbb{N}}$, alors soit x soit y a une queue de suite composée uniquement de $b-1$, ce qui est exclu dans $\mathbb{D}_b$. Nous en déduisons que φ_b est bien injective en prenant $\mathbb{D}_b$ comme ensemble départ.

La partie lourde est la surjectivité. Nous prenons $x\in[0,1[$ et nous allons construire par récurrence une suite $a\in\mathbb{D}_b$ telle que $\varphi_b(a)=x$. Si il existe $a_1\in\{0,\ldots,b-1\}$ tel que $x=a_1/b$ alors nous prenons la suite $(a_1,0,\ldots,)$ et nous avons évidemment $\varphi(a)=x$. Sinon il existe $a_1\in\{0,\ldots,b-1\}$ tel que

$$\frac{a_1}{b}<x<\frac{a_1+1}{b} \tag{11.339}$$

57. C'est ici qu'intervient la subdivision entre le cas $x_{n_0}-y_{n_0}=1$ ou le contraire. En effet si « ce dernier terme était manifestement *négatif* », il aurait fallu majorer avec de $1-b$ au lieu de $1-b$.

parce que les autres possibilités pour x sont dans l'ensemble $[0,1[\setminus\{\frac{k}{b}\}_{k=0,\ldots,b-1}$ que nous subdivisons en

$$]0,\frac{1}{b}[\cup]\frac{1}{b},\frac{2}{b}[\cup\ldots\cup]\frac{b-1}{b},1[. \tag{11.340}$$

Pour la récurrence nous supposons avoir trouvé $a_1,\ldots,a_n$ tels que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b^k}<x<\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{b^k}+\frac{a_n+1}{b^n}. \tag{11.341}$$

Encore une fois si il existe $a_{n+1}\in\{0,\ldots,b-1\}$ tel que $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_k}{b^k}=x$ alors nous prenons ce a_{n+1} et nous complétons la suite avec des zéros pour avoir $\varphi(a)=x$. Sinon , pour simplifier les notations nous notons $x'=x-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b^k}$ et nous avons

$$0<x'<\frac{a_n+1}{b^n}. \tag{11.342}$$

Le nombre x' est forcément dans un des intervalles

$$]\frac{s}{b^{n+1}},\frac{s+1}{b^{n+1}}[\tag{11.343}$$

avec $s\in\{0,\ldots,b-1\}$. Nous prenons le s correspondant à x' comme a_{n+1}. Dans ce cas nous avons

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_k}{b^k}<x<\sum_{k=1}^{n+1}\frac{a_k}{b^k}+\frac{1}{b^{n+1}}. \tag{11.344}$$

Note : les deux inégalités sont strictes. La première parce que si il y avait égalité, nous nous serions déjà arrêté en complétant avec des zéros. La seconde parce que

$$\sum_{k=n+2}^{\infty}\frac{a_k}{b^k}\leqslant\sum_{k=n+2}^{\infty}\frac{b-1}{b^k}=\frac{1}{b^{n+1}} \tag{11.345}$$

où l'égalité n'est possible que si $a_k=b-1$ pour tout $k\geqslant n+2$. Dans ce cas nous aurions eu

$$x=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b^k}+\frac{a_{n+1}+1}{b^{n+1}} \tag{11.346}$$

et nous aurions choisi le nombre a_{n+1} autrement et complété la suite par des zéros à partir de là. Notons que cela prouve au passage que la suite que nous sommes en train de construire est bien dans $\mathbb{D}_b$ parce qu'elle ne contiendra pas de queue de suite composée de $b-1$.

Ceci termine la construction par récurrence de la suite $a\in\mathbb{D}_b$. Par construction nous avons pour tout $N\geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k}{b^k}\leqslant x\leqslant\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k}{b^k}+\frac{1}{b^{N+1}}, \tag{11.347}$$

autrement dit : $\varphi_b(a_1,\ldots,a_N)\in B(x,\frac{1}{b^{N+1}})$. Nous avons donc bien convergence

$$\lim_{N\to\infty}\varphi_b(a_1,\ldots,a_N)=x \tag{11.348}$$

et l'application φ_b est surjective. □

L'application $\varphi_b^{-1}\colon[0,1[\to\mathbb{D}_b$ est la **décomposition décimale** en base b des nombres de $[0,1[$.

Tout cela nous permet de montrer entre autres que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. Vu qu'il y a une bijection entre $[0,1[$ et $\mathbb{D}_b$, il suffit de prouver que $\mathbb{D}_b$ est non dénombrable. De plus il suffit de démontrer que $\mathbb{D}_b$ est non dénombrable pour un entier $b\geqslant 2$ donné.

Proposition 11.131 ([282]).
Il n'existe pas de surjection $\mathbb{N} \to \mathbb{D}_b$. Autrement dit $\mathbb{D}_b$ est non dénombrable.

Démonstration. Nous prenons $b \neq 2$ pour des raisons qui seront claires plus tard. Soit $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{D}_b$. Pour $i \in \mathbb{N}$ nous notons

$$f(n) = (c_i^{(n)})_{i\geqslant 1}, \tag{11.349}$$

et nous définissons la suite

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{si } c_k^{(k)} \neq 0 \\ 1 & \text{si } c_k^{(k)} = 0. \end{cases} \tag{11.350}$$

C'est une suite dans $\mathbb{D}_b$ parce que $b \neq 2$ et que la suite ne contient que des 0 et des 1. Mais nous n'avons $f(n) = c$ pour aucun $n \in \mathbb{N}$ parce que nous avons $c_n \neq f(n)_n$.

Si $b = 2$ alors nous savons que $\mathbb{D}_2 \sim [0,1[\sim \mathbb{D}_3$. Donc $\mathbb{D}_2 \sim \mathbb{D}_3$ et $\mathbb{D}_2$ ne peut pas plus être mis en bijection avec $\mathbb{N}$ que $\mathbb{D}_3$. □

Remarque 11.132.
Le cas de la base $b = 2$ doit être fait à part parce que rien n'empêche d'avoir une queue de 1. Il y a alors toutefois moyen de se débrouiller en construisant la suite c de façon plus subtile. Si $b = 2$ et $n \in \mathbb{N}$ alors $f(n)$ est une suite de 0 et 1 contenant une infinité de 0 (parce qu'il n'y a pas de queue de suite ne contenant que des 1). Nous construisons alors c de la façon suivante : d'abord nous recopions $f(0)$ jusqu'à son *deuxième* zéro que nous changeons en 1 ; nommons n_0 le rang de ce deuxième zéro. Ensuite nous recopions les éléments de $f(1)$ à partir du rang $n_0 + 1$ jusqu'au second zéro que nous changeons en 1, etc.

Le fait de prendre le deuxième zéro nous garantit que la suite c n'aura pas de queue de suite ne contenant que des 1.

Notons que cette construction s'adapte à tout b ; il suffit de prendre le second terme qui n'est pas $b - 1$ et le remplacer par $b - 1$.

Corolaire 11.133.
L'ensemble $[0,1[$ n'est pas dénombrable.

Démonstration. L'ensemble $[0,1[$ est en bijection avec $\mathbb{D}_b$ que nous venons de prouver n'être pas dénombrable. □

11.9.7 Théorème de Banach-Steinhaus

Lemme 11.134 ([283]).
Soient des espaces vectoriels normés X et Y ainsi qu'une application linéaire bornée $T \colon X \to Y$. Pour tout $a \in X$ et pour tout $r > 0$ nous avons

$$\sup_{x\in B(a,r)} \|Tx\| \geqslant r\|T\| \tag{11.351}$$

Démonstration. Nous commençons avec $a = 0$. En utilisant la définition 11.50 de la norme opérateur,

$$\|T\| = \sup_{x\in X} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x\in B(0,r)} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leqslant \frac{1}{r} \sup_{x\in B(0,r)} \|Tx\|. \tag{11.352}$$

Donc

$$\sup_{x\in B(0,r)} \|Tx\| \geqslant r\|T\|. \tag{11.353}$$

Il y a maintenant une astuce. Nous considérons un maximum :

$$\max\{\|T(a+x), \|T(a-x)\|\|\} \geqslant \frac{1}{2}\big(\|T(a+x)\| + \|T(a-x)\|\big) \tag{11.354a}$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\big(\|T(a+x) - T(a+x)\|\big) \tag{11.354b}$$
$$= \frac{1}{2}\|T(2x)\| \tag{11.354c}$$
$$= \|Tx\|. \tag{11.354d}$$

Justifications :

— Pour (11.354a), la moyenne est plus petite que le maximum.

— Pour (11.354b), inégalité triangulaire : $\|\alpha - \beta\| \leqslant \|\alpha\| + \|\beta\|$.

Si maintenant $y \in B(a,r)$, nous avons $y = a + x$ pour un certain $x \in B(0,r)$, donc

$$\sup_{y\in B(a,r)} \|Ty\| = \sup_{x\in B(0,r)} \|T(a+x)\| \tag{11.355a}$$
$$= \sup_{x\in B(0,r)} \max\{\|T(a+x)\|, \|T(a-x)\|\} \tag{11.355b}$$
$$\geqslant \sup_{x\in B(0,r)} \|Tx\| \tag{11.355c}$$
$$\geqslant r\|T\|. \tag{11.355d}$$

Pour (11.355b), l'ensemble sur lequel nous prenons le supremum n'est pas modifié fondamentalement si nous regroupons les éléments deux à deux en prenant le maximum : les éléments exclus sont majorés. □

Une version avec des seminormes sera le théorème 27.5.

Théorème 11.135 (Théorème de Banach-Steinhaus[283])**.**
Soient un espace de Banach[58] *X et un espace vectoriel normé Y. Soit une famille $\mathcal{F}$ d'opérateurs linéaire bornés. Si pour tout $x \in X$,*

$$\sup_{T\in\mathcal{F}} \|Tx\| < \infty, \tag{11.356}$$

alors

$$\sup_{T\in\mathcal{F}} \|T\| < \infty. \tag{11.357}$$

Démonstration. Nous supposons que $\sup_{T\in\mathcal{F}} \|T\| = \infty$, de telle sorte que nous pouvons choisir une suite (T_n) dans $\mathcal{F}$ telle que $\|T_n\| \to \infty$. Cette suite peut diverger arbitrairement vite, et nous fixerons exactement cela plus tard.

Soit par ailleurs une suite $\alpha_n > 0$ d'éléments petits et tels que $\alpha_n \to 0$. Nous supposons que $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n < \infty$.

Si $a \in X$, le lemme 11.134 dit que

$$\sup_{x\in B(a,\alpha_n)} \|T_n x\| \geqslant \|T_n\|\alpha_n. \tag{11.358}$$

En posant $x_0 = 0$, nous construisons une suite (x_n) par récurrence en imposant

(1) $x_n \in B(x_{n=1}, \alpha_n)$

(2) $\|T_n x_n\| \geqslant \|T_n\|\alpha_n$.

En utilisant une série télescopique et l'inégalité triangulaire $\|x_k - x_{k+1}\| \leqslant \alpha_n$ à chaque étage,

$$\|x_p - x_q\| \leqslant \sum_{k=p}^{q} \alpha_k \leqslant \sum_{k=p}^{\infty} \alpha_k. \tag{11.359}$$

58. Définition 7.230.

Mais puisque la somme des α_n converge, la suite des queues de somme converge vers zéro [59] : $\lim_{p\to\infty}\sum_{k=p}^{\infty}\alpha_n = 0$. Cela implique que (x_n) est une suite de Cauchy [60]. Vu que X est de Banach, la suite (x_n) a une limite dans X. Soit x cette limite.

Nous avons $\beta_n = \|x_n - x\| \to 0$. Il y aurait moyen de calculer β_n en fonction de α_n (surtout si nous avions donné une forme explicite à α_n), mais c'est sans importance ici. L'important est que c'est une suite qui tend vers zéro.

Nous avons

$$x \in B(x_n, \beta_n), \tag{11.360}$$

et donc il existe $a_n \in B(0, \beta_n)$ tel que $x = x_n + a_n$. Avec cela, pour chaque n nous avons :

$$\|T_n x\| = \|T_n(x_n + a_n)\| \tag{11.361a}$$
$$\geqslant \|T_n x_n\| - \|T_n a_n\| \tag{11.361b}$$
$$\geqslant \|T_n x_n\| - \|T_n\|\beta_n \tag{11.361c}$$
$$\geqslant \|T_n\|\alpha_n - \|T_n\|\beta_n = \|T_n\|(\alpha_n - \beta_n). \tag{11.361d}$$

Pour 11.361c, nous avons utilisé $\|T_n a_n\| \leqslant \|T_n\|\beta_n$. En résumé,

$$\|T_n x\| \geqslant \|T_n\|(\alpha_n - \beta_n). \tag{11.362}$$

Il suffit de choisir $\|T_n\|$ suffisamment rapidement croissant pour que [61]

$$\|T_n\|(\alpha_n - \beta_n) \to \infty, \tag{11.363}$$

et nous avons $\|T_n x\| \to \infty$, qui est contraire aux hypothèses. □

Théorème 11.136 (Théorème de Banach-Steinhaus[89, 284])**.**
Soit E un espace de Banach [62] et F un espace vectoriel normé. Nous considérons une partie $H \subset \mathcal{L}_c(E,F)$ (espace des applications linéaires continues). Alors H est uniformément borné si et seulement si il est simplement borné.

Démonstration. Si H est uniformément borné, il est borné ; pas besoin de rester longtemps sur ce sens de l'équivalence. Supposons donc que H soit borné. Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$ nous considérons l'ensemble

$$\Omega_k = \{x \in E \text{ tel que } \sup_{f\in H}\|f(x)\| > k\}. \tag{11.364}$$

(i) **Les Ω_k sont ouverts** Soit $x_0 \in \Omega_k$; nous avons alors une fonction $f \in H$ telle que $\|f(x_0)\| > k$, et par continuité de f il existe $\rho > 0$ tel que $\|f(x)\| > k$ pour tout $x \in B(x_0, \rho)$. Par conséquent $B(x_0,\rho) \subset \Omega_k$ et Ω_k est ouvert par le théorème 7.7.

(ii) **Les Ω_k ne sont pas tous denses dans E** Nous supposons que les ensembles Ω_k soient tous dense dans E. Le théorème de Baire 7.305 nous indique que E est un espace de Baire (parce que de Banach) et donc que

$$\overline{\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\Omega_k} = E. \tag{11.365}$$

En particulier l'intersection des Ω_k n'est pas vide. Soit $x_0 \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}}\Omega_k$. Nous avons alors

$$\sup_{f\in H}\|f(x)\| = \infty, \tag{11.366}$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc les ouverts Ω_k ne sont pas tous denses dans E.

59. Lemme 11.79(2).
60. Proposition 7.234.
61. Le point important ici est que α_n (et donc β_n) est choisi sans référence à $\|T_n\|$.
62. Définition 7.230.

(iii) **La majoration** Il existe $k \geqslant 0$ tel que Ω_k ne soit pas dense dans E, et nous voulons prouver que $\{\|f\| \text{ tel que } f \in H\}$ est un ensemble borné. Soit donc $k \geqslant 0$ tel que Ω_k ne soit pas dense dans E ; il existe un $x_0 \in E$ et $\rho > 0$ tels que

$$B(x_0, \rho) \cap \Omega_k = \emptyset. \tag{11.367}$$

Si $x \in B(x_0, \rho)$ alors x n'est pas dans Ω_k et donc

$$\sup_{f \in H} \|f(x)\| \leqslant k. \tag{11.368}$$

Afin d'évaluer $\|f\|$ nous devons savoir ce qu'il se passe avec les vecteurs sur une boule autour de 0. Pour tout $x \in B(0, \rho)$ et pour tout $f \in H$, la linéarité de f donne

$$\|f(x)\| = \|f(x + x_0) - f(x_0)\| \leqslant \|f(x + x_0) + f(x_0)\| \leqslant 2k. \tag{11.369}$$

Par continuité nous avons alors $\|f(x)\| \leqslant 2k$ pour tout $x \in \overline{B(0, \rho)}$. Si maintenant $x \in F$ vérifie $\|x\| = 1$ nous avons

$$\|f(x)\| = \frac{1}{\rho}\|f(\rho x)\| \leqslant \frac{2k}{\rho}, \tag{11.370}$$

et donc $\|f\| \leqslant \frac{2k}{\rho}$, ce qui montre que $2k/\rho$ est un majorant de l'ensemble $\{\|f\| \text{ tel que } f \in H\}$.

□

Une application du théorème de Banach-Steinhaus est l'existence de fonctions continues et périodiques dont la série de Fourier ne converge pas. Ce sera l'objet de la proposition 28.21.

11.9.8 Convergence forte

Lorsque nous avons une suite d'opérateurs linéaires, nous pouvons considérer la convergence d'une suite pour la norme opérateur : $A_k \to A$ lorsque $\|A_k - A\| \to 0$.

Définition 11.137 ([285]).
Soient un espace vectoriel E et un espace vectoriel normé V. Nous disons que la suite d'opérateur $T_k \colon E \to V$ ***converge fortement*** *vers l'opérateur T si pour tout $x \in E$ nous avons*

$$\|T_k x - Tx\| \to 0. \tag{11.371}$$

Cette notion s'appelle *forte* par opposition à la convergence *faible* dont nous ne parlerons pas. Elle est cependant moins forte que la convergence en norme dont nous avons déjà parlé.

Proposition 11.138.
Soient des espaces vectoriels normés E et F et une suite d'opérateurs $T_k \colon E \to F$ convergeant vers T[63]*. Alors cette suite converge également fortement.*

Démonstration. Soit $x \in E$ que nous supposons non nul. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $x = \lambda y$ avec $\|y\| = 1$. Nous avons

$$\|T_k x - Tx\| = |\lambda|\|T_k y - Ty\| \leqslant |\lambda| \sup_{\|z\|=1} \|T_k z - Tz\| = |\lambda|\|T_k - T\| \to 0. \tag{11.372}$$

La dernière étape est la convergence en norme $T_k \to T$. □

Proposition 11.139.
Soient E et F, des espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit une suite (A_n) d'applications linéaires $E \to F$. Si elle converge fortement vers A, alors elle converge en norme vers A.

Démonstration. En plusieurs coups.

63. Sans précisions, ce sera toujours la convergence en norme.

(i) **Si une sous-suite converge** Commençons par montrer que si (B_n) est une sous-suite de (A_n) qui converge vers B, alors $B = A$. Autrement dit, A est le seul candidat limite pour A_n.
Soit $\|x\| = 1$. Nous avons

$$\|B_n x - Bx\| \leqslant \|B_n - B\|\|x\| = \|B_n - B\|, \tag{11.373}$$

mais pour la sous-suite (B_n) nous avons supposé $\|B_n - B\| \to 0$. Donc $\|B_n x - Bx\| \to 0$, ce qui signifie que $B_n x \to Bx$. Mais par hypothèse, $B_n x \to Ax$. Par unicité de la limite, $Bx = Ax$ pour tout x de norme 1. Pour les autres x, c'est la linéarité qui conclu.

(ii) **Utilisation de deux gros résultats** Par l'hypothèse de convergence, pour chaque x nous avons $\sup_n \|A_n x\| < \infty$. Le théorème de Banach-Steinhaus 11.135 nous indique alors que l'ensemble $\mathcal{F} = \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est borné. Il existe donc $M > 0$ tel que $\|A_n\| < M$ pour tout n.
Nous utilisons à présent l'hypothèse de dimension finie en disant que l'espace des applications linéaires $E \to F$ est de dimension finie, de telle sorte que ses boules fermées soient compactes.
Donc la suite (A_n) est contenue dans un compact.

(iii) **Les sous-suite convergentes** La suite (A_n) est contenue dans un compact. Toutes ses sous-suites sont dans ce compact et possèdent donc une sous-suite convergente (théorème 7.124). Toutes ces sous-sous-suites convergent nécessairement vers A par ce que nous avons dit dans la première étape de la preuve. Le lemme 7.57 nous dit alors que $A_n \to A$.

□

11.10 Application ouverte

Définition 11.140 (application ouverte)**.**
*Soient deux espaces topologiques X et Y. Une application $f\colon X \to Y$ est **ouverte** si l'image de tout ouvert de X par f est un ouvert de Y.*

Nous disons que f est ouverte en $a \in X$ si l'image de tout ouvert contenant a est ouverte.

Proposition 11.141.
Une application bijective est ouverte si et seulement si son inverse est continue.

Démonstration. Ce n'est seulement que la définition, mais pour le sport nous démontrons le sens direct.

Soit donc une application $f\colon X \to Y$ bijective et ouverte entre les espaces topologiques X et Y. Prouvons que $f^{-1}\colon Y \to X$ est continue. Pour cela nous considérons un ouvert $\mathcal{O}$ dans X, et nous prouvons que $(f^{-1})^{-1}(\mathcal{O})$ est ouvert dans Y. Par définition de l'inverse, $(f^{-1})^{-1}(\mathcal{O}) = f(\mathcal{O})$ et vu que f est ouverte, $f(\mathcal{O})$ est ouvert. □

Lemme 11.142.
Une application $f\colon X \to Y$ est ouverte si et seulement si pour tout $x \in X$ et pour tout voisinage U de x, la partie $f(U)$ est un voisinage de $f(x)$.

Démonstration. La preuve suit celle de la proposition 7.169. Le sens direct est un à fortiori.

Dans l'autre sens. Soit un ouvert $\mathcal{O}$ de X. Pour prouver que $f(\mathcal{O})$ est ouvert, nous considérons $y \in f(\mathcal{O})$, ainsi que $x \in \mathcal{O}$ tel que $f(x) = y$. Vu que $\mathcal{O}$ est un voisinage de x, la partie $f(\mathcal{O})$ est un voisinage de $y = f(x)$.

Il existe donc un ouvert V de Y tel que $y = f(x) \in V \subset f(\mathcal{O})$. Donc la partie $f(\mathcal{O})$ contient un ouvert autour de chacun de ses points, et elle est ouverte par le théorème 7.7. □

Lemme 11.143 ([286])**.**
Une application linéaire entre espaces vectoriels topologiques est ouverte si et seulement si elle est ouverte en 0.

Démonstration. Le sens direct est un à fortiori.

Soit un ouvert $\mathcal{O}$ et $a \in \mathcal{O}$. La partie $\mathcal{O} - a$ est ouverte et contient 0. Donc $f(\mathcal{O} - a)$ est un ouvert parce que f est ouverte en 0. Nous en déduisons, par linéarité, que $f(\mathcal{O}) - f(a)$ est ouvert et donc que $f(\mathcal{O})$ est ouverte. □

Lemme 11.144 ([286]).
Soient des espaces vectoriels normés E et F. Une application linéaire ouverte $f: E \to F$ est surjective.

Démonstration. Soit un ouvert $B(0,r)$ dans E. Puisque f est ouverte, la partie $f\big(B(0,r)\big)$ est ouverte dans F, et contient donc une boule $B_F(0,r')$ pour un certain $r' > 0$.

Soit $v \in F$. Nous considérons
$$v' = r'\frac{v}{2\|v\|}. \tag{11.374}$$
Nous avons $\|v'\| = r'/2$, et donc $v' \in B_F(0,r')$. Il existe donc $x \in E$ (et même dans $B_E(0,r)$) tel que $f(x) = v'$. Nous avons alors
$$f\big(\frac{2\|v\|}{r'}x\big) = v, \tag{11.375}$$
ce qui prouve que v est dans l'image de f, et donc que f est surjective. □

Théorème 11.145 (théorème de l'application ouverte[286, 287, 288]).
Soient des espaces de Banach[64] *E et F. Si l'application $f: E \to F$ est linéaire, surjective et continue, alors elle est ouverte.*

Démonstration. En plusieurs étapes.

(i) **Une union de fermés** Soit $y \in F$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in B(0,n)$. Nous avons alors
$$y \in f\big(B(0,1)\big) \subset \overline{f\big(B(0,n)\big)} \tag{11.376}$$
En notant
$$F_n = \overline{f\big(B_E(0,n)\big)}, \tag{11.377}$$
nous avons
$$F = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n. \tag{11.378}$$

(ii) **Théorème de Baire** Le théorème 7.305 nous indique que F est un espace de Baire. Le lemme 7.304 nous dit alors qu'il existe un n tel que F_n soit d'intérieur non vide. Mettons F_N d'intérieur non vide.

(iii) **Boule unité** Puisque F_N est d'intérieur non vide, il existe $y \in F_N$ et $\eta > 0$ tels que $B_F(y,\eta) \subset F_N$. Nous avons aussi
$$B_F(0,\eta) = B_F(y,\eta) - y, \tag{11.379}$$
et comme $y \in F_N$ nous avons $B_F(0,\eta) \subset F_N - F_N$, et vu qu'en plus $-F_N = F_N$, nous avons
$$B_F(0,\eta) \subset 2F_N = \overline{f\big(B_E(0,2N)\big)}. \tag{11.380}$$
Nous avons ensuite
$$B_F(0,1) = \frac{1}{\eta}B_F(0,\eta) \subset \frac{1}{\eta}\overline{f\big(B_E(0,2N)\big)} = \overline{f\big(B_E(0,2N/\eta)\big)}. \tag{11.381}$$
Ceci pour dire qu'il existe un $M \in \mathbb{R}$ tel que
$$B_F(0,1) \subset \overline{f\big(B_E(0,M)\big)}. \tag{11.382}$$

64. Espace de Banach : vectoriel, normé, complet. Définition 7.230.

Nous avons de même que

$$B_F\big(0,\frac{1}{2^n}\big) \subset \overline{f\big(B_E(0,M/2^n)\big)}. \tag{11.383}$$

Nous voudrions maintenant avoir la même inclusion sans la fermeture.

(iv) **Une suite par récurrence** Soit $z \in B_F(0,1)$. Nous allons définir par récurrence une suite (x_n) dans E telle que

$$\begin{cases} x_n \in B_E\big(0,\frac{M}{2^{n-1}}\big) & (11.384a)\\ \|z - f(x_1 + \ldots + x_n)\| < \frac{1}{2^n}. & (11.384b) \end{cases}$$

(i) **Le premier élément** Puisque $z \in B_F(0,1) \subset \overline{f\big(B_E(0,M)\big)}$, nous avons

$$B(z,\frac{1}{2}) \cap f\big(B_E(0,M)\big) \neq \varnothing. \tag{11.385}$$

Nous pouvons donc considérer $x_1 \in B_E(0,M)$ tel que $f(x_1) \in B(z,\frac{1}{2})$. Ce x_1 vérifie les conditions (11.384).

(ii) **La récurrence** En utilisant l'hypothèse de récurrence et (11.383),

$$z - f(x_1 + \ldots + x_n) \in B_F\big(0,\frac{1}{2^n}\big) \subset \overline{f\big(B_E(0,M/2^n)\big)}, \tag{11.386}$$

de telle sorte que

$$B_F\big(z - f(x_1,\ldots,x_n),\frac{1}{2^{n+1}}\big) \cap f\big(B_E(0,M/2^n)\big) \neq \varnothing. \tag{11.387}$$

Nous pouvons donc considérer $x_{n+1} \in B_E(0,M/2^n)$ tel que

$$f(x_{n+1}) \in B_F\big(z - f(x_1 + \ldots + x_n),\frac{1}{2^{n+1}}\big). \tag{11.388}$$

Donc

$$z - f(x_1 + \ldots + x_n) - f(x_{n+1}) \in B_F\big(0,\frac{1}{2^{n+1}}\big). \tag{11.389}$$

Nous avons donc bien

$$\|z - f(x_1 + \ldots + x_{n+1})\| < \frac{1}{2^{n+1}}. \tag{11.390}$$

(v) **Convergence** Nous avons, pour tout n, $\|x_n\| < \frac{M}{2^{n-1}}$. Donc la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{2^{n-1}} \tag{11.391}$$

converge. Autrement dit, la série des x_n converge absolument[65]. Puisque E est une espace de Banach, la proposition 11.84 nous dit que $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ converge dans E. Nous posons

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}x_n. \tag{11.392}$$

En utilisant la série géométrique de la proposition 11.119(2), nous trouvons

$$\|x\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\| \leqslant M\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}} = M\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 2M. \tag{11.393}$$

65. Définition 11.80.

(vi) **Passage à la limite** Nous avons $x \in B_E(0, 2M)$, et

$$\lim_{n\to\infty} \|z - f(x_1 + \ldots + x_n)\| = 0. \tag{11.394}$$

Puisque $\|.\|$, $t \mapsto z - t$ et f sont continue[66], nous pouvons rentrer la limite de partout et écrire

$$\|z - f(x)\| = 0, \tag{11.395}$$

ce qui signifie que $z = f(x)$. Comme z est un élément arbitraire de $B_F(0, 1)$ nous avons prouvé que

$$B_F(0, 1) \subset f\big(B_E(0, 2M)\big). \tag{11.396}$$

Nous avons donc aussi que pour tout $r > 0$, il existe r' tel que

$$B_F\big(0, r\big) \subset f\big(B_E(0, r)\big). \tag{11.397}$$

En l'occurrence, $r' = r/2M$.

(vii) **Passage aux voisinages** Nous montrons que l'image de tout voisinage de $x \in E$ contient un voisinage de $f(x)$ dans F. Soit $x \in E$ ainsi qu'un voisinage V de x. Il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset V$. Vu que f est linéaire,

$$f\big(B(x, r)\big) = f(x) + f\big(B(0, r)\big), \tag{11.398}$$

et il existe un r' tel que $B_F(0, r') \subset f\big(B_E(0, r)\big)$. Cela pour dire que

$$f(x) + B_F(0, r') \subset f\big(B(0, r)\big) \subset f(V). \tag{11.399}$$

Vu que $f(x) + B_F(0, r')$ est un ouvert autour de $f(x)$, nous avons prouvé que $f(V)$ contient un ouvert autour de $f(x)$, c'est-à-dire que $f(V)$ est un voisinage de $f(x)$.

(viii) **Conclusion** Le lemme 11.142 conclu que f est ouverte.

□

11.11 Produit tensoriel d'espaces vectoriels

Si vous êtes pressés, vous pouvez aller lire la définition 11.151 de produit tensoriel d'espaces vectoriels. Mais si vous étiez vraiment pressés, vous ne seriez pas en train de lire des choses sur le produit tensoriel (il vous suffit de croire que $x \otimes y$ n'est finalement que la concatenation de x et y).

Proposition-Définition 11.146.
Soient un espace vectoriel V et un sous-espace N. Le ***quotient*** *de V par N, noté V/N est l'ensemble des classes d'équivalence*[67] *pour la relation $x \sim y$ si et seulement si $x - y \in N$.*

Les définitions

(1) $[v] + [w] = [v + w]$

(2) $\lambda[v] = [\lambda v]$

ont un sens et définissent une structure d'espace vectoriel sur V/N.

En ce qui concerne la topologie, ce sera la définition 7.20.

Démonstration. Un élément général de la classe $[v]$ est de la forme $v + n$ avec $n \in N$. Le calcul suivant montre que la somme fonctionne :

$$[v + n_1] + [w + n_2] = [v + w + n_1 + n_2] = [v + w] \tag{11.400}$$

66. Oui, la continuité de f est une hypothèse en plus de sa linéarité parce que nous n'avons pas d'hypothèses sur la dimension de E et F.

67. Définition 1.30.

parce que $n_1 + n_2 \in N$. De même,

$$\lambda[v+n] = [\lambda v + \lambda n] = [\lambda v] \tag{11.401}$$

toujours parce que $\lambda n \in N$.

Notons que nous avons utilisé de façon on ne peut plus cruciale le fait que N soit un sous-espace vectoriel. □

Proposition 11.147.
Si $\{e_i\}$ est une base de V et si N est un sous-espace de V, alors $\{[e_i]\}$ est une partie génératrice de V/N.

Démonstration. Si $x = \sum_k x_k e_k$, alors $[x] = \sum_k x_k [e_k]$, donc oui. □

11.11.1 Les produits tensoriels

Nous allons procéder en deux temps. D'abord nous allons définir ce qu'est *un* produit tensoriel entre deux espaces vectoriels V et W, et nous allons montrer que tous les produits tensoriels possibles sont isomorphes. Ensuite nous allons montrer qu'un produit tensoriel existe en en construisant un. Voir la proposition 11.153.

Définition 11.148 ([289]).
*Soient deux espaces vectoriels V et W. Un **produit tensoriel** de V et W est un couple (T, h) où T est un espace vectoriel et $h\colon V \oplus W \to T$ est une application*

(1) bilinéaire[68]

(2) surjective

(3) telle que pour tout espace vectoriel U et toute applications bilinéaire $f\colon V \oplus W \to U$, il existe une application linéaire $g\colon T \to U$ telle que $f = g \circ h$.

*La propriété (3) est appelée **propriété universelle** du produit tensoriel.*

Définition 11.149.
*Un **morphisme** entre (T, h) et (T', h') est une application linéaire $\psi\colon T \to T'$ telle que $h' = \psi \circ h$.*

*Nous parlons d'**isomorphisme** si ψ a un inverse qui est également un morphisme.*

Proposition 11.150 ([289]).
Si V et W sont des espaces vectoriels, tous les produits tensoriels entre V et W sont isomorphes entre eux au sens de la définition 11.149.

Plus précisément, si (T, h) et (T', h') sont deux produits tensoriels de V et W, alors

(1) il existe une unique unique application linéaire $g\colon T \to T'$ telle que $h' = g \circ h$,

(2) cette application g est inversible.

En particulier, l'application g est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration. Soient deux produits tensoriels (T, h) et (T', h').

(i) **Existence** L'application $h'\colon V \oplus W \to T'$ est bilinéaire, et (T, h) est un produit tensoriel. Donc il existe $g\colon T \to T'$ tel que $h' = g \circ h$. De même, il existe une application $g'\colon T' \to T$ telle que $h = g' \circ h$.

(ii) **Unicité** En ce qui concerne l'unicité, vu que $h\colon V \oplus W \to T$ est surjective, la relation $h' = g \circ h$ prescrit les valeurs de g sur tous les éléments de T.

(iii) **Inversible** Ces deux applications g et g' vérifient $h' = gg'h$ et $h = g'gh$, et de plus $h\colon V \oplus W \to T$ est surjective. Soient $t \in T$ et $x \in V \oplus W$ tel que $t = h(x)$. Nous avons $h(x) = g'gh(x)$. C'est-à-dire $t = (g' \circ g)(t)$. De même dans l'autre sens, il existe $x' \in V \oplus W$ tel que $t = h'(x')$. En appliquant l'égalité $h' = gg'h'$ à x', nous trouvons $t = (g \circ g')(t)$.
Tout cela pour dire que $g' = g^{-1}$. Cette application g est donc un isomorphisme de produits tensoriels entre (T, h) et (T', h').

68. Définition 9.118.

Au final, l'application $g\colon T \to T'$ étant linéaire et inversible, elle est un isomorphisme d'espaces vectoriels. □

Tout cela est fort bien : nous avons unicité à isomorphisme près du produit tensoriel d'espaces vectoriels. Mais nous n'avons pas encore de certitudes à propos de l'existence d'un couple (T, h) vérifiant les propriétés demandées pour être un produit tensoriel.

Nous allons maintenant construire un produit tensoriel.

11.11.2 Le produit tensoriel

C'est le moment pour vous de relire la définition 4.25 d'espace vectoriel librement engendré, et surtout le lemme 4.26 qui en donne une base.

Définition 11.151 ([289]).
Soient deux espaces vectoriels V et W sur le corps commutatif[69] $\mathbb{K}$*. Dans $F_{\mathbb{K}}(V \times W)$ nous considérons les sous-espaces suivants :*

$$A_1 = \{\delta_{(v_1,w)} + \delta_{(v_2,w)} - \delta_{(v_1+v_2,w)} \text{ tel que } v_1, v_2 \in V, w \in W\} \tag{11.402a}$$
$$A_2 = \{\delta_{(v,w_1)} + \delta_{(v,w_2)} - \delta_{(v,w_1+w_2)} \text{ tel que } v \in V, w_1, w_2 \in W\} \tag{11.402b}$$
$$A_3 = \{\lambda\delta_{v,w} - \delta_{(\lambda v,w)} \text{ tel que } v \in V, w \in W, \lambda \in \mathbb{K}\} \tag{11.402c}$$
$$A_4 = \{\lambda\delta_{v,w} - \delta_{(v,\lambda w)} \text{ tel que } v \in V, w \in W, \lambda \in \mathbb{K}\}. \tag{11.402d}$$

Nous considérons alors $N = \operatorname{Span}(A_1, A_2, A_3, A_4)$ et le quotient

$$V \otimes_{\mathbb{K}} W = F_{\mathbb{K}}(V \times W)/N. \tag{11.403}$$

Ce dernier espace vectoriel est le ***produit tensoriel*** *de V par W.*

Remarque 11.152.
Quelque remarques.

(1) Les éléments de $V \otimes W$ ne s'écrivent pas tous sous la forme $v \otimes w$. Certains ont vraiment besoin d'être écrits avec des sommes. En cela, la situation de $V \otimes W$ est réellement différente de celle de $V \times W$. Dans ce dernier, tous les éléments sont des couples.

(2) La classe de l'élément $\delta_{(v,w)} \in F(V \times W)$ sera d'habitude noté $v \otimes w$.

(3) Pour insister sur la notion de classe, nous allons aussi noter $[x]$ la classe de $x \in F(V \times W)$.

(4) L'arithmétique dans $V \otimes W$ est relativement simple. En ajoutant et soustrayant le même élément de A_3 nous avons par exemple

$$(\lambda v) \otimes w = (\lambda v) \otimes w + \lambda(v \otimes w) - (\lambda v) \otimes w. \tag{11.404}$$

Nous obtenons de cette façon

$$\lambda(v \otimes w) = (\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w), \tag{11.405}$$

que nous noterons $\lambda v \otimes w$ sans plus de précision.

Proposition 11.153 ([289]).
L'espace vectoriel $V \times W$ muni de

$$\begin{aligned} h\colon V \oplus W &\to V \otimes W \\ (v, w) &\mapsto v \otimes w \end{aligned} \tag{11.406}$$

est un produit tensoriel entre V et W.

Démonstration. Nous devons prouver les conditions de la définition 11.148.

69. À part mention du contraire, tous les corps du Frido sont commutatifs.

(i) **h est bilinéaire** Ce sont des calculs tels que faits dans la remarque 11.152(4) qui font le travail.

(ii) **h est surjective** Un élément de $V\otimes W$ est la classe d'un élément de $F(V\times W)$, c'est-à-dire de la forme

$$\big[\sum_{i\alpha}\delta_{(v_i,w_\alpha)}\big]=\sum_{i\alpha}a_{i\alpha}v_i\otimes w_\alpha. \tag{11.407}$$

Cet élément est dans l'image de h comme le montre le calcul suivant [70] :

$$h\big(\sum_{i\alpha}(v_i,w_\alpha)\big)=\sum_{i\alpha}a_{i\alpha}h(v_i,w_\alpha)=\sum_{i\alpha}v_i\otimes w_\alpha. \tag{11.408}$$

(iii) **Propriété universelle** Soient un espace vectoriel U et une application linéaire $f\colon V\oplus W\to U$. Nous devons trouver une application linéaire $g\colon V\otimes W\to U$ telle que $f=g\circ h$. Pour cela nous commençons par considérer l'application

$$\begin{aligned} g\colon F(V\times W)&\to U\\ \delta_{(v,w)}&\mapsto f(v,w) \end{aligned} \tag{11.409}$$

définie sur tout $F(V\times W)$ par linéarité sans encombres parce que les $\delta_{v,w}$ forment une base par le lemme 4.26.

Nous démontrons que $g(N)=0$ pour avoir le droit de passer g aux classes et le considérer comme application partant de $V\otimes W$ au lieu de $F(V\times W)$. Prenons par exemple

$$g\big(\delta_{(v_1,w)}+\delta_{(v_2,w)}-\delta_{(v_1+v_2,w)}\big)=g(\delta_{(v_1,w)})+g(\delta_{(v_2,w)})-g(\delta_{v_1+v_2,w}) \tag{11.410a}$$
$$=f(v_1,w)+f(v_2,w)-f(v_1+v_2,w) \tag{11.410b}$$
$$=0 \tag{11.410c}$$

par la bilinéarité de f. Cela montre que $g(A_1)=0$. Nous montrons de même que $g(A_2)=g(A_3)=g(A_4)=0$, et enfin toujours par linéarité que $g(N)=0$. Pour rappel, les éléments de N sont les combinaisons linéaires finies d'éléments de A_1, A_2, A_3 et A_4.

Par passage aux classes, nous avons une application (que nous notons également g)

$$g\colon F(V\times W)/N\to U \tag{11.411}$$

vérifiant $g(v\otimes w)=f(v,w)$. Mais comme $h(v,w)=v\otimes w$, nous avons $g\circ h\colon V\oplus W\to U$ vérifiant $g\circ h=f$.

L'espace vectoriel $V\otimes W$ est donc un produit tensoriel. □

11.154.
Vu que $V\otimes W$ est un produit tensoriel de V et W, et vu qu'il y a unicité par la proposition 11.150, nous avons bien le droit de dire que $V\otimes W$ est *le* produit tensoriel. Cela justifie le titre.

11.155.
Les prochains lemmes et propositions vont nous dire que l'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon V^*\otimes W&\to\mathcal{L}(V,W)\\ \alpha\otimes w&\mapsto\big(v\mapsto\alpha(v)w\big) \end{aligned} \tag{11.412}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels lorsque V est de dimension finie. Vu que nous aimons les énoncés très explicites, ça va être découpé en plusieurs morceaux, l'énoncé va devenir un peu long ; mais c'est pour la bonne cause.

70. Faites bien la distinction entre $\delta_{v,w}$, (v,w) et $v\otimes w$. Sachez dans quel ensemble se trouvent chacun de ces trois objets.

Lemme 11.156.
Soient deux espaces vectoriels V et W dont W est de dimension finie. Alors l'application définie par

$$\begin{aligned} \varphi\colon F(V^*\times W)&\to \mathcal{L}(V,W)\\ \delta_{(\alpha,w)}&\mapsto \big(v\mapsto \alpha(v)w\big) \end{aligned} \tag{11.413}$$

sur la base « canonique » de $F(V^*\times W)$ passe aux classes.

Démonstration. Avec les notations de la définition 11.151 nous devons prouver que $\varphi(N)=0$. Nous montrons que $\varphi(A_4)=0$, et nous vous laissons faire les autres. Pour $\lambda\in\mathbb{K}$, $\alpha\in V^*$ et $w\in W$ en utilisant la linéarité de φ nous avons :

$$\varphi\big(\lambda\delta_{(\alpha,w)}-\delta_{(\alpha,\lambda w)}\big)v=\lambda\varphi(\delta_{(\alpha,w)})(v)-\varphi(\delta_{(\alpha,\lambda w)})(v) \tag{11.414a}$$
$$=\lambda\alpha(v)w-\alpha(v)(\lambda w) \tag{11.414b}$$
$$=0 \tag{11.414c}$$

parce que $\alpha(v)(\lambda w)=\lambda\alpha(v)w$ du fait que $\mathbb{K}$ est commutatif. La commutativité de $\mathbb{K}$ est ce qui permet de permuter le produit $\lambda\alpha(v)$.

Nous laissons à la lectrice le soin de prouver que $\varphi(A_1)=\varphi(A_2)=\varphi(A_3)=0$. □

Lemme 11.157.
Si W est de dimension finie, alors $\mathcal{L}(V,W)$ muni de

$$\begin{aligned} h'\colon V^*\oplus W&\to \mathcal{L}(V,W)\\ (\alpha,w)&\mapsto \big(v\mapsto \alpha(v)w\big) \end{aligned} \tag{11.415}$$

est un produit tensoriel[71] *de V^* par W.*

Démonstration. Nous devons prouver que

— h est bilinéaire,

— h est surjective

— pour tout espace vectoriel U, et pour toute application bilinéaire $f\colon V^*\oplus W\to U$, il existe une application linéaire $g\colon \mathcal{L}(V,W)\to U$ tel que $f=g\circ h$.

(i) **Bilinéaire** Le fait que h soit bilinéaire est une simple vérification.

(ii) **Surjective** L'espace W étant de dimension finie, nous pouvons en considérer une base $\{z_i\}_{i\in I}$. Soit $\alpha\in\mathcal{L}(V,W)$. Si $v\in V$, l'élément $\alpha(v)$ peut être décomposé dans la base $\{z_i\}$, ce qui définit des applications linéaires $\alpha_i\colon V\to\mathbb{K}$ par

$$\alpha(v)=\sum_{i\in I}\alpha_i(v)z_i. \tag{11.416}$$

Notons que $\alpha_i\in V^*$. En comparant avec la définition de h', nous voyons que

$$\alpha(v)=\sum_i h(\alpha_i,z_i)(v), \tag{11.417}$$

c'est-à-dire $\alpha=\sum_i h(\alpha_i,w_i)=h\big(\sum_i(\alpha_i,z_i)\big)$. Nous avons donc bien $\alpha\in h(V^*\oplus W)$.

(iii) **Propriété universelle** Soient un espace vectoriel U et une application bilinéaire $f\colon V^*\oplus W\to U$. Pour $\alpha\in\mathcal{L}(V,W)$ nous définissons $g(\alpha)$ comme suit. D'abord nous écrivons α sous la forme

$$\alpha(v)=\sum_i\alpha_i(v)z_i, \tag{11.418}$$

et nous posons

$$g(\alpha)=\sum_i f(\alpha_i,z_i). \tag{11.419}$$

71. Définition 11.148.

Avec cette définition, en posant $w = \sum_i w_i z_i$, nous avons

$$
\begin{aligned}
(g\circ h')(\alpha,w) &= g\big(v\mapsto \alpha(v)w\big) && (11.420a)\\
&= g\big(v\mapsto \sum_i \alpha(v)w_iz_i\big) && (11.420b)\\
&= \sum_i f(w_i\alpha, z_i) && (11.420c)\\
&= \sum_i f(\alpha, w_iz_i) && (11.420d)\\
&= f(\alpha, \sum_i w_iz_i) && (11.420e)\\
&= f(\alpha, w). && (11.420f)
\end{aligned}
$$

Cela prouve que $g\circ h = f$.

□

Proposition 11.158 ([290]).
Soient deux espaces vectoriels V et W dont V est de dimension finie. Alors l'application

$$
\begin{aligned}
\varphi\colon V^*\otimes W &\to \mathcal{L}(V,W)\\
\alpha\otimes w &\mapsto \big(v\mapsto \alpha(v)w\big)
\end{aligned}
\tag{11.421}
$$

est bien définie[72] *et est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

Démonstration. Le lemme 11.157 donne une structure de produit tensoriel de V^* par W sur $\mathcal{L}(V,W)$. Rappelons les structures :

$$
\begin{aligned}
h\colon V^*\oplus W &\to V^*\otimes W\\
(\alpha,w) &\mapsto \alpha\otimes w
\end{aligned}
\tag{11.422}
$$

et

$$
\begin{aligned}
h'\colon V^*\oplus W &\to \mathcal{L}(V,W)\\
(\alpha,w) &\mapsto \big[v\mapsto \alpha(v)w\big].
\end{aligned}
\tag{11.423}
$$

La proposition 11.150 a déjà fait tout le boulot. La seule chose à faire est de vérifier qu'il existe une application $\varphi\colon V^*\otimes W\to\mathcal{L}(V,W)$ vérifiant simultanément les deux conditions suivantes :

(1) $\varphi(\alpha\otimes w) = \big[v\mapsto \alpha(v)w\big]$
(2) $h' = \varphi\varphi\circ h$.

La seconde condition assure que φ sera un isomorphisme d'espaces vectoriels.

L'existence de φ vérifiant la condition (1) est un effet du lemme 11.156 qui donne une fonction sur $F(V^*\times W)$ dont le φ qui nous concerne est un quotient. Il reste à voir que cette application vérifie $h' = \varphi\circ h$.

En nous rappelant que $\alpha\otimes w = [\delta_{(\alpha,w)}]$ et en écrivant φ à la fois l'application et son passage au quotient,

$$
(\varphi\circ h)(\alpha,w) = \varphi(\alpha\otimes w) = \varphi\big([\delta_{(\alpha,w)}]\big) = \varphi(\delta_{(\alpha,w)}).
\tag{11.424}
$$

En appliquant à $v\in V$ nous avons :

$$
(\varphi\circ h)(\alpha,w)v = \varphi(\delta_{(\alpha,w)})v = \alpha(v)w = h'(\alpha,w)v.
\tag{11.425}
$$

Et voilà. Nous avons $\varphi\circ h = h'$. □

Une conséquence de la proposition 11.158 est que

$$
\dim(V\otimes W) = \dim(V)\dim(W)
\tag{11.426}
$$

via le lemme 4.39(2).

72. Au sens où il existe une fonction φ définie sur tout $V^*\otimes W$ qui se réduit à cela pour les éléments de la forme $\alpha\otimes w$.

11.11.3 Bases

Voici un lemme entièrement dédié au principe « dans le Frido, on ne fait pas d'abus de notations, sauf pour la logique formelle et la théorie des ensembles, que nous admettons ».

Lemme 11.159 ([1]).
Si $\tau\colon V_1\to V_2$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors

$$\begin{aligned} \varphi\colon V_1\otimes W&\to V_2\otimes W\\ v\otimes w&\mapsto \tau(v)\otimes W \end{aligned} \tag{11.427}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration. Comme d'habitude, l'expression (11.427) ne définit pas réellement φ parce que nous ne savons pas du tout si $\{v\otimes w \text{ tel que } v\in V, w\in W\}$ est plus ou moins une base de $V\otimes W$ [73]. Ce que dit réellement ce lemme est qu'il existe une application $V_1\otimes W\to V_2\otimes W$ qui est isomorphisme et qui se réduit à l'expression donnée dans le cas d'éléments de $V_1\otimes W$ de la forme $v\otimes w$.

L'application

$$\begin{aligned} \varphi_0\colon F(V_1\times W)&\to F(V_2\times W)\\ \delta(v,w)&\mapsto \delta_{\big(\tau(v),w\big)} \end{aligned} \tag{11.428}$$

est un isomorphisme.

Cette application passe aux classes, mais pas au sens où $x\in[y]$ impliquerait $\varphi_0(x)=\varphi_0(y)$; au sens où si $x\in[y]$, alors $\varphi_0(x)\in[\varphi_0(y)]$. Par exemple

$$\varphi_0\big(\lambda\delta_{(v,w)}-\delta_{(v,\lambda w)}\big)=\lambda\delta_{\big(\tau(v),w\big)}-\delta_{\big(\tau(v),w\big)}\in[0]. \tag{11.429}$$

Nous vous laissons le soin de vérifier les égalités correspondantes pour les autres parties de N.

Le passage au classes de φ_0 signifie que l'on considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon V_1\otimes W&\to V_2\otimes W\\ [x]&\mapsto[\varphi_0(x)] \end{aligned} \tag{11.430}$$

où vous aurez noté que la prise de classe à gauche n'est pas la même que celle à droite.

Il faut prouver que ce φ est un isomorphisme. En ce qui concerne la linéarité,

$$\begin{aligned} \varphi\big([x]+[y]\big)&=\varphi\big([x+y]\big) && (11.431a)\\ &=[\varphi_0(x+y)] && (11.431b)\\ &=[\varphi_0(x)+\varphi_0(y)] && (11.431c)\\ &=[\varphi_0(x)]+[\varphi_0(y)] && (11.431d)\\ &=\varphi([x])+\varphi([y]). && (11.431e) \end{aligned}$$

Je vous laisse le reste de la linéarité. Et en ce qui concerne le fait que ce soit une bijection, allez-y. □

Proposition 11.160 ([290]).
Soient des espaces vectoriels de dimension finie V et W. Soient une base $\{e_i\}$ de V et une base $\{f_\alpha\}$ de W.

Alors :

(1) La partie $\{e_i\otimes f_\alpha\}$ est une base de $V\otimes W$.

(2) Au niveau des dimensions, $\dim(V\otimes W)=\dim(V)\dim(W)$.

73. Ne lisez pas la proposition 11.160 qui dévoile toute l'intrigue.

Démonstration. Vu que V est de dimension finie, nous avons un isomorphisme d'espaces vectoriels $V^* = V$, et même un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\begin{aligned} \tau\colon V &\to (V^*)^* \\ \tau(v)\alpha &= \alpha(v). \end{aligned} \tag{11.432}$$

Recopions l'isomorphisme de la proposition 11.158 en utilisant V^* au lieu de V :

$$\begin{aligned} \psi_0\colon (V^*)^* \otimes W &\to \mathcal{L}(V^*, W) \\ \tau(v) \otimes w &\mapsto \big(\alpha \mapsto \tau(v)(\alpha)w = \alpha(v)w\big). \end{aligned} \tag{11.433}$$

En écrivant cela, nous avons tenu compte du fait que tout élément de $(V^*)^*$ peut être écrit de façon univoque sous la forme $\tau(v)$ pour un certain $v \in V$.

Vu que τ est un isomorphisme, l'application suivante est encore un isomorphisme [74] :

$$\begin{aligned} \psi\colon V \otimes W &\to \mathcal{L}(V^*, W) \\ v \otimes w &\mapsto \big(\alpha \mapsto \alpha(v)w\big). \end{aligned} \tag{11.434}$$

Nous avançons. Vu que nous avons un isomorphisme, nous pouvons faire passer des bases. Le lemme 4.39 nous donne une base de $\mathcal{L}(V^*, W)$ en les éléments $\beta_{i\alpha}\colon V^* \to W$ définies par

$$\beta_{ij}(\alpha) = \alpha(e_i) f_\alpha. \tag{11.435}$$

Donc $\{\psi^{-1}(\beta_{i\alpha})\}$ est une base de $V \otimes W$.

Pour $a = \sum_i a_i e_i^*$ (base duale, définition 4.120) nous avons :

$$\psi(e_i \otimes f_\alpha)a = a(e_i) f_\alpha = \beta_{i\alpha}(a). \tag{11.436}$$

Cela prouve que $\psi^{-1}(\beta_{i\alpha}) = e_i \otimes f_\alpha$, et donc que ces $e_i \otimes f_\alpha$ est une base de $V \otimes W$.

La formule concernant les dimensions est simplement la définition 4.14 de la dimension : le nombre d'éléments dans une base. □

Exemple 11.161.
Dans le produit tensoriel $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$, nous avons $x \otimes 1 = 1 \otimes x = x(1 \otimes x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Et si $x \geqslant 0$ nous avons aussi $x \otimes 1 = \sqrt{x} \otimes \sqrt{x}$. △

11.11.4 Norme

Nous considérons des espaces vectoriels V et W de dimension finie. L'application (11.434) donne un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\begin{aligned} \psi\colon V \otimes W &\to \mathcal{L}(V^*, W) \\ v \otimes w &\mapsto \big(\alpha \mapsto \alpha(v)w\big). \end{aligned} \tag{11.437}$$

Et ça, c'est très bien, parce que nous connaissons une norme sur $\mathcal{L}(V^*, W)$: la norme opérateur 11.50.

Définition 11.162 ([1])**.**
Soient deux espaces vectoriels normés de dimension finie V et W. Sur $V \otimes W$ nous définissons, pour $t \in V \otimes W$

$$\|t\| = \|\psi(t)\|_{\mathcal{L}(V^*, W)}. \tag{11.438}$$

Lemme 11.163 ([1])**.**
La norme sur $V \otimes W$ vérifie

$$\|v \otimes w\| = \|v\| \|w\| \tag{11.439}$$

pour tout $v \in V$ et $w \in W$.

74. Lemme 11.159.

Démonstration. C'est un simple(?) calcul :

$$\|v \otimes w\| = \|\psi(v \otimes w)\| = \|\alpha \mapsto \alpha(v)w\| = \sup_{\|\alpha\|=1} \|\alpha(v)w\| = \sup_{\|\alpha\|=1} |\alpha(v)|\|w\|. \tag{11.440}$$

Étant donné que V est de dimension finie, $\sup_{\|\alpha\|=1} |\alpha(v)| = \|v\|$ [75]. Nous avons donc

$$\|v \otimes w\| = \|v\|\|w\|. \tag{11.441}$$

□

Le lemme suivant montre que $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$ n'est pas du tout $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Au contraire, $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathbb{R}$.

Lemme 11.164 ([1])**.**
L'application

$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ 1 \otimes 1 &\mapsto 1 \end{aligned} \tag{11.442}$$

prolongée par linéarité est un isomorphisme isométrique.

Démonstration. D'abord une base de $\mathbb{R}$ est $\{1\}$; donc une base de $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$ est $\{1 \otimes 1\}$ par la proposition 11.160. Donc l'application proposée se prolonge par linéarité à tout $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$.

Le fait que φ soit une bijection provient du fait que φ transforme une base en une base ; si vous n'y croyez pas, la vérification de l'injectivité et de la surjectivité est facile.

Pour que φ soit isométrique, nous faisons le calcul

$$\|\varphi(x \otimes y)\| = \|xy(1 \otimes 1)\| = |xy|\|1 \otimes 1\| = |xy| = \|x \otimes y\|. \tag{11.443}$$

Nous avons utilisé la propriété 7.136(3) d'une norme ainsi que le lemme 11.163 pour la norme sur $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$. □

11.11.5 Applications bilinéaires, matrices et produit tensoriel

Soit E, un espace vectoriel de dimension finie. Si α et β sont deux formes linéaires sur un espace vectoriel E, nous définissons $\alpha \otimes \beta$ comme étant la 2-forme donnée par

$$(\alpha \otimes \beta)(u, v) = \alpha(u)\beta(v). \tag{11.444}$$

Si a et b sont des vecteurs de E, ils sont vus comme des formes sur E via le produit scalaire et nous avons

$$(a \otimes b)(u, v) = (a \cdot u)(b \cdot v). \tag{11.445}$$

Cette dernière équation nous incite à pousser un peu plus loin la définition de $a \otimes b$ et de simplement voir cela comme la matrice de composantes

$$(a \otimes b)_{ij} = a_i b_j. \tag{11.446}$$

Cette façon d'écrire a l'avantage de ne pas demander de se souvenir qui est une vecteur ligne, qui est un vecteur colonne et où il faut mettre la transposée. Évidemment $(a \otimes b)$ est soit ab^t soit $a^t b$ suivant que a et b soient ligne ou colonne.

75. Cela est une des raisons pour lesquelles nous sommes en dimension finie : je ne sais pas si cette égalité est vraie en dimension inifinie.

11.11.6 Application d'opérateurs

Lemme 11.165.
Soient $x, y \in E$ et A, B deux opérateurs linéaires sur E vus comme matrices. Alors

$$(Ax \otimes By) = A(x \otimes y)B^t. \tag{11.447}$$

Démonstration. Calculons la composante ij de la matrice $(Ax \otimes By)$. Nous avons

$$\begin{aligned}
(Ax \otimes By)_{ij} &= (Ax)_i (By)_j && (11.448a)\\
&= \sum_{kl} A_{ik} x_k B_{jl} y_l && (11.448b)\\
&= A_{ik} (x \otimes y)_{kl} B_{jl} && (11.448c)\\
&= \big(A(x \otimes y)B^t\big)_{ij}. && (11.448d)
\end{aligned}$$

□

Le fait que les applications linéaires soient continues [76] est valable dans une assez large gamme d'espaces vectoriels[291]. Nous voyons ici dans le cas des espaces vectoriels normés de dimension finies.

Proposition 11.166.
Soient des espaces vectoriels normés E et F. Si $f : E \to F$ est une application linéaire et si E est de dimension finie, alors f est continue.

Démonstration. La proposition 11.50(1) nous dit que $\|f\| < \infty$, c'est-à-dire que f est borné. Donc la proposition 11.61 conclut. □

Lemme 11.167.
Soit F un espace de Banach et deux suites $A_k \to A$ et $B_k \to B$ dans $\mathcal{L}(F, F)$. Alors $A_k \circ B_k \to A \circ B$ dans $\mathcal{L}(F, F)$, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} (A_k B_k) = \left(\lim_{n\to\infty} A_k\right)\left(\lim_{n\to\infty} B_k\right). \tag{11.449}$$

Démonstration. Il suffit d'écrire

$$\|A_k B_k - AB\| \leqslant \|A_k B_k - A_k B\| + \|A_k B - AB\|. \tag{11.450}$$

Le premier terme tend vers zéro pour $k \to \infty$ parce que

$$\begin{aligned}
\|A_k B_k - A_k B\| &= \|A_k (B_k - B)\| && (11.451a)\\
&\leqslant \|A_k\| \|B_k - B\| \to \|A\| \cdot 0 && (11.451b)\\
&= 0 && (11.451c)
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la propriété fondamentale de la norme opérateur : la proposition 11.61. Le second terme tend également vers zéro pour la même raison. □

11.11.7 Convergence en norme et par composante

En dimension infinie, la convergence en norme et la convergence composante par composante ne s'impliquent ni dans un sens ni dans l'autre.

L'exemple suivant devrait être formalisé dans l'espace ℓ^2 des suites de carré sommable, mais vous voyez l'idée.

76. Proposition 11.61.

Exemple 11.168.
Nous considérons l'ensemble des suites réelle munie de la norme $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2}$. Dedans nous considérons les vecteurs de base e_i donnés par

$$(e_i)_n = \delta_{in}. \tag{11.452}$$

Ensuite nous considérons la base

$$f_i = e_1 + \frac{1}{2^i} e_i. \tag{11.453}$$

La suite $x_n = f_n - f_1$, dans cette base a toujours -1 comme première composante[77]. Et pourtant elle converge en norme vers 0. △

11.12 Calcul différentiel dans un espace vectoriel normé

Quelques motivations pour la notion de différentielle sont données dans 12.23.1.

11.12.1 Définition de la différentielle

Proposition-Définition 11.169 ([1]).
Soient deux espaces vectoriels normés[78] E et F ainsi qu'une fonction $f : \mathcal{U} \to F$ où $\mathcal{U}$ est un ouvert de E. Si il existe une une application linéaire $T \in \mathcal{L}(E, F)$ satisfaisant

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in E}} \frac{f(a+h) - f(a) - T(h)}{\|h\|_E} = 0, \tag{11.454}$$

alors il en existe une seule.

*Dans ce cas nous disons que f est **différentiable au point** a et l'application T ainsi définie est appelée **différentielle** de f au point a, et nous la notons df_a.*

Démonstration. Soient deux applications linéaires T_1, T_2 satisfaisant la condition (11.454). Nous avons

$$\frac{\|T_1(h) - T_2(h)\|_F}{\|h\|_E} \leqslant \frac{\|T_1(h) - f(a+h) + f(a)\|}{\|h\|} + \frac{\|f(a+h) - f(a) - T_2(h)\|}{\|h\|} \to 0. \tag{11.455}$$

Nous avons donc

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|(T_1 - T_2)(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0. \tag{11.456}$$

Soit $\epsilon > 0$. Ce que signifie la limite est qu'il existe un $r > 0$ tel que pour tout $u \in B_E(0, r)$, nous ayons

$$\frac{\|(T_1 - T_2)(u)\|_F}{\|u\|_E} < \epsilon. \tag{11.457}$$

Soit $v \in E$. Nous considérons $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda v \in B(0, r)$, par exemple $\lambda < r/\|v\|$. Nous avons

$$\epsilon > \frac{\|(T_1 - T_2)(\lambda v)\|_F}{\|\lambda v\|_E} = \frac{\|(T_1 - T_2)(v)\|}{\|v\|}. \tag{11.458}$$

Cela donne

$$\|(T_1 - T_2)(v)\| < \|v\| \epsilon. \tag{11.459}$$

Nous avons donc $\|(T_1 - T_2)(v)\| = 0$, soit $T_1(v) = T_2(v)$. □

L'application différentielle

$$\begin{aligned} df \colon E &\to \mathcal{L}(E, F) \\ a &\mapsto df_a \end{aligned} \tag{11.460}$$

est également très importante.

77. N'essayez pas de faire un dessin : ça ne fonctionne qu'en dimension infinie.
78. Définition 7.136.

Définition 11.170 ([292, 1]).
Soient deux espaces vectoriels normés V et W ainsi qu'une application $f\colon V\to W$. Nous disons que f est

- *de classe C^0 si elle est continue,*
- *de classe C^1 si l'application différentielle $df\colon V\to\mathcal{L}(V,W)$,*
- *de classe C^k si sa différentielle est de classe C^{k-1}.*
- *de classe C^∞ si elle est de classe C^k pour tout k.*

Le lien entre classe C^k et dérivées partielles d'ordre k sera le théorème 12.340.

Remarque 11.171.
Lorsque nous demandons que la différentielle de f soit continue, nous entendons bien la continuité de $df\colon V\to\mathcal{L}(V,W)$, c'est-à-dire la continuité de df_x par rapport à x.

Définition 11.172 (difféomorphisme).
*Soient U et V, deux ouverts d'un espace vectoriel normé. Une application f de U dans V est un **difféomorphisme** si elle est bijective, différentiable[79] et dont l'inverse $f^{-1}: V\to U$ est aussi différentiable.*

Un C^k-difféomorphisme est un difféomorphisme qui est C^k et dont l'inverse est C^k.

11.173.
Truc marrant : un C^1-difféomorphisme n'est pas seulement un difféomorphisme qui est C^1. L'inverse doit également être C^1. Comment nommer un difféomorphisme qui est par ailleurs un application de classe C^1 ? Je ne sais pas.

Remarque 11.174.
Il n'existe pas de bijection bicontinues d'un ouvert de $\mathbb{R}^m$ vers un ouvert de $\mathbb{R}^n$ si $m\neq n$. Il n'y a donc pas de notion de difféomorphismes entre ouverts de dimensions différentes.

Remarque 11.175.
L'application norme étant continue, le critère du théorème 7.126 est en réalité assez général. Par exemple à partir d'une application différentiable[80] $f\colon X\to Y$ nous pouvons considérer la fonction réelle

$$a\mapsto \|df_a\| \tag{11.461}$$

où la norme est la norme opérateur[81]. Si f est de classe C^1 alors cette application est continue et donc bornée sur un compact K de X.

11.12.2 Différentielle d'applications linéaires

Lemme 11.176 (Différentielle d'une application linéaire).
Soient deux espaces vectoriels normés E et F. Soit une application linéaire $f\colon E\to F$. La différentielle de f est l'application constante

$$\begin{aligned} df\colon E&\to\mathcal{L}(E,F)\\ a&\mapsto f. \end{aligned} \tag{11.462}$$

Toutes les autres différentielles d'ordre supérieures sont nulles. En particulier une application linéaire est de classe C^∞.

Démonstration. Pour rappel, toujours bon à avoir en tête : $df\colon E\to\mathcal{L}(E,F)$. Soit $a\in E$; nous avons

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|f(a+h)-f(a)-f(h)\|_F}{\|h\|_E}=0 \tag{11.463}$$

79. Différentiables, définition 11.169.
80. Définition 11.169.
81. Définition 11.50.

parce que le numérateur est nul pour tout h. Donc $h \mapsto f(h)$ est la différentielle de f au point a parce que elle vérifie la condition (11.169).

Nous avons prouvé que la différentielle de f est l'application constante

$$\begin{aligned} df \colon E &\to \mathcal{L}(E, F) \\ a &\mapsto f \end{aligned} \tag{11.464}$$

En ce qui concerne la différentielle seconde, nous prouvons que $d(df)_a = 0$ pour tout $a \in E$. En effet,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|df_{a+h} - df_a\|_{\mathcal{L}(E,F)}}{\|h\|_E} = 0 \tag{11.465}$$

parce que le numérateur vaut $f - f = 0$.

Maintenant il n'est pas compliqué de faire une récurrence : si f est de classe C^k et si $d^k(f) = 0$, alors $d^k(f)$ est de classe C^1 et $d^k f = 0$. □

Lemme 11.177.
Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$. L'application

$$\begin{aligned} f \colon [a, b] &\to [0, 1] \\ x &\mapsto \frac{x-a}{b-a} \end{aligned} \tag{11.466}$$

est une C^∞-difféomorphisme[82].

Démonstration. En plusieurs parties.

(i) **Valeurs dans $[0, 1]$** Nous devons prouver que pour tout $x \in [a, b]$, nous avons $f(x) \in [0, 1]$. D'une part si $x \in [a, b]$, alors $x - a \geqslant 0$ et donc $(x - a)/(b - a) \geqslant 0$.
Dans l'autre sens, si $(x - a)/(b - a) > 1$, alors $x - a > b - a$ et donc $x > b$. Donc $f(x) > 1$ n'arrive jamais pour $x \in [a, b]$.

(ii) **Injectif** Si $f(x) = f(t)$, alors en simplifiant par $b - a \neq 0$, nous trouvons $x - a = t - a$ et donc $x = t$ (ne citez le lemme 1.384 que si vous êtes capables de le prouver, sinon faites comme si c'était évident et il ne vous arrivera rien).

(iii) **Surjectif** Il est vite vérifié que

$$f^{-1}(t) = t(b - a) + a, \tag{11.467}$$

et en procédant de même qu'au point i, nous voyons que pour tout $t \in [0, 1]$, $f^{-1}(t) \in [a, b]$.

(iv) **De classe C^∞** C'est le lemme 11.176 fait le travail parce que (11.466) est linéaire.

(v) **Inverse de classe C^∞** Encore le lemme 11.176 parce que (11.467) est linéaire.

□

11.12.3 Accroissements finis

Lemme 11.178.
Soit une fonction $f \colon E \to V$ (espaces vectoriels normés) différentiable en $a \in E$. Alors il existe une fonction $\alpha \colon E \to V$ telle que

$$\begin{cases} \lim_{h\to 0} \dfrac{\alpha(h)}{\|h\|} = 0 & (11.468a) \\ f(a + h) = f(a) + df_a(h) + \alpha(h). & (11.468b) \end{cases}$$

Démonstration. Il s'agit seulement de poser

$$\alpha(h) = f(a + h) - f(a) - df_a(h). \tag{11.469}$$

Le fait que $\alpha(h)/\|h\| \to 0$ est alors la définition de la différentiabilité de f. □

82. Définition 11.170.

11.12.4 Notations pour les applications linéaires

Définition 11.179 ([293]).
Soient E et F deux espaces vectoriels normés.

(1) *Si E et F sont deux espaces vectoriels (pas spécialement normés) nous notons $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F.*
(2) *Un **morphisme d'espaces vectoriels normés** est une application linéaire $E \to F$ continue pour la topologie de la norme opérateur.*
L'ensemble des applications linéaires bornées[83] entre E et F est noté $L(E,F)$.
(3) *Un **isomorphisme** est un morphisme continu inversible dont l'inverse est continu. Nous notons $\mathrm{GL}(E,F)$ l'ensemble des isomorphismes entre E et F.*

11.12.5 (non ?) Différentiabilité des applications linéaires

Lemme 11.180.
Soit une application linéaire f.

(1) *Si f est continue, alors elle est différentiable et $df_a(u) = f(u)$ pour tout a et u.*
(2) *Si f n'est pas continue, alors elle n'est pas différentiable.*

Démonstration. La linéarité de f donne :
$$f(a+h) - f(a) - f(h) = 0, \tag{11.470}$$
et donc prendre $T = f$ dans la définition 11.169 fait fonctionner la limite. De plus T est alors continue par hypothèse ; elle est donc bien la différentielle de f.

Supposons que f ne soit pas continue, prenons une application linéaire continue T, et calculons
$$\frac{f(a+h) - f(a) - T(h)}{\|h\|} = \frac{(f-T)(h)}{\|h\|} = (f-T)(e_h) \tag{11.471}$$
où e_h est le vecteur unitaire dans la direction de h. Vu que f n'est pas continue et que T l'est, l'application $f - T$ n'est pas continue. Elle n'est pas pas bornée par la proposition 11.61. Il existe alors un vecteur h tel que $\|(f-T)(e_h)\| > 1$ (et même plus grand que ce qu'on veut).

Donc la limite de (11.471) pour $h \to 0$ ne peut pas être nulle. □

Lemme 11.181.
Une application linéaire continue est de classe C^∞.

Démonstration. Soit $a \in E$. Étant donné que f est linéaire et continue, elle est différentiable et
$$\begin{aligned} df\colon E &\to L(E,F) \\ a &\mapsto f \end{aligned} \tag{11.472}$$
est une fonction constante et en particulier continue ; nous avons donc $f \in C^1$. Pour la différentielle seconde nous avons $d(df)_a = 0$ parce que $df(a+h) - df(a) = f - f = 0$. Toutes les différentielles suivantes sont nulles. □

11.12.6 Dérivation en chaine et formule de Leibnitz

Proposition 11.182.
Soient $f_i\colon U \to F_i$, des fonctions de classe C^r où U est ouvert dans l'espace vectoriel normé E et les F_i sont des espaces vectoriels normés. Alors l'application
$$\begin{aligned} f = f_1 \times \cdots \times f_n\colon U &\to F_1 \times \cdots \times F_n \\ x &\mapsto \big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big) \end{aligned} \tag{11.473}$$

83. Nous avons vu dans la proposition 11.61 que la continuité était équivalente à être bornée pour la norme opérateur de la définition 11.50.

est de classe C^r et

$$d^r f = d^r f_1 \times \ldots d^r f_n. \tag{11.474}$$

Démonstration. Soit $x \in U$ et $h \in E$. La différentiabilité des fonctions f_i donne

$$f_i(x+h) = f_i(x) + (df_i)_x(h) + \alpha_i(h) \tag{11.475}$$

avec $\lim_{h\to 0} \alpha_i(h)/\|h\| = 0$. Par conséquent

$$f(x+h) = \big(\ldots, f_i(x) + (df_i)_x(h) + \alpha_i(h), \ldots\big) \tag{11.476a}$$
$$= \big(\ldots, f_i(x), \ldots\big) + \big(\ldots, (df_i)_x(h), \ldots\big) + \big(\ldots, \alpha_i(h), \ldots\big). \tag{11.476b}$$

Mais la définition 7.191 de la norme dans un espace produit donne

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|\big(\alpha_1(h), \ldots, \alpha_n(h)\big)\|}{\|h\|} = 0, \tag{11.477}$$

ce qui nous permet de noter $\alpha(h) = \big(\alpha_1(h), \ldots, \alpha_n(h)\big)$ et avoir $\lim_{h\to 0} \alpha(h)/\|h\| = 0$. Avec tout ça nous avons bien

$$f(x+h) = f(x) + \big((df_1)_x(h) + \cdots + (df_n)_x(h)\big) + \alpha(h), \tag{11.478}$$

ce qui signifie que f est différentiable et

$$df_x = \big(df_1, \ldots, df_n\big). \tag{11.479}$$

□

Théorème 11.183.

Soient des espaces vectoriels normés E, V et W. Nous considérons deux fonctions $f\colon E \to V$ et $g\colon V \to W$. Nous supposons que :

(1) f est différentiable en $a \in E$

(2) g est différentiable en $f(a) \in V$

(3) df_a est de norme finie[84].

Alors $g \circ f\colon E \to W$ est différentiable en a et

$$f(g\circ f)_a(u) = df_{f(a)}\big(df_a(u)\big), \tag{11.480}$$

ou encore

$$f(g\circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a. \tag{11.481}$$

Démonstration. En utilisant le lemme 11.178 pour les fonctions f et g, nous avons

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \alpha(h) \tag{11.482}$$

et

$$g\big(f(a)+k\big) = g\big(f(a)\big) + dg_{f(a)}(k) + \beta(k). \tag{11.483}$$

L'application $dg_{f(a)} \circ df_a$ est une application linéaire, et est notre candidat différentielle. En suivant la définition 11.169, nous allons calculer

$$\lim_{h\to 0} \frac{(g\circ f)(a+h) - (g\circ f)(a) - (dg_{f(a)} \circ df_a)(h)}{\|h\|}. \tag{11.484}$$

Si cette limite existe et vaut zéro, alors nous aurons prouvé que le candidat différentielle est correct.

Pour cela, nous emboîtons les formules (11.482) et (11.483) l'une dans l'autre pour avoir :

$$g(a+h) = g\big(f(a)+df_a(h)+\alpha(h)\big) = g\big(f(a)\big) + dg_{f(a)}\big(df_a(h)+\alpha(h)\big) + \beta\big(df_a(h)+\alpha(h)\big). \tag{11.485}$$

84. Je ne suis pas totalement certain que cette hypothèse soit nécessaire, mais en tout cas, elle est utilisée.

Vu que $dg_{f(a)}$ est linéaire, le deuxième terme peut être coupé en deux et après recombinaisons,

$$(g\circ f)(a+h)-(g\circ f)(a)-(df_{f(a)}\circ df_a)(h)=dg_{f(a)}\big(\alpha(h)\big)+\beta\big(df_a(h)+\alpha(h)\big). \tag{11.486}$$

Étant donné que $dg_{f(a)}$ est linéaire,

$$\frac{dg_{f(a)}\big(\alpha(h)\big)}{\|h\|}=dg_{f(a)}\left(\frac{\alpha(h)}{\|h\|}\right)\to 0. \tag{11.487}$$

Il nous reste à voir que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\beta\big(df_a(h)+\alpha(h)\big)}{\|h\|} \tag{11.488}$$

existe au vaut zéro. Vu que df_a est linéaire, il existe $M>0$ tel que[85] $\|df_a(h)\|\leqslant M\|h\|$. D'autre part, vu que $\alpha(h)/\|h\|\to 0$, nous avons $\|\alpha(h)\|\leqslant\|h\|$ pour tout h suffisamment petit.

Donc si h est assez petit, nous avons

$$\|df_a(h)+\alpha(h)\|\leqslant (M+1)\|h\|. \tag{11.489}$$

Soit $\epsilon>0$. Soit $\delta>0$ tel que $\|h\|\leqslant\delta$ implique $\beta(h)/\|h\|\leqslant\epsilon$ et (11.489) en même temps. Soit r tel que $(M+1)r<\delta$; et notons que $r<\delta$. Nous considérons alors $h\in B(0,r)$ et nous calculons :

$$\frac{\beta\big(df_a(h)+\alpha(h)\big)}{\|h\|}=\frac{\beta\big(df_a(h)+\alpha(h)\big)}{\|df_a(h)+\alpha(h)\|}\frac{\|df_a(h)+\alpha(h)\|}{\|h\|}\leqslant (M+1)\epsilon. \tag{11.490}$$

La limite (11.488) existe donc et vaut zéro. □

Théorème 11.184 (Différentielle de fonctions composées[294]).
Soient E, F et G des espaces vectoriels normés, U ouvert dans E et V ouvert dans F. Soient des applications de classe C^r $(r\geqslant 1)$

$$f\colon U\to V \tag{11.491a}$$
$$g\colon V\to G. \tag{11.491b}$$

Nous supposons que df_x et $dg_{f(x)}$ sont de norme finie.

Alors l'application $g\circ f\colon V\to G$ est de classe C^r et

$$d(g\circ f)_x=dg_{f(x)}\circ df_x. \tag{11.492}$$

Démonstration. Nous nous fixons $x\in U$. La fonction f est différentiable en $x\in U$ et g en $f(x)$, donc nous pouvons écrire

$$f(x+h)=f(x)+df_x(h)+\alpha(h) \tag{11.493}$$

et

$$g\big(f(x)+u\big)=g\big(f(x)\big)+dg_{f(x)}(u)+\beta(u) \tag{11.494}$$

où la fonction α a la propriété que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|\alpha(h)\|}{\|h\|}=0; \tag{11.495}$$

et la même chose pour β. La fonction composée en $x+h$ s'écrit donc

$$(g\circ f)(x+h)=g\big(f(x)+df_x(h)+\alpha(h)\big)=g\big(f(x)\big)+dg_{f(x)}\big(df_x(h)+\alpha(h)\big)+\beta\big(df_x(h)+\alpha(h)\big). \tag{11.496}$$

85. Ce M est par exemple la norme opérateur de df_a, comme nous l'assure le lemme 11.58. C'est pour ce passage-ci que nous avons supposé que df_a était de norme finie.

Nous montrons que tous les « petits » termes de cette formule peuvent être groupés. D'abord si h est proche de 0, nous avons[86]

$$\frac{\|df_x(h)+\alpha(h)\|}{\|h\|}\leqslant\frac{\|df_x\|\|h\|}{\|h\|}+\frac{\|\alpha(h)\|}{\|h\|}. \tag{11.497}$$

Si h est petit, le second terme est arbitrairement petit, donc en prenant n'importe que $M>\|df_x\|$ nous avons

$$\frac{\|df_x(h)+\alpha(h)\|}{\|h\|}\leqslant M. \tag{11.498}$$

Par ailleurs, nous avons

$$\frac{\|\beta\big(df_x(h)+\alpha(h)\big)\|}{\|h\|}=\frac{\|\beta\big(df_x(h)+\alpha(h)\big)\|}{\|df_x(h)+\alpha(h)\|}\frac{\|df_x(h)+\alpha(h)\|}{\|h\|}\leqslant M\frac{\|\beta\big(df_x(h)+\alpha(h)\big)\|}{\|df_x(h)+\alpha(h)\|}. \tag{11.499}$$

Vu que la fraction est du type $\frac{\beta(f(h))}{f(h)}$ avec $\lim_{h\to 0}f(h)=0$, la fraction tend vers zéro lorsque $h\to 0$. En posant

$$\gamma_1(h)=\beta\big(df_x(h)+\alpha(h)\big) \tag{11.500}$$

nous avons $\lim_{h\to 0}\gamma_1(h)/\|h\|=0$.

L'autre candidat à être un petit terme dans (11.496) est traité en utilisant le lemme 11.60 :

$$\|dg_{f(x)}\big(\alpha(h)\big)\|\leqslant\|dg_{f(x)}\|\|\alpha(h)\|. \tag{11.501}$$

Donc

$$\frac{\|dg_{f(x)}\big(\alpha(h)\big)\|}{\|h\|}\leqslant\|dg_{f(x)}\|\frac{\|\alpha(h)\|}{\|h\|}, \tag{11.502}$$

ce qui nous permet de poser

$$\gamma_2(h)=dg_{f(x)}\big(\alpha(h)\big) \tag{11.503}$$

avec γ_2 qui a la même propriété que γ_1. Avec tout cela, en posant $\gamma=\gamma_1+\gamma_2$ nous récrivons

$$(g\circ f)(x+h)=g\big(f(x)\big)+dg_{f(x)}\big(df_x(h)\big)+\gamma(h) \tag{11.504}$$

avec $\lim_{h\to 0}\frac{\gamma(h)}{\|h\|}=0$. Tout cela pour dire que

$$\lim_{h\to 0}\frac{(g\circ f)(x+h)-(g\circ f)(x)-\big(dg_{f(x)}\circ df_x\big)(h)}{\|h\|}=0, \tag{11.505}$$

ce qui signifie que

$$d(g\circ f)_x=dg_{f(x)}\circ df_x. \tag{11.506}$$

Nous avons donc montré que si f et g sont différentiables, alors $g\circ f$ est différentiable avec différentielle donnée par (11.492).

Nous passons à la régularité. Nous supposons maintenant que f et g sont de classe C^r et nous considérons l'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon L(F,G)\times L(E,F)&\to L(E,G)\\ (A,B)&\mapsto A\circ B.\end{aligned} \tag{11.507}$$

Montrons que l'application φ est continue en montrant qu'elle est bornée[87]. Pour cela nous écrivons la norme opérateur

$$\|\varphi\|=\sup_{\|(A,B)\|=1}\|\varphi(A,B)\|=\sup_{\|(A,B)\|=1}\|A\circ B\|\leqslant\sup_{\|(A,B)\|=1}\|A\|\|B\|\leqslant 1. \tag{11.508}$$

86. Ici nous utilisons l'hypothèse de norme finie pour la différentielle.
87. Proposition 11.61.

Justifications : d'une part la norme opérateur est une norme algébrique[88], et d'autre part la définition 7.191 de la norme sur un espace produit pour la dernière majoration. L'application φ est donc continue et donc C^{∞} par le lemme 11.181. Nous considérons également l'application

$$\begin{aligned} \psi\colon U &\to L(F,G)\times L(E,F) \\ x &\mapsto \big(dg_{f(x)}, df_x\big). \end{aligned} \tag{11.509}$$

Vu que f et g sont C^1, l'application ψ est continue. Ces deux applications φ et ψ sont choisies pour avoir

$$(\varphi\circ\psi)(x)=\varphi\big(dg_{f(x)}, df_x\big)=dg_{f(x)}\circ df_x, \tag{11.510}$$

c'est-à-dire $\varphi\circ\psi=d(g\circ f)$. Les applications φ et ψ étant continues, l'application $d(g\circ f)$ est continue, ce qui prouve que $g\circ f$ est C^1.

Si f et g sont C^r alors $dg\in C^{r-1}$ et $dg\circ f\in C^{r-1}$ où il ne faut pas se tromper : $dg\colon F\to L(F,G)$ et $f\colon U\to F$; la composée est $dg\circ f\colon x\mapsto dg_{f(x)}\in L(F,G)$.

Pour la récurrence nous supposons que $f,g\in C^{r-1}$ implique $g\circ f\in C^{r-1}$ pour un certain $r\geqslant 2$ (parce que nous venons de prouver cela avec $r=1$ et $r=2$). Soient $f,g\in C^r$ et montrons que $g\circ f\in C^r$. Par la proposition 11.182 nous avons

$$\psi=dg\circ f\times df\in C^{r-1}, \tag{11.511}$$

et donc $d(g\circ f)=\varphi\circ\psi\in C^{r-1}$, ce qui signifie que $g\circ f\in C^r$. □

Proposition 11.185 ([1]).
Soit une application $f\colon E\to V$ de classe C^1. Soit une application linéaire $\varphi\colon V\to W$. Alors $\varphi\circ f$ est de classe C^p.

Démonstration. Toute la preuve est un grand jeu de cohérence des espaces en présence, alors soyez attentifs et capable de dire précisément à quel espace appartient chacun de objets entrant en jeu.

Nous posons $V_0=V$ et $V_{k+1}=\mathcal{L}(E,V_k)$. Idem pour les espaces W_k. Ensuite nous posons

$$\begin{aligned} \varphi_1\colon \mathcal{L}(E,V) &\to \mathcal{L}(E,W) \\ \alpha &\mapsto \varphi\circ\alpha. \end{aligned} \tag{11.512}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_k\colon \mathcal{L}(E,V_{k-1}) &\to \mathcal{L}(E,W_{k-1}) \\ \alpha &\mapsto \varphi_{k-1}\circ\alpha. \end{aligned} \tag{11.513}$$

Notez la cohérence : si $a\in E$, $\alpha(a)\in V_{k-1}=\mathcal{L}(E,V_{k-2})$, et donc

$$(\varphi_{k-1}\circ\alpha)(a)=\varphi_{k-1}\big(\alpha(a)\big). \tag{11.514}$$

À droite nous avons $\varphi_{k-1}\big(\alpha(a)\big)\in\mathcal{L}(E,W_{k-2})=V_{k-1}$.

De plus, φ est linéaire ; ça se prouve par récurrence en partant de φ_1 et en se basant sur le fait que φ est linéaire.

C'est parti pour une récurrence.

(i) **<u>Énoncé</u>** Nous allons prouver par récurrence que

$$d^k(\varphi\circ f)=\varphi_k\circ d^k f. \tag{11.515}$$

pour tout $k\leqslant p$.

(ii) **<u>Initialisation</u>** D'abord, f est de classe C^p, donc différentiable et φ est linéaire donc différentiable. Donc la composée est différentiable et le théorème 11.183 nous donne la différentiabilité de $\varphi\circ f$ ainsi que la formule

$$d(\varphi\circ f)_a(u)=d\varphi_{f(a)}\big(df_a(u)\big)=(\varphi\circ df_a)(u)=\varphi_1(df_a)(u). \tag{11.516}$$

88. Lemme 11.60.

Donc $d(\varphi\circ f)_a=\varphi_1(df_a)$, ce qui signifie

$$d(\varphi\circ f)=\varphi_1\circ df. \tag{11.517}$$

C'est bon pour $k=1$.

(iii) **La pas de récurrence** Vu que f est de classe C^p, d^kf est encore différentiable. Vu que φ_k est encore linéaire, nous pouvons encore utiliser la règle de différentiation de fonctions composées sur l'application $\varphi_k\circ d^kf$. Nous avons :

$$d^{k+1}(\varphi\circ f)_a(u)=d\big(d^k(\varphi\circ f)\big)_a(u)=d(\varphi_k\circ d^kf)_a(u). \tag{11.518}$$

C'est le moment d'utiliser la formule de différentiation en chaine :

$$d^{k+1}(\varphi\circ f)_a(u)=\big((d\varphi_k)_{d^kf_a}\circ d^{k+1}f_a\big)(u). \tag{11.519}$$

Mais φ_k étant linéaire, $(d\varphi_k)_{d^kf_a}=\varphi_k$, donc

$$d^{k+1}(\varphi\circ f)_a(u)=(\varphi_k\circ d^{k+1}f_a)(u). \tag{11.520}$$

Donc, en oubliant l'application au vecteur u,

$$d^{k+1}(\varphi\circ f)_a=\varphi_k\circ d^{k+1}f_a=\varphi_{k+1}\big(d^{k+1}f_a\big)=(\varphi_{k+1}\circ d^{k+1}f)(a). \tag{11.521}$$

Nous avons donc bien

$$d^{k+1}(\varphi\circ f)=\varphi_{k+1}\circ d^{k+1}f. \tag{11.522}$$

□

Lemme 11.186.
Si $f\colon U\to V$ est un difféomorphisme[89] *alors pour tout $a\in U$, l'application df_a est inversible et*

$$(df_a)^{-1}=(df^{-1})_{f(a)}. \tag{11.523}$$

Démonstration. Il suffit d'apercevoir qu'en vertu de la règle de différentiation en chaine (11.492),

$$(df_a)(df^{-1})_{f(a)}=d(f\circ f^{-1})_{f(a)}=\mathrm{Id}\,. \tag{11.524}$$

□

Proposition 11.187.
Soient des ouverts A de $\mathbb{R}^p$ et B de $\mathbb{R}^m$. Si il existe un difféomorphisme $f\colon A\to B$, alors $p=m$.

Démonstration. Vu que f est un difféomorphisme, le lemme 11.186 fait son travail : l'application linéaire $df_a\colon\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^m$ est inversible d'inverse $df^{-1}_{f(a)}\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$.

Or une application linéaire ne peut pas être bijective entre espaces de dimensions différentes (finies). Donc $p=m$. □

11.12.7 Différentiation de produit

Si nous avons deux application $f\colon E\to V$ et $g\colon E\to W$, alors nous voudrions considérer la fonction

$$\begin{aligned} f\otimes g\colon E&\to V\otimes W\\ a&\mapsto f(a)\otimes g(a). \end{aligned} \tag{11.525}$$

Le problème avec cette notation est que très souvent, les applications f et g sont des éléments d'espaces vectoriels. Si par exemple $f\in\mathcal{L}(E,V)$ et $g\in\mathcal{L}(E,W)$, nous avons $f\otimes g\in\mathcal{L}(E,V)\otimes\mathcal{L}(E,W)$. Dans le Frido nous ne nous permettons pas de dire calmement que $\mathcal{L}(E,V)\otimes\mathcal{L}(E,W)=$

89. Définition 11.172

$\mathcal{L}(E, V \otimes W)$. Et je ne vous dit même pas à quel point il n'est pas évident, si $f \in C^\infty(E, V)$ et $g \in C^\infty(E, W)$ que nous aurions $f \otimes g \in C^\infty(E, V) \otimes C^\infty(E, W) = C^\infty(E, V \otimes W)$.

Tout cela pour dire que nous n'allons pas nous lancer dans des abus de notations. Non. Au lieu de cela, nous introduisons une notation. Pour rappel, dans tout le Frido, $\operatorname{Fun}(A, B)$ désigne l'ensemble de toutes les application de A vers B sans suppositions de régularité. Pour les puristes, nous précisions que si $f \in \operatorname{Fun}(A, B)$, nous supposons que f est définie sur tout A. hum ...sauf mention du contraire.

Définition 11.188.
Si $f \in \operatorname{Fun}(E, V)$ et $g \in \operatorname{Fun}(E, W)$, alors nous définissons

$$\begin{aligned} f\tilde{\otimes} g \colon E &\to V \otimes W \\ a &\mapsto f(a) \otimes g(a). \end{aligned} \tag{11.526}$$

Proposition 11.189.
Soient des applications continues $f\colon E \to V$ et $g\colon E \to W$ entre espaces vectoriels de dimension finies. Alors la fonction $f\tilde{\otimes} g\colon E \to V \otimes W$ est continue.

Démonstration. Soient $a \in E$ ainsi qu'une suite $x_k \to a$ dans E. Nous voulons prouver que $f\tilde{\otimes} g(x_k) \xrightarrow{V\otimes W} f(a) \otimes g(a)$. Nous avons :

$$\|f(x_k)\otimes g(x_k) - f(a)\otimes g(a)\| \leqslant \|f(x_k)\otimes g(x_k) - f(x_k)\otimes g(a)\| + \|f(x_k)\otimes g(a) - f(a)\otimes g(a)\|. \tag{11.527}$$

Ensuite en utilisant la classe d'équivalence (11.402b),

$$f(x_k) \otimes g(x_k) - f(x_k) \otimes g(a) = f(x_k) \otimes \big(g(x_k) - g(a)\big), \tag{11.528}$$

et en ce qui concerne les normes,

$$\|f(x_k) \otimes g(x_k) - f(x_k) \otimes g(a)\| = \|f(x_k)\|\| \otimes \big(g(x_k) - g(a)\big)\|. \tag{11.529}$$

Mais par hypothèse, $f(x_k) \to f(a)$ et $g(x_k) \to g(a)$. Donc le tout tend vers zéro lorsque $k \to \infty$.

Le même raisonnement fonctionne avec le second terme de (11.527). □

Lorsque nous parlons de différentielle de produit de fonctions, nous voulons étudier la différentiabilité de $f\tilde{\otimes} g$ sous l'hypothèse de différentiabilité de f et g. Et aussi, si f et g sont de classe C^p, est-ce que $f\tilde{\otimes} g$ est également de classe C^p ?

Nous voudrions avoir une formule du type

$$d(f\tilde{\otimes} g) = df\tilde{\otimes} g + f\tilde{\otimes} dg, \tag{11.530}$$

mais ça ne colle pas au niveau des espaces. En effet, en évaluant cela en $a \in E$, nous avons à gauche $d(f\tilde{\otimes} g)_a \in \mathcal{L}(E, V \otimes W)$, tandis qu'à droite nous avons $df_a \otimes g(a) \in \mathcal{L}(E, V) \otimes W$ et $f(a) \otimes dg_a \in V \otimes \mathcal{L}(E, W)$.

Nous pourrions bien entendu dire que $V \otimes \mathcal{L}(E, W)$ est isomorphe à $\mathcal{L}(E, V \otimes W)$ et hop voilà, on n'en parle plus. Ce serait passer sur deux points importants. D'abord est-ce que $V \otimes \mathcal{L}(E, W)$ est vraiment isomorphe à $\mathcal{L}(E, V \otimes W)$? Et ensuite, l'isomorphisme implique une utilisation du théorème 11.183 qui est tout sauf une trivialité.

Bref, fidèle au principe fridesque de ne pas cacher des difficultés techniques sous des abus de notations, nous allons écrire les choses explicitement.

Lemme 11.190.
Si E, V et W sont de dimension finie, les applications

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathcal{L}(E, V) \otimes W &\to \mathcal{L}(E, V \otimes W) \\ f \otimes w &\mapsto \Big(u \mapsto f(u) \otimes w\Big) \end{aligned} \tag{11.531}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi\colon V\otimes\mathcal{L}(E,W)&\to\mathcal{L}(E,V\otimes W)\\ v\otimes g&\mapsto\big(a\mapsto v\otimes g(a)\big).\end{aligned}\tag{11.532}$$

sont des isomorphismes d'espaces vectoriels.

Dans le meilleur des mondes, ces applications devraient être affublés d'indices V et W.

Démonstration. Nous donnons des détails à propos de ψ. Pour φ c'est la même chose.

(i) **Linéaire** La formule (11.531) définit ψ en particulier sur une base de $\mathcal{L}(E,V)\otimes W$ par la proposition 11.160(1). Ce que signifie réellement la formule (11.531) est que ψ est ainsi définie sur la base et est prolongée par continuité.

(ii) **Injective** Si pour un f et un w fixé nous avons $\psi(f\otimes w)=0$, alors il y a deux cas : soit $w=0$ soit $w\neq 0$. Dans le premier cas, $f\otimes w=0$, et dans le second cas, nous remarquons que

$$0=\psi(f\otimes w)(a)=f(a)\otimes w\tag{11.533}$$

pour tout $a\in E$. Cela implique $f(a)=0$ pour tout a et donc $f=0$, ce qui signifie que $f\otimes w=0$.

(iii) **Bijective** En utilisant la proposition 11.160 et le lemme 4.39(2), nous avons égalité des dimensions entre $\mathcal{L}(E,V)\otimes W$ et $\mathcal{L}(E,V\otimes W)$.
Une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de même dimension (finie) est une bijection.

□

Proposition 11.191.
Soient des espaces vectoriels normés de dimension finie. Soient $f\colon E\to V$ et $g\colon E\to W$ des fonctions de classe C^1. Alors $f\tilde{\otimes}g\colon E\to V\otimes W$ est de classe C^1 nous avons les formules

$$d(f\tilde{\otimes}g)_a(u)=df_a(u)\otimes g(a)+f(a)\otimes dg_a(u)\tag{11.534}$$

ainsi que

$$d(f\tilde{\otimes}g)=\psi\circ(df\tilde{\otimes}g)+\varphi\circ(f\tilde{\otimes}dg).\tag{11.535}$$

Démonstration. Nous commençons par prouver que $f\tilde{\otimes}g$ est différentiable en injectant le candidat (11.534) dans la définition. Au numérateur nous avons :

$$(f\tilde{\otimes}g)(a+h)-(f\tilde{\otimes}g)(a)-df_a(h)\otimes g(a)-f(a)\otimes dg_a(h).\tag{11.536}$$

Le lemme 11.178 assure qu'il existe une fonction $\alpha\colon E\to V$ telle que $\lim_{h\to 0}\alpha(h)/\|h\|$ et $f(a+h)+f(a)+df_a(h)+\alpha(h)$. Même chose pour g. Nous avons donc

$$(f\tilde{\otimes}g)(a+h)=f(a+h)\otimes g(a+h)=\big(f(a)+df_a(h)+\alpha(h)\big)\otimes\big(g(a)+dg_a(h)+\beta(h)\big)\tag{11.537}$$

qui se développe en 9 termes. En effectuant les différences dans (11.536), nous nous retrouvons avec un numérateur qui vaut

$$f(a)\otimes\beta(h)+df_a(h)\otimes dg_a(h)+df_a(h)\otimes\beta(h)+\alpha(h)\otimes g(a)+\alpha(h)\otimes dg_a(h)+\alpha(h)\otimes\beta(h).\tag{11.538}$$

Nous pouvons prouver terme à terme qu'en divisant par $\|h\|$ nous avons une limite qui vaut zéro. Par exemple,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a)\otimes\beta(h)}{\|h\|}\tag{11.539}$$

se calcule en prenant la norme du numérateur et en utilisant le lemme 11.163 :

$$\frac{\|f(a)\otimes\beta(h)\|}{\|h\|}=\frac{\|f(a)\|\|\beta(h)\|}{\|h\|}\to 0.\tag{11.540}$$

Tous les termes contenant $\alpha(h)$ ou $\beta(h)$ se traitent de la même manière. Le dernier terme à traiter est

$$\lim_{h\to 0}\frac{df_a(h)\otimes dg_a(h)}{\|h\|}. \tag{11.541}$$

En prenant la norme du numérateur, en utilisant encore le lemme 11.163 et en utilisant le lemme 11.58, nous avons

$$\|df_a(h)\otimes dg_a(h)\| = \|df_a(h)\|\|dg_a(h)\| \leqslant \|df_a\|\|dg_a\|\|h\|^2, \tag{11.542}$$

donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{df_a(h)\otimes dg_a(h)}{\|h\|} = 0. \tag{11.543}$$

Notons que l'utilisation du lemme 11.58 requière que df_a soit continue, ce qui n'est pas évident en dimension infinie : une application linéaire n'est pas spécialement continue. C'est donc ici que nous utilisons le fait que E, V et W sont de dimension finie [90].

Ceci prouve que $f\tilde{\otimes}g$ est différentiable et nous donne la formule (11.534) pour appliquer sa différentielle à un élément de E. La formule (11.535) est un corolaire : elle se vérifie en l'appliquant à a puis à u.

Pour terminer nous devons prouver que $d(f\tilde{\otimes}g)$ est continue. Vu que f et g sont de classe C^1, les applications f, g, df et dg sont continues. Les applications ψ et φ sont également continues parce que linéaires sur des espaces de dimensioy finie. La proposition 11.189 appliquée à df et g montre que $df\tilde{\otimes}g$ est continue. La composition avec ψ qui est linéaire conserve la continuité.

Dons le membre de droite de (11.535) est continu et $f\tilde{\otimes}g$ est a une différentielle continue. Elle est donc de classe C^1. □

Il est temps de démontrer le truc difficile, à savoir que si f et g sont de classe C^p, alors $f\tilde{\otimes}g$ est également de classe C^p.

Proposition 11.192.
Nous applellons P_k la propriété suivante :

> *Pour tout $p\geqslant k$, pour tout espaces vectoriels normés E, V, W de dimension finies et pour toutes applications $f\colon E\to V$ et $g\colon E\to W$ de classe C^k, la fonction $f\tilde{\otimes}g$ est de classe C^k.*

(1) La propriété P_k est vraie pour tout k.

(2) Si $f\colon E\to V$ et $g\colon E\to W$ sont de classe C^p, alors $f\tilde{\otimes}g\colon E\to V\otimes W$ est de classe C^p.

Démonstration. Le gros de la preuve est le point (1). Le point (2) est alors une utilisation de la propriété P_p avec $p=k$.

Pour $k=0$. Si f et g sont de classe C^p avec $p\geqslant k$, alors f et g sont a fortiori continues. La proposition 11.189 montre alors que $f\tilde{\otimes}g$ est continue.

Bien que ce ne soit pas tout à fait nécessaire, nous prouvons que P_1 est également vraie avant de passer à la récurrence. Si f et g sont de classe C^p avec $p\geqslant 1$, alors elles sont de classe C^1 et la proposition 11.191 s'applique : $f\tilde{\otimes}g$ est de classe C^1.

Nous faisons la récurrence en supposant que P_k est vraie, et en prouvant que P_{k+1} est vraie. Soit $p\geqslant k+1$ ainsi que des applications $f\colon E\to V$ et $g\colon E\to W$ de classe C^{k+1}. La proposition 11.191 dit que $f\tilde{\otimes}g$ est de classe C^1 et que

$$d(f\tilde{\otimes}g) = \psi\circ(df\tilde{\otimes}g) + \varphi\circ(f\tilde{\otimes}dg). \tag{11.544}$$

À droite, df et g sont de classe C^k parce que f et g sont de classe C^{k+1}. Donc $df\tilde{\otimes}g$ est de classe C^k par l'hypothèse de récurrence appliquée aux espaces $\mathcal{L}(E,V)$ et W. La proposition 11.185 nous assure alors que $\psi\circ(df\tilde{\otimes}g)$ est de classe C^k également.

Nous avons prouvé que $d(f\tilde{\otimes}g)$ est de classe C^k, donc $f\tilde{\otimes}g$ est de classe C^{k+1}. Cela nous fait la récurrence. □

90. Il y a surement moyen de paufiner, et d'affaiblir cette hypothèse, mais je ne me lance pas là-dedans.

11.12.8 Formule des accroissements finis

Proposition 11.193.
Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et deux fonctions

$$f\colon [a,b] \to E \tag{11.545a}$$
$$g\colon [a,b] \to \mathbb{R} \tag{11.545b}$$

continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Si pour tout $t \in]a,b[$ nous avons $\|f'(t)\| \leqslant g'(t)$ alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant g(b) - g(a). \tag{11.546}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ et la fonction

$$\begin{aligned} \varphi_\epsilon\colon [a,b] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \|f(t) - f(a)\| - g(t) - \epsilon t. \end{aligned} \tag{11.547}$$

Cela est une fonction continue réelle à variable réelle. En particulier pour tout $u \in]a,b[$ la fonction φ_ϵ est continue sur le compact $[u,b]$ et donc y atteint son minimum en un certain point $c \in [u,b]$; c'est le bon vieux théorème de Weierstrass 7.126. Nous commençons par montrer que pour tout u, ledit minimum ne peut être que b. Pour cela nous allons montrer que si $t \in [u,b[$, alors $\varphi_\epsilon(s) < \varphi_\epsilon(t)$ pour un certain $s > t$. Par continuité si s est proche de t nous avons

$$\left\| \frac{f(s) - f(t)}{s - t} \right\| - \frac{\epsilon}{2} < \|f'(t)\| < g'(t) + \frac{\epsilon}{2} = \frac{g(s) - g(t)}{s - t} + \frac{\epsilon}{2}. \tag{11.548}$$

Ces inégalités proviennent de la limite

$$\lim_{s \to t} \frac{f(s) - f(t)}{s - t} = f'(t), \tag{11.549}$$

donc si s et t sont proches,

$$\left\| \frac{f(s) - f(t)}{s - t} - f'(t) \right\| \tag{11.550}$$

est petit. Si $s > t$ nous pouvons oublier des valeurs absolues et transformer l'inégalité en

$$\|f(s) - f(t)\| < g(s) - g(t) + \epsilon(s - t). \tag{11.551}$$

Utilisant cela et l'inégalité triangulaire,

$$\varphi_\epsilon(s) \leqslant \|f(s) - f(t)\| + \|f(t) - f(a)\| - g(s) - \epsilon s \tag{11.552a}$$
$$\leqslant g(s) - g(t) + \epsilon s - \epsilon t + \|f(t) - f(a)\| - g(s) - \epsilon s \tag{11.552b}$$
$$= \varphi_\epsilon(t). \tag{11.552c}$$

Donc nous avons bien $\varphi_\epsilon(s) < \varphi_\epsilon(t)$ avec l'inégalité stricte. Par conséquent pour tout $u \in]a,b[$ nous avons $\varphi_\epsilon(b) < \varphi_\epsilon(u)$ et en prenant la limite $u \to a$ nous avons

$$\varphi_\epsilon(b) \leqslant \varphi_\epsilon(a). \tag{11.553}$$

Cette inégalité donne immédiatement

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant g(b) - g(a) + \epsilon(b - a) \tag{11.554}$$

pour tout $\epsilon > 0$ et donc

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant g(b) - g(a). \tag{11.555}$$

□

Théorème 11.194 (Théorème des accroissements finis)**.**
Soient E et F des espaces vectoriels normés, U ouvert dans E et une application différentiable $f\colon U\to F$. Pour tout segment $[a,b]\subset U$ nous avons

$$\| f(b)-f(a)\| \leqslant \left(\sup_{x\in[a,b]}\| df_x\| \right) \| b-a\|. \tag{11.556}$$

Démonstration. Nous prenons les applications

$$\begin{aligned} k\colon [0,1]&\to E\\ t&\mapsto f\big((1-t)a+tb\big) \end{aligned} \tag{11.557}$$

et

$$\begin{aligned} g\colon [0,1]&\to \mathbb{R}\\ t&\mapsto t\sup_{x\in[a,b]}\| df_x\|\| b-a\|. \end{aligned} \tag{11.558}$$

Pour tout t nous avons $g'(t)=M\| b-a\|$ où il n'est besoin de dire ce qu'est M. D'un autre côté nous avons aussi

$$\begin{aligned} k'(t)&=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f\big((1-t-\epsilon)a+(t+\epsilon)b\big)-f\big((1-t)a+tb\big)}{\epsilon}\\ &=\frac{d}{d\epsilon}\Big[f\big((1-t)a+tb+\epsilon(b-a)\big)\Big]_{\epsilon=0}\\ &=df_{(1-t)a+tb}(b-a) \end{aligned} \tag{11.559}$$

où nous avons utilisé l'hypothèse de différentiabilité de f sur $[a,b]$ et donc en $(1-t)a+tb$. Nous avons donc

$$\| k'(t)\| \leqslant \| b-a\|\| df_{(1-t)a+tb}\| \leqslant M\| b-a\| = g'(t) \tag{11.560}$$

La proposition 11.193 est donc utilisable et

$$\| k(1)-k(0)\| = g(1)-g(0), \tag{11.561}$$

c'est-à-dire

$$\| f(b)-f(a)\| = M\| b-a\| \tag{11.562}$$

comme il se doit. □

Proposition 11.195.
Soient E et F des espaces vectoriels normés, U ouvert dans E et une application $f\colon U\to F$. Soient $a,b\in U$ tels que $[a,b]\subset U$. Nous posons $u=(b-a)/\| b-a\|$ et nous supposons que pour tout $x\in[a,b]$, la dérivée directionnelle

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x)=\frac{d}{dt}\Big[f(x+tu)\Big]_{t=0} \tag{11.563}$$

existe. Nous supposons de plus que $\frac{\partial f}{\partial u}(x)$ est continue en $x=a$. Alors

$$\| f(b)-f(a)\| \leqslant \left(\sup_{x\in[a,b]}\| \frac{\partial f}{\partial u}(x)\| \right) \| b-a\|. \tag{11.564}$$

Démonstration. Nous posons évidemment

$$M=\sup_{x\in[a,b]}\| \frac{\partial f}{\partial u}(x)\| \tag{11.565}$$

et nous considérons les fonctions

$$k(t)=f\big((1-t)a+tb\big) \tag{11.566}$$

et

$$g(t) = tM\|b-a\|. \tag{11.567}$$

Pour alléger les notations nous posons $x = (1-t)a + tb$ et nous calculons avec un petit changement de variables dans la limite :

$$k'(t) = \frac{d}{d\epsilon}\Big[f\big(x+\epsilon(b-a)\big)\Big]_{\epsilon=0} = \|b-a\|\frac{d}{d\epsilon}\Big[f\big(x+\frac{\epsilon}{\|b-a\|}(b-a)\big)\Big]_{\epsilon=0} = \|b-a\|\frac{\partial f}{\partial u}(x), \tag{11.568}$$

et donc encore une fois nous avons

$$\|k'(t)\| \leqslant g'(t), \tag{11.569}$$

ce qui donne

$$\|k(1)-k(0)\| = g(1)-g(0), \tag{11.570}$$

c'est-à-dire

$$\|f(b)-f(a)\| \leqslant \sup_{x\in[a,b]}\|\frac{\partial f}{\partial u}(x)\|\|b-a\|. \tag{11.571}$$

□

Théorème 11.196.
Soient E, V deux espaces vectoriels normés, une application $f\colon E\to V$, un point $a\in E$ tel que pour tout $u\in E$, la dérivée

$$\frac{d}{dt}\Big[f(x+tu)\Big]_{t=0} \tag{11.572}$$

existe pour tout $x\in B(a,r)$ et est continue (par rapport à x) en $x=a$. Nous supposons de plus que

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = 0 \tag{11.573}$$

pour tout $u\in E$. Alors f est différentiable en a et

$$df_a = 0 \tag{11.574}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Pourvu que $\|h\|$ soit assez petit pour que $a+h\in B(a,r)$, la proposition 11.195 nous donne

$$\|f(a+h)-f(a)\| \leqslant \sup_{x\in[a,a+h]}\|\frac{\partial f}{\partial u}(x)\||h| \tag{11.575}$$

où $u = h/\|h\|$. Par continuité de $\partial_u f(x)$ en $x=a$ et par le fait que cela vaut 0 en $x=a$, il existe un $\delta > 0$ tel que si $\|h\| < \delta$ alors

$$\|\frac{\partial f}{\partial u}(a+h)\| \leqslant \epsilon. \tag{11.576}$$

Pour de tels h nous avons

$$\|f(a+h)-f(a)\| \leqslant \epsilon\|h\|, \tag{11.577}$$

ce qui prouve que l'application linéaire $T(u) = 0$ convient parfaitement pour faire fonctionner la définition 11.169. □

11.12.9 Applications multilinéaires

Nous avons déjà parlé d'applications multilinéaires dans la définition 11.72.

Lemme 11.197 (Leibnitz pour les formes bilinéaires[294])**.**
Si $B\colon E\times F\to G$ est bilinéaire et continue, elle est C^∞ et

$$dB_{(x,y)}(u,v) = B(x,v) + B(u,y). \tag{11.578}$$

Démonstration. D'abord le membre de droite de (11.578) est une application linéaire et continue, donc c'est un bon candidat à être différentielle. Nous allons prouver que ça l'est, ce qui prouvera la différentiabilité de B. Avec ce candidat, le numérateur de la définition (11.169) s'écrit dans notre cas

$$B\big((x,y)+(u,v)\big)-B(x,y)-B(x,v)-B(u,y)=B(u,v). \tag{11.579}$$

Il reste à voir que

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{B(u,v)}{\|(u,v)\|}=0 \tag{11.580}$$

Par l'équation (11.200) nous avons

$$\frac{\|B(u,v)\|}{\|(u,v)\|}\leqslant\frac{\|B\|\|u\|\|v\|}{\|u\|}=\|B\|\|v\| \tag{11.581}$$

parce que $\|(u,v)\|\geqslant\|u\|$. À partir de là il est maintenant clair que

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{\|B(u,v)\|}{\|(u,v)\|}=0, \tag{11.582}$$

ce qu'il fallait. □

Proposition 11.198 (Règle de Leibniz[294])**.**
Soient E,F_1,F_2 des espaces vectoriels normés, U ouvert dans E et des applications de classe C^r ($r\geqslant 1$)

$$f_1\colon U\to F_1 \tag{11.583a}$$
$$f_2\colon U\to F_2 \tag{11.583b}$$
$$\tag{11.583c}$$

et $B\in L(F_1\times F_2,G)$. Alors l'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon U&\to G\\ x&\mapsto B\big(f_1(x),f_2(x)\big)\end{aligned} \tag{11.584}$$

est de classe C^r et

$$d\varphi_x(u)=\varphi\big((df_1)_x(u),f_2(x)\big)+\varphi\big(f_1(x),(df_2)_x(u)\big). \tag{11.585}$$

Démonstration. Par hypothèse B est continue (c'est la définition de l'espace L), et donc C^∞ par le lemme 11.197. Par ailleurs la fonction $f_1\times f_2$ est de classe C^r parce que f_1 et f_2 le sont et parce que la proposition 11.182 le dit. L'application composée $B\circ(f_1\times f_2)$ est donc également de classe C^r par le théorème 11.184.

Il ne nous reste donc qu'à prouver la formule 11.585. En utilisant la différentielle du produit cartésien [91] nous avons

$$f\big(B\circ(f_1\times f_2)\big)_x(h)=dB_{(f_1\times f_2)(x)}\big((df_1)_x(h),(df_2)_x(h)\big). \tag{11.586}$$

Nous développons cela en utilisant le lemme 11.197 :

$$\begin{aligned}d\big(B\circ(f_1\times f_2)\big)_x(h)&=dB_{\big(f_1(x),f_2(x)\big)}\big((df_1)_x(h),(df_2)_x(h)\big) && (11.587a)\\ &=B\big(f_1(x),(df_2)_x(h)\big)+B\big((df_1)_x(h),f_2(x)\big), && (11.587b)\end{aligned}$$

comme souhaité. □

91. Proposition 11.182.

11.12.10 Différentielle partielle

Définition 11.199 (Différentielle partielle)**.**
Soient E, F et G des espaces vectoriels normés et une fonction $f\colon E\times F\to G$. Nous définissons sa ***différentielle partielle*** *sur l'espace E par*

$$\begin{aligned} d_1f_{(x_0,y_0)}\colon E&\to G\\ u&\mapsto \frac{d}{dt}\Big[f(x_0+tu,y_0\Big]_{t=0}. \end{aligned} \tag{11.588}$$

La différentielle d_2 se définit de la même façon.

Proposition 11.200 ([294])**.**
Soient E_1, E_2 et F des espaces vectoriels normés, soit un ouvert $U\subset E_1\times E_2$ et une fonction $f\colon U\to F$.

(1) Si f est différentiable alors les différentielles partielles existent et

$$d_1f_{(x_0,y_0)}(u)=df_{(x_0,y_0)}(u,0) \tag{11.589a}$$
$$d_2f_{(x_0,y_0)}(v)=df_{(x_0,y_0)}(0,v) \tag{11.589b}$$

où $u\in E_1$ et $v\in E_2$.

(2) Si f est différentiable alors

$$df_{(x_0,y_0)}(u,v)=d_1f_{(x,y_0)}(u)+d_2f_{(x_0,y_0)}(v). \tag{11.590}$$

Démonstration. Nous posons $\alpha=(x_0,y_0)\in U$ et

$$\begin{aligned} j^{(1)}_\alpha\colon E_1&\to E_1\times E_2\\ x&\mapsto (x,y_0). \end{aligned} \tag{11.591}$$

C'est une fonction de classe C^∞ et

$$(dj^{(1)}_\alpha)_{x_0}(u)=\frac{d}{dt}\Big[j^{(1)}_\alpha(x_0+tu)\Big]_{t=0}=\frac{d}{dt}\Big[(x_0+tu,y_0)\Big]_{t=0}=(u,0). \tag{11.592}$$

D'autre part

$$(d_1f)_\alpha(u)=\frac{d}{dt}\Big[f(x_0+tu,y_0)\Big]_{t=0} \tag{11.593a}$$
$$=\frac{d}{dt}\Big[(f\circ j^{(1)}_\alpha)(x_0+tu)\Big]_{t=0} \tag{11.593b}$$
$$=\big(d(f\circ j^{(1)}_\alpha)\big)_{x_0}(u). \tag{11.593c}$$

À ce moment nous utilisons la règle des différentielles composées 11.184 pour dire que

$$(d_1f)_\alpha(u)=df_{j^{(1)}_\alpha(x_0)}\circ(dj^{(1)}_\alpha)_{x_0}(u)=df_\alpha(u,0). \tag{11.594}$$

Voilà qui prouve déjà le point (1).

Pour la suite nous considérons les fonctions

$$\begin{aligned} P_1(x,y)&=x, & J_1(u)&=(u,0),\\ P_2(x,y)&=y, & J_2(v)&=(0,v) \end{aligned} \tag{11.595}$$

et nous avons l'égalité évidente

$$J_1\circ P_1+J_2\circ P_2=\mathbb{1} \tag{11.596}$$

sur $E_1\times E_2$. En appliquant df_α à cette dernière égalité, en appliquant à (u,v) et en utilisant la linéarité de df_α nous trouvons

$$df_\alpha(u,v)=df_\alpha\big((J_1\circ P_1)(u,v)\big)+df_\alpha\big((J_2\circ P_2)(u,v)\big) \tag{11.597a}$$
$$=df_\alpha(u,0)+df_\alpha(0,v) \tag{11.597b}$$
$$=(d_1f)_\alpha(u)+(d_2f)_\alpha(v) \tag{11.597c}$$

où nous avons utilisé le point (1) pour la dernière égalité. □

11.12.11 L'inverse, sa différentielle

Si E est un espace de Banach, nous sommes intéressés à l'espace $\mathrm{GL}(E)$ des endomorphismes inversibles de E sur E. Cet ensemble est métrique par la formule usuelle

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|_E. \tag{11.598}$$

Proposition 11.201 (Thème 39)**.**
Soit E un espace de Banach (espace vectoriel normé complet). Si A est un endomorphisme de E satisfaisant $\|A\| < 1$ pour la norme opérateur, alors $(\mathbb{1} - A)$ est inversible et son inverse est donné par

$$(\mathbb{1} - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k. \tag{11.599}$$

Démonstration. Étant donné que la norme opérateur est une norme algébrique (lemme 11.60), nous avons $\|A^k\| \leqslant \|A\|^k$. Par conséquent la série $\|A^k\|$ est majorée par la série géométrique qui converge[92]. Par conséquent $\sum_k A^k$ est une série absolument convergente et donc convergente par la proposition 11.84 et le fait que $\mathcal{L}(E)$ est complet (proposition 11.87).

Montrons à présent que la somme est l'inverse de $\mathbb{1} - A$ en utilisant le produit terme à terme autorisé par la proposition 11.91 :

$$\sum_{k=0}^{n} A^k(\mathbb{1} - A) = \sum_{k=0}^{n} (A^k - A^{k+1}) = \mathbb{1} - A^{n+1}. \tag{11.600}$$

Par conséquent

$$\|\mathbb{1} - \sum_{k=0}^{n} A^k(\mathbb{1} - A)\| = \|A^{n+1}\| \leqslant \|A\|^{n+1} \to 0. \tag{11.601}$$

□

Théorème 11.202 (Inverse dans $\mathrm{GL}(E)$[295, 294])**.**
Soient E et F des espaces vectoriels normés.

(1) L'ensemble $\mathrm{GL}(E)$ est ouvert dans $\mathrm{End}(E)$.

(2) L'application inverse

$$\begin{aligned} i\colon \mathrm{GL}(E,F) &\to \mathrm{GL}(F,E) \\ u &\mapsto u^{-1} \end{aligned} \tag{11.602}$$

est de classe C^∞ et

$$di_{u_0}(h) = -u_0^{-1} \circ h \circ u_0^{-1} \tag{11.603}$$

pour tout $h \in \mathrm{End}(E)$

Démonstration. Nous supposons que $\mathrm{GL}(E,F)$ n'est pas vide, sinon ce n'est pas du jeu.

(i) <u>**Cas de dimension finie**</u> Si la dimension de E et F est finie, elles doivent être égales, sinon il n'y a pas de fonctions inversibles $E \to F$. L'ensemble $\mathrm{GL}(E,F)$ est donc naturellement $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Un élément de $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ est dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ si et seulement si son déterminant est non nul. Le déterminant étant une fonction continue (polynomiale) en les entrées de la matrice, l'ensemble $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$.

Même idée pour la régularité de la fonction $i\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $X \mapsto X^{-1}$. Les entrées de X^{-1} sont les cofacteurs de X divisé par $\det(X)$, et donc des polynômes en les entrées de X divisés par un polynôme qui ne s'annule pas sur $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, et donc sur un ouvert autour de X et de X^{-1}. Bref, tout est C^∞.

Le reste de la preuve parle de la dimension infinie.

92. Proposition 11.119.

(ii) **Ouvert autour de l'identité** Nous commençons par prouver que $B(\mathbb{1},1)\subset \mathrm{GL}(E)$. Pour cela il suffit de remarquer que si $\|u\|<1$ alors le lemme 11.201 nous donne un inverse de $(1+u)$ en la personne de $\sum_{k=0}^{\infty}(-u)^k$.

(iii) **Ouvert en général** Soit maintenant $u_0\in\mathrm{GL}(E)$. Si $\|u\|<\frac{1}{\|u_0^{-1}\|}$ alors $\|u_0^{-1}u\|<1$, ce qui signifie que

$$\mathbb{1}+u_0^{-1}u \tag{11.604}$$

est inversible. Mais $u_0+u=u_0(\mathbb{1}+u_0^{-1}u)$, donc $u_0+u\in\mathrm{GL}(E)$ ce qui signifie que

$$B\left(u_0,\frac{1}{\|u_0^{-1}\|}\right)\subset\mathrm{GL}(E). \tag{11.605}$$

(iv) **Différentielle en l'identité** Nous commençons par prouver que $di_{\mathbb{1}}(u)=-u$. Pour cela nous posons

$$\alpha(h)=\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^kh^k \tag{11.606}$$

et nous calculons

$$di_{\mathbb{1}}(u)=\frac{d}{dt}\Big[i(\mathbb{1}+tu)\Big]_{t=0}=\frac{d}{dt}\Big[\mathbb{1}-tu+\alpha(tu)\Big]_{t=0}. \tag{11.607}$$

Il suffit de prouver que $\frac{d}{dt}\Big[\alpha(tu)\Big]_{t=0}=0$ pour conclure que $di_{\mathbb{1}}(u)=-u$. Pour cela, nous remarquons que $\alpha(0)=0$ et donc que

$$\frac{d}{dt}\Big[\alpha(tu)\Big]_{t=0}=\lim_{t\to 0}\frac{\alpha(tu)-\alpha(0)}{t} \tag{11.608a}$$

$$=\lim_{t\to 0}\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{(tu)^k}{t} \tag{11.608b}$$

$$=-\lim_{t\to 0}u\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^kt^ku^k. \tag{11.608c}$$

La norme de ce qui est dans la limite est majorée par

$$\|u\|\sum_{k=1}^{\infty}\|tu\|^k=\|u\|\left(\frac{1}{1-\|tu\|}-1\right), \tag{11.609}$$

et cela tend vers zéro lorsque $t\to\infty$. Nous avons utilisé la somme 11.302 de la série géométrique. Nous avons bien prouvé que $di_{\mathbb{1}}(u)=-u$.

(v) **Différentielle en général** Soit maintenant $u_0\in\mathrm{GL}(E)$ et $h\in\mathrm{End}(E)$ tel que $u_0+h\in\mathrm{GL}(E)$; par le premier point, il suffit de prendre $\|h\|$ suffisamment petit. Vu que $u_0+h=u_0(\mathbb{1}+u_0^{-1}h)$ nous avons

$$(u_0+h)^{-1}=(\mathbb{1}+u_0^{-1}h)^{-1}u_0^{-1}. \tag{11.610}$$

Nous pouvons donc calculer

$$(u_0+h)^{-1}=\big(\mathbb{1}-u_0^{-1}h+\alpha(u_0^{-1}h)\big)u_0^{-1}=u_0^{-1}-u_0^{-1}hu_0^{-1}+\alpha(u_0^{-1}h)u_0^{-1}, \tag{11.611}$$

et ensuite

$$di_{u_0}(h)=\frac{d}{dt}\Big[i(u_0+th)\Big]_{t=0}=\frac{d}{dt}\Big[u_0^{-1}-tu_0^{-1}hu_0^{-1}+\alpha(tu_0^{-1}h)u_0^{-1}\Big]_{t=0}, \tag{11.612}$$

mais nous avons déjà vu que

$$\frac{d}{dt}\Big[\alpha(th)\Big]_{t=0}=0, \tag{11.613}$$

donc

$$di_{u_0}(h)=-u_0^{-1}hu_0^{-1} \tag{11.614}$$

Cela donne la différentielle de l'application inverse.

(vi) **Continuité de l'inverse** L'application i est continue parce que différentiable.

(vii) **L'inverse est C^∞** Nous allons écrire la fonction inverse comme une composée. Soient les applications

$$\begin{aligned} B\colon L(F,E)\times L(F,E) &\to L\big(L(E,F),L(F,E)\big)\\ B(\psi_1,\psi_2)(A) &= -\psi_1\circ A\circ\psi_2 \end{aligned} \tag{11.615}$$

et

$$\begin{aligned} \Delta\colon L(F,E) &\to L(F,E)\times L(F,E)\\ \varphi &\mapsto (\varphi,\varphi) \end{aligned} \tag{11.616}$$

Nous avons alors

$$di = B\circ\Delta\circ i. \tag{11.617}$$

L'application Δ est de classe C^∞. Nous devons voir que B l'est aussi. Pour le voir nous commençons par prouver qu'elle est bornée :

$$\begin{aligned} \|B\| &= \sup_{\|\psi_1\|,\|\psi_2\|=1}\|B(\psi_1,\psi_2)\|_{\mathcal{L}\big(L(E,F),L(F,E)\big)}\\ &= \sup_{\|\psi_1\|,\|\psi_2\|=1}\sup_{\|A\|=1}\|\psi_1\circ A\circ\psi_2\|_{L(F,E)}\\ &\leqslant \sup_{\|\psi_1\|,\|\psi_2\|=1}\sup_{\|A\|=1}\|\psi_1\|\|A\|\|\psi_2\|\\ &\leqslant 1. \end{aligned} \tag{11.618}$$

Donc B est bien bornée et par conséquent continue. Une application bilinéaire continue est C^∞ par le lemme 11.197. La décomposition $di = B\circ\Delta\circ i$ nous donne donc que $i\in C^\infty$ dès que i est continue, ce que nous avions déjà montré.

□

11.13 Exponentielle de matrice

Proposition 11.203.
Soit V un espace vectoriel de dimension finie et $A\in\operatorname{End}(V)$. La série

$$\exp(A) = \mathbb{1} + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^k}{k!}. \tag{11.619}$$

converge normalement[93] *dans $\big(\operatorname{End}(V),\|.\|_{op}\big)$. L'**exponentielle** de la matrice A est cette matrice.*

Démonstration. Vu que la norme opérateur est une norme d'algèbre par le lemme 11.60, nous avons pour tout k la majoration $\|A^k\|\leqslant\|A\|^k$. Nous avons donc

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|A^k\|}{k!}\leqslant\sum_k\frac{\|A\|^k}{k!}. \tag{11.620}$$

La dernière somme converge en vertu de la convergence de la série exponentielle donnée en exemple 11.121. □

Étant donné que c'est une limite, il y a une question de convergence et donc de topologie. C'est pour cela que nous ne pouvions pas introduire l'exponentielle de matrice avant d'avoir introduit la norme des matrices. La convergence de la série pour toute matrice sera prouvée au passage dans la proposition 11.204.

La fonction exponentielle $x\mapsto e^x$ n'est pas un polynôme en x, mais nous avons le résultat marrant suivant.

93. Convergence normale, définition 11.81.

Proposition 11.204.
Si u est un endomorphisme, alors $\exp(u)$ *est un polynôme en* u[94].

Démonstration. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi_u \colon \mathbb{K}[X] &\to \operatorname{End}(E) \\ P &\mapsto P(u) \end{aligned} \tag{11.621}$$

Étant donné que l'image de φ_u est un fermé dans $\operatorname{End}(E)$, il suffit de montrer que la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_u(X)^k}{k!} \tag{11.622}$$

converge dans $\operatorname{End}(E)$ pour qu'elle converge dans $\operatorname{Image}(\varphi_u)$. Pour ce faire nous nous rappelons de la norme opérateur[95] et de la propriété fondamentale $\|A^k\| \leqslant \|A\|^k$. En notant $A = \varphi_u(X)$,

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} \frac{A^k}{k!} \right\| \leqslant \sum_{k=n}^{m} \frac{\|A^k\|}{k!} \leqslant \sum_{k=n}^{m} \frac{\|A\|^k}{k!}, \tag{11.623}$$

ce qui est une morceau du développement de $e^{\|A\|}$. La limite $n \to \infty$ est donc zéro par la convergence de l'exponentielle réelle. La suite des sommes partielles de e^A est donc de Cauchy. La série converge donc parce que nous sommes dans un espace vectoriel réel de dimension finie ($\operatorname{End}(E)$). □

11.205.
Pourquoi $\exp(u)$ est-il un polynôme d'endomorphisme alors que exp n'est pas un polynôme ? Lorsque nous disons que la fonction $x \mapsto \exp(x)$ n'est pas un polynôme, nous sommes en train de localiser la fonction exp à l'intérieur de l'espace de toutes les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, c'est-à-dire à l'intérieur d'un espace de dimension infinie. Au contraire lorsqu'on parle de $\exp(u)$ et qu'on le compare aux endomorphismes $P(u)$, nous sommes en train de repérer $\exp(u)$ à l'intérieur de l'espace des matrices qui est de dimension finie. Il n'est donc pas étonnant que l'on parvienne moins à faire la distinction.

Si par contre nous considérons exp en tant qu'application $\exp\colon \operatorname{End}(E) \to \operatorname{End}(E)$, ce n'est pas un polynôme.

Si u et v sont des endomorphismes, nous aurons des polynômes P et Q tels que $e^u = P(u)$ et $e^v = Q(v)$; mais nous n'aurons en général évidemment pas $P = Q$. En cela, exp n'est pas un polynôme.

11.14 Espace dual

Définition 11.206.
Soit un espace vectoriel normé $(V, \|.\|)$ *sur le corps* $\mathbb{C}$ *ou* $\mathbb{R}$ *(que nous nommons* $\mathbb{K}$*). Son* ***dual topologique****, noté* V' *est l'ensemble des applications linéaires continues* $V \to \mathbb{K}$.

11.14.1 Topologies

Il est possible de mettre sur V' (au moins) deux topologies distinctes. La première est la topologie de la norme opérateur ; rien de nouveau pour elle. La seconde est la topologie $*$-faible dont nous avons déjà un peu parlé dans la définition 7.298.

En termes de notations, nous allons noter les seminormes de la topologie faible par

$$p_x(\varphi) = |\varphi(x)| \tag{11.624}$$

pour $x \in V$ et $\varphi \in V'$. À droite, les barres dénotent soit la valeur absolue (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), soit le module (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

94. Nan, mais j'te jure : exp n'est pas un polynôme, mais $\exp(u)$ est un polynôme de u.
95. Définition 11.50.

Lemme 11.207.
Soit $\varphi \in V'$ et $x \in V$. Alors

$$p_x(\varphi) \leqslant \frac{\|\varphi\|}{\|x\|}. \tag{11.625}$$

Si $\varphi_0 \in V'$, si $r > 0$ et si $x \in V$ nous avons aussi :

$$B(\varphi_0, r) \subset B_x(\varphi_0, \frac{r}{\|x\|}). \tag{11.626}$$

Démonstration. En posant $x' = x/\|x\|$ nous avons

$$p_x(\varphi) = |\varphi(x)| = \frac{1}{\|x\|}|\varphi(x')| \leqslant \frac{1}{\|x\|}\|\varphi\|. \tag{11.627}$$

En ce qui concerne la seconde affirmation, si $\varphi \in B(\varphi_0, r)$ alors en notant $x' = x/\|x\|$ nous avons :

$$p_x(\varphi_0 - \varphi) = |\varphi_0(x) - \varphi(x)| = \frac{1}{\|x\|}|\varphi_0(x') - \varphi(x')| \leqslant \frac{1}{\|x\|}\|\varphi_0 - \varphi\| \leqslant \frac{r}{\|x\|}. \tag{11.628}$$

Donc $\varphi \in B_x\big(\varphi_0, \frac{r}{\|x\|}\big)$. □

Proposition 11.208.
En ce qui concerne la convergence d'une suite (φ_k) dans V' mais si elle vérifie

$$\varphi_k \xrightarrow{\|.\|} \varphi \tag{11.629}$$

alors

$$\varphi_k \xrightarrow{*} \varphi. \tag{11.630}$$

Démonstration. Soit une suite (φ_k) dans V', convergente vers φ pour la topologie de la norme. Soit $x \in V$, et $x' = x/\|x\|$. Nous avons

$$p_x(\varphi_k - \varphi) = \frac{1}{\|x\|}|\varphi_k(x') - \varphi(x)| \leqslant \frac{1}{\|x\|}\|\varphi_k - \varphi\| \to 0. \tag{11.631}$$

□

Lemme 11.209.
La translation dans V' est une opération continue pour la topologie de la norme opérateur et pour celle de la topologie $*$.

Démonstration. Soit une suite φ_k tendant vers 0; nous devons prouver que $\tau_\sigma(\varphi_k) \to \tau_\sigma(0) = \sigma$. Et ce, pour chacune des deux topologies.

(i) **Norme opérateur** L'hypothèse $\varphi_k \xrightarrow{\|.\|} 0$ signifie que $\|\varphi_k\| \to 0$, c'est-à-dire que

$$\sup_{\|v\|=1} |\varphi_k(v)| \to 0. \tag{11.632}$$

Nous avons alors

$$\|\tau_\sigma(\varphi_k) - \sigma\| = \sup_{\|v\|=1} |\tau_\sigma(\varphi_k)v - \sigma(v)| = \sup_{\|v\|=1} |\varphi_k(v)| \to 0. \tag{11.633}$$

Donc d'accord pour $\tau_\sigma(\varphi) \to \sigma$.

(ii) **Topologie $*$** Nous supposons maintenant que $\varphi_k \xrightarrow{*} 0$. Pour tout $v \in V$ nous avons

$$p_v\big(\tau_\sigma(\varphi_k) - \sigma\big) = \big|\tau_\sigma(\varphi_k)v - \sigma(v)\big| = |\varphi_k(v)| = p_v(\varphi_k). \tag{11.634}$$

Mais par hypothèse, $p_v(\varphi_k) \to 0$.

□

Pour la suite, nous allons préfixer par N les concepts liés à la topologie de V' associée à la norme opérateur et par $*$, les concepts de la topologie $*$.

Proposition 11.210.
Soit un espace vectoriel normé V. Un $*$-ouvert et toujours un N-ouvert.

Démonstration. Soit un $*$-ouvert $\mathcal{O}$ de V'. Il existe donc $x \in V$ et $r > 0$ tels que $B_x(\varphi, r) \subset \mathcal{O}$. Nous avons alors, en utilisant le lemme 11.207,

$$B(\varphi, r\|x\|) \subset B_x(\varphi, r) \subset \mathcal{O}. \tag{11.635}$$

Donc $\mathcal{O}$ est un N-ouvert. □

Corolaire 11.211.
Soit un espace topologique X. Si $f\colon (V', *) \to X$ est continue, alors $f\colon (V', \|.\|) \to X$ est continue.

Démonstration. Soit un ouvert $\mathcal{O}$ de X. Vu que f est $*$-continue, la partie $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un $*$-ouvert de V'. Il est onc un N-ouvert de V' par la proposition 11.210. □

11.14.2 Module de continuité

Définition 11.212.
*Soient deux espaces topologiques normés X et Y, ainsi qu'une application $f\colon X \to Y$. Le **module de continuité** de f est la fonction*

$$\begin{aligned} \omega_f\colon \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \\ h &\mapsto \sup_{\substack{x,y\in X\\ d_X(x,y)<h}} d_Y\big(f(x), f(y)\big). \end{aligned} \tag{11.636}$$

Écrite de façon plus compacte,

$$\omega_f(h) = \sup_{|x-y|<h} \|f(x) - f(y)\|. \tag{11.637}$$

Nous définissons aussi $\omega_f(h) = 0$ pour $h \leqslant 0$ parce que le lemme 11.214 fera grand cas de la continuité en zéro du module de continuité.

Notons que le module de continuité est une fonction croissante.

Lemme 11.213.
Soit $f \in C^0\big([0,1], \mathbb{C}\big)$ et ω son module de continuité. Si λ et h sont strictement positifs avec $\lambda h \in [0,1]$ alors

$$\phi(\lambda h) \leqslant (\lambda + 1)\omega(h). \tag{11.638}$$

Démonstration. La fonction ω est décroissante, et pour $h, k > 0$ nous avons $\omega(h+k) \leqslant \omega(h)+\omega(k)$. Par récurrence pour tout $k \in \mathbb{N}$ nous avons

$$\omega(kh) \leqslant k\omega(h). \tag{11.639}$$

En écrivant cela pour $k = \lceil\lambda\rceil$, nous avons

$$\omega(\lambda h) \leqslant \omega(kh) \leqslant k\omega(h) \leqslant (\lambda + 1)\omega(h). \tag{11.640}$$

□

Lemme 11.214.
Une fonction $f\colon X\to Y$ est uniformément continue[96] *si et seulement si son module de continuité vérifie*
$$\lim_{h\to 0}\omega_f(h)=0. \tag{11.641}$$
Autrement dit, si et seulement si sont module de continuité est continue en zéro.[97].

Démonstration. Nous commençons par supposer que f est uniformément continue. Soit $\epsilon>0$. Par uniforme continuité, il existe $\delta>0$ tel que $d\big(f(x),f(y)\big)\leqslant\epsilon$ dès que $d(x,y)\leqslant\delta$. Si $h\in B(0,\delta)$, alors
$$\omega_f(h)\leqslant\omega_f(\delta)=\sup_{\substack{x,y\in X\\ d(x,y)\leqslant\delta}} d\big(f(x),f(y)\big)\leqslant\epsilon. \tag{11.642}$$
Cela prouve que $\lim_{h\to 0}\omega_f(h)=0$.

Dans l'autre sens, si $\epsilon>0$ est fixé, il suffit de prendre δ tel que $\omega_f(h)\leqslant\epsilon$ pour tout $h\leqslant\delta$ pour faire fonctionner la définition de l'uniforme continuité. □

Lemme 11.215 ([296]).
Soient des espaces métriques E et E' et une suite de fonctions $(f_i)_{i\geqslant 0}$ qui converge uniformément vers f. Alors pour chaque $\delta>0$ nous avons
$$\limsup_{i\to\infty}\omega_{f_i}(\delta)\leqslant\omega_f(\delta). \tag{11.643}$$

Démonstration. Soient $\delta>0$ ainsi que $x,y\in E$ tels que $\|x-y\|\leqslant\delta$. Pour chaque i nous avons
$$\begin{aligned}|f_i(x)-f_i(y)|&\leqslant|f_i(x)-f(x)|+|f(x)-f(y)|+|f(y)-f_i(y)| &&(11.644a)\\ &\leqslant|f(x)-f(y)|+2\|f_i-f\|_\infty &&(11.644b)\\ &\leqslant\omega_f(\delta)+2\|f_i-f\|_\infty. &&(11.644c)\end{aligned}$$
Nous prenons le supremum de cela sur $\{x,y\in E \text{ tel que } \|x-y\|\leqslant\delta\}$ pour obtenir :
$$\omega_{f_i}(\delta)\leqslant\omega_f(\delta)+2\|f_i-f\|_\infty. \tag{11.645}$$
La tentation est grande à ce point de prendre la limite des deux côtés pour $i\to\infty$. Cependant, rien ne nous permet de dire que la suite $i\mapsto\omega_{f_i}(\delta)$ ait une limite. Nous pouvons cependant prendre la limite supérieures[98] et obtenir
$$\limsup_{i\to\infty}\omega_{f_i}(\delta)\leqslant\omega_f(\delta). \tag{11.646}$$
□

11.15 Mini introduction aux nombres p-adiques

11.15.1 La flèche d'Achille

C'est un grand classique que je donne ici juste comme introduction pour montrer que des séries infinies peuvent donner des nombres finis de manière tout à fait intuitive.

Achille tire une flèche vers un arbre situé à 10 m de lui. Disons que la flèche avance à une vitesse constante de 1 m/s. Il est clair que la flèche mettra 10 s pour toucher l'arbre. En 5 s, elle aura parcouru la moitié de son chemin. On le note :
$$\text{temps}=5s+\ldots$$

96. Définition 7.282.
97. Dans ce lemme, nous avons deux espaces métriques, mais nous allons noter d la distance des deux côtés.
98. Définition 10.38.

Reste 5 m à faire. En 2.5 s, elle aura fait la moitié de ce chemin chemin, soit $2.5m = \frac{10}{4}m$. On le note :

$$\text{temps} = \frac{10}{2}s + \frac{10}{4}s +$$

Reste $2.5m$ à faire. La moitié de ce trajet, soit $\frac{10}{8}m$, est parcouru en $\frac{10}{8}s$; on le note encore, mais c'est la dernière fois !

$$\text{temps} = \frac{10}{2}s + \frac{10}{4}s + \frac{10}{8}s +$$

En continuant ainsi à regarder la flèche qui parcours des demi-trajets puis des moitiés de demi-trajets et encore des moitiés de moitiés de demi-trajets, et en sachant que le temps total est $10s$, on trouve :

$$10\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\right) = 10.$$

On doit donc croire que la somme jusqu'à l'infini des inverses des puissances de deux vaut 1 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Cela peut être démontré à la loyale.

11.15.2 La tortue et Achille

Maintenant qu'on est convaincu que des sommes infinies peuvent représenter des nombres tout à fait normaux, passons à un truc plus marrant.

Achille, qui marche peinard à 10 m/h, part avec $1m$ d'avance sur une tortue qui avance à 1 m/h. Le temps que la tortue arrive au point de départ d'Achille, Achille aura parcouru $10m$, et le temps que la tortue mettra pour arriver à ce point, eh bien, Achille ne sera déjà plus là : il sera à $100m$. Si la tortue tient bon pendant un temps infini, et si l'on est confiant en le genre de raisonnements faits à la section 11.15.1, elle rattrapera Achille dans

$$1m + 10m + 100m + 1000m + \ldots$$

Autant dire que ça ne risque pas d'arriver. Et pourtant, mettons en équations :

$$\begin{cases} x_{\text{Achile}}(t) = 1 + 10t & (11.647\text{a}) \\ x_{\text{tortue}}(t) = t. & (11.647\text{b}) \end{cases}$$

La tortue rejoint Achille au temps t tel que $x_{\text{Achille}(t)} = x_{\text{tortue}}(t)$. Un mini calcul donne $t = -1/9$. Physiquement, c'est une situation logique. Peut-on en déduire une égalité mathématique du style de

$$1 + 10 + 100 + 1000 + \ldots = -\frac{1}{9} \text{ ???}$$

Là où les choses deviennent jolies, c'est quand on cherche à voir ce que peut bien être la valeur d'un hypothétique $x = 1 + 10 + 100 + 1000 + \ldots$. En effet, logiquement on devrait avoir

$$\begin{aligned} \frac{x}{10} &= \frac{1}{10} + 1 + 10 + 100 + \ldots \\ &= \frac{1}{10} + x. \end{aligned}$$

Reste à résoudre l'équation du premier degré : $\frac{x}{10} = x + \frac{1}{10}$. Ai-je besoin de donner la solution ?

11.15.3 Dans les nombres p-adiques, c'est vrai

Nous nous proposons d'apprendre sur les nombres p-adiques juste ce qu'il faut pour montrer que l'égalité
$$\sum_{k=0}^{\infty} 10^k = -\frac{1}{9} \tag{11.648}$$
est vraie dans les nombres 5-adiques. Tout ce qu'il faut est sur wikipedia.

Soit $a \in \mathbb{N}$ et p, un nombre premier. La **valuation** p-adique de a est l'exposant de p dans la décomposition de a en nombres premiers. On la note $v_p(a)$. Pour un rationnel on définit
$$v_p\left(\frac{a}{b}\right) = v_p(a) - v_p(b) \tag{11.649}$$
La **valeur absolue** p-adique de $r \in \mathbb{Q}$ est
$$|r|_p = p^{-v_p(r)}. \tag{11.650}$$
Nous posons $|0|_p = 0$. De là nous considérons la distance
$$d_p(x, y) = |x - y|_p. \tag{11.651}$$

Lemme 11.216.
L'espace $(\mathbb{Q}, d_p)$ est un espace métrique[99].

Nous considérons maintenant $p = 5$. Étant donné que $a = 5 \cdot 2$ nous avons $v_5(10) = 1$ et
$$v_5\left(\frac{1}{9}\right) = v_5(1) - v_5(9) = 0. \tag{11.652}$$
Nous avons
$$\sum_{k=0}^{N} 10^k + \frac{1}{9} = \frac{10^{N+1}}{9} \tag{11.653}$$
mais
$$v_p\left(\frac{10^{N+1}}{9}\right) = v_5(10^{N+1}) - v_5(9) = N + 1. \tag{11.654}$$
Par conséquent
$$d_5\big(\sum_{k=0}^{N} 10^k, -\frac{1}{9}\big) = |\frac{10^{N+1}}{9}|_p = p^{-(N+1)}. \tag{11.655}$$
En passant à la limite,
$$\lim_{N\to\infty} d_5\big(\sum_{k=0}^{N} 10^k, -\frac{1}{9}\big) = 0, \tag{11.656}$$
ce qui signifie que[100]
$$\sum_{k=0}^{\infty} 10^k = -\frac{1}{9}. \tag{11.657}$$

99. Définition 7.97
100. Voir la définition 11.77 de la convergence d'une série dans un espace métrique.

Chapitre 12

Analyse réelle : limites et dérivation

12.1 Limite de fonctions

12.1.1 Définition

La définition générale de la limite est 7.92. Dans le cas de fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, elle peut s'écrire de façon plus efficace. La proposition suivante montre comment fonctionne la limite pour une fonction définie sur tout $\mathbb{R}$.

Proposition 12.1 (Caractérisation de la limite)**.**
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. La fonction f admet la limite ℓ pour $x \to a$ si et seulement si il existe un réel ℓ tel que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon. \tag{12.1}$$

Démonstration. Il s'agit de montrer l'équivalence avec la définition 7.92. Nous allons faire un usage intensif de la proposition 7.99.

(i) **Sens direct** Soient $\epsilon > 0$ et $V = B(\ell, \epsilon)$. Alors il existe un voisinage W de a dans $\mathbb{R}$ tel que

$$f\big(W\backslash\{a\}\big) \subset V. \tag{12.2}$$

Soit δ tel que $B(a, \delta) \subset W$. Nous avons encore

$$f\big(B(a, \delta)\backslash\{a\}\big) \subset V. \tag{12.3}$$

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |x - a| < \delta$. Cela signifie $x \in B(a, \delta)\backslash\{a\}$. Pour un tel x nous avons donc $f(x) \in B(\ell, \epsilon)$, c'est-à-dire $|f(x) - \ell| < \epsilon$.

(ii) **Dans l'autre sens** Soient un voisinage V de ℓ et $\epsilon > 0$ tel que $B(\ell, \epsilon) \subset V$. Nous considérons δ tel que $|f(x) - \ell| < \epsilon$ pour tout x satisfaisant $0 < |x - a| < \delta$.
Avec tout cela nous posons $W = B(x, \delta)$, et nous avons

$$f\big(W\backslash\{a\}\big) \subset B(\ell, \alpha) \subset V. \tag{12.4}$$

□

Si aucun nombre ℓ ne vérifie la condition de la définition, alors on dit que la fonction n'admet pas de limite en a. Lorsque f possède la limite ℓ en a, nous notons

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell. \tag{12.5}$$

La proposition suivante a déjà été démontrée dans la proposition 7.95. Nous en donnons ici une démonstration adaptée au cas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Proposition 12.2.
Soit une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$. Si a est un point d'accumulation de D et si il existe une limite de f en a, alors il en existe une seule.

Démonstration. Nous prouvons qu'il ne peut pas exister deux nombres $\ell \neq \ell'$ vérifiant tous les deux la condition (12.1).

Soient ℓ et ℓ' deux limites de f au point a. Par définition, pour tout ϵ nous avons des nombres δ et δ' tels que

$$\begin{aligned} |x-a| < \delta &\Rightarrow \big|f(x)-\ell\big| < \epsilon \\ |x-a| < \delta' &\Rightarrow \big|f(x)-\ell'\big| < \epsilon \end{aligned} \tag{12.6}$$

Pour fixer les idées, supposons que $\delta < \delta'$ (le cas $\delta \geqslant \delta'$ se traite de la même manière).

Étant donné que a est un point d'accumulation du domaine D de f, il existe un $x \in D$ tel que $|x-a| < \delta$. Évidemment, nous avons aussi $|x-a| < \delta'$. Les conditions (12.6) signifient alors que ce x vérifie en même temps

$$|f(x)-\ell| < \epsilon, \tag{12.7}$$

et

$$|f(x)-\ell'| < \epsilon. \tag{12.8}$$

Afin de prouver que $\ell = \ell'$, nous allons maintenant calculer $|\ell - \ell'|$ et montrer que cette distance est plus petite que tout nombre. Nous avons (voir remarque 12.3)

$$|\ell-\ell'| = |\ell - f(x) + f(x) - \ell'| \leqslant |\ell - f(x)| + |f(x)-\ell'| < \epsilon + \epsilon. \tag{12.9}$$

En résumé, pour tout $\epsilon > 0$ nous avons

$$|\ell - \ell'| < 2\epsilon, \tag{12.10}$$

et donc $|\ell - \ell'| = 0$, ce qui signifie que $\ell = \ell'$. □

Remarque 12.3.
Les inégalités (12.9) utilisent deux techniques très classiques en analyse qu'il convient d'avoir bien compris. La première est de faire

$$|A-B| = |A-C+C-B|. \tag{12.11}$$

Il s'agit d'ajouter $-C+C$ dans la norme. Évidemment, cela ne change rien.

La seconde technique est l'inégalité

$$|A+B| \leqslant |A| + |B|. \tag{12.12}$$

Exemple 12.4.
Considérons la fonction $f(x) = 2x$, et calculons la limite $\lim_{x\to 3} f(x)$. Vu que $f(3) = 6$, nous nous attendons à avoir $\ell = 6$. C'est ce que nous allons prouver maintenant. Pour chaque $\epsilon > 0$ nous devons trouver un $\delta > 0$ tel que $|x-3| < \delta$ implique $|f(x)-6| < \epsilon$. En remplaçant $f(x)$ par sa valeur en fonction de x et avec quelques manipulations nous trouvons :

$$\begin{aligned} |f(x)-6| &< \epsilon \\ |2x-6| &< \epsilon \\ 2|x-3| &< \epsilon \\ |x-3| &< \frac{\epsilon}{2} \end{aligned} \tag{12.13}$$

Donc dès que $|x-3| < \frac{\epsilon}{2}$, nous avons $|f(x)-6| < \epsilon$. Nous posons donc $\delta = \frac{\epsilon}{2}$.

Plus généralement, nous avons $\lim_{x\to a} f(x) = 2a$, et cela se prouve en étudiant $|f(x)-2a|$ exactement de la même manière. △

12.1.2 Quelques règles de calcul

Les opérations simples passent à la limite, sauf la division pour laquelle il faut faire attention au dénominateur.

Proposition 12.5.
Soient f et g deux fonctions telles que $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$. Alors

(1) La fonction $f + g$ a une limite $x \to a$ qui vaut $\lim_{x\to a}(f + g)(x) = \alpha + \beta$,

(2) La fonction fg a une limite en a, qui vaut $\lim_{x\to a}(fg)(x) = \alpha\beta$,

(3) si il existe un voisinage de a sur lequel g ne s'annule pas, alors la fonction f/g a une limite en a qui vaut $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$.

Le résultat suivant est pratique pour le calcul des limites.

Proposition 12.6.
Quand la limite existe, nous avons

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{\epsilon\to 0} f(a + \epsilon),$$

ce qui correspond à un « changement de variables » dans la limite.

Démonstration. Si $A = \lim_{x\to a} f(x)$, par définition,

$$\forall\epsilon' > 0,\ \exists\delta \text{ tel que } |x - a| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - A| \leqslant \epsilon'. \tag{12.14}$$

La seule subtilité de la démonstration est de remarquer que si $|x - a| \leqslant \delta$, alors x peut être écrit sous la forme $x = a + \epsilon$ pour un certain $|\epsilon| \leqslant \delta$. En remplaçant x par $a + \epsilon$ dans la condition 12.14, nous trouvons

$$\forall\epsilon' > 0,\ \exists\delta \text{ tel que } |\epsilon| \leqslant \delta \Rightarrow |f(a + \epsilon) - A| \leqslant \epsilon', \tag{12.15}$$

ce qui signifie exactement que $\lim_{\epsilon\to 0} f(a + \epsilon) = A$. □

Il y a une petite différence de point de vue entre $\lim_{x\to a} f(x)$ et $\lim_{\epsilon\to 0} f(a+\epsilon)$. Dans le premier cas, on considère $f(x)$, et on regarde ce qu'il se passe quand x se rapproche de a, tandis que dans le second, on considère $f(a)$, et on regarde ce qu'il se passe quand on s'éloigne un tout petit peu de a. Dans un cas, on s'approche très près de a, et dans l'autre on s'en éloigne un tout petit peu. Le contenu de la proposition 12.6 est de dire que ces deux points de vue sont équivalents.

En plus d'être linéaire, la limite possède les deux propriétés suivantes.

Proposition 12.7.
Si f et g sont deux fonctions qui admettent une limite en a, alors

$$\lim_{x\to a}(fg)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x). \tag{12.16}$$

Si de plus $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, alors

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}. \tag{12.17}$$

Théorème 12.8.
Si

$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \tag{12.18}$$

alors

$$\lim_{x\to a}(\lambda f)(x) = \lambda b \tag{12.19}$$

pour n'importe quel $\lambda \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Afin de prouver la propriété (12.19), il faut trouver un δ tel que pour tout x dans $[a-\delta, a+\delta]$, on ait $|(\lambda f)(x) - \lambda b| \leqslant \epsilon$. Cette dernière inégalité est équivalente à $|\lambda||f(x) - b| \leqslant \epsilon$. Nous devons donc trouver un δ tel que

$$|f(x) - b| \leqslant \frac{\epsilon}{|\lambda|}. \tag{12.20}$$

soit vraie pour tout x dans $[a-\delta, a+\delta]$. Mais l'hypothèse (12.18) dit précisément qu'il existe un δ tel que pour tout x dans $[a-\delta, a+\delta]$ on ait cette inégalité. □

Théorème 12.9.
Si

$$\lim_{x\to a} f(x) = b_1 \tag{12.21a}$$
$$\lim_{x\to a} g(x) = b_2, \tag{12.21b}$$

alors

$$\lim_{x\to a} (f+g)(x) = b_1 + b_2. \tag{12.22}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe δ_1 tel que

$$|f(x) - b_1| \leqslant \frac{\epsilon}{2} \tag{12.23}$$

dès que $|x-a| \leqslant \delta_1$. Il existe aussi δ_2 tel que

$$|g(x) - b_2| \leqslant \frac{\epsilon}{2}. \tag{12.24}$$

dès que $|x-a| \leqslant \delta_2$. Notons l'astuce de prendre $\epsilon/2$ dans la définition de limite pour f et g. Maintenant, ce qu'on voudrait c'est un δ tel que l'on ait $|(f+g)(x) - (b_1+b_2)| \leqslant \epsilon$ dès que $|x-a| \leqslant \delta$. Constatons que $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ fonctionne. En effet, en utilisant l'inégalité $|a+b| \leqslant |a| + |b|$, nous trouvons :

$$|(f+g)(x) - (b_1+b_2)| = |(f(x) - b_1) + (g(x) - b_2)| \leqslant |f(x) - b_1| + |g(x) - b_2|. \tag{12.25}$$

Comme on suppose que $|x-a| \leqslant \delta$, on a évidemment $|x-a| \leqslant \delta_1$, et donc l'équation (12.23) tient. Mais si $|x-a| \leqslant \delta$, on a aussi $|x-a| \leqslant \delta_2$, et donc l'équation (12.24) tient également. Chacun des deux termes de (12.25) est donc plus petits que $\epsilon/2$, et donc, le tout, est plus petit que ϵ, ce qu'il fallait montrer. □

Proposition 12.10.
La limite est linéaire : pour toutes fonctions f et g admettant une limite en a et pour tout réels λ et μ.

$$\lim_{x\to a} (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda \lim_{x\to a} f(x) + \mu \lim_{x\to a} g(x). \tag{12.26}$$

Démonstration. Il s'agit seulement des deux propriétés des théorèmes 12.8 et 12.9. □

Lemme 12.11.
Soient un espace vectoriel normé E ainsi qu'une fonction $f\colon \mathbb{R} \to E$ telle que $\lim_{t\to 0} f(t) = v$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ nous avons

$$\lim_{t\to 0} f(\lambda t) = v. \tag{12.27}$$

Démonstration. Nous utilisons la caractérisation (12.1) de la limite. Soit $\epsilon > 0$. Soit $\delta > 0$ tel que $\|f(t) - v\| < \epsilon$ pour tout $|t| < \delta$. Nous considérons alors $\delta' = \delta/|\lambda|$.

Si $|t| < \delta'$, alors $|\lambda t| < \delta$ et nous avons bien $\|f(\lambda t) - v\| < \epsilon$. □

Proposition 12.12 ([272]).
Soient des fonctions $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to a} g(x) = \ell' \neq 0$. Alors

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{\ell'}. \tag{12.28}$$

Démonstration. Nous avons :

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\ell}{\ell'}\right| = \frac{|\ell' f(x) - g(x)\ell|}{|g(x)\ell'|}. \tag{12.29}$$

Soit s, un minorant de $|g(x)|$ sur un voisinage de a ; puisque la limite en a est $\ell' \neq 0$, nous pouvons prendre par exemple $s = \ell'/2$: $|g(x)| > \ell'/2$ sur $B(a, \delta)$ dès que δ est assez petit. Nous considérons $x \in B(a, \delta)$. Avec cela nous avons :

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\ell}{\ell'}\right| = \frac{|\ell' f(x) - g(x)\ell|}{|g(x)\ell'|} \tag{12.30a}$$
$$\leqslant \frac{2}{|\ell'|}\left(\frac{|\ell' f(x) - g(x)\ell|}{|\ell'|}\right) \tag{12.30b}$$
$$\leqslant \frac{2}{|\ell'|^2}\big(|\ell' f(x) - \ell\ell'| + |\ell\ell' - g(x)\ell|\big) \tag{12.30c}$$
$$= \frac{2}{|\ell'|^2}\big(|\ell'||f(x) - \ell| + |\ell||\ell' - g(x)|\big). \tag{12.30d}$$

Nous avons utilisé la règle du produit de valeurs absolues du lemme 1.322(7).

Soient $\epsilon > 0$ et δ tel que $|f(x) - \ell| < \epsilon$ et $|g(x) - \ell'| < \epsilon$ pour tout $x \in B(a, \delta)$. Avec cela nous avons

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\ell}{\ell'}\right| \leqslant \frac{2}{|\ell'|^2\big(|\ell'| + |\ell|\big)}\epsilon. \tag{12.31}$$

D'où la limite attendue. □

Lemme 12.13.
Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors il existe un $\delta > 0$ et un $M > 0$ tels que

$$(|x - a| \leqslant \delta) \Rightarrow |f(x)| \leqslant M.$$

Ce que signifie ce lemme, c'est que quand la fonction f admet une limite finie en un point, alors il est possible de majorer la fonction sur un intervalle autour du point.

Démonstration. Cela va être démontré par l'absurde. Supposons qu'il n'existe pas de δ ni de M qui vérifient la condition. Dans ce cas, pour tout δ et pour tout M, il existe un x tel que $|x-a| \leqslant \delta$ et $|f(x)| > M$. Ceci est valable pour tout M, donc, prenons par exemple, $b + 1000$. Ainsi

$$\forall \delta > 0, \exists x \text{ tel que } |x - a| \leqslant \delta \text{ et } |f(x)| > b + 1000. \tag{12.32}$$

Cela signifie qu'aucun δ ne peut convenir dans la définition de $\lim_{x\to a} f(x) = b$, ce qui contredit les hypothèses. □

Dans le même ordre d'idée, on peut prouver que si la limite de la fonction en un point est positive, alors elle est positive autour de ce point. Plus précisément, nous avons la proposition suivante.

Proposition 12.14.
Si f est une fonction telle que $\lim_{x\to a} f(x) > 0$, alors il existe un voisinage de a sur lequel f est positive.

Démonstration. Supposons que $\lim_{x\to a} f(x) = y_0$. Par la définition de la limite, nous avons pour tout x dans un voisinage autour de a, $|f(x) - a| < \epsilon$. Ceci est valable pour tout ϵ, pourvu que le voisinage soit assez petit. Si nous choisissons un voisinage pour lequel $|f(x) - a| < \frac{y_0}{2}$, alors, sur ce voisinage, f est positive. □

Théorème 12.15.
Si

$$\lim_{x\to a} f(x) = b_1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = b_2, \tag{12.33}$$

alors

$$\lim_{x\to a}(fg)(x) = b_1 b_2. \tag{12.34}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$, et tentons de trouver un δ tel que $|f(x)g(x) - b_1b_2| \leqslant \epsilon$ dès que $|x - a| \leqslant \delta$. Nous avons

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - b_1b_2| &= |f(x)g(x) - b_1b_2 + f(x)b_2 - f(x)b_2| \\ &= \big|f(x)\big(g(x) - b_2\big) + b_2\big(f(x) - b_1\big)\big| \\ &\leqslant \big|f(x)\big(g(x) - b_2\big)\big| + \big|b_2\big(f(x) - b_1\big)\big| \\ &= |f(x)||g(x) - b_2| + |b_2||f(x) - b_1|. \end{aligned} \tag{12.35}$$

Maintenant, nous savons par le lemme 12.13 que pour un certain δ_1, la quantité $|f(x)|$ peut être majorée par un certain M dès que $|x-a| \leqslant \delta_1$. Prenons donc un tel δ_1, et supposons que $|x-a| \leqslant \delta_1$. Nous savons aussi que pour n'importe quel choix de ϵ_2 et ϵ_3, il existe des nombres δ_2 et δ_3 tels que $|f(x) - b_1| \leqslant \epsilon_2$ et $|g(x) - b_1| \leqslant \epsilon_3$ dès que $|x - a| \leqslant \delta_2$ et $|x - a| \leqslant \delta_3$. Dans ces conditions, la dernière expression (12.35) se réduit à

$$|f(x)g(x) - b_1b_2| \leqslant M\epsilon_2 + |b_2|\epsilon_3. \tag{12.36}$$

Pour terminer la preuve, il suffit de choisir ϵ_2 et ϵ_3 tels que $M\epsilon_2 + |b_2|\epsilon_3 \leqslant \epsilon$, et puis prendre $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$.

Remettons les choses dans l'ordre. On se donne un ϵ au départ. La première chose est de trouver un δ_1 qui permette de majorer $|f(x)|$ par M selon le lemme 12.13, et puis, choisissons ϵ_2 et ϵ_3 tels que $M\epsilon_2 + |b_2|\epsilon_3 \leqslant \epsilon$. Ensuite, nous prenons, en vertu des hypothèses de limites pour f et g, les nombres δ_2 et δ_3 tels que $|f(x) - b_1| \leqslant \epsilon_2$ et $|g(x) - b_2| \leqslant \epsilon_3$ dès que $|x - a| \leqslant \delta_2$ et $|x - a| \leqslant \delta_3$.

Si avec tout ça on prend $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, alors la majoration et les deux inégalités sont valables en même temps, et au final

$$|f(x)g(x) - b_1b_2| \leqslant M\epsilon_2 + |b_2|\epsilon_3 \leqslant \epsilon,$$

ce qu'il fallait prouver. □

À l'aide de ces petits résultats, nous pouvons déjà calculer pas mal de limites. Nous pouvons déjà par exemple, calculer les limites de tous les polynômes en tous les nombres réels. En effet, nous connaissons la limite de la fonction $f(x) = x$. La fonction $x \mapsto x^2$ n'est rien d'autre que le produit de f par elle-même. Donc

$$\lim_{x\to a} x^2 = \big(\lim_{x\to a} x\big) \cdot \big(\lim_{x\to a} x\big) = a^2.$$

De la même façon, nous trouvons facilement que

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n. \tag{12.37}$$

Lemme 12.16.
Soit $t \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \operatorname{int}(xt) = t \tag{12.38}$$

où int *est la fonction partie entière définie en 1.406.*

Démonstration. En vertu du lemme 1.406, nous avons $y = \mathrm{int}(y) + \mathrm{frac}(y)$ avec $\mathrm{frac}(y) \in [0, 1[$. Nous avons donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\,\mathrm{int}(xt) &= \frac{1}{x}\big(xt - \mathrm{frac}(xt)\big) && (12.39a)\\ &= \frac{xt}{x} + \frac{\mathrm{frac}(xt)}{x} && (12.39b)\\ &= t + \frac{\mathrm{frac}(xt)}{x}. && (12.39c)\end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{frac}(xt) \in [0, 1[$, nous avons

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{frac}(xt)}{x} = 0. \tag{12.40}$$

D'où la limite demandée. □

12.2 Limites pointées et épointées

La limite d'une fonction en un point a déjà été définie en 7.92. Nous introduisons maintenant une notion très ressemblante.

Définition 12.17 (limite pointée[297])**.**
*Soient X et Y deux espaces topologiques, A une partie de X, f une application de A dans Y, a un point de X adhérent à A et ℓ un point de Y. On dit que ℓ est une **limite pointée** de f au point a si pour tout voisinage V de ℓ, il existe un voisinage W de a tel que pour tout point x de $W \cap A$, l'image $f(x)$ appartient à V.*

Quelques notations et vocabulaire.

(1) Nous allons limiter notre discussion au cas des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
(2) La limite de la définition 7.92 sera provisoirement nommée **limite épointée**, pour ne pas causer de confusion.
(3) Pour bien distinguer la limite pointée de la limite épointée, nous allons noter $LP_{x\to a} f(x)$ pour la limite pointée et $LE_{x\to a} f(x)$ pour la limite épointée.
(4) Nous allons utiliser la caractérisation 10.73 de la continuité de f en un point.
(5) Nous allons utiliser la caractérisation 12.1 de la limite épointée.

Lemme 12.18.
Si une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie $LP_{x\to a} f(x) = \ell$, alors elle vérifie $LE_{x\to a} f(x) = \ell$.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. L'existence de la limite pointée dit qu'il existe $\delta > 0$ tel que $|x - a| < \delta$ implique $|f(x) - \ell| < \epsilon$. À fortiori, si $0 < |x - a| < \delta$ nous avons aussi $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Donc la limite épointée, par la caractérisation 12.1. □

La réciproque n'est pas vraie, comme le montre le lemme suivant.

Lemme 12.19 ([298])**.**
Soit la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0\\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}\end{aligned} \tag{12.41}$$

Nous avons

(1) $LE_{x\to 0} f(x) = 0$.
(2) La limite pointée de f en 0 n'existe pas.

Démonstration. En deux parties.

(i) **Pour (1)** Pour tout $x \in B(0,\delta)\backslash\{0\}$ nous avons $f(x) = 0$. Donc la limite épointée suit.

(ii) **Pour (2)** Soit $\delta > 0$. Le lemme 1.375 nous assure qu'il existe $x \in]-\delta, 0[$. Ce x est dans $B(0,\delta)$ et vérifie $f(x) = 0$. Nous avons aussi $x = 0$ dans la même boule. Donc $f\big(B(0,\delta)\big)$ contient au moins les nombres 1 et 0.

Il n'existe donc pas de ℓ tel que tout $f\big(B(0,\delta)\big)$ soit dans $B(\ell,\epsilon)$.

□

Lemme 12.20.
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}\backslash\{a\} \to \mathbb{R}$. Alors la limite pointée de f en a existe si et seulement si la limite épointée existe. Dans ce cas, elles sont égales.

Démonstration. En trois parties. Nous notons $\Omega = \mathbb{R}\backslash\{a\}$ le domaine de f.

(i) **Si la limite pointée existe, alors l'épointée existe** Soit $\epsilon > 0$. L'existence de la limite pointée dit qu'il existe $\delta > 0$ tel que $f\big(B(a,\delta) \cap \Omega\big) \subset B(\ell,\epsilon)$. Comme $B(a,\delta) \cap \Omega = B(a,\delta)\backslash\{a\}$, nous avons la condition épointée.

(ii) **Si la limite épointée existe, alors la pointée existe** Du même tonneau.

(iii) **Égalité** Le jeu des boules du premier point prouve l'égalité au passage.

□

Que faut-il donc ajouter à la limite épointé pour obtenir une limite pointée ? Réponse dans le lemme suivant.

Lemme 12.21.
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nous avons

$$LP_{x\to a} f(x) = \ell \tag{12.42}$$

si et seulement si les deux conditions suivantes sont réunies :

(1) $LE_{x\to a} f(x) = \ell$

(2) Soit f n'existe pas en a, soit f est continue en a.

Démonstration. En deux parties.

(i) $\Rightarrow$ L'existence d'une limite pointée implique celle de la limite épointée, et l'égalité entre les deux. Donc $LE_{x\to a} f(x) = \ell$. Supposons que f existe en a. Soit $\epsilon > 0$. L'existence d'une limite pointée signifie qu'il existe $\delta > 0$ tel que $|x - a| < \delta$ implique $|f(x) - \ell| < \epsilon$.

En particulier avec $x = a$ nous avons $|f(a) - \ell| < \epsilon$ pour tout ϵ. Donc $f(a) = \ell$.

(ii) $\Leftarrow$ Nous supposons que $LE_{x\to a} f(x) = \ell$. Si f n'existe pas en a, alors les limites pointée et épointée coïncident [1]. Si par contre f existe en a et $f(a) = \ell$, alors nous travaillons.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $x \in B(a,\delta)\backslash\{a\}$ implique $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Mais si $x = a$ nous avons $|f(x) - \ell| = 0 < \epsilon$. Au final nous avons $|f(x) - \ell| < \epsilon$ pour tout $x \in B(a,\delta)$. Donc $LP_{x\to a} f(x) = \ell$.

□

Lemme 12.22 (limite et continuité)**.**
Supposons que $LE_{x\to a} f(x) = \ell$ et que f est continue en a. Alors $f(a) = \ell$.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. L'hypothèse sur la limite dit qu'il existe $\delta_1 > 0$ tel que $0 < |x - a| < \delta_1$ implique $|f(x) - \ell| < \epsilon$.

L'hypothèse de continuité, avec la caractérisation 10.73, dit qu'il existe $\delta_2 > 0$ tel que $|x - a| < \delta_2$ implique $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

1. Lemme 12.20.

Nous considérons un $\delta > 0$ plus petit que δ_1 et que δ_2. Soit aussi un x satisfaisant $0 < |x-a| < \delta$. Nous avons

$$|f(a) - \ell| \leqslant |f(a) - f(x)| + |f(x) - \ell| \leqslant 2\epsilon. \tag{12.43}$$

Puisque cela est valide pour tout x, nous déduisons que $f(a) = \ell$. □

12.2.1 Théorèmes de composition de limites

La proposition suivante formalise le fait que la limite pointée soit stable par composition.

Théorème 12.23.
Soient des fonctions $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ avec $\Omega \subset \mathbb{R}$ telles que

(1) $LP_{x\to a} g(x) = \ell$

(2) $LP_{y\to\ell} f(y) = b$.

(3) $g(\mathbb{R}) \subset \Omega$

Alors

$$LP_{x\to a}(f \circ g)(x) = b. \tag{12.44}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. L'hypothèse de limite pour f donne $\eta > 0$ tel que

$$|y - \ell| < \eta \Rightarrow |f(y) - b| < \epsilon. \tag{12.45}$$

Soit $\delta > 0$ tel que $|x - a| < \delta$ implique $|g(x) - \ell| < \eta$.

Avec tout ça, si $|x - a| < \delta$ nous avons $|g(x) - \ell| < \eta$ et en appliquant l'implication (12.45) à $y = g(x)$ nous trouvons $|f\big(g(x)\big) - b| < \epsilon$. □

Le théorème suivant, qui traite de la composition de limites pointées, montre que la limite épointée ne passe pas gratuitement à la composition.

Théorème 12.24.
Soient des fonctions $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ avec $\Omega \subset \mathbb{R}$ telles que

(1) $LE_{x\to a} g(x) = \ell$

(2) $LE_{y\to\ell} f(y) = b$.

(3) $g(\mathbb{R}) \subset \Omega$

(4) Soit $\ell \notin \Omega$, soit f est continue en ℓ.

Alors

$$LE_{x\to a}(f \circ g)(x) = b. \tag{12.46}$$

Démonstration. Nous notons Ω le domaine de f. Ce sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}\backslash\{\ell\}$ selon le cas traité dans (4).

Soit $\epsilon > 0$. L'hypothèse de limite épointée pour f nous dit qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$y \in \Omega \cap B(\ell, \eta)\backslash\{\ell\} \tag{12.47}$$

implique $|f(y) - b| < \epsilon$.

L'hypothèse de limite épointée pour g, appliquée à ce η dit qu'il existe $\delta > 0$ tel que $0 < |x - a| < \delta$ implique $|g(x) - \ell| < \eta$.

(i) **Si f n'existe pas en ℓ** Supposons avoir $0 < |x - a| < \eta$. Alors nous avons $|g(x) - \ell| < \delta$. Notons qu'il est impossible d'avoir $g(x) = \ell$ parce que nous avons supposé $g(\mathbb{R}) \subset \Omega$ et que ℓ n'est pas dans Ω.

Nous avons quand même $0 < |g(x) - \ell| < \delta$. La condition de limite pour f appliquée à $y = g(x)$ donne alors $|f\big(g(x)\big) - b| < \epsilon$, ce qui signifie la limite épointée (12.46).

(ii) **Si f est continue en ℓ** Le lemme 12.22 dit qu'alors $f(\ell) = b$. L'hypothèse de limite épointée sur f dit que

$$0 < |y - \ell| < \eta \Rightarrow |f(y) - b| < \epsilon. \tag{12.48}$$

Mais puisque $f(\ell) = b$, nous avons en réalité

$$|y - \ell| < \eta \Rightarrow |f(y) - b| < \epsilon. \tag{12.49}$$

Supposons donc que $0 < |x - a| < \delta$. Alors $|g(x) - \ell| < \eta$. En appliquant (12.49) à $y = g(x)$ nous trouvons

$$|f(y) - b| < \epsilon. \tag{12.50}$$

□

12.25.
Les deux théorèmes sont incomplets. En effet, le théorème « pointé » 12.23 ne traite pas le cas où seules des limite épointées existent. Il est donc moins général que le théorème « épointé » 12.24. En contrepartie, le théorème « épointé » ne parvient pas à conclure à l'existence d'une limite pointée dans le cas où elle existe. Sa conclusion est donc moins forte.

Nous devons donc nous atteler à écrire un théorème qui traite tous les cas en obtenant la conclusion la plus forte possible dans chaque cas. Nous allons supposer que

$$\begin{cases} LE_{x\to a} g(x) = \ell & (12.51a)\\ LE_{y\to \ell} f(y) = b. & (12.51b)\end{cases}$$

Ensuite, les différents cas seront divisés selon quatre critères :

(1) g existe en a ou pas.

(2) f existe en ℓ ou pas.

(3) g est continue ou pas en a.

(4) f est continue ou pas en ℓ.

Cela fait $2^4 = 16$ combinaisons. Heureusement certaines sont impossibles : si une fonction n'existe pas en un point, elle ne peut pas y être continue.

Nous avons donc 9 cas résumés dans le théorème suivant.

$g(a)$	1	1	1	1	1	1	0	0	0
$f(\ell)$	1	1	1	1	0	0	1	1	0
$g \in C^0$	1	1	0	0	1	0	0	0	0
$f \in C^0$	1	0	1	0	0	0	1	0	0

(12.52)

Théorème 12.26 ([1]).
Soient des fonctions f et g telles que

$$\begin{cases} LE_{x\to a} g(x) = \ell & (12.53a)\\ LE_{y\to \ell} f(y) = b. & (12.53b)\end{cases}$$

(1) Si f est continue en ℓ et si g est continue en a, alors $f \circ g$ est continue en a.

(2) Nous supposons :

(2a) g définie en a

(2b) f définie en ℓ

(2c) g continue en a

(2d) f non continue en ℓ.

Alors nous ne disons rien.

(3) Nous supposons :

(3a) g définie en a

(3b) f définie en ℓ

(3c) g non continue en a

(3d) f continue en ℓ.

Alors $LE_{x\to a}(f\circ g)(x) = b$.

(4) *Nous supposons :*

(4a) g définie en a

(4b) f définie en ℓ

(4c) g non continue en a

(4d) f non continue en ℓ.

Alors nous ne disons rien.

(5) *Nous supposons :*

(5a) g définie en a

(5b) f non définie en ℓ

(5c) g continue en a

(5d) f non continue en ℓ.

Alors $LE_{x\to a}(f\circ g)(x) = b$.

(6) *Nous supposons :*

(6a) g définie en a

(6b) f non définie en ℓ

(6c) g non continue en a

(6d) f non continue en ℓ.

Alors $LE_{x\to a}(f\circ g)(x) = b$.

(7) *Nous supposons :*

(7a) g non définie en a

(7b) f définie en ℓ

(7c) g non continue en a

(7d) f continue en ℓ.

Alors $LE_{x\to a}(f\circ g)(x) = b$.

(8) *Nous supposons :*

(8a) g non définie en a

(8b) f définie en ℓ

(8c) g non continue en a

(8d) f non continue en ℓ.

Alors nous ne disons rien.

(9) *Nous supposons :*

(9a) g non définie en a

(9b) f non définie en ℓ

(9c) g non continue en a

(9d) f non continue en ℓ.

Alors $LE_{x\to a}(f\circ g)(x) = b$.

Démonstration. Cas par cas.

(i) **Cas (1)** C'est le théorème 10.78 de composition de la continuité.

(ii) **Cas (2)** l'exemple du lemme 12.19.

(iii) **Cas (3)** Théorème 12.24.

(iv) **Cas (4)** Le contre-exemple dans ce cas est $g = \mathbb{1}_0$ et $f = \mathbb{1}_0$.

(v) **Cas (5)** Théorème 12.24.

(vi) **Cas (6)** Théorème 12.24.

(vii) **Cas (7)** Théorème 12.24.

(viii) **Cas (8)** Contre-exemple, un peu artificiel, avec $g(x) = \frac{\mathbb{1}_0(x)}{x}$. C'est une fonction qui vaut 0 partout sauf en 0 où elle n'existe pas. Ensuite pour f, nous prenons l'indicatrice de $\{0\}$: $f = \mathbb{1}_0$. Pour tout $x \neq 0$ nous avons

$$(f \circ g)(x) = \mathbb{1}_0\left(\frac{\mathbb{1}_0(x)}{x}\right) = \mathbb{1}_0(0) = 1. \tag{12.54}$$

Donc $LE_{x\to 0}(f \circ g)(x) = 1$.
Mais nous avons pourtant

$$\begin{cases} LE_{x\to 0} g(x) = 0 & (12.55a)\\ LE_{y\to 0} f(x) = 0. & (12.55b)\end{cases}$$

(ix) **Cas (9)** Théorème 12.24.

□

12.2.2 Discussion pointée Vs épointée

Résumé :

(1) Dans l'éducation nationale et dans les programmes en France, c'est la limite pointée qui est donnée.
(2) Dans le Frido ce sera la limite épointée. Autrement dit, nous réserverons la notation lim et le mot « limite » pour la limite épointée.
(3) De toutes façons, ça ne change pratiquement rien nulle part. Vous pourriez terminer l'agrégation sans vous en rendre compte. Vous pouvez sauter toute la discussion et reprendre une vie normale.

Le débat pour savoir quelle est la « meilleure » notion déjà fait couler de nombreux octets[299, 300, 298, 301, 302].

12.2.2.1 La limite pointée est plus simple au départ

Il est vrai que la limite pointée est plus simple de premier abord.

12.2.2.2 Le théorème de composition

Le théorème de composition des limites pointées 12.23 est plus propre que le théorème de composition épointé 12.24. Intuitivement, on voudrait que la limite d'une fonction composée soit la composée des limites. Et ça c'est vrai pour la limite pointée, pas pour l'épointée.

12.2.2.3 Limite d'une fonction discontinue mais qui existe

Que pensez-vous que la limite en l'infini de la fonction suivante « devrait » être ?

$$\begin{aligned} f\colon [0,\infty] &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq \infty\\ 0 & \text{si } x = \infty \end{cases}\end{aligned} \tag{12.56}$$

Là, tant que x s'approche de ∞ sans l'atteindre, il n'y a vraiment que de la croissance à perte de vue ; jusqu'à l'horizon et au-delà.

On pourrait faire la même remarque avec la fonction indicatrice de $\{0\}$. Qu'est-ce que la limite en zéro « devrait » être ?

12.2.2.4 Point d'étape

Aucune des deux limites ne donne le résultat « attendu » dans les deux cas. Toutes deux font une chose bien, et une chose pas bien.

12.2.2.5 Limite d'une fonction discontinue mais qui existe

Prenons la fonction indicatrice de $\{0\}$:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{12.57}$$

En utilisant la limite pointée, on peut exprimer deux choses :

— la limite pointée en zéro n'existe pas

— la fonction n'est pas continue en zéro.

En utilisant la limite épointée, on peut exprimer deux choses :

— la limite épointée en zéro existe et vaut zéro.

— la fonction n'est pas continue en zéro.

La première paire d'informations est compatible avec la fonction $1/x$. Autrement dit, la valeur « inattendue » que prend f en zéro casse tout ce qu'on aurait pu dire sur un voisinage de zéro.

La seconde paire d'informations donne au moins une idée de ce qu'il se passe autour de zéro. On peut en déduire, par exemple, que f est intégrable sur un voisinage de zéro parce qu'elle y est bornée et que la valeur en un point ne fait rien à l'intégrabilité [2].

12.2.2.6 L'enseignement du cas précédent

La limite épointée donne une information sur ce qu'il se passe « autour » du point sans rien dire de ce qu'il se passe « sur » le point. Si nécessaire, la continuité complète l'information en précisant ce qu'il se passe « sur » le point.

Certaines questions n'ont pas besoin de savoir ce qu'il se passe en un seul point.

La limite épointée « refuse » de dire ce qu'il se passe autour du point parce qu'il y a un problème juste sur ledit point. Un seul point se comporte mal et tout le voisinage passe sous le radar.

12.2.2.7 La limite épointée est plus riche

La classe des fonction admettant une limite pointée est plus grande que celle admettant une limite épointée (lemme 12.18). L'utilisation de la limite épointée permet de décrire quelques cas supplémentaires par rapport à ce que l'on peut faire seulement avec la limite pointée.

Pour être plus précis, comme je le disait précédemment, en 12.25, aucune des deux notions n'est satisfaisante seule :

— mettez de la limite pointée dans les hypothèses, vous aurez un théorème moins général ;

— mettez de la limite pointée dans la thèse, vous aurez un résultat plus fort.

Le vrai intérêt de la limite épointée est que *en combinaison avec la notion de continuité* permet d'être plus général et plus précis que ce qu'on peut obtenir avec la limite pointée. Dit autrement, le couple (limite épointée, continuité) est plus fort que le couple (limite pointée, continuité).

D'un certain point de vue, oui, la limite pointée est plus simple, mais elle est plus simple parce qu'elle donne moins d'informations.

12.2.2.8 Retour sur le théorème de composition

Le *vrai* théorème de composition est le théorème 12.26. Lui, il passe en revue tous les cas possibles et donne le plus de conclusions possibles dans chaque cas.

Ce théorème s'exprime de façon à peu près convenable à l'aide de limite épointée et de continuité. J'attends de voir le même avec une limite pointée et la continuité.

2. Peut-être qu'il faut ajouter que f est mesurable ? Mais peut-être que l'existence de la limite implique la mesurabilité ? Dites-moi ce que vous en pensez.

Je suis très ouvert à la discussion si c'est pour avoir quelque chose de plus simple produisant les mêmes résultats. Je ne suis par contre pas très ouvert pour avoir quelque chose de plus simple, mais donnant moins de résultats. C'est toujours facile d'avoir des résultats plus courts, plus simples et plus intuitifs quand on se contente de moins.

12.2.2.9 En français

La limite épointée rend l'idée de « s'approcher sans atteindre ». En français l'expression « être à la limite de tel résultat » signifie le plus souvent être très proche du résultat, mais ne pas y être.

12.2.2.10 La question est pédagogique

Tant qu'on ne m'a pas montré comment on exprime le théorème de composition 12.26 avec des limites pointées, je resterai sur cette idée : la limite pointée est plus simple, mais elle dit moins.

Cela n'est cependant pas spécialement bloquant. Après tout, ça dépend de ce qu'on veut. D'un point de vue pédagogique, la limite pointée introduit autant de ϵ et de δ qu'on le veut, et permet d'introduire tous les concepts utiles en analyse.

La question est de savoir à quel point on est prêt à se compliquer la vie pour avoir des théorèmes un micro-cheveu plus complets. Le choix du Frido est de recevoir la difficulté avec résignation et de l'endurer avec courage, pour le plaisir d'avoir des théorèmes qui donnent un peu plus d'information [3].

12.2.2.11 En fait ça ne change presque rien

Certains craignent qu'utiliser la limite pointée demande d'ajuster beaucoup de résultats un peu partout[303]. Le Frido contient à ma connaissance seulement deux théorèmes dont l'énoncé contient une subtilité due au choix épointé. Le fameux théorème de composition 12.24, et le lemme 12.215.

Le fait est que l'on ne calcule presque jamais de limites en une valeur où la fonction existe. Si on calcule une limite, c'est précisément parce qu'on regarde un point où la fonction n'existe pas.

Exemples :

— Quand on calcule une dérivée, on calcule

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(a+\epsilon)-f(a)}{\epsilon}. \tag{12.58}$$

Cette fonction de ϵ n'existe pas lorsque $\epsilon = 0$. Donc les limites pointées et épointées sont identiques.

— De même, l'étude du sinus cardinal $f(x) = \sin(x)/x$ (lemme 20.210) est une fonction dont ça ne viendrait à l'idée de personne de calculer la limite pour $x \to 4$. Et ça tombe bien : la seule limite que ça donne envie de calculer est

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}. \tag{12.59}$$

Et encore une fois, la fonction dans le limite n'existe pas au point limite.

— Beaucoup de conditions d'intégrabilité demandent des limites à l'infini. Là encore, ce sont des limites vers des points où la fonction n'existe pas. Franchement, qui va vouloir définir

$$\begin{aligned} f\colon [0,\infty] &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x\neq\infty\\ 0 & \text{si } x=\infty \end{cases} \end{aligned} \tag{12.60}$$

sans rigoler ? OK. Pour cette fonction, il y a une différence entre la limite pointée et épointée. Mais franchement, c'est bien la limite épointée qui donne le résultat « intuitif ».

3. C'est une de mes citation préférées. Comme nous sommes entre adultes, je vous donne la référence : [303]. Si vous n'avez pas 18 ans, on peut vraiment se demander si le Frido est vraiment une lecture de votre âge.

12.2.2.12 Si vous avez quand même envie de discuter

Si vous avez quand même envie de plaider la limite pointée, allez-y, mais vous devriez plutôt garder votre salive pour plaider l'intégrale de Kurzweil-Henstock[304] contre Lebesgue. Là au moins, il y a des choses non triviales à dire, et des vrais résultats mathématiques à la clef.

12.2.2.13 En très résumé

Si vous ne voulez pas lire toute ma prose, voici ce dont vous devez être conscient :

(1) La limite épointée est celle utilisée partout sauf en France.

(2) La limite épointée est un peu plus compliquée que la limite pointée, mais elle permet de prouver plus de choses. En témoigne le théorème « complet » de composition 12.26 que je doute être facile à exprimer à l'aide des limites pointées et de la continuité [4].

(3) La limite pointée « cache » l'information sur tout le voisinage de a si la fonction se comporte mal juste en a.

Une fois que vous êtes conscients de ces quelque points, vous faites comme vous voulez ; ça n'a pratiquement aucune importance. La seule position indéfendable est celle de prendre la limite pointée et de ne pas prévenir le lecteur que les sources autres que françaises donnent une définition différente.

12.3 Limites en l'infini

Non, sur $\mathbb{R}$ nous n'allons pas ajouter ∞ avec la topologie d'Alexandrov de la définition 7.88. Nous n'allons pas considérer $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Définition 12.27 (Droite réelle achevée[306])**.**
Nous considérons l'ensemble

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} \tag{12.61}$$

où $+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des éléments de $\mathbb{R}$.

Nous mettons sur $\bar{\mathbb{R}}$ la relation d'ordre en prenant celle de $\mathbb{R}$ à laquelle nous ajoutons les règles

(1) $-\infty < x$ pour tout $x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(2) $+\infty > x$ pour tout $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Nous mettons une topologie sur $\bar{\mathbb{R}}$ en donnant la base [5] suivante :

— $]a, b[$,

— $]a, +\infty]$,

— $[-\infty, b[$

pour tous réels a et b.

12.28.
La notation « ∞ » peut désigner l'unique élément ajouté dans du compactifié d'Alexandrov [6] aussi bien que l'élément infini positifs dans la droite réelle achevée. Si vous faites attention au contexte [7], ça ne devrait pas poser de problèmes.

Certains auteurs réservent « ∞ » pour Alexandrov et écrivent toujours « $+\infty$ » et « $-\infty$ » pour la droite réelle achevée.

Lemme 12.29 ([1])**.**
La topologie sur $\mathbb{R}$ induite de celle sur $\bar{\mathbb{R}}$ est la topologie usuelle.

4. Il y a bien entendu moyen. Voir par exemple [305]. Sans ironie, je trouve ce théorème fascinant.
5. Base de topologie, définition 7.2.
6. Le compactifié d'Alexandrov $\hat{\mathbb{R}}$, définition 7.88.
7. Vous devez toujours avoir parfaitement clairement en tête la topologie que vous manipulez.

Démonstration. Nous notons $\tau_{\mathbb{R}}$ la topologie de $\mathbb{R}$, $\tau_{\bar{\mathbb{R}}}$ celle de $\bar{\mathbb{R}}$ et τ_i celle induite de $\bar{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}$. Nous devons prouver que $\tau_i = \tau_{\mathbb{R}}$.

(i) $\underline{\tau_i \subset \tau_{\mathbb{R}}}$ Un élément de τ_i est de la forme $\mathcal{O} = \mathbb{R} \cap A$ où A est un élément de $\tau_{\bar{\mathbb{R}}}$. Vu que A est un ouvert de $\bar{\mathbb{R}}$, il est une réunion d'éléments de la base de topologie [8] ; donc $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ où les A_i sont des trois types listés dans la définition 12.27.

  (1) Si $A_i =]a, b[$ alors $\mathbb{R} \cap A =]a, b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

  (2) Si $A_i =]a, +\infty]$, alors $\mathbb{R} \cap A_i =]a, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

  (3) Si $A_i = [-\infty, b[$, même chose.

  Donc $\mathbb{R} \cap A = \bigcup_{i\in I}(\mathbb{R} \cap A_i)$ est une union d'ouverts de $\mathbb{R}$.

(ii) $\underline{\tau_{\mathbb{R}} \subset \tau_i}$ Comme les $]a, b[$ forment une base de topologie de $\mathbb{R}$, l'ensemble τ_i contient une base de topologie de $\mathbb{R}$ et donc contient tout $\tau_{\mathbb{R}}$.

□

Proposition 12.30 ([1])**.**
Soit une suite (x_k) dans $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Nous avons $x_k \xrightarrow{\bar{\mathbb{R}}} +\infty$ si et seulement si pour tout $M > 0$ il existe un $N > 0$ tel que $n \geqslant N$ implique $x_n > M$.

Démonstration. En deux parties.

(i) $\underline{\Rightarrow}$ Pour tout voisinage A de $+\infty$, il existe un N tel que $n \geqslant N$ implique $x_n \in A$. Soit donc le voisinage $]M, +\infty]$, et le N correspondant. Nous avons alors, pour tout $n \geqslant N$, $x_n \in]M, +\infty]$ et donc $x_n \geqslant M$.

(ii) $\underline{\Leftarrow}$ Soit un ouvert A contenant $+\infty$. Nous avons $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ où les A_i sont des trois types listés dans la définition 12.27. Comme $+\infty \in A$, pour au moins un des i, nous avons $A_i =]a, +\infty[$.
Prenons N tel que $n \geqslant N$ implique $x_n > a$. Alors pour $n \geqslant N$ nous avons $x_n \in A$.

□

Lemme 12.31 ([1])**.**
Soient $x > 1$ dans $\mathbb{R}$ et $n \geqslant 1$ dans $\mathbb{N}$. Alors $x^n \geqslant x$.

Démonstration. Pour $n = 1$, nous avons $x^n = x$ donc d'accord. Supposons que $x^n \geqslant x$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et prouvons que $x^{n+1} \geqslant x$.

Calcul avec justifications en-dessous :

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= xx^n && (12.62a)\\ &\geqslant xx && (12.62b)\\ &\geqslant x. && (12.62c) \end{aligned}$$

Justifications :

— Pour (12.62b) hypothèse de récurrence.

— Pour (12.62c), lemme 1.369.

□

Lemme 12.32.
Nous considérons l'espace topologique de la droite réelle achevée [9] $\bar{\mathbb{R}}$. Si $n \geqslant 1$ nous avons

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \tag{12.63}$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0. \tag{12.64}$$

8. C'est la proposition 7.2 qui dit ça.
9. Définition 12.27.

Démonstration. Si V est un voisinage de $+\infty$, alors nous devons montrer qu'il existe un voisinage W de $+\infty$ tel que $x^n \in V$ pour tout $x \in W$.

Un ouvert est une union d'éléments de la base de topologie [10]. Nous voyons que V contient au moins une partie de la forme $]R, +\infty]$. Nous supposons que $R > 1$.

Si $x > R > 1$, alors nous avons $x^n \geqslant x$ (lemme 12.31) et donc

$$x^n \geqslant x > R, \tag{12.65}$$

ce qui signifie $x \in V$.

En prenant $W =]R, +\infty]$, nous avons bien $W^n \subset V$. Cela prouve (12.63).

En ce qui concerne la seconde limite, la démonstration est du même type. Remarquez seulement que vous n'avez pas formellement le droit d'utiliser la proposition 12.12 en invoquant $\frac{1}{+\infty} = 0$. □

12.3.1 Limite en des nombres

Nous posons la définition suivante.

Définition 12.33.
Lorsque $a \in \mathbb{R}$, on dit que la fonction f ***tend vers l'infini quand*** *x* ***tend vers*** *a si*

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta \textit{ tel que } (|x - a| \leqslant \delta) \Rightarrow f(x) \geqslant M \textit{ quand } x \in \operatorname{dom} f.$$

Cela signifie que l'on demande que dès que x est assez proche de a (c'est-à-dire dès que $|x-a| \leqslant \delta$), alors $f(x)$ est plus grand que M, et que l'on peut trouver un δ qui fait ça pour n'importe quel M. Une autre façon de le dire est que pour toute hauteur M, on peut trouver un intervalle de largeur δ autour de a [11] tel que sur cet intervalle, la fonction f est toujours plus grande que M.

Montrons sur un dessin pourquoi je disais que la fonction $x \to 1/x$ n'est pas de ce type.

Le problème est qu'il n'existe par exemple aucun intervalle autour de 0 sur lequel f serait toujours plus grande que 10. En effet n'importe quel intervalle autour de 0 contient au moins un nombre négatif. Or quand x est négatif, f n'est certainement pas plus grande que 10. Nous y reviendrons.

Pour l'instant, montrons que la fonction $f(x) = 1/x^2$ est une fonction qui vérifie la définition 12.33. Avant de prendre n'importe quel M, prenons par exemple 100. Nous avons besoin d'un intervalle autour de zéro sur lequel f est toujours plus grande que 100. C'est vite vu que $f(0.1) = f(-0.1) = 100$, donc l'intervalle $[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$ convient. Partout dans cet intervalle, f est plus grande que 100. Partout ? Ben non : en $x = 0$, la fonction n'est même pas définie, donc c'est un peu dur de dire qu'elle est plus grande que 100. C'est pour cela que nous avons ajouté la condition « quand $x \in \operatorname{dom} f$ » dans la définition de la limite.

Prenons maintenant un $M \in \mathbb{R}$ arbitraire, et trouvons un intervalle autour de 0 sur lequel f est toujours plus grande que M. La réponse est évidemment l'intervalle de largeur $1/\sqrt{M}$, c'est-à-dire

$$\left[-\frac{1}{\sqrt{M}}, \frac{1}{\sqrt{M}}\right].$$

12.3.2 Limites quand tout va bien

D'abord définissons ce qu'on entend par la limite d'une fonction en un point quand il n'y a aucun infini en jeu.

Définition 12.34.
On dit que la fonction f ***tend vers*** *b* ***quand*** *x* ***tend vers*** *a si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta \textit{ tel que } (|x - a| \leqslant \delta) \Rightarrow |f(x) - b| \leqslant \epsilon \textit{ quand } x \in \operatorname{dom} f.$$

Dans ce cas, nous notons

$$\lim_{x \to a} f(x) = b. \tag{12.66}$$

10. C'est la définition 7.2.
11. C'est-à-dire un intervalle de la forme $[a - \delta, a + \delta]$.

Commençons par un exemple très simple : prouvons que $\lim_{x\to 0} x = 0$. C'est donc $a = b = 0$ dans la définition. Prenons $\epsilon > 0$, et trouvons un intervalle autour de zéro tel que partout dans l'intervalle, $x \leqslant \epsilon$. Bon ben c'est clair que $\delta = \epsilon$ fonctionne.

Plus compliqué maintenant, mais toujours sans surprises.

Proposition 12.35.

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. On veut un intervalle de largeur δ autour de zéro tel que x^2 soit plus petit que ϵ sur cet intervalle. Cette fois-ci, le δ qui fonctionne est $\delta = \sqrt{\epsilon}$. En effet un élément de l'intervalle $[-\delta, \delta]$ est un r de valeur absolue plus petite ou égale à δ :

$$|r| \leqslant \delta = \sqrt{\epsilon}.$$

En prenant le carré de cette inégalité on a :

$$r^2 \leqslant \epsilon,$$

ce qu'il fallait prouver. □

Calculer et prouver des valeurs de limites, mêmes très simples, devient vite de l'arrachage de cheveux à essayer de trouver le bon δ en fonction de ϵ si on n'a pas quelques théorèmes généraux. Heureusement nous en avons déjà quelques uns : 12.10, 12.7, 12.8, 12.9, 12.12.

Proposition 12.36 ([1]).
Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application continue dont la variable y varie dans un compact I de $\mathbb{R}$. Alors la fonction

$$\begin{aligned} d\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sup_{y\in I} f(x, y) \end{aligned} \tag{12.67}$$

est continue.

Démonstration. Soit x_0 fixé. Prouvons que d est continue en x_0. Nous notons y_0 la valeur de y qui réalise le maximum (par le théorème 10.49 et le fait que les fonctions projection soient continues, lemme 7.182). Soit aussi $\epsilon > 0$ tellement fixé que même avec un tournevis hydraulique, il ne bougerait pas. Nous considérons δ tel que si $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leqslant \delta$ alors $\|f(x, y) - f(x_0, y_0)\| < \epsilon$.

Si $|x - x_0| < \delta$ alors pour y assez proche de y_0 nous avons $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leqslant \delta$, et donc $\|f(x, y) - f(x_0, y_0)\| \leqslant \epsilon$. Cela montre qu'il existe δ tel que $|x - x_0| \leqslant \delta$ implique $d(x) \geqslant d(x_0) - \epsilon$.

Nous devons encore trouver un δ tel que si $|x - x_0| \leqslant \delta$ alors $d(x) \leqslant d(x_0) + \epsilon$. Supposons que non. Alors pour tout δ il existe un x tel que $|x - x_0| \leqslant \delta$ et $d(x) > d(x_0) + \epsilon$. Cela nous donne une suite $x_i \to x_0$.

Pour chaque x_i nous notons y_i la valeur de y qui réalise le supremum correspondant. La suite (y_i) étant contenue dans un compact nous supposons prendre une sous-suite de (x_i) telle que la suite (y_i) converge. Nous nommons a la limite (et non y_0 parce que nous ne savons pas si $y_i \to y_0$). Pour chaque i nous avons

$$f(x_i, y_i) > \sup_{y\in I} f(x_0, y) + \epsilon. \tag{12.68}$$

En prenant la limite et en utilisant la continuité de f,

$$f(x_0, a) > \sup_{y\in I} f(x_0, y) + \epsilon, \tag{12.69}$$

ce qui est impossible. □

12.3.3 Limites de fonctions

Tentons de comprendre ce que signifie qu'un nombre ℓ *ne soit pas* la limite de f lorsque $x \to a$. Il s'agit d'inverser la condition de la proposition 9.237(2). Le nombre ℓ n'est pas une limite de f pour $x \to a$ lorsque

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall \delta > 0, \exists x \text{ tel que } 0 < \|x - a\| < \delta \text{ et } \|f(x) - \ell\| > \varepsilon, \tag{12.70}$$

c'est-à-dire qu'il existe un certain seuil ε tel qu'on a beau s'approcher aussi proche qu'on veut de a (distance δ), on trouvera toujours un x tel que $f(x)$ n'est pas ε-proche de ℓ.

Lemme 12.37 (Unicité de la limite)**.**
Si ℓ et ℓ' sont deux limites de $f(x)$ lorsque x tend vers a, alors $\ell = \ell'$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Nous considérons δ tel que $\|f(x)-\ell\| < \varepsilon$ pour tout x tel que $\|x-a\| < \delta$. De la même manière, nous prenons δ' tel que $\|x - a\| < \delta'$ implique $\|f(x) - \ell'\| < \varepsilon$. Pour les x tels que $\|x - a\|$ est plus petit que δ et δ' en même temps, nous avons

$$\|\ell - \ell'\| = \|\ell - f(x) + f(x) - \ell'\| \leqslant \|\ell - f(x)\| + \|f(x) - \ell'\| < 2\varepsilon, \tag{12.71}$$

et donc $\|\ell - \ell'\| = 0$ parce que c'est plus petit que 2ε pour tout ε. □

Proposition 12.38 ([1])**.**
Soient un espace vectoriel normé $(V, \|.\|)$ et $a \in V$. Soient encore un voisinage A de a et deux fonctions $f, g \colon A \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$ qui admettent une limite en a.
Si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in A\backslash\{a\}$ alors

$$\lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{x\to a} g(x). \tag{12.72}$$

Proposition 12.39.
Si $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ est continue et croissante, alors il existe $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tel que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell. \tag{12.73}$$

12.3.4 Limite à gauche et à droite

Si a est à l'intérieur du domaine de f, nous savons ce que signifie $\lim_{x\to a} f(x)$. Nous donnons également une définition des limites à gauche et à droite.

Définition 12.40.
Soient $D \subset \mathbb{R}$ et une fonction $f \colon D \to \mathbb{R}$. Si $a \in \operatorname{Adh}(D)$ nous définissons la ***limite à droite*** *de f en a par*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} \tilde f(x) \tag{12.74}$$

où $\tilde f$ est la fonction f restreinte à $D \cap \{x \text{ tel que } x > a\}$. La limite (12.74) est souvent écrite sous la forme condensée

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x). \tag{12.75}$$

Pour la limite à gauche c'est un peu la même chose :

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x). \tag{12.76}$$

Lemme 12.41.
Soient $D \subset \mathbb{R}$ et une fonction $f \colon D \to \mathbb{R}$. Si $a \in \operatorname{Adh}(D)$ nous avons $\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $x \in \left]a, a+\delta\right[\cap D$ implique $f(x) \in B(\ell, \epsilon)$.

Démonstration. Nous avons les équivalences entre les propriétés suivantes, en utilisant la définition 7.92 de la limite :

(1) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$
(2) $\lim_{x\to a} \tilde{f}(x) = \ell$
(3) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in B(a,\delta) \cap D \cap \{x > a\}$ alors $f(x) \in B(\ell,\epsilon)$
(4) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in \left]a, a+\delta\right[\cap D$ alors $f(x) \in B(\ell,\epsilon)$

□

Proposition 12.42 ([307]).
Soit une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$ où D est une partie de $\mathbb{R}$. Si $a \in \operatorname{Adh}(D)$ alors la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe si et seulement si les limites à gauche et à droite existent et sont égales. Dans ce cas nous avons égalité :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x). \tag{12.77}$$

Démonstration. En deux parties.

(i) $\Rightarrow$ Nous disons que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$. Si V est un voisinage de ℓ, il existe un voisinage U de a tel que $f\big(U \cap D\setminus\{a\}\big) \subset V$. En particulier il existe un $\delta > 0$ tel que si $x \in \left]a, a+\delta\right[\cap D$, alors $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Cela est la limite à droite (lemme 12.41).

(ii) $\Leftarrow$ Soit $\epsilon > 0$. Par la limite à droite, il existe $\delta_1 > 0$ tel que $f\big(\left]a, a+\delta_1\right[\cap D\big) \subset B(\ell,\epsilon)$. Par la limite à gauche, il existe δ_2 tel que $f\big(\left]a-\delta_2, a\right[\cap D\big) \subset B(\ell,\epsilon)$
En prenant $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$ nous avons bien $f\big(B(a,\delta) \cap D\setminus\{a\}\big) \subset B(\ell,\epsilon)$ comme le demande la définition de la limite.

□

12.43.
Quelques remarques à propos de la proposition 12.42.

(1) Cette proposition ne se généralise pas aux dimensions supérieures. Dans $\mathbb{R}^2$ par exemple, il ne faudrait pas croire que si les limites suivant toutes les directions existent alors la limite existe.
(2) Cette proposition est souvent utilisée pour calculer des limites dans lesquelles interviennent des valeurs absolues. Par exemple, durant la démonstration de la proposition 12.354.

12.4 Limite en compactifié d'Alexandrov

Nous considérons l'espace topologique localement compact $\mathbb{R}$, et son compactifié d'Alexandrov défini en 7.88. Nous avons donc un point supplémentaire noté ∞. Ce point n'est ni du côté des grands nombres positifs, ni du côté des grands nombres négatifs. Il n'est ni $+\infty$ ni $-\infty$.

Proposition 12.44.
Dans cet espace topologique $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty. \tag{12.78}$$

Démonstration. Soit un voisinage V de ∞ dans $\hat{\mathbb{R}}$. Il s'écrit $V = K^c \cup \{\infty\}$ pour un certain compact de $\mathbb{R}$. Le théorème 10.21 nous assure que K est borné. Donc il existe $R > 0$ tel que $K \subset B(0,R)$. Pour $x \in B(0, 1/R)$ nous avons

$$\left|\frac{1}{x}\right| > R, \tag{12.79}$$

et donc $1/x \in K^c$. Donc aussi $\frac{1}{x} \in V$. □

De la même façon, dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ nous avons

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{z} = \infty. \tag{12.80}$$

12.45.
Je vous laisse deviner la topologie à considérer sur $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Dans cet espace topologique la limite $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ n'existe pas.

12.4.1 Prolongement par continuité

12.4.1.1 Discussion avec mon ordinateur

Voici un extrait de ce que peut donner Sage. Nous lui donnons la fonction

$$f(x) = \frac{x+4}{3x^2+10x-8}. \tag{12.81}$$

Cette fonction est inventée exprès pour que le dénominateur s'annule en -4. En fait $3x^2+10x-8 = (x+4)(3x-2)$, et la fraction peut se simplifier en

$$f(x) = \frac{1}{3x-2}. \tag{12.82}$$

Et avec cela nous écririons $f(-4) = -\frac{1}{14}$. Voyons comment cela passe dans Sage.

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 5.2, Release Date: 2012-07-25                         |
| Type "notebook()" for the browser-based notebook interface.        |
| Type "help()" for help.                                            |
----------------------------------------------------------------------
sage: f(x)=(x+4)/(3*x**2+10*x-8)
sage: f(-4)
---------------------------------------------------------------------------
ValueError                                Traceback (most recent call last)
ValueError: power::eval(): division by zero
```

Il produit donc une erreur de division par zéro. Cela n'est pas étonnant. Pourtant si on lui demande, il est capable de simplifier. En effet :

```
sage: f.simplify_full()
x |--> 1/(3*x - 2)
sage: f.simplify_full()(-4)
-1/14
```

Nous considérons la question suivante : étant donné une fonction f définie sur $I\backslash\{x_0\}$, est-il possible de définir f en x_0 de telle façon à ce qu'elle soit continue ?

Exemple 12.46.
La fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned} \tag{12.83}$$

n'est pas définie pour $x = 0$ et il n'y a pas moyen de définir $f(0)$ de telle sorte que f soit continue parce que $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ n'existe pas. $\triangle$

12.4.1.2 Limite et prolongement

Reprenons l'exemple de la fonction (12.81) que mon ordinateur refusait de calculer en zéro :

$$f(x) = \frac{x+4}{3x^2+10x-8} = \frac{x+4}{(x+4)(3x-2)}. \tag{12.84}$$

Cette fonction a une condition d'existence en $x = -4$. Et pourtant, tant que $x \neq -4$, cela a un sens de simplifier les $(x+4)$ et d'écrire

$$f(x) = \frac{1}{3x-2}.$$

Étant donné que pour toute valeur de x différente de -4, la fonction f s'exprime de cette façon, nous avons

$$\lim_{x\to -4} f(x) = \lim_{x\to -4} \left(\frac{1}{3x-2} \right).$$

Oui, mais la fonction [12] $g(x) = 1/(3x-2)$ est continue en -4 et donc sa limite vaut sa valeur. Nous en déduisons que

$$\lim_{x\to -4} f(x) = -\frac{1}{14}.$$

Que dire maintenant de la fonction ainsi définie ?

$$\tilde f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq -4\\ -1/14 & \text{si } x = -4. \end{cases} \tag{12.85}$$

Cette fonction est continue en -4 parce qu'elle y est égale à sa limite. Les étapes suivies pour obtenir ce résultat sont :

— Repérer un point où la fonction n'existe pas,

— calculer la limite de la fonction en ce point, et en particulier vérifier que cette limite existe, ce qui n'est pas toujours le cas,

— définir une nouvelle fonction qui vaut partout la même chose que la fonction originale, sauf au point considéré où l'on met la valeur de la limite.

C'est ce qu'on appelle **prolonger la fonction par continuité** parce que la fonction résultante est continue. La prolongation de f par continuité est donc en général définie par

$$\tilde f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq y\\ \lim_{y\to x} f(y) & \text{si } six = y \end{cases} \tag{12.86}$$

Dans le cas que nous regardions,

$$f(x) = \frac{x+4}{3x^2+10x-8},$$

le prolongement par continuité est donné par

$$\tilde f = \frac{1}{3x-2}. \tag{12.87}$$

Remarquons que cette fonction n'est toujours pas définie en $x = 2/3$.

12.4.2 Prolongement par continuité

Proposition-Définition 12.47 (Prolongement par continuité)**.**
Soit $f\colon I\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$ *telle que* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$*. La fonction*

$$\begin{aligned} &\tilde f\colon I \to \mathbb{R}\\ &\tilde f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0\\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases} \end{aligned} \tag{12.88}$$

est une fonction continue sur I et est appelée le ***prolongement par continuité*** *de f en x_0.*

Vous noterez que dans cet énoncé nous demandons $\ell \in \mathbb{R}$. Les cas $\ell = \pm\infty$ sont donc exclus.

12.48.
Le lemme 12.61 donnera un autre gros morceau de prolongement par continuité. Là, ce ne sera pas juste une valeur qui manquera, mais carrément la majorité des valeurs ; mais par contre, ce ne sera pas vraiment de la prolongation par continuité, mais de la prolongation par Cauchy-continuité.

12. Cette fonction g n'est pas f parce que g a en plus l'avantage d'être définie en -4.

Exemple 12.49.
La fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}\backslash\{-3,2\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^2+2x-3}{(x+3)(x-2)} \end{aligned} \tag{12.89}$$

admet pour limite $\lim_{x\to -3} f(x) = \frac{4}{5}$. Son prolongement par continuité en $x = -3$ est donné par

$$\tilde{f}(x) = \frac{x-1}{x-2}. \tag{12.90}$$

Notons que les fonctions f et $\tilde{f}$ ne sont pas identiques : l'une est définie pour $x = -3$ et l'autre pas. Lorsqu'on fait le calcul

$$\frac{x^2+2x-3}{(x+3)(x-2)} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+3)(x-2)} = \frac{x-1}{x-2}, \tag{12.91}$$

la simplification n'est pas du tout un acte anodin. Le dernier signe « = » est discutable parce que les deux dernières expressions ne sont pas égales pour tout x ; elles ne sont égales « que » pour les x pour lesquels les deux expressions existent. △

Les fonctions trigonométriques donneront quelques exemples intéressants de prolongements par continuité. Voir l'exemple 18.232. Et une avec la fonction logarithme dans l'exemple 15.109.

12.4.3 Théorème de la bijection

Proposition 12.50.
Une fonction monotone et surjective d'un intervalle I sur un autre intervalle J, est continue sur I.

Proposition 12.51.
Soient $f\colon I \to J$ une bijection et $f^{-1}\colon J \to I$ sa réciproque. Alors pour tout $x_0 \in I$ nous avons

$$f^{-1}\big(f(x_0)\big) = x_0 \tag{12.92}$$

et pour tout $y_0 \in J$ nous avons

$$f\big(f^{-1}(y_0)\big) = y_0. \tag{12.93}$$

Démonstration. Nous prouvons la relation (12.92) et nous laissons (12.93) comme exercice au lecteur.

Soit $x_0 \in I$. Posons $y_0 = f(x_0)$. La définition de l'application réciproque est que pour $y \in J$, $f^{-1}(y)$ est l'unique élément x de I tel que $f(x) = y$. Donc $f^{-1}(y_0)$ est l'unique élément de I dont l'image est y_0. C'est donc x_0 et nous avons $f^{-1}(y_0) = x_0$, c'est-à-dire

$$f^{-1}\big(f(x_0)\big) = x_0. \tag{12.94}$$

□

Théorème 12.52 (Théorème de la bijection)**.**
Soit I un intervalle et f une fonction continue et strictement monotone de I dans $\mathbb{R}$. Nous avons alors :

(1) $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$;

(2) La fonction $f\colon I \to f(I)$ est bijective

(3) La fonction $f^{-1}\colon f(I) \to I$ est strictement monotone de même sens que f ;

(4) La fonction $f\colon I \to f(I)$ est un homéomorphisme, c'est-à-dire que $f^{-1}\colon f(I) \to I$ est continue.

Démonstration. Prouvons les choses point par point.

(1) Supposons pour fixer les idées que f est monotone croissante[13].
Soient $a < b$ dans $f(I)$. Par définition il existe $x_1, x_2 \in I$ tels que $a = f(x_1)$ et $b = f(x_2)$. La fonction f est continue sur l'intervalle $[x_1, x_2]$ et vérifie $f(x_1) < f(x_2)$. Donc le théorème des valeurs intermédiaires 10.82 nous dit que pour tout t dans $[f(x_2), f(x_2)]$, il existe un $x_0 \in [x_1, x_2]$ tel que $f(x_0) = t$. Cela montre que toutes les valeurs intermédiaires entre a et b sont atteintes par f et donc que $f(I)$ est un intervalle.

(2) Nous prouvons maintenant que f est bijective en prouvant séparément qu'elle est surjective et injective.

(i) **f est surjective** Une fonction est toujours surjective depuis un intervalle I vers l'ensemble Image f.

(ii) **f est injective** Soit $x \neq y$ dans I ; pour fixer les idées nous supposons que $x < y$. La stricte monotonie de f implique que $f(x) < f(y)$ ou que $f(x) > f(y)$. Dans tous les cas $f(x) \neq f(y)$.

La fonction f est donc bijective.

(3) Comme d'accoutumée nous supposons que f est croissante. Soient $y_1 < y_2$ dans $f(I)$; nous devons prouver que $f^{-1}(y_1) \leqslant f^{-1}(y_2)$. Pour cela nous considérons les nombres $x_1, x_2 \in I$ tels que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. Nous allons en prouver la contraposée en supposant que $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$. En appliquant f (qui est croissante) à cette dernière inégalité il vient

$$f\big(f^{-1}(y_1)\big) \geqslant f\big(f^{-1}(y_2)\big), \tag{12.95}$$

ce qui signifie

$$y_1 \geqslant y_2 \tag{12.96}$$

par l'équation (12.93).

(4) La fonction $f^{-1}\colon f(I) \to I$ est une fonction monotone et surjective, donc continue par la proposition 12.50.

□

Exemple 12.53.
La fonction

$$\begin{aligned} f\colon [2,3] &\to [4,9] \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \tag{12.97}$$

est une bijection. Sa réciproque est la fonction

$$\begin{aligned} f^{-1}\colon [4,9] &\to [2,3] \\ x &\mapsto \sqrt{x}. \end{aligned} \tag{12.98}$$

△

12.5 Limite et continuité

Voir les remarques dans l'index thématique 28 pour comprendre la place et la portée de ce qui va venir à propos de limite et de continuité.

Théorème 12.54 (Limite et continuité)**.**
La fonction f est continue au point a si et seulement si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Démonstration. Nous commençons par supposer que f est continue en a, et nous prouvons que $\lim_{x\to a} f(x) = a$. Soit $\epsilon > 0$; ce qu'il nous faut c'est un δ tel que $|x-a| \leqslant \delta$ implique $|f(x)-f(a)| \leqslant \epsilon$. La caractérisation 10.73 de la continuité donne l'existence d'un δ comme il nous faut.

Dans l'autre sens, c'est-à-dire prouver que f est continue au point a sous l'hypothèse que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, la preuve se fait de la même façon. □

13. Traitez en tant qu'exercice le cas où f est décroissante.

Nous en déduisons que si nous voulons gagner quelque chose à parler de limites, il faut prendre des fonctions non continues. En effet, si une fonction est continue en un point, la limite ne donne aucune nouvelle information que la valeur de la fonction elle-même en ce point.

Prenons une fonction qui fait un saut. Pour se fixer les idées, prenons celle-ci :

$$f(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } x\in]-\infty,2[\\ x/2 & \text{si } x\in[2,+\infty[\end{cases} \tag{12.99}$$

Essayons de trouver la limite de cette fonction lorsque x tend vers 2. Étant donné que f n'est pas continue en 2, nous savons déjà que $\lim_{x\to 2} f(x)\neq f(2)$. Donc ce n'est pas 1. Cette limite ne peut pas valoir 4 non plus parce qu'en prenant n'importe quel ϵ, la valeur de $f(2+\epsilon)$ est très proche de 2, et donc, ne peut pas s'approcher de 4. En fait, on peut facilement vérifier que *aucun nombre ne vérifie la condition de limite pour f en* 2. Nous disons que la limite n'existe pas.

Il ne faudrait pas en déduire trop vite que si une fonction n'est pas continue en a, alors la limite $x\to a$ n'existe pas. Ce que dit le théorème 12.54 est que si une fonction n'est pas continue en a, alors sa limite (si elle existe) ne vaut pas $f(a)$.

Exemple 12.55 (Un exemple de continuité ; Thème 28)**.**
Soit la fonction

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\neq 0\\ 4 & \text{si } x=0. \end{cases} \tag{12.100}$$

Cette fonction n'est pas continue en $x=0$, et pourtant la limite existe : $\lim_{x\to 0} f(x)=0$. Etudions cela en détail, pour nous assurer de ce qu'il se passe.

Considérons l'ouvert $]3,5[$. L'image réciproque de cet ouvert par f est la partie $]3,5[\cup\{0\}$ qui n'est pas ouvert. Donc la fonction f n'est pas continue comme fonction $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Considérons pour comprendre la restriction $f\colon[-1,1]\to\mathbb{R}$. L'image inverse de $]3,5[$ par cette fonction est $\{0\}$ qui n'est pas un ouvert.

Plus généralement tant qu'on considère des restrictions de f sur des parties contenant un voisinage de 0, la fonction ne peut pas être continue [14].

Voyons ce qu'il en est de la continuité ponctuelle de f en $x=0$. La définition 7.41 est celle de la continuité en un point ; elle dit que f sera continue en 0 si $f(0)=4$ est une limite de f. Nous voilà parti vers la définition 7.92.

Soit le voisinage $V=]3,5[$ de $f(0)$. Quel que soit le voisinage W de 0 dans $\mathbb{R}$, il existe un $\epsilon>0$ tel que $W\subset B(0,\epsilon)$. Nous avons alors

$$f\big(W\setminus\{0\}\big)\subset f\big(B(0,\epsilon)\setminus\{0\}\big). \tag{12.101}$$

Mais le nombre $\epsilon/2$ fait partie de $f\big(B(0,\epsilon)\setminus\{0\}\big)$ et n'est pas dans V. Donc $f(0)$ n'est pas une limite de f en zéro. Cette fonction n'est donc pas continue en zéro. △

Exemple 12.56 (Même exemple, limite)**.**
Nous avons vu que, pour la fonction (12.100), le nombre 4 n'est pas une limite de f en zéro. Nous montrons à présent que 0 est une limite (et même la seule par la proposition 7.95 que nous ne rappellerons plus à chaque fois) de f.

Montrons que 0 est une limite de f en zéro, c'est-à-dire que $\lim_{x\to 0} f(x)=0$.

Nous suivons la définition 7.92. Soit un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}$. Il existe δ tel que $B(0,\delta)\subset V$. En posant $\epsilon=\delta$ et en définissant $W=B(0,\epsilon)$ nous avons

$$f\big(B(0,\epsilon)\setminus\{0\}\big)=B(0,\epsilon)\setminus\{0\}\subset B(0,\delta)\subset V. \tag{12.102}$$

Donc 0 est une limite de f en zéro. △

Nous avons déjà vu par le corolaire 10.51 qu'une suite croissante et bornée était convergente. Il en va de même pour les fonctions.

14. Les plus acharnés se demanderont ce qu'il se passe pour la restriction de f à la partie $\{0\}$ munie de la topologie induite de $\mathbb{R}$.

Proposition 12.57 ([1]).
Si la fonction réelle $f\colon I = [a, b[\to \mathbb{R}$ est croissante et bornée, alors la limite

$$\lim_{x \to b} f(x) \tag{12.103}$$

existe et est finie.

Démonstration. Commençons par prouver que si (x_n) est une suite dans I convergeant vers b, alors $f(x_n)$ est une suite convergente. Dans un second temps, nous allons prouver que si (x_n) et (x'_n) sont deux suites qui convergent vers b, alors les suites convergentes $f(x_n)$ et $f(x'_n)$ convergent vers la même limite. Alors le critère séquentiel de la limite d'une fonction conclura (proposition 7.214).

Nous pouvons extraire de x_n une sous-suite croissante $(x_{\alpha(n)})$. Alors la suite $f\big(x_{\alpha(n)}\big)$ est une suite croissante et majorée, donc convergente par le corolaire 10.51 [15]. Nommons ℓ la limite et montrons qu'elle est aussi limite de f sur la suite originale.

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe K tel que si $n > K$ alors $\big|f\big(x_{\alpha(n)}\big) - \ell\big| < \epsilon$. Soit K' tel que pour tout $n > K'$ nous ayons $x_n > x_{\alpha(K')}$. Cela est possible parce que la suite est bornée par b et converge vers b : il suffit de prendre K' de telle sorte que $|x_n - b| \leqslant |x_{\alpha(n)} - b|$. Si $n > K'$ alors $x_n > x_{\alpha(K)}$ et

$$f(x_n) \geqslant f(x_{\alpha(n)}) \geqslant \ell - \epsilon; \tag{12.104}$$

en résumé si $n > K$ alors $|f(x_n) - \ell| < \epsilon$. Cela prouve que $f(x_n) \to \ell$.

Soit maintenant une autre suite (x'_n) qui converge également vers b. Comme nous venons de le voir la suite $f(x'_n)$ est convergente et nous nommons ℓ' la limite. Si nous considérons (x''_n) la suite « alternée » $(x_1, x'_1, x_2, x'_2, \cdots)$ alors nous avons encore une suite qui converge vers b et donc $f(x''_n) \to \ell'$.

Mais étant donné que $f(x_n)$ et $f(x'_n)$ sont des sous-suites, elles doivent converger vers la même valeur. Donc $\ell = \ell' = \ell''$. □

Proposition 12.58 ([1]).
L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ muni de la topologie de la compactification en un point [16] *est connexe par arcs.*

Démonstration. Nous allons montrer que le chemin

$$\begin{aligned} \gamma\colon [0,1] &\to [0,\infty] \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \infty & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{12.105}$$

est continu au sens de la définition 7.41(2) (qui est le seul sens possible au mot « continu »).

Soit un ouvert $\mathcal{O}$ dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Si cet ouvert ne contient pas ∞, alors $\gamma^{-1}(\mathcal{O})$ est ouvert dans $\mathbb{R}$ parce que la fonction $x \mapsto 1/x$ est continue [17].

Si $\infty \in \mathcal{O}$, alors $\mathcal{O} = \{\infty\} \cup \mathcal{O}'$ où $\mathcal{O}'$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ ayant la propriété que $\mathbb{R} \backslash \mathcal{O}'$ est compact.

Nous avons $\gamma^{-1}(\mathcal{O}) = \{0\} \cup \gamma^{-1}(\mathcal{O}')$. Et aussi que $\gamma^{-1}(\mathcal{O}')$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ contenu dans $[0,1]$.

Puisque le complémentaire de $\mathcal{O}'$ est compact, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]a, \infty[\subset \mathcal{O}'$. Donc $\mathcal{O}' =]a, \infty[\cup \mathcal{O}''$ où $\mathcal{O}''$ est un ouvert.

Nous avons :

$$\begin{aligned} \gamma^{-1}(\mathcal{O}) &= \{\gamma^{-1}(\infty)\} \cup \gamma^{-1}\big(]a, \infty[\big) \cup \gamma^{-1}(\mathcal{O}'') && (12.106a) \\ &= \{0\} \cup]0, \frac{1}{a}[\cup \gamma^{-1}(\mathcal{O}'') && (12.106b) \\ &= [0, \frac{1}{a}[\cup \gamma^{-1}(\mathcal{O}''). && (12.106c) \end{aligned}$$

15. En gros nous sommes en train de dire que toute la théorie des fonctions convexes est un vulgaire corolaire de Bolzano-Weierstrass.
16. Définition 7.88.
17. Voir par exemple la proposition 12.5.

Vous noterez le point essentiel où la topologie de la compactification agit : comme $\{0\}$ n'est pas un ouvert de $[0,1]$, nous devons nous assurer que la partie $\gamma^{-1}(\mathcal{O}')$ vienne se coller à $\{0\}$ pour compléter en un ouvert.

L'ensemble $\gamma^{-1}(\mathcal{O}'')$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ contenu dans $[0,1]$. Nous avons donc

$$\gamma^{-1}(\mathcal{O}) = \Big( ]-1, \frac{1}{a}[\cup \gamma^{-1}(\mathcal{O}'') \Big) \cap [0,1]. \tag{12.107}$$

Cela est un ouvert de $[0,1]$ par définition de la topologie induite[18]. □

12.5.1 Prolongement des rationnels vers les réels

Si $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue pour la topologie induite, est-ce qu'on peut la prolonger en une fonction continue sur $\mathbb{R}$? La réponse est hélas non.

Exemple 12.59 ([308]).
Puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel[19], ceci définit bien une fonction sur $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Q} &\to \mathbb{R} \\ q &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } q < \sqrt{2} \\ 1 & \text{si } q > \sqrt{2}. \end{cases} \end{aligned} \tag{12.108}$$

C'est une fonction continue sur $\mathbb{Q}$. En effet, soient $q \in \mathbb{Q}$ et $\epsilon > 0$. Nous prenons $\delta > 0$ tel que $\sqrt{2}$ ne soit pas dans $B(q,\delta)$. Alors si $p \in B_{\mathbb{Q}}(q,\delta)$ nous avons $f(q) = f(p)$ et donc

$$|f(p) - f(q)| < \epsilon. \tag{12.109}$$

Il n'est cependant pas possible de la prolonger en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. △

Pour qu'une fonction sur $\mathbb{Q}$ puisse être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}$, il faut un peu plus que la continuité. Il faut la Cauchy-continuité, que nous définissons pas plus tard qu'immédiatement.

Définition 12.60 ([308]).
*Soient X et Y deux espaces métriques. Une application $f\colon X \to Y$ est dite **Cauchy-continue** si pour toute suite de Cauchy (x_n) dans X, la suite $\big(f(x_n)\big)$ est de Cauchy dans Y.*

En terme de prolongement continu, nous avons ce lemme qui demande à une fonction d'être Cauchy-continue. Vous pouvez comparer avec le principe de prolongement analytique 17.139 qui donne un énoncé similaire pour un prolongement analytique.

Lemme 12.61 ([1, 309, 310]).
Soit une fonction Cauchy-continue[20] $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$.

(1) La limite $\lim_{q\to x} f(q)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(2) Il existe un unique prolongement continu $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(3) Ce prolongement est donné par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{si } x \in \mathbb{Q} \\ \lim_{q\to x} f(q) & \textit{sinon} \end{cases} \tag{12.110}$$

Démonstration. Imprégnez-vous bien de la définition 7.92 de la limite avant de commencer.

(i) **Unicité** Prouvons rapidement l'unicité avant l'existence, parce que c'est facile.

L'unicité du prolongement est la proposition 7.221 à propos de fonctions continues égales sur une partie dense. La densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, si vous la cherchez est la proposition 10.15.

18. Définition 7.33.

19. Proposition 1.344. Le fait que $\sqrt{2}$ existe dans $\mathbb{R}$ est la proposition 1.404.

20. Définition 12.60 ; nous en avons discuté dans l'exemple 12.59.

(ii) **Candidat limite** Soit $x \in \mathbb{R}$. Vu que $x \in \bar{\mathbb{Q}}$, nous pouvons chercher à savoir si $\lim_{q\to x} f(q)$ existe. Si elle existe, elle sera unique.

Soit une suite (q_i) d'éléments de $\mathbb{Q}$ qui converge vers x dans $\mathbb{R}$ (i.e. pour la topologie de $\mathbb{R}$). Les nombres réels $f(q_i)$ forment une suite dans $\mathbb{R}$. La suite (q_i) étant convergente, elle est de Cauchy[21].

Puisque f est supposée Cauchy-continue, la suite $\big(f(q_i)\big)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, et elle est donc convergente.

(iii) **C'est bien la limite** Nous prouvons à présent que le nombre réel $\lim_{i\to\infty} f(q_i)$ (dont l'existence vient d'être prouvée) vérifie bien la définition de la limite $\lim_{q\to x} f(q)$.

Soit un voisinage V de $\lim f(q_i)$ dans $\mathbb{R}$. Nous devons trouver un voisinage W de x dans $\mathbb{R}$ tel que

$$f\big(W \cap \mathbb{Q}\setminus\{x\}\big) \subset V. \tag{12.111}$$

Pour cela nous considérons $\epsilon > 0$ tel que $B\big(\lim f(q_i), \epsilon\big) \subset V$. Comme f est continue sur $\mathbb{Q}$, il existe δ tel que

$$|p - q| < 2\delta \Rightarrow |f(p) - f(q)| < \epsilon. \tag{12.112}$$

Nous posons $W = B(x, \delta)$.

Soit $q \in W \cap \mathbb{Q}\setminus\{x\}$. Nous nous proposons de majorer la quantité $|f(q) - \lim f(q_i)|$ par un multiple de ϵ.

Pour cela nous considérons k suffisamment grand pour que $|f(q_k) - \lim f(q_i)| < \epsilon$. Et de plus, puisque $q_i \to x$ nous considérons k suffisamment grand pour que $|q_k - x| < \delta$. L'indice k est choisi pour vérifier les deux conditions en même temps.

Nous écrivons alors la majoration suivante :

$$|f(q) - \lim f(q_i)| \leqslant |f(q) - f(q_k)| + |f(q_k) - \lim f(q_i)|. \tag{12.113}$$

Le second terme est majoré par ϵ. Pour le premier terme, $q \in B(x, \delta)$ et $q_k \in B(x, \delta)$, donc $|q - q_k| \leqslant 2\delta$, ce qui implique $|f(q) - f(q_k)| < \epsilon$.

Au final, $|f(q) - \lim f(q_i)| \leqslant 2\epsilon$. En reprenant tout le travail avec $\epsilon/2$ au lieu de ϵ nous trouvons $f(q) \in B\big(\lim f(q_i), \epsilon\big) \subset V$.

(iv) **Intermède** Jusqu'à présent, nous avons prouvé que

$$\lim_{q\to x} f(q) \tag{12.114}$$

existe et vaut

$$\lim f(q_i) \tag{12.115}$$

lorsque (q_i) est une suite quelconque de rationnels qui converge vers x. Nous l'écrivons pour la référencer plus tard :

$$\lim_{q\to x} f(q) = \lim f(q_i). \tag{12.116}$$

La limite (12.114) est une limite de fonction définie sur $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ en un point adhérent à l'ensemble de définition de f. La limite (12.115) est une limite usuelle d'une suite dans $\mathbb{R}$.

(v) **Le prolongement** Nous posons

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \lim_{q\to x} f(q) & \text{sinon} \end{cases} \tag{12.117}$$

et nous allons prouver que $\tilde{f}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

(vi) **Continuité** Soit $a \in \mathbb{R}$; nous allons montrer la continuité de $\tilde{f}$ en a. Nous fixons bien entendu $\epsilon > 0$, et nous nous acharnons à majorer la quantité $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)|$.

Puisque f est continue sur $\mathbb{Q}$, nous considérons δ' tel que (dans $\mathbb{Q}$) $0 < |q - q'| < \delta'$ implique $|f(q) - f(q')| < \epsilon$.

21. Théorème 7.247(2).

(i) $a \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{Q}$ Alors $\tilde{f}(x) = f(x)$ et $\tilde{f}(a) = f(a)$. Par la continuité de f sur $\mathbb{Q}$, il existe un δ tel que $0 < |x-a| < \delta$ implique $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

(ii) $a \in \mathbb{Q}$, **x irrationnel** Nous considérons une suite de rationnels $q_k \to x$ (vous penserez à l'utilisation du lemme 1.386). Nous avons la majoration

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)| = |\lim_{q\to x} f(q) - f(a)| \leqslant |\lim_{q\to x} f(q) - f(q_k)| + |f(q_k) - f(a)|. \tag{12.118}$$

Nous considérons $\delta < \delta'$ et k suffisament grand pour que $|q_k - x| < \delta' - \delta$. Avec ces choix,

$$|q_k - a| \leqslant |q_k - x| + |x - a| \leqslant \delta'. \tag{12.119}$$

Enfin nous prenons également k suffisament grand pour avoir $|\lim_{q\to x} f(q) - f(q_k)| \leqslant \epsilon$. Les inégalités (12.118) peuvent alors être prolongées pour avoir

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)| \leqslant 2\epsilon. \tag{12.120}$$

(iii) **a irrationnel,** $x \in \mathbb{Q}$ Nous écrivons encore la majoration

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)| = |f(x) - \lim_{q\to a} f(q)| \leqslant |f(x) - f(q_k)| + |f(q_k) - \lim_{q\to a} f(a)|. \tag{12.121}$$

Nous prenons $\delta < \delta'/2$ et nous choisissons k assez grand pour que $|q_k - a| < \delta'/2$. De ces choix, il ressort que

$$|q_k - x| \leqslant |q_k - a| + |a - x| \leqslant \frac{\delta'}{2} + \frac{\delta'}{2} \leqslant \delta'. \tag{12.122}$$

Donc $|f(x) - f(q_k)| < \epsilon$. De plus, pour k assez grand, $|f(q_k) - \lim_{q\to a} f(q)| \leqslant \epsilon$.

(iv) **a et x irrationnels** Nous avons

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)| = |\lim_{q\to x} f(q) - \lim_{r\to a} f(r)|, \tag{12.123}$$

et nous considérons des suites de rationnels $q_k \to x$ et $r_i \to a$. De plus nous considérons $\delta < \delta'/4$, et k, i suffisament grands pour avoir $|q_k - x| \leqslant \delta'/4$ et $|r_i - a| < \delta'/4$. Avec tout cela nous avons

$$|q_k - r_i| \leqslant |q_k - x| + |x - a| + |a - r_i| \leqslant 3\delta'/4 < \delta'. \tag{12.124}$$

Enfin, en choisissant i et k de telle sorte à avoir $|\lim_{q\to x} f(q) - f(q_k)| \leqslant \epsilon$ et $|f(r_i) - \lim_{r\to a} f(r)| < \epsilon$ nous avons les majorations

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)| = |\lim_{q\to x} f(q) - \lim_{r\to a} f(r)| \tag{12.125a}$$
$$\leqslant |\lim_{q\to x} f(x) - f(q_k)| + |f(q_k) - f(r_i)| + |f(r_i) - \lim_{r\to q} f(r)| \tag{12.125b}$$
$$\leqslant 3\epsilon. \tag{12.125c}$$

□

Proposition 12.62.
Soient des fonctions continues $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f et g sont égales sur $\mathbb{Q}$, alors elles sont égales sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Nous pouvons utiliser les propriétés fondamentales des réels et de la continuité. Soit $x \in \mathbb{R}$; nous voulons montrer que $f(x) = g(x)$. En prenant par exemple le lemme 1.386, il existe une suite q_i de rationnels telle que $q_i \xrightarrow{\mathbb{R}} x$.

Par ailleurs, f et g sont continues sur $\mathbb{R}$ et donc en chaque point de $\mathbb{R}$ (théorème 7.170). Par la caractérisation séquentielle 7.117 de la continuité, nous avons

$$f(x) = \lim_{i\to\infty} f(q_i) = \lim_{i\to\infty} g(q_i) = g(x). \tag{12.126}$$

□

Proposition 12.63 ([1]).
Soit une fonction strictement croissante $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. Alors la prolongation continue $\tilde f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est également strictement croissante.

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$. Notons $d = y - x$. Nous considérons des suites de rationnels $x_k \to x$ et $y_l \to y$ telles que pour tout k, $x_k \in B(x, d/3)$ et $y_k \in B(y, d/3)$. En particulier, $x_k < y_l$ pour tout k et l.

Soient des rationnels q et q' tels que pour tout k,

$$x_k < q < q' < y_k. \tag{12.127}$$

Pour trouver de tels rationnels, il suffit de les chercher dans $]x + \frac{d}{3}, y - \frac{d}{3}[$. Cet intervalle étant de longueur $d/3$, il contient des rationnels.

Vue la croissance de f sur $\mathbb{Q}$, nous avons, pour tout k :

$$f(x_k) < f(q) < f(q') < f(y_k), \tag{12.128}$$

et à la limite :

$$\tilde f(x) \leqslant f(q) < f(q') \leqslant \tilde f(y). \tag{12.129}$$

Notez que les inégalités strictes se changent en inégalités larges au passage à la limite. D'où l'utilité de prendre *deux* rationnels entre x_k et y_k pour maintenir une inégalité stricte entre $\tilde f(x)$ et $\tilde f(y)$. □

12.6 Espace des fonctions continues

Définition 12.64.
*Soit I, un intervalle de $\mathbb{R}$. L'**oscillation** sur I est le nombre*

$$\omega_f(I) = \sup_{x\in I} f(x) - \inf_{x\in I} f(x). \tag{12.130}$$

Pour chaque x fixé, la fonction

$$x \mapsto \omega_f\big(B(x, \delta)\big) \tag{12.131}$$

est une fonction positive, croissante et a donc une limite (pour $\delta \to 0$). Nous notons $\omega_f(x)$ cette limite qui est l'**oscillation** de f en ce point. Une propriété immédiate est que f est continue en x_0 si et seulement si $\omega_f(x_0) = 0$.

Lemme 12.65.
L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une réunion dénombrable de fermés.

Démonstration. Soit D l'ensemble des points de discontinuité de f. Nous avons

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \text{ tel que } \omega_f(x) \geqslant \frac{1}{n}\}. \tag{12.132}$$

Il nous suffit donc de montrer que pour tout ϵ, l'ensemble

$$\{x \text{ tel que } \omega_f(x) < \epsilon\} \tag{12.133}$$

est ouvert. Soit en effet x_0 dans cet ensemble. Il existe δ tel que $\omega_f\big(B(x_0, \delta)\big) < \epsilon$. Si $x \in B(x_0, \delta)$, alors si on choisit δ' tel que $B(x, \delta') \subset B(x_0, \delta)$, nous avons $\omega_f\big(B(x, \delta')\big) < \epsilon$, ce qui justifie que $\omega_f(x) < \epsilon$ et donc que x est également dans l'ensemble considéré. □

Théorème 12.66.
L'ensemble des points de discontinuité d'une limite simple de fonctions continues est de première catégorie.

Démonstration. Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement vers f. Nous devons écrire l'ensemble des points de discontinuité de f comme une union dénombrable d'ensembles tels que sur tout intervalle I, aucun de ces ensembles n'est dense. Nous savons déjà par le lemme 12.65 que l'ensemble des points de discontinuité de f est donné par

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \text{ tel que } \omega_f(x) \geqslant \frac{1}{n}\}. \tag{12.134}$$

Nous essayons donc de prouver que pour tout ϵ, l'ensemble

$$F = \{x \text{ tel que } \omega_f(x) \geqslant \epsilon\} \tag{12.135}$$

est nulle part dense. Soit

$$E_n = \bigcap_{i,j>n} \{x \text{ tel que } |f_i(x) - f_j(x)| < \epsilon\}. \tag{12.136}$$

Nous montrons que cet ensemble est fermé en étudiant le complémentaire. Soit $x \notin E_n$; alors il existe un couple (i, j) tel que

$$|f_i(x) - f_j(x)| > \epsilon. \tag{12.137}$$

Par continuité, cette inégalité reste valide dans un voisinage de x. Donc il existe un voisinage de x contenu dans $\complement E_n$ et E_n est donc fermé.

De plus nous avons $E_n \subset E_{n+1}$ et $\bigcup_n E_n = \mathbb{R}$. Ce dernier point est dû au fait que pour tout x, il existe N tel que $i, j > N$ implique $|f_i(x) - f_j(x)| \leqslant \epsilon$. Cela est l'expression du fait que la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Soit I, un intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Nous voulons trouver un intervalle $J \subset I$ sur lequel f est continue. Nous écrivons I sous la forme

$$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cap I). \tag{12.138}$$

Tous les ensembles $J_n = E_n \cap I$ ne peuvent être nulle part dense en même temps (à cause du théorème de Baire 7.284). Il existe donc un n tel que J_n contienne un ouvert J. Le but est de montrer que f est continue sur J. Pour ce faire, nous n'allons pas simplement majorer $|f(x)-f(x_0)|$ par ϵ lorsque $|x - x_0|$ est petit. Nous allons majorer l'oscillation de f sur $B(x_0, \delta)$ lorsque δ est petit. Pour cela nous prenons x_0 et x dans J et nous écrivons

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)|. \tag{12.139}$$

À ce niveau nous rappelons que n est fixé par le choix de J, dans lequel ϵ est déjà inclus. Nous choisissons évidemment $|x - x_0| \leqslant \delta$ de telle sorte que le second terme soit plus petit que ϵ en vertu de la continuité de f_n. Pour le premier terme, pour tout $i, j \geqslant n$ nous avons

$$|f_i(x) - f_j(x)| < \epsilon. \tag{12.140}$$

Si nous posons $j = n$ et $i \to \infty$, en tenant compte du fait que $f_i \to f$ simplement,

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \epsilon. \tag{12.141}$$

Nous avons donc obtenu $|f(x)-f_n(x_0)| \leqslant 2\epsilon$. Cela signifie que dans un voisinage de rayon δ autour de x_0, les valeurs extrêmes prises par $f(x)$ sont $f_n(x_0) \pm 4\epsilon$. Nous avons donc prouvé que pour tout ϵ, il existe δ tel que

$$\omega_f\big([x_0 - \delta, x_0 + \delta]\big) \leqslant 4\epsilon. \tag{12.142}$$

De là nous concluons que

$$\lim_{\delta\to 0} \omega_f\big([x_0 - \delta, x_0 + \delta]\big) = 0, \tag{12.143}$$

ce qui signifie que f est continue en x_0. □

Exemple 12.67.
Une fonction discontinue sur $\mathbb{Q}$ et continue ailleurs. La fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = p/q \end{cases} \tag{12.144}$$

où par « $x = p/q$ » nous entendons que p/q est la fraction irréductible.

Cette fonction est discontinue sur $\mathbb{Q}$ parce que si $q \in \mathbb{Q}$ alors $f(q) \neq 0$ alors que dans tous voisinage de q il existe un irrationnel sur qui la fonction vaudra zéro.

Montrons que f est continue sur les irrationnels. Si $x_0 \notin \mathbb{Q}$ alors $f(x_0) = 0$. Mais si on prend un voisinage suffisamment petit de x_0, nous pouvons nous arranger pour que tous les rationnels aient un dénominateur arbitrairement grand. En effet si nous nous fixons un premier rayon $r_0 > 0$ alors il existe un nombre fini de fractions de la forme $1, \frac{k}{2}, \frac{k}{3}, \ldots, \frac{k}{N}$ dans $B(x_0, r_0)$. Il suffit maintenant de choisir $0 < r \leqslant r_0$ tel que ces fractions soient toutes hors de $B(x_0, r)$. Dans cette boule nous avons $f < \frac{1}{N}$. Du coup f est continue en x_0. △

Définition 12.68 (Point périodique[311])**.**
Soit $f\colon I \to I$ une application d'un ensemble I dans lui-même. Si $x \in I$ vérifie $f^n(x) = x$ et $f^k(x) \neq x$ pour $k = 1, \ldots, n-1$ alors on dit que x est un point n-périodique.

Lemme 12.69.
Soit I un segment[22] de $\mathbb{R}$ et une fonction continue $f\colon I \to I$. Si K est un segment fermé avec $K \subset f(I)$ alors il existe un segment fermé $L \subset I$ tel que $K = f(L)$.

Démonstration. Mentionnons immédiatement que f est continue sur I qui est compact[23]. Par conséquent tous les nombres dont nous allons parler sont finis parce que f est bornée par le théorème 10.49.

Soit $K = [\alpha, \beta]$. Si $\alpha = \beta$ alors le segment $L = \{a\}$ convient. Nous supposons donc que $\alpha \neq \beta$ et nous considérons $a, b \in I$ tels que $\alpha = f(a)$ et $\beta = f(b)$. Puisque $a \neq b$ nous supposons $a < b$ (le cas $a > b$ se traite de façon similaire).

Nous posons

$$A = \{x \in [a, b] \text{ tel que } f(x) = \alpha\}. \tag{12.145}$$

C'est un ensemble borné par a et b. De plus il est fermé ; ce dernier point n'est pas tout à fait évident parce que f n'est pas définit sur $\mathbb{R}$, mais sur I, qui est fermé, le corolaire 10.79 n'est donc pas immédiatement utilisable. Prouvons donc que $Z = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = \alpha\}$ est fermé. Si x_0 est hors de Z alors, soit x_0 est dans I, soit il est hors de I. Dans ce second cas, le complémentaire de I étant ouvert, on a un voisinage de x_0 hors de I, et par conséquent hors de Z. Si au contraire $x_0 \in I$ alors il y a (encore) deux cas : soit $x_0 \in \operatorname{Int}(I)$, soit x_0 est sur le bord de I. Dans le premier cas, le théorème des valeurs intermédiaires[24] fonctionne. Pour le second cas, nous supposons $x_0 = \max(I)$ (le cas $x_0 = \min(I)$ est similaire). Le théorème des valeurs intermédiaires dit que sur $[x_0 - \epsilon, x_0]$, $f \neq \alpha$ et en même temps, sur $]x_0, x_0 + \epsilon]$, nous sommes en dehors du domaine. Au final $\{f(x) = \alpha\}$ est fermé et A est alors fermé en tant que intersection de deux fermés.

L'ensemble A étant non vide ($a \in A$), il possède donc un maximum que nous nommons u :

$$u = \max(A). \tag{12.146}$$

Nous posons aussi

$$B = \{x \in [u, b] \text{ tel que } f(x) = \beta\} \tag{12.147}$$

qui est encore fermé, borné et non vide. Nous pouvons donc définir

$$v = \min(B). \tag{12.148}$$

22. définition 10.46. Un segment est un intervalle fermé borné.
23. Par le lemme 10.19.
24. Théorème 10.82.

Nous prouvons maintenant que $f\big([u,v]\big) = [\alpha,\beta]$. D'abord $f\big([u,v]\big)$ est un intervalle compact[25] contenant $f(u) = \alpha$ et $f(v) = \beta$. Par conséquent $[\alpha,\beta] \subset f\big([u,v]\big)$. Pour l'inclusion inverse supposons $t \in [u,v]$ tel que $f(t) > \beta$. Vu que $f(a) = \alpha$ et $\alpha < \beta$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in [a,t]$ tel que $f(t_0) = \beta$. Cela donne $t_0 < v$ et donc contredit la minimalité de v dans B. Nous en déduisons que $f\big([u,v]\big)$ ne contient aucun élément plus grand que β. Même jeu pour montrer que l'intervalle ne contient aucun élément plus petit que α.

En définitive, le segment $L = [u,v]$ satisfait toutes les exigences. □

Lorsque $I_2 \subset f(I_1)$ nous notons $I_1 \to I_2$ ou, si une ambiguïté est à craindre, $I_1 \xrightarrow{f} I_2$. Cette flèche se lit « recouvre ».

Lemme 12.70 ([312, 311])**.**
Soient les segments $I_0, \ldots, I_{n-1}$ tels que nous ayons le cycle

$$I_0 \to I_1 \to \ldots \to I_{n-1} \to I_0. \tag{12.149}$$

Alors f^n admet un point fixe $x_0 \in I_0$ tel que $f^k(x_0) \in I_k$ pour tout $k = 0, \ldots, n-1$.

Démonstration. Nous prouvons les cas $n = 1$ et $n = 2$ séparément.

(i) $\underline{n = 1}$ Nous avons $I_0 \to I_0$, c'est-à-dire que $I_0 \subset f(I_0)$. Si $I_0 = [a,b]$ alors nous posons $a = f(\alpha)$ et $b = f(\beta)$ pour certains $\alpha, \beta \in I_0$. Nous posons ensuite $g(x) = f(x) - x$.
Dans un premier temps, $g(\alpha) = a - \alpha \leqslant 0$ parce que $a = \min(I_0)$ et $\alpha \in I_0$. Pour la même raison, $g(\beta) = b - \beta \geqslant 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne alors $t_0 \in [\alpha,\beta] \subset I_0$ tel que $g(t_0) = 0$. Nous avons donc $f(t_0) = t_0$.

(ii) $\underline{n = 2}$ Nous avons $I_0 \to I_1 \to I_0$. Puisque $I_1 \subset f(I_0)$, le lemme 12.69 donne un segment $J_1 \subset I_0$ tel que $f(J_1) = I_1$. Mézalors

$$J_1 \subset I_0 \subset f(I_1) = f^2(J_1). \tag{12.150}$$

Nous avons donc $J_1 \xrightarrow{f^2} J_1$ et par le cas $n = 1$ traité plus haut, la fonction f^2 a un point fixe x_0 dans J_1. De plus

$$f(x_0) \in f(J_1) = I_1, \tag{12.151}$$

le point x_0 est donc bien celui que nous cherchions.

(iii) $\underline{\textbf{Cas général}}$ Nous avons

$$I_0 \to I_1 \to \ldots \to I_{n-1} \to I_0. \tag{12.152}$$

Puisque $I_1 \subset f(I_0)$, il existe $J_1 \subset I_0$ tel que $f(J_1) = I_1$. Mais

$$I_2 \subset f(I_1) = f^2(J_1), \tag{12.153}$$

donc il existe $J_2 \subset J_1$ tel que $I_2 = f^2(J_2)$. En procédant ainsi aussi longtemps qu'il le faut, nous construisons les ensembles $J_1, \ldots, J_{n-1}$ tels que

$$J_{n-1} \subset J_{n-2} \subset \ldots \subset J_1 \subset J_0 \tag{12.154}$$

tels que $I_k = f^k(J_k)$ pour tout $k = 1, \ldots, n-1$. La dernière de ces inclusions est $I_{n-1} = f^{n-1}(J_{n-1})$, mais $I_{n-1} \to I_0$, c'est-à-dire que

$$I_0 \subset f(I_{n-1}) = f^n(J_{n-1}), \tag{12.155}$$

et il existe $J_n \subset J_{n-1}$ tel que $I_0 \subset f^n(J_n)$. Mais comme $J_n \subset J_0$ nous avons en particulier $J_n \subset f^n(J_n)$.
Cela donne un point fixe $x_0 \in J_n$ pour f^n. Par construction, nous avons $J_n \subset J_{n-1} \subset \ldots \subset J_1 \subset J_0$ et donc $x_0 \in J_k$ pour tout k. En particulier

$$f^k(x_0) \in f^k(J_k) = I_k \tag{12.156}$$

pour tout k.

25. Corolaire 10.84 et théorème 7.186.

□

Théorème 12.71 (Théorème de Sarkowski[312, 311]).
Soit I, un segment de $\mathbb{R}$ et une application continue $f\colon I\to I$. Si f admet un point 3-périodique, alors f admet des points n-périodiques pour tout $n\geqslant 1$.

Démonstration. Soit $a\in I$ un point 3-périodique pour f et notons $b=f(a)$, $c=f(b)$. Les points b et c sont également des points 3-périodiques. Quitte à renommer, nous pouvons supposer que a est le plus petit des trois. Il reste deux possibilités : $a<b<c$ et $a<c<b$. Nous traitons d'abord le premier cas.

Supposons $a<b<c$. Nous posons $I_0=[a,b]$ et $I_1=[b,c]$. Nous avons immédiatement $I_1\subset f(I_0)$ et comme $f(b)=c$ et $f(c)=a$, $f(I_1)$ recouvre $[a,c]$ et donc recouvre en même temps I_1 et I_2. Nous avons donc $I_0\to I_1$, $I_1\to I_0$ et $I_1\to I_1$.

(i) **Un point 1-périodique** Nous avons $I_1\to I_1$ qui prouve que f a un point fixe dans I_1. C'est le cas $n=1$ du lemme 12.70. Voilà un point 1-périodique.

(ii) **Un point 2-périodique** Nous avons $I_0\to I_1\to I_0$. Par conséquent, le lemme 12.70 dit que f^2 a un point fixe $x_0\in I_0$ tel que $f(x_0)\in I_1$. Montrons que $f(x_0)\neq x_0$. Pour avoir $x_0=f(x_0)$, il faudrait $x_0\in I_0\cap I_1=\{b\}$. Mais b est un point 3-périodique, donc ne vérifiant certainement pas $f^2(b)=b$. Nous en déduisons que $f(x_0)\neq x_0$ et donc que x_0 est 2-périodique.

(iii) **Un point 3-périodique** On en a par hypothèse.

(iv) **Un point n-périodique pour $n\geqslant 4$** Nous avons le cyle

$$I_0\to\underbrace{I_1\to I_1\to\ldots\to I_1}_{\text{n-1}fois}\to I_0. \tag{12.157}$$

Le lemme donne alors un point fixe $x\in I_0$ pour f^n tel que $f^k(x)\in I_1$ pour $k=1,\ldots,n-1$. Est-ce possible que $x=b$? Non parce que $f^2(b)=a\in I_0$ alors que $f^2(x)\in I_1$. Mais $I_0\cap I_1=\{b\}$.

Par conséquent la relation $f^k(x)\in I_1$ exclut d'avoir $f^k(x)=x$, et le point x est bien n-périodique.

Passons au cas $a<c<b$. Alors nous posons $I_0=[a,c]$ et $I_1=[c,b]$. Encore une fois $f(I_0)$ contient a et b, donc $I_0\to I_0$ et $I_0\to I_1$. Mais en même temps $f(I_1)$ contient a et c, donc $I_1\to I_0$.

Nous pouvons donc refaire comme dans le premier cas, en inversant les rôles de I_0 et I_1. En particulier nous pouvons considérer le cycle

$$I_1\to I_0\to I_0\to\ldots\to I_0\to I_1. \tag{12.158}$$

□

12.7 Uniforme continuité

Définition 12.72.
*Une partie $A\subset\mathbb{R}^m$ est dite **bornée** si il existe un $M>0$ tel que $A\subset B(0,M)$. Le **diamètre** de la partie A est le nombre*

$$\operatorname{Diam}(A)=\sup_{x,y\in A}\|x-y\|\in[0,\infty]. \tag{12.159}$$

Lorsque A est bornée, il existe un M tel que $\|x\|\leqslant M$ pour tout $x\in A$.

Lemme 12.73.
Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}^m$, alors $\operatorname{Diam}(A)=\operatorname{Diam}(\bar A)$.

Nous n'allons pas donner de démonstration de ce lemme.

Si (x_n) est une suite et I est un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$, nous désignons par x_I la suite des éléments x_n tels que $n\in I$. Par exemple, la suite $x_{\mathbb{N}}$ est la suite elle-même, la suite $x_{2\mathbb{N}}$ est la suite obtenue en ne prenant que les éléments d'indice pair.

Les suites x_I ainsi construites sont dites des **sous-suites** de la suite (x_n).

12.8 Uniforme continuité

Pour une fonction $f\colon D\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, la continuité au point a signifie que pour tout $\varepsilon>0$,

$$\exists\delta>0 \text{ tel que } 0<\|x-a\|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon. \tag{12.160}$$

Le δ qu'il faut choisir dépend évidemment de ε, mais il dépend en général aussi du point a où l'on veut tester la continuité. C'est-à-dire que, étant donné un $\varepsilon>0$, nous pouvons trouver un δ qui fonctionne pour certains points, mais qui ne fonctionne pas pour d'autres points.

Il peut cependant également arriver qu'un même δ fonctionne pour tous les points du domaine. Dans ce cas, nous disons que la fonction est uniformément continue sur le domaine, c'est la définition 7.282.

Il est intéressant de voir ce que signifie le fait de *ne pas* être uniformément continue sur un domaine D. Il s'agit essentiellement de retourner tous les quantificateurs de la définition 7.282.

$$\exists\varepsilon>0 \text{ tel que } \forall\delta>0,\ \exists x,y\in D \text{ tel que } \|x-y\|<\delta \text{ et } \big|f(x)-f(y)\big|>\varepsilon. \tag{12.161}$$

Dans cette condition, les points x et y peuvent être fonction du δ. L'important est que pour tout δ, on puisse trouver deux points δ-proches dont les images par f ne soient pas ε-proches.

Exemple 12.74.
Prenons la fonction $f(x)=\frac{1}{x}$, et demandons nous pour quel δ nous sommes sûr d'avoir

$$|f(a+\delta)-f(a)|=\left|\frac{1}{a+\delta}-\frac{1}{a}\right|<\varepsilon. \tag{12.162}$$

Pour simplifier, nous supposons que $a>0$. Nous calculons

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}-\frac{1}{a+\delta}&<\varepsilon\\ \frac{\delta}{a(a+\delta)}&<\varepsilon\\ \delta&<\varepsilon a^2+\varepsilon a\delta\\ \delta(1-\varepsilon a)&<\varepsilon a^2\\ \delta&<\frac{\varepsilon a^2}{1-\varepsilon a}.\end{aligned} \tag{12.163}$$

Notons que, à ε fixé, plus a est petit, plus il faut choisir δ petit. La fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ n'est donc pas uniformément continue. Cela correspond au fait que, proche de zéro, la fonction monte très vite. Une fonction uniformément continue sera une fonction qui ne montera jamais très vite. △

Proposition 12.75.
Quelques propriétés des fonctions uniformément continues.

(1) Toute application uniformément continue est continue ;

(2) la composée de deux fonctions uniformément continues est uniformément continue ;

Nous verrons qu'une application lipschitzienne est uniformément continue (proposition 12.332).

Une fonction peut être uniformément continue sur un domaine et pas sur un autre. Le théorème suivant donne une importante indication à ce sujet.

Théorème 12.76 (Heine)**.**
Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Une fonction continue $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ est uniformément continue sur K.

La démonstration qui suit est valable pour une fonction $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ et utilise le fait que le produit cartésien de compacts est compact. Dans le cas de fonctions sur $\mathbb{R}$, nous pouvons modifier la démonstration pour ne pas utiliser ce résultat ; voir plus bas.

Démonstration. Nous allons prouver ce théorème par l'absurde. Nous commençons par écrire la condition (12.161) qui exprime que f n'est pas uniformément continue sur le compact K :

$$\exists\varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall\delta > 0,\, \exists x, y \in K \text{ tels que } \|x - y\| < \delta \text{ et } \big|f(x) - f(y)\big| > \varepsilon. \tag{12.164}$$

En particulier (en prenant $\delta = \frac{1}{n}$ pour tout n), pour chaque n nous pouvons trouver x_n et y_n dans K qui vérifient simultanément les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \|x_n - y_n\| < \dfrac{1}{n} & (12.165a)\\ \big|f(x_n) - f(y_n)\big| > \varepsilon. & (12.165b) \end{cases}$$

Nous insistons que c'est le même ε pour chaque n. L'ensemble K étant compact, l'ensemble $K \times K$ est compact (théorème 7.275) et nous pouvons trouver une sous-suite convergente *du couple* (x_n, y_n) dans $K \times K$. Quitte à passer à ces sous-suites, nous supposons que (x_n, y_n) converge dans $K \times K$ et en particulier, que les suites (x_n) et (y_n) sont convergentes. Étant donné que pour chaque n elles vérifient $\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n}$, les limites sont égales :

$$\lim x_n = \lim y_n = x. \tag{12.166}$$

L'ensemble K étant fermé, la limite x est dans K. Par continuité de f, nous avons finalement

$$\lim f(x_n) = \lim f(y_n) = f(x), \tag{12.167}$$

mais alors

$$\lim_{n\to\infty} \big|f(x_n) - f(y_n)\big| = 0, \tag{12.168}$$

ce qui est en contradiction avec le choix (12.165b).

Tout ceci prouve que $f(K)$ est bornée supérieurement et que f atteint son supremum (qui est donc un maximum). Le fait que $f(K)$ soit bornée inférieurement se prouve en considérant la fonction $-f$ au lieu de f. □

Remarque 12.77.

Nous pouvons ne pas utiliser le fait que le produit de compacts est compact. Cela est particulièrement commode lorsqu'on considère des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ parce que, dans ce cadre, nous ne pouvons pas supposer connue la notion de produit d'espaces topologiques.

Pour choisir les sous-suites (x_n) et (y_n), il suffit de prendre une sous-suite convergente de (x_n) et d'invoquer le fait que $\|x_n - y_n\| \leqslant \frac{1}{n}$. Les suites (x_n) et (y_n) étant adjacentes [26], la convergence de (x_n) implique la convergence de (y_n) vers la même limite.

Il est donc un peu superflu de parler de la convergence du couple (x_n, y_n).

Proposition 12.78 (Heine[313])**.**

Toute application continue d'un espace métrique compact dans un espace métrique quelconque est uniformément continue [27]*.*

Démonstration. Soient un espace métrique compact X et un espace métrique quelconque E. Nous considérons une application continue $f\colon X \to E$.

(i) **Un ensemble** Soit $\epsilon > 0$. Nous considérons l'ensemble

$$K = \{(x, y) \in X \times X \text{ tel que } d\big(f(x), f(y)\big) \geqslant \epsilon\}. \tag{12.169}$$

(ii) **Il est compact** L'espace X étant compact, $X \times X$ est également compact par le théorème 7.275. Les fonctions f et d étant continues, l'application

$$\begin{aligned} \varphi\colon X \times X &\to \mathbb{R}^+\\ (x, y) &\mapsto d\big(f(x), f(y)\big) \end{aligned} \tag{12.170}$$

est continue, de telle sorte que la partie $\varphi \geqslant \epsilon$ est fermée. Un fermé dans un compact est compact par le lemme 7.82.

26. Définition 10.35.
27. Uniforme continuité, définition 7.282.

(iii) **Une borne atteinte** Nous considérons l'application distance $d\colon K \to \mathbb{R}^+$. C'est une application continue sur le compact K ; donc elle atteint ses bornes (théorème des bornes atteintes, 10.49). Elle a un minimum que nous notons δ.

Comme $(x, x) \notin K$, nous avons $d(x, y) > 0$ pour tout $(x, y) \in K$. Et donc $\delta > 0$.

(iv) **Conclusion** Si $x, y \in X$ sont tels que $d(x, y) < \delta$, alors $(x, y) \notin K$. De ce fait nous avons

$$d\big(f(x), f(y)\big) < \epsilon. \tag{12.171}$$

D'où l'uniforme continuité de f sur X.

□

Lemme 12.79 ([1]).
Soit une fonction continue $f\colon [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$. Pour chaque $x \in [a, b]$ nous définissons

$$\begin{aligned} f_x\colon [c, d] &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto f(x, y). \end{aligned} \tag{12.172}$$

Alors l'application

$$\begin{aligned} g\colon [a, b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|f_x\|_\infty \end{aligned} \tag{12.173}$$

est continue.

Démonstration. Soit $\alpha \in [a, b]$, et prouvons la continuité de g en α.

(i) **Le décor** Nous considérons l'espace vectoriel normé $\big(C^0([a, b]), \|.\|_\infty\big)$ des fonctions continues sur $[a, b]$ muni de la norme uniforme. Prouvons que si $x_k \xrightarrow{[a,b]} \alpha$, alors $f_{x_k} \xrightarrow{unif} f_\alpha$.

(ii) **Module de continuité** Pour cela nous avons le calcul suivant, avec justifications juste en-dessous :

$$\|f_{x_k} - f_\alpha\|_\infty = \sup_{y \in [c,d]} \|f(x_k, y) - f(\alpha, y)\| \tag{12.174a}$$
$$\leqslant \sup_{y \in [c,d]} \big|\omega_f\big(\|(x_k, y) - (\alpha, y)\|\big)\big| \tag{12.174b}$$
$$= \sup_{y \in [c,d]} |\omega_f(|x_k - \alpha|)| \tag{12.174c}$$
$$= \omega_f(|x_k - \alpha|). \tag{12.174d}$$

Justifications.

— Pour (12.174b). Utilisation du module de continuité, définition 11.212.

— Pour (12.174c). La norme dans $\mathbb{R}^2$ de $(x_k, y) - (\alpha, y)$.

(iii) **Uniforme continuité** La fonction f est continue sur le compact $[a, b] \times [c, d]$. Elle est donc uniformément continue par le théorème de Heine 12.78, et donc son module de continuité vérifie $\lim_{h \to 0} \omega_f(h) = 0$ par 11.214.

Nous avons donc

$$\|f_{x_k} - f_\alpha\|_\infty \leqslant \omega_f(|x_k - \alpha|) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0. \tag{12.175}$$

Nous avons donc prouvé que si $x_k \xrightarrow{\mathbb{R}} \alpha$, alors $f_{x_k} \xrightarrow{\|.\|_\infty} f_\alpha$.

(iv) **Conclusion** La norme étant une application continue, nous en déduisons que si $x_k \to \alpha$, alors $\|f_{x_k}\|_\infty \to \|f_\alpha\|_\infty$.

Ceci est la continuité séquentielle de la fonction g, et donc la continuité tout court.

□

12.9 Fonctions sur un compact

Par le théorème des valeurs intermédiaires 10.82, l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle, et nous avons l'importante propriété suivante des fonctions continues sur un compact.

Le théorème suivant est un cas particulier du théorème 10.49.

Théorème 12.80.
Si f est une fonction continue sur l'intervalle compact $[a,b]$. Alors f est bornée sur $[a,b]$ et elle atteint ses bornes.

Démonstration. Étant donné que $[a,b]$ est un intervalle compact, son image est également un intervalle compact, et donc est de la forme $[m,M]$. Ceci découle du théorème 7.186 et le corolaire 10.84. Le maximum de f sur $[a,b]$ est la borne M qui est bien dans l'image (parce que $[m,M]$ est fermé). Idem pour le minimum m. □

12.10 Polynômes, théorème de d'Alembert

L'algèbre des polynômes sur un anneau est définie en 1.303. Si $P \in A[X]$ et si $\alpha \in A$ nous avons également défini l'évaluation de P en α ; c'est la définition 1.306. Dans le cadre de l'analyse, lorsque nous considérons des polynômes, nous allons complètement confondre le polynôme avec la fonction qu'il définit.

12.10.1 Polynômes sur les réels

Proposition 12.81.
Tout polynôme à coefficients réels de degré impair possède une racine réelle.

Démonstration. Nous mettons le plus haut degré en facteur :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = x^n \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^{n-k}}. \tag{12.176}$$

Le terme en $k = n$ vaut $a_n x^n$ tandis que les autres sont de la forme (à un coefficient près) $\frac{1}{x^l}$ pour un $l \geqslant 1$. Lorsque $x \to \infty$, chacun de ces termes s'annule (lemme 12.32). Nous avons donc

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = \infty, \tag{12.177}$$

et de même, n étant impair, $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires 10.82 nous donne alors l'existence d'un réel sur lequel P s'annule. □

12.10.2 Polynômes sur les complexes

Nous allons parler de comportement asymptotique de polynômes définis sur $\mathbb{C}$. La topologie que nous considérons est celle de la compactification en un point, décrite en 7.88.

Le lemme suivant donne une caractérisation de la limite en l'infini dans le compactifié $\hat{\mathbb{C}}$. Dans beaucoup de cas, cette caractérisation est prise comme la définition de la limite. Hélas, dans le Frido nous sommes des extrémistes et nous ne parvenons pas à dire le mot « limite » si il n'y a pas une topologie.

Lemme 12.82 ([1]).
Nous considérons la compactification en un point d'Alexandrov[28]*. Soit une fonction $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Nous avons $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ si et seulement si pour tout $M > 0$, il existe $R > 0$ tel que $|z| > R$ implique $|f(z)| > M$.*

28. Définition 7.88.

Démonstration. Souvenons-nous que, en général[29], nous avons

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \tag{12.178}$$

si pour tout voisinage V de b, il existe un voisinage W de a tel que $z \in W\backslash\{a\}$ implique $f(z) \in V$.

Précisons encore un point de notation. Si K est une partie de $\mathbb{C}$, nous notons K^c son complémentaire dans $\mathbb{C}$, pas dans $\hat{\mathbb{C}}$.

Ceci étant dit, nous passons à la preuve.

(i) **Sens direct** Nous supposons que $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$. Soit $M > 0$; nous considérons le voisinage $V = \overline{B(0,M)}^c \cup \{\infty\}$. Par définition de la limite, il existe un voisinage W de ∞ tel que $z \in W \Rightarrow f(z) \in V\backslash\{\infty\} = \overline{B(0,M)}^c$. Ce voisinage est de la forme $K^c \cup \{\infty\}$. Puisque K est compact, il est borné, et il existe $R > 0$ tel que $K \subset B(0,R)$.

Avec tout cela nous avons la chaine suivante d'implications :

$$|z| > R \Rightarrow z \in K^c \Rightarrow z \in W \Rightarrow f(z) \in V\backslash\{\infty\} = \overline{B(0,M)}^c \Rightarrow |f(z)| > M. \tag{12.179}$$

C'est bien la propriété que nous voulions.

(ii) **Sens réciproque** Soit un voisinage V de ∞. Nous avons $V = K^c \cup \{\infty\}$ où K est compact dans $\mathbb{C}$. Il existe $M > 0$ tel que $K \subset B(0,M)$.

Par hypothèse, il existe R tel que $|z| > R \Rightarrow |f(z)| > M$. Soit $W = \overline{B(0,R)}^c \cup \{\infty\}$. Nous avons la chaine

$$z \in W \Rightarrow |z| > R \Rightarrow |f(z)| > M \Rightarrow f(z) \in K^c \Rightarrow f(z) \in V. \tag{12.180}$$

□

Proposition 12.83 ([1]).
Soit le polynôme

$$\begin{aligned} P\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i z^i \end{aligned} \tag{12.181}$$

où nous sous-entendons que $a_n \neq 0$. La fonction $z \mapsto |P(z)|$ est équivalente[30] *en l'infini à la fonction*

$$\begin{aligned} w\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{R}^+ \\ z &\mapsto |a_n z^n|. \end{aligned} \tag{12.182}$$

Démonstration. Nous voudrions prouver qu'il existe une fonction $\alpha\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} |\sum_{i=0}^{n} a_i z^i| = \big(1+\alpha(z)\big)|a_n z^n|. & \text{(12.183a)}\\ \lim_{z\to\infty} \alpha(z) = 0. & \text{(12.183b)} \end{cases}$$

Nous trouvons un candidat pour être une telle fonction en isolant simplement $\alpha(z)$ de cette égalité. Nous trouvons

$$\alpha(z) = \left|\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{a_n} z^{i-n}\right| - 1. \tag{12.184}$$

Elle vérifie immédiatement (12.183). Le point qui fait intervenir la topologie de $\hat{\mathbb{C}}$ est de vérifier que $\lim_{z\to\infty} \alpha(z) = 0$. Le terme $i = n$ de la somme vaut 1. Il suffit donc de montrer que pour $i \neq n$ nous avons

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^{n-i}} = 0. \tag{12.185}$$

29. Définition 7.92.
30. Définition 7.58.

Soit $\epsilon > 0$. Nous devons prouver qu'il existe un voisinage V de ∞ dans $\hat{\mathbb{C}}$ tel que

$$\left|\frac{1}{z^{n-i}} - 0\right| \leqslant \epsilon \tag{12.186}$$

pour tout $z \in V$.

En utilisant la proposition 10.93 nous avons déjà

$$\left|\frac{1}{z^{n-i}}\right| = \frac{1}{|z^{n-i}|} = \frac{1}{|z|^{n-i}}. \tag{12.187}$$

Soit $R > 0$ tel que $\frac{1}{R} < \epsilon$. Nous considérons le voisinage $\{|z| > R\} \cup \{\infty\}$ de ∞. Dans ce voisinage, nous avons

$$\frac{1}{|z|^{n-i}} \leqslant \frac{1}{|z|} \leqslant \frac{1}{R} < \epsilon. \tag{12.188}$$

Et voilà. □

Le lemme suivant parle de polynôme sur $\mathbb{C}$. Vous pouvez l'adapter à $\hat{\mathbb{R}}$ et $\bar{\mathbb{R}}$.

Lemme 12.84.
Si $P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est un polynôme, alors $|P|$ atteint une borne inférieure globale.

Démonstration. Nous savons, par l'équivalence de fonctions prouvée dans la proposition 12.83 que $\lim_{z\to\infty} P(z) = \infty$. Soit $a > 0$ dans $\mathbb{R}$. Par le lemme 12.82 il existe un $R > a$ tel que $|z| > R \Rightarrow |f(z)| > |f(a)|$.

La fonction $|P|$ est continue sur le compact $\overline{B(0,R)}$. Soit z_0 le point de minimum[31] de $|P|$ sur $\overline{B(0,R)}$.

Nous devons prouver que z_0 donne même un minimum global. Comme $a \in \overline{B(0,R)}$ nous avons

$$|f(z_0)| \leqslant |f(a)|. \tag{12.189}$$

Si $z \in \overline{B(0,R)}^c$, nous avons

$$|f(z)| > |f(a)| \geqslant |f(z_0)|. \tag{12.190}$$

Donc ce z_0 est un minimum sur $B(0,R)$ et sur $\overline{B(0,R)}^c$. Bref, un minimum global. □

Lemme 12.85.
Soit le polynôme

$$\begin{aligned} P\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i z^i. \end{aligned} \tag{12.191}$$

La fonction P est équivalente à $a_0 + a_1 z$ en $z = 0$.

Démonstration. En posant $g(z) = a_0 + a_1 z$, nous devons trouver une fonction α telle que

$$P(z) = \big(1 + \alpha(z)\big) g(z). \tag{12.192}$$

Si $a_0 \neq 0$, il existe un voisinage de $z = 0$ sur lequel la fonction

$$\alpha(z) = \frac{z^2 \sum_{i=2}^{n} a_i z^{i-2}}{a_0 + a_1 z} \tag{12.193}$$

existe. Il n'y a aucun problème à ce que $\alpha(z) \to 0$ pour $z \to 0$[32], et un simple calcul[33] donne (12.193).

31. Théorème de Weierstrass 7.126.
32. En remarquant toutefois que c'est une limite à deux dimensions. Sachez la définir.
33. En fait, la formule (12.193) est obtenue en isolant $\alpha(z)$ dans (12.192).

Si par contre $a_0 = 0$, nous faisons le calcul intermédiaire suivant :

$$\alpha(z)g(z) = P(z) - g(z) = z^2 \sum_{i=2}^{n} a_i z^{i-2}, \tag{12.194}$$

et donc, en isolant $\alpha(z)$ et en simplifiant par z, nous voyons que la fonction α définie par

$$\alpha(z) = \frac{z}{a_1} \sum_{i=2}^{n} a_i z^{i-2} \tag{12.195}$$

convient. □

Proposition 12.86 ([314, 1])**.**
Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

(1) L'équation $z^2 = a + bi$ a une solution dans $\mathbb{C}$.

(2) Pour tout l, l'équation $z^{2^l} = a + bi$ a une solution dans $\mathbb{C}$.

Nous ne disons pas que ces solutions sont uniques[34].

Démonstration. Pour prouver (1), l'équation $z^2 = a + bi$ a pour solution $\pm\xi$ où[35]

$$\xi = \sqrt{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}} + i\,\mathrm{sgn}(b)\sqrt{-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{12.196}$$

Nous n'avons en fait pas besoin de montrer que $\pm\xi$ sont toutes deux des solutions, ni que ce sont les seules. Un calcul direct montre que $\xi^2 = a + bi$ et nous sommes contents.

Pour (2), nous faisons une récurrence sur l. Nous savons que

$$z^{2^{k+1}} = (z^{2^k})^2. \tag{12.197}$$

Soit $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $\xi^{2^k} = a + bi$; un tel ξ existe par hypothèse de récurrence. Alors si z est tel que $z^2 = \xi$, nous avons

$$z^{2^{k+1}} = a + bi. \tag{12.198}$$

□

Le théorème de d'Alembert possède de nombreuses démonstrations. En voici une qui à ma connaissance est celle demandant le moins d'analyse ; une démonstration à base de théorie de Galois peut être trouvée dans [86, 315]. Si vous lisez ces lignes pour savoir qu'un polynôme de degré n possède au *maximum* n racines, ce n'est pas ici qu'il faut regarder, mais le corolaire 3.149.

Théorème 12.87 (d'Alembert[314])**.**
Le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos : tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine complexe[36].

Démonstration. Nous effectuons une preuve tout à la fois par l'absurde et par récurrence en supposant que le polynôme

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \end{aligned} \tag{12.199}$$

n'a pas de racine dans $\mathbb{C}$, et que n soit le plus petit entier pour lequel un tel polynôme existe. Nous notons

$$n = 2^k m \tag{12.200}$$

où m est impair.

34. Comme vous en conviendrez en pensant à $z^2 = 1$ qui a déjà les solutions 1 et -1.
35. Si vous vous demandez où sont définies les racines carrés, c'est 10.85.
36. C'est la définition 6.69 d'être algébriquement clos.

Le lemme 12.84 donne un point z_0 qui réalise le minimum global de $|f|$ sur $\mathbb{C}$. Nous posons $g(z) = f(z_0 + z)$ et nous définissons ses coefficients A_i par

$$g(z) = \sum_{i=0}^{n} A_i z^i. \tag{12.201}$$

Nous avons $A_n = 1$ et $|A_0| = |f(z_0)|$. Soit A_r le premier à être non nul parmi les A_1, A_2, ….

(i) **Si** $r < n$ Par hypothèse de récurrence, il existe $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $\xi^r = -A_1/A_r$. Nous avons

$$g(t\xi) = A_0 + \frac{-A_r t^r A_0}{A_r} + t^{r+1} \sum_{i=r+1}^{n} A_i \xi^i t^{i-r-1}. \tag{12.202}$$

En notant $P(t)$ le dernier polynôme, nous pouvons écrire cela sous forme compacte :

$$g(t\xi) = A_0 - t^r A_0 + t^{r+1} P(t). \tag{12.203}$$

Puisque

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^{r+1}P(t)}{t^r |A_0|} = \lim_{t\to 0} tP(t) = 0, \tag{12.204}$$

il existe $t_0 > 0$ tel que

$$|t_0^{r+1} P(t_0)| < |A_0 t_0^r|. \tag{12.205}$$

Nous choisissons de plus $t_0 < 1$, de telle sorte que $1 - t^r > 0$. Avec cela nous avons

$$|g(t\xi)| \leqslant |A_0|(1 - t^r) + |t^{r+1}P(t)| = |A_0| \underbrace{-t^r|A_0| + |t^{r+1}P(t)|}_{<0} < |A_0|. \tag{12.206}$$

Or $|A_0|$ était un minimum global de $|g|$. Contradiction.

(ii) **Si** $r = n$ Dans ce cas,

$$g(z) = f(z_0 + z) = A_0 + z^n, \tag{12.207}$$

et nous rappelons que $n = 2^k m$ où m est impair. Nous allons trouver une contradiction dans les quatre cas $\mathrm{Re}(A_0) > 0$, $\mathrm{Re}(A_0) < 0$, $\mathrm{Im}(A_0) > 0$ et $\mathrm{Im}(A_0) < 0$. Bien entendu ces cas se recouvrent largement, mais en toute généralité, nous avons besoin des quatre.

(i) **Si** $\mathrm{Re}(A_0) > 0$ La proposition 12.86 nous permet de considérer $v \in \mathbb{C}$ tel que $v^{2^k} = -1$. Nous avons alors

$$g(tv) = A_0 + (tv)^n = A_0 + t^n (v^{2^k})^m = A_0 + t^n(-1)^m = A_0 - t^n \tag{12.208}$$

parce que m est impair. Nous avons $\mathrm{Im}\big(g(tv)\big) = \mathrm{Im}(A_0)$. Si t est assez petit pour que $t^n < |\mathrm{Re}(A_0)|$ nous avons aussi $|\mathrm{Re}\big(g(tv)\big)| < |\mathrm{Re}(A_0)|$. Donc

$$|g(tv)|^2 = |\mathrm{Re}\big(g(tv)\big)|^2 + |\mathrm{Im}\big(g(tv)\big)|^2 < |\mathrm{Re}(A_0)|^2 + |\mathrm{Im}(A_0)|^2 = |A_0|^2. \tag{12.209}$$

Donc $|g(tv)| < |A_0|$. Contradiction.

(ii) **Si** $\mathrm{Re}(A_0) < 0$ Nous prenons $v = 1$, et même histoire.

(iii) **Si** $\mathrm{Im}(A_0) < 0$ Nous prenons $w \in \mathbb{C}$ tel que

$$w^{2^k} = i(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}. \tag{12.210}$$

Là, il y a un peu d'arrachage de cheveux pour bien voir les cas. La difficulté est que les puissances de i alternent entre 1, -1, i et $-i$. Puisque m est impair, nous avons un l tel que $m = 2l + 1$. Nous subdivisons les cas l pair et l impair.

(i) **Si l est pair** Alors d'une part $\frac{1}{2}(m-1) = l$ est pair et donc

$$(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} = 1. \tag{12.211}$$

Et d'autre part, $i^{2l+1} = (-1)^l i = i$. En tout,

$$i^m(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} = i. \tag{12.212}$$

(ii) **Si l est impair** Alors $\frac{1}{2}(m-1) = l$ et $(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} = -1$. Mais en même temps, $i^{2l+1} = -i$, ce qui donne encore une fois

$$i^m(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} = i. \tag{12.213}$$

Bref, que l soit pair ou impair, nous avons $i^m(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} = i$.

Nous avons donc $\operatorname{Re}\big(g(tw)\big) = \operatorname{Re}(A_0)$ et $\operatorname{Im}\big(g(tw)\big) < \operatorname{Im}(A_0)$. Encore contradiction.

(iv) **Si $\operatorname{Im}(A_0) = 0$** Même chose que ce que nous venons de faire, mais avec

$$w^{2^k} = -i(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}. \tag{12.214}$$

□

Corolaire 12.88 ([1]).
Tout polynôme de degré 3 à coefficients réels possède au moins une racine réelle.

Démonstration. Soient les racines λ_1, λ_2 et λ_3 du polynôme en question. Toutes trois sont dans $\mathbb{C}$. Supposons que λ_1 ne soit pas réelle. Alors λ_2 ou λ_3 doit être égale à $\bar\lambda_1$. Disons λ_2. Nous avons donc les racines λ_1, $\bar\lambda_1$ et λ_3. Le polynôme se factorise alors en

$$a(X-\lambda_1)(X-\bar\lambda_1)(X-\lambda_3). \tag{12.215}$$

Le coefficient a doit être réel parce qu'il est le coefficient du terme en X^3 (réel par hypothèse). Si λ_3 n'est pas réel, alors ce polynôme ne peut pas avoir des coefficients réels. Entre autres parce que le terme indépendant est $a|\lambda_1|^2\lambda_3$, qui est réel si et seulement si λ_3 est réel[37]. □

Tant que vous y êtes, vous pouvez voir que le polynôme (12.215) est à coefficients réels si et seulement si $a \in \mathbb{R}$ et $\lambda_3 \in \mathbb{R}$.

Exemple 12.89.
Toute application linéaire $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a un vecteur propre. En effet si $R\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est linéaire, son polynôme caractéristique χ_R est de degré 3. Le corolaire 12.88 indique qu'un tel polynôme possède au moins une racine réelle. Une telle racine est une valeur propre de R par le théorème 9.110. △

Définition 12.90.
Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une racine de χ_u, l'ordre de l'annulation est la ***multiplicité algébrique*** *de la valeur propre λ de u. À ne pas confondre avec la* ***multiplicité géométrique*** *qui sera la dimension de l'espace propre.*

Proposition 12.91.
Un polynôme irréductible à coefficients réels est, soit de degré un, soit de degré 2 avec un discriminant négatif.

37. Notez l'utilisation du lemme 10.94.

Démonstration. Soit un polynôme P à coefficients réels de degré plus grand que 1. Alors le théorème de d'Alembert-Gauss (théorème 12.87) implique l'existence d'une racine $\alpha \in \mathbb{C}$. Si α est un réel, P est réductible. Si α n'est pas réel, alors son conjugué complexe $\bar{\alpha}$ est également une racine. Par conséquent les polynômes $(X - \alpha)$ et $(X - \bar{\alpha})$ divisent P dans $\mathbb{C}[X]$..

Ces deux polynômes sont premiers entre eux parce que

$$a(X - \alpha) + b(X - \bar{\alpha}) = 0 \tag{12.216}$$

implique $a = b = 0$. Par conséquent le produit

$$X^2 - (\alpha + \bar{\alpha})X + \alpha\bar{\alpha} \tag{12.217}$$

divise également P. Ce dernier est un polynôme à coefficients réels de degré 2. Donc tout polynôme de degré 3 ou plus est réductible. □

Proposition 12.92.
Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, tout endomorphisme possède au moins une valeur propre.

Démonstration. Soit un endomorphisme u sur E. Le théorème 9.110 dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre si et seulement si λ est une racine du polynôme caractéristique χ_u. Or ce polynôme possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$ par le théorème de d'Alembert 12.87. □

12.11 Trigonalisation

12.11.1 Trigonalisation : généralités

Définition 12.93 ([316])**.**
Une matrice dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ est ***trigonalisable*** *lorsqu'elle est semblable*[38] *à une matrice triangulaire supérieure.*

Proposition 12.94 (Trigonalisation et polynôme caractéristique scindé)**.**
Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$. Les points suivants sont équivalents.

(1) L'endomorphisme u est trigonalisable (auquel cas les valeurs propres sont sur la diagonale).

(2) Le polynôme caractéristique de u est scindé[39]*.*

Démonstration. (i) **(2)⇒(1)** Nous avons par hypothèse

$$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \tag{12.218}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de u. Le théorème de Cayley-Hamilton 9.114 dit que $\chi_u(u) = 0$, ce qui permet d'utiliser le théorème de décomposition des noyaux 9.85 :

$$E = \ker(X - \lambda_1)^{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus \ker(X - \lambda_r)^{\alpha_r}. \tag{12.219}$$

Les espaces $F_{\lambda_i}(u) = \ker(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ sont les espaces caractéristiques de u, ce qui fait que $u - \lambda_i \mathbb{1}$ est nilpotent sur $F_{\lambda_i}(u)$. L'endomorphisme $u - \lambda_i \mathbb{1}$ est donc strictement trigonalisable supérieur sur son bloc [40]. Cela signifie que u est triangulaire supérieure avec les valeurs propres sur la diagonale.

(ii) **(1)⇒(2)** C'est immédiat parce que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments de sa diagonale.

□

38. Définition 9.187.
39. Définition 6.36.
40. Proposition 9.197.

Remarque 12.95.
La méthode des pivots de Gauss[41] certes permet de trigonaliser n'importe quelle matrice, mais elle ne correspond pas à un changement de base. Autrement dit, les pivots de Gauss ne sont pas des similitudes.

C'est là qu'il faut bien avoir en tête la différence entre *équivalence* et *similarité*[42]. Lorsqu'on parle de changement de base, de matrice trigonalisable ou diagonalisable, nous parlons de similarité et non d'équivalence.

12.11.2 Trigonalisation : cas complexe

La proposition 12.94 dit déjà que tous les endomorphismes sont trigonalisables sur $\mathbb{C}$. Nous allons aller plus loin et montrer que la trigonalisation peut être effectuée à l'aide d'une matrice unitaire.

Une démonstration alternative passant par le polynôme caractéristique sera présentée dans la remarque 12.104 utilisant la proposition 12.94.

Lemme 12.96 (Lemme de Schur complexe, trigonalisation[317])**.**
Si $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{C})$, il existe une matrice unitaire[43] U telle que UAU^{-1} soit triangulaire supérieure[44]. La diagonale de la matrice triangulaire contient alors les valeurs propres de A.

Démonstration. Étant donné que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos[45], nous pouvons toujours considérer un vecteur propre v_1 de A, de valeur propre λ_1. Nous pouvons utiliser un procédé de Gram-Schmidt pour construire une base orthonormée $\{v_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, et la matrice (unitaire)

$$Q = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ v_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}. \tag{12.220}$$

Nous avons $Q^{-1}AQe_1 = Q^{-1}Av_1 = \lambda Q^{-1}v = \lambda_1 e_1$, par conséquent la matrice $Q^{-1}AQ$ est de la forme

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \tag{12.221}$$

où $*$ représente une ligne quelconque et A_1 est une matrice de $\mathbb{M}(n-1,\mathbb{C})$. Nous pouvons donc répéter le processus sur A_1 et obtenir une matrice triangulaire supérieure (nous utilisons le fait qu'un produit de matrices orthogonales est une matrice orthogonale[46]). $\square$

Définition 12.97.
*Un endomorphisme est **normal** si il commute avec son conjugué hermitien[47].*

Les opérateurs normaux comprennent évidemment les opérateurs hermitiens, mais également les anti-hermitiens, et ça c'est bien parce que c'est le cas de l'algèbre associée à $\mathrm{SU}(2)$.

Théorème 12.98 (Théorème spectral pour les matrices normales[253, 318, 319])**.**
Soit $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ une matrice de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (non spécialement distinctes). Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) A est normale[48],

(2) A se diagonalise par une matrice unitaire,

41. Le lemme 4.105.
42. Définition 4.104.
43. Définition 9.166.
44. « triangulaire supérieure » ne signifie pas « strictement triangulaire supérieure ». Ici, il est possible que la diagonale soit non nulle ; non seulement possible, mais même très probable en pratique.
45. Algébriquement clos, définition 6.69. Le fait que $\mathbb{C}$ le soit est le théorème de d'Alembert 12.87.
46. Proposition 9.38(1).
47. Définition 9.164.
48. Définition 12.97.

(3) $\sum_{i,j=1}^{n}|A_{ij}|^2 = \sum_{j=1}^{n}|\lambda_j|^2$,

(4) il existe une base orthonormale de vecteurs propres de A.

Démonstration. En plusieurs parties.

(i) **(1) ⇒ (2)** Soit Q la matrice unitaire donnée par la décomposition de Schur (lemme 12.96) : $A = QTQ^{-1}$. Étant donné que A est normale nous avons

$$QTT^*Q^{-1} = QT^*TQ^{-1}, \tag{12.222}$$

ce qui montre que T est également normale. Or une matrice triangulaire supérieure normale est diagonale. En effet nous avons $T_{ij} = 0$ lorsque $i > j$ et

$$(TT^*)_{ii} = (T^*T)_{ii} = \sum_{k=1}^{n}|T_{ki}|^2 = \sum_{k=1}^{n}|T_{ik}|^2. \tag{12.223}$$

Écrivons cela pour $i = 1$ en tenant compte de $|T_{k1}|^2 = 0$ pour $k = 2,\ldots,n$,

$$|T_{11}|^2 = |T_{11}|^2 + |T_{12}|^2 + \cdots + |T_{1n}|^2, \tag{12.224}$$

ce qui implique que T_{11} est le seul non nul parmi les T_{1k}. En continuant de la sorte avec $i = 2,\ldots,n$ nous trouvons que T est diagonale.

(ii) **(2) ⇒ (1)** Si A se diagonalise par une matrice unitaire, $UAU^* = D$, nous avons

$$DD^* = UAA^*U^* \tag{12.225}$$

et

$$D^*D = UA^*AU^*, \tag{12.226}$$

qui ce prouve que A est normale.

(iii) **(2) ⇒ (3)** Il existe une matrice unitaire U et une diagonale D telles que $D = U^\dagger AU$. La proposition 9.201 nous dit que la diagonale de D contient les valeurs propres de U, c'est à dire $D_{kl} = \delta_{kl}\lambda_k$.
Nous avons $D^\dagger = U^\dagger A^\dagger U$, et donc

$$D^\dagger D = U^\dagger A^\dagger UU^\dagger AU = U^\dagger A^\dagger AU, \tag{12.227}$$

c'est à dire que $D^\dagger D$ est semblable à $A^\dagger A$. La proposition 9.192 implique que leurs traces sont donc égales. Petit calcul en utilisant le lemme 9.165 ($A^\dagger_{ij} = A^*_{ji}$) :

$$\operatorname{Tr}(A^\dagger A) = \sum_k (A^\dagger A)_{kk} = \sum_{kl} A^*_{lk}A_{lk} = \sum_{kl}|A_{lk}|^2. \tag{12.228}$$

Deuxième calcul :

$$\operatorname{Tr}(D^\dagger D) = \sum_{kl} D^\dagger_{kl}D_{lk} = \sum_{kl}\delta_{lk}\lambda_k^*\delta_{lk}\lambda_k = \sum_k|\lambda_k|^2. \tag{12.229}$$

Nous avons le résultat en égalisant (12.229) avec (12.228).

(iv) **(3) ⇒ (2)** Le lemme de Schur complexe 12.96 nous indique qu'il existe une matrice unitaire U et une matrice triangulaire supérieure T telles que $T = UAU^\dagger$ et telle que $T_{ii} = \lambda_i$. Le lemme 9.194 nous indique que $\sum_{ij}|T_{ij}|^2 = \sum_{ij}|A_{ij}|^2$. Donc

$$\sum_{ij}|A_{ij}|^2 = \sum_{ij}|T_{ij}|^2 = \sum_j|\lambda_j|^2 + \sum_{j>i}|T_{ij}|^2. \tag{12.230}$$

Mais l'hypothèse nous dit que $\sum_{ij}|A_{ij}|^2 = \sum_j|\lambda_j|^2$. Nous en déduisons que $\sum_{j>i}|T_{ij}|^2 = 0$, et donc que T est diagonale.

(v) (2)⇒ (4) Soit une base $\{e_i\}$ de $\mathbb{C}^n$. Soit $A = UDU^\dagger$. Il suffit de poser $f_i = Ue_i$ pour avoir

$$Af_i = UDU^\dagger Ue_i = UDe_i = \lambda_i Ue_i = \lambda_i f_i. \tag{12.231}$$

Donc f_i est un vecteur propre de A. Le fait que $\{f_i\}$ soit une base de $\mathbb{C}^n$ est dû au fait que U est inversible.

(vi) (4) ⇒ (2) Soit la base canonique $\{e_i\}$ de $\mathbb{C}^n$. Si $\{f_i\}$ est une base de vecteurs propres normalisés de A, alors il existe une matrice unitaire U telle que $f_i = Ue_i$. Alors la matrice $UAU^\dagger$ est diagonale.

□

Tant que nous en sommes à parler de spectre de matrices hermitiennes. . .Soit une matrice inversible $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. La matrice A^*A est hermitienne[49] et le théorème 11.18 nous assure que ses valeurs propres sont réelles. Par la remarque 11.19, ses valeurs propres sont même positives.

Lemme 12.99 ([320])**.**
Si A est une matrice carrée et inversible,

$$\mathrm{Spec}(A^*A) = \mathrm{Spec}(AA^*) \tag{12.232}$$

Démonstration. Nous allons montrer l'égalité des polynômes caractéristiques. D'abord une simple multiplication montre que

$$(A^*A - \lambda\mathbb{1})A^{-1} = A^{-1}(AA^* - \lambda\mathbb{1}). \tag{12.233}$$

Nous prenons le déterminant de cette égalité en utilisant les propriétés 9.9(1) et (3) :

$$\det(A^*A - \lambda\mathbb{1})\det(A^{-1}) = \det(A^{-1})\det(AA^* - \lambda\mathbb{1}). \tag{12.234}$$

En simplifiant par $\det(A^{-1})$ (qui est non nul parce que A est inversible) nous obtenons l'égalité des polynômes caractéristiques et donc l'égalité des spectres. □

En particulier les matrices hermitiennes, anti-hermitiennes et unitaires sont trigonalisables par une matrice unitaire, qui peut être choisie de déterminant 1.

Lemme 12.100.
Soient $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ et une matrice unitaire U telle que $A = UTU^{-1}$ où T est triangulaire.

(1) En ce qui concerne les polynômes caractéristiques, $\chi_A = \chi_T$.

(2) Pour les spectres, $\mathrm{Spec}(A) = \mathrm{Spec}(T)$.

(3) Les valeurs propres de A sont les éléments diagonaux de T.

Démonstration. Puisque U commute évidemment avec $\mathbb{1}$, nous avons

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1}) = \det(UTU^{-1} - \lambda\mathbb{1}) = \det\big(U(T - \lambda\mathbb{1})U^{-1}\big). \tag{12.235}$$

À ce niveau nous utilisons le fait que le déterminant soit multiplicatif 9.9 pour conclure :

$$\chi_A(\lambda) = \det\big(U(T - \lambda\mathbb{1})U^{-1}\big) = \det(U)\det(T - \lambda\mathbb{1})\det(U^{-1}) = \det(T - \lambda\mathbb{1}) = \chi_T(\lambda). \tag{12.236}$$

Pour les spectres, l'égalité des polynômes caractéristiques implique l'égalité des spectres parce que les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique par le théorème 9.110.

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les valeurs sur la diagonale. □

Lemme 12.101 (Trigonalisation simultanée)**.**
Une famille de matrices de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ commutant deux à deux est simultanément trigonalisable.

49. Définition 9.166.

Démonstration. Commençons par enfoncer une porte ouverte par la proposition 12.94 : toutes les matrices de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ sont trigonalisables parce que tous les polynômes sont scindés.

Nous effectuons la démonstration par récurrence sur la dimension. Si $n = 1$ alors toutes les matrices sont triangulaires et nous ne nous posons pas de questions. Nous supposons donc $n > 1$.

Soit la famille $(A_i)_{i\in I}$ dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ et A_0 un de ses éléments. Nous nommons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A_0. Le théorème de décomposition primaire 9.243 nous donne la somme directe d'espaces caractéristiques [50]

$$E = F_{\lambda_1}(A_0) \oplus \ldots \oplus F_{\lambda_r}(A_0). \tag{12.237}$$

Nous pouvons supposer que cette somme n'est pas réduite à un seul terme. En effet si tel était le cas, A_0 serait un multiple de l'identité parce que A_0 n'aurait qu'une seule valeur propre et les sommes dans la décomposition de Dunford 9.245(3) se réduisent à un seul terme (et $p_i = \mathrm{Id}$). En particulier les dimensions des espaces $F_\lambda(A_0)$ sont strictement plus petites que n.

Puisque tous les A_i commutent avec A_0, les espaces $F_\lambda(A_0)$ sont stables par les A_i et nous pouvons trigonaliser les A_i simultanément sur chacun des $F_\lambda(A_0)$ en utilisant l'hypothèse de récurrence. □

Théorème 12.102 (Lie-Kolchin[312])**.**
Tout sous-groupe connexe et résoluble de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ *est conjugué à un groupe de matrices triangulaires.*

Démonstration. Soit G un sous-groupe connexe et résoluble de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

(i) **Si sous-espace non trivial stable par G** Nous commençons par voir ce qu'il se passe si il existe un sous-espace vectoriel non trivial V de $\mathbb{C}^n$ stabilisé par G. Pour cela nous considérons une base de $\mathbb{C}^n$ dont les premiers éléments forment une base de V (base incomplète, théorème 4.12). Les éléments de G s'écrivent, dans cette base,

$$\begin{pmatrix} g_1 & * \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}. \tag{12.238}$$

Les matrices g_1 et g_2 sont carrés. Nous considérons alors l'application ψ définie par

$$\begin{aligned} \psi \colon G &\to \mathrm{GL}(V) \\ g &\mapsto g_1. \end{aligned} \tag{12.239}$$

Cela est un morphisme de groupes parce que

$$\begin{pmatrix} g_1 & * \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 & * \\ 0 & h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1h_1 & * \\ 0 & g_2h_2 \end{pmatrix}, \tag{12.240}$$

de telle sorte que $\psi(gh) = \psi(g)\psi(h)$.

Le groupe $\psi(G)$ est connexe et résoluble. En effet $\psi(G)$ est connexe en tant qu'image d'un connexe par une application continue (proposition 7.184). Et il est résoluble en tant qu'image d'un groupe résoluble par un morphisme par la proposition 2.25. Vu que $\psi(G)$ est un sous-groupe résoluble et connexe de $\mathrm{GL}(V)$ et que la dimension de V est strictement plus petite que celle de $\mathbb{C}^n$, une récurrence sur la dimension indique que $\psi(G)$ est conjugué à un groupe de matrices triangulaires. C'est-à-dire qu'il existe une base de V dans laquelle toutes les matrices g_1 (avec $g \in G$) sont triangulaires supérieures.

On fait de même avec l'application $g \mapsto g_2$, ce qui donne une base du supplémentaire de V dans laquelle les matrices g_2 sont triangulaires.

En couplant ces deux bases, nous obtenons une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle toutes les matrices (12.238) (c'est-à-dire toutes les matrices de G) sont triangulaires supérieures.

50. Définition 9.239.

(ii) **Sinon** Nous supposons à présent que $\mathbb{C}^n$ n'a pas de sous-espaces non triviaux stables sous G. Nous posons $m = \min\{k \text{ tel que } D^k(G) = \{e\}\}$, qui existe parce que G et résoluble et que sa suite dérivée termine sur e (proposition 2.24).

(iii) **Si $m = 1$** Si $m = 1$ alors G est abélien et il existe une base de G dans laquelle toutes les matrices de G sont triangulaires (lemme 12.101). Le premier vecteur d'une telle base serait stable par G, mais comme nous avons supposé qu'il n'y avait pas de sous-espaces non triviaux stabilisés par G, il faut déduire que ce vecteur stable est à lui tout seul non trivial, c'est-à-dire que $n = 1$. Dans ce cas, le théorème est démontré.

(iv) **Si $m > 1$** Nous devons maintenant traiter le cas où $m > 1$. Nous posons $H = D^{m-1}(G)$; cela est un sous-groupe normal et abélien de G. Encore une fois le résultat de trigonalisation simultanée 12.101 donne une base dans laquelle tous les éléments de H sont triangulaires. En particulier le premier élément de cette base est un vecteur propre commun à toutes les matrices de H.

Soit V le sous-espace engendré par tous les vecteurs propres communs de H. Nous venons de voir que V n'est pas vide. Nous allons montrer que V est stable par G. Soient $h \in H$, $v \in V$ et $g \in G$:

$$h\big(g(v)\big) = g\underbrace{g^{-1}hg}_{\in H}(v) = g(\lambda v) = \lambda g(v) \tag{12.241}$$

parce que v est vecteur propre de $g^{-1}hg$. Ce que le calcul (12.241) montre est que $g(v)$ est vecteur propre de h pour la valeur propre λ. Donc $g(v) \in V$ et V est stabilisé par G. Mais comme il n'existe pas d'espaces non triviaux stabilisés par G, nous en déduisons que $V = \mathbb{C}^n$. Donc tous les vecteurs de $\mathbb{C}^n$ sont vecteurs propres communs de H. Autrement dit on a une base de diagonalisation simultanée de H.

(v) ***H* est dans le centre de *G*** Montrons à présent que H est dans le centre de G, c'est-à-dire que pour tout $g \in G$ et $h \in H$ il faut $ghg^{-1} = h$. D'abord ghg^{-1} est une matrice diagonale (parce qu'elle est dans H) ayant les mêmes valeurs propres que h. En effet si λ est valeur propre de ghg^{-1} pour le vecteur propre v, alors

$$(ghg^{-1})(v) = \lambda v \tag{12.242a}$$
$$h\big(g^{-1}v\big) = \lambda\big(g^{-1}v\big), \tag{12.242b}$$

c'est-à-dire que λ est également valeur propre de h, pour le vecteur propre $g^{-1}v$. Mais comme h a un nombre fini de valeurs propres, il n'y a qu'un nombre fini de matrices diagonales ayant les mêmes valeurs propres que h. L'ensemble $\mathbf{Ad}(G)h$ est donc un ensemble fini. D'autre part, l'application $g \mapsto g^{-1}hg$ est continue, et G est connexe, donc l'ensemble $\mathbf{Ad}(G)h$ est connexe. Un ensemble fini et connexe dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ est nécessairement réduit à un seul point. Cela prouve que $ghg^{-1} = h$ pour tout $g \in G$ et $h \in H$.

(vi) **Espaces propres stables pour tout G** Soit $h \in H$ et W un espace propre de h (ça existe non vide, parce que H est triangularisé, voir plus haut). Alors nous allons prouver que W est stable pour tous les éléments de G. En effet si $w \in W$ avec $h(w) = \lambda w$ alors en permutant g et h,

$$hg(w) = g(hw) = \lambda g(w), \tag{12.243}$$

donc $g(w)$ est aussi vecteur propre de h pour la valeurs propre λ, c'est-à-dire que $g(w) \in W$. Comme nous supposons que $\mathbb{C}^n$ n'a pas d'espaces invariants non triviaux, nous devons conclure que $W = \mathbb{C}^n$, c'est-à-dire que H est composé d'homothéties. C'est-à-dire que pour tout $h \in H$ nous avons $h = \lambda_h \mathbb{1}$.

(vii) **Contradiction sur la minimalité de m** Les éléments d'un groupe dérivé sont de déterminant 1 parce que $\det(g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}) = 1$. Par conséquent pour tout h, le nombre λ_h est une racine n^{e}de l'unité. Vu qu'il n'y a qu'une quantité finie de racines n^{e} de l'unité, le groupe H est fini et connexe et donc une fois de plus, réduit à un élément, c'est-à-dire $H = \{e\}$. Cela contredit la minimalité de m et donc produit une contradiction. Nous devons donc avoir $m = 1$.

(viii) **Conclusion** Nous avons vu que si $\mathbb{C}^n$ avait un sous-espace non trivial fixé par G alors le théorème était démontré. Par ailleurs si $\mathbb{C}^n$ n'a pas un tel sous-espace, soit $m = 1$ (et alors le théorème est également prouvé), soit $m > 1$ et alors on a une contradiction.

Bref, le théorème est prouvé sous peine de contradiction.

□

Remarque 12.103.
Le lemme mentionne le fait que les valeurs propres de A sont les éléments diagonaux de T. Mais attention : ceci ne dit rien au niveau des multiplicités géométriques. Un nombre peut être cinq fois sur la diagonale de T alors que l'espace propre correspondant pour A n'est que de dimension 1. Exemple : la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12.244}$$

a deux 1 sur la diagonale. Le nombre 1 est bien une valeur propre de A, mais le système

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{12.245}$$

donne $y = 0$ et donc un espace propre de dimension seulement 1.

Remarque 12.104.
Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos (comme $\mathbb{C}$ par exemple), alors tous les polynômes sont scindés et toutes les matrices sont trigonalisables[51]. Un exemple un peu simple de cela est la matrice

$$u = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{12.246}$$

Le polynôme caractéristique est $\chi_u(X) = X^2 + 1$ et les valeurs propres sont $\pm i$. Il est vite vu que dans la base

$$\{\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\} \tag{12.247}$$

de $\mathbb{C}^2$, la matrice u se note $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

Remarque 12.105.
Cela nous donne une autre façon de prouver qu'une matrice nilpotente de $\mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ ou $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ est trigonalisable[321]. D'abord dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{C})$, toutes les matrices sont trigonalisables[52], et les valeurs propres arrivent sur la diagonale. Mais comme les valeurs propres d'une matrice nilpotente valent zéro, elle est triangulaire stricte. Par ailleurs, son polynôme caractéristique est alors X^n.

Ensuite si $u \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ nous pouvons voir u comme une matrice dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ et y calculer son polynôme caractéristique qui sera tout de même X^n. Ce polynôme étant scindé, la proposition 12.94 nous assure que u est trigonalisable. Une fois de plus, les valeurs propres étant sur la diagonale, elle est triangulaire supérieure stricte.

Corolaire 12.106.
Le polynôme caractéristique[53] sur $\mathbb{C}$ d'une matrice s'écrit sous la forme

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i} \tag{12.248}$$

où les λ_i sont les valeurs propres distinctes de A et m_i sont les multiplicités correspondantes.

51. La proposition 12.94 montre cela, et le lemme de Schur complexe 12.96 va un peu plus loin, et précise que la trigonalisation peut être obtenue par une matrice unitaire.
52. Parce que le polynôme caractéristique est scindé, voir la proposition 12.94.
53. Définition 9.106.

Démonstration. Le lemme 12.96 nous donne l'existence d'une base de trigonalisation ; dans cette base les valeurs propres de A sont sur la diagonale et nous avons

$$\chi_A(X) = \det(A - X\mathbb{1}) = \det\begin{pmatrix} X-\lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & X-\lambda_r \end{pmatrix}, \tag{12.249}$$

qui vaut bien le produit annoncé. □

Corolaire 12.107.
Si $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ et $k \in \mathbb{N}$ alors

$$\operatorname{Spec}(A^k) = \{\lambda^k \textit{ tel que } \lambda \in \operatorname{Spec}(A)\}. \tag{12.250}$$

Démonstration. Par le lemme 12.96 nous avons une matrice unitaire U et une triangulaire T telles que $A = UTU^{-1}$. En passant à la puissance k nous avons aussi

$$A^k = UT^kU^{-1}. \tag{12.251}$$

Donc le spectre de A^k est celui de T^k (lemme 12.100 et le fait qu'une puissance d'une matrice triangulaire est encore triangulaire). Or les éléments diagonaux de T^k sont les puissances k^{e} des éléments diagonaux de T, qui sont les valeurs propres de A. □

Pour le cas complexe, c'est le lemme 11.18 et le théorème 12.98.

12.12 Matrices, spectre et norme

La lien entre la norme opérateur d'une matrice et son spectre sera entre autres utilisé pour étudier le conditionnement de problèmes numériques. Voir la définition 34.107 et par exemple son lien avec la résolution numérique de systèmes linéaires dans la proposition 34.112.

Proposition 12.108 ([275]).
Soit une matrice $A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ de rayon spectral $\rho(A)$. Soit une norme $\|.\|$ sur $\mathbb{C}^n$ et la norme opérateur correspondante. Alors

$$\rho(A) \leqslant \|A^k\|^{1/k} \tag{12.252}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Soit $v \in \mathbb{C}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ un couple vecteur-valeur propre. Nous avons $\|Av\| = |\lambda|\|v\|$ et aussi

$$|\lambda|^k\|v\| = \|\lambda^k v\| = \|A^k v\| \leqslant \|A^k\|\|v\|. \tag{12.253}$$

La dernière inégalité est due au fait que nous avons choisi sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ la norme subordonnée à celle choisie sur $\mathbb{C}^n$, via le lemme 11.58. Nous simplifions par $\|v\|$ et obtenons $|\lambda| \leqslant \|A^k\|^{1/k}$. Étant donné que $\rho(A)$ est la maximum de tous les λ possibles, la majoration passe au maximum :

$$\rho(A) \leqslant \|A^k\|^{1/k}. \tag{12.254}$$

□

Proposition 12.109.
Soient deux espaces vectoriels normés E et V. Soient des applications continues $f, g \colon E \to \operatorname{End}(V)$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \psi \colon E &\to \operatorname{End}(V) \\ x &\mapsto f(x) \circ g(x) \end{aligned} \tag{12.255}$$

est continue.

Démonstration. Soit une suite $x_k \xrightarrow{E} x$. Nous devons montrer que $\psi(x_k) \xrightarrow{\text{End}(V)} \psi(x)$. Pour cela nous utilisons le lemme 11.60 qui indique que la norme opérateur est une norme d'algèbre. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\|\psi(x_k) - \psi(x)\| &= \|f(x_k) \circ g(x_k) - f(x) \circ g(x)\| && (12.256a)\\
&\leqslant \|f(x_k) \circ g(x_k) - f(x_k) \circ g(x)\| + \|f(x_k) \circ g(x) - f(x) \circ g(x)\| && (12.256b)\\
&= \|f(x_k) \circ \big(g(x_k) - g(x)\big)\| + \|\big(f(x_k) - f(x)\big) \circ g(x)\| && (12.256c)\\
&\leqslant \|f(x_k)\|\|g(x_k) - g(x)\| + \|f(x_k) - f(x)\|\|g(x)\|. && (12.256d)
\end{aligned}$$

Pour $k \to \infty$ nous avons $\|f(x_k)\| \to \|f(x)\|$, $\|f(x_k) - f(x)\| \to 0$ (parce que f est continue) et similaire avec g. Donc le tout tend vers zéro. □

12.12.1 Rayon spectral

La chose impressionnante dans la proposition suivante est que $\rho(A)$ est défini indépendamment du choix de la norme sur $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ ou sur $\mathbb{K}$. Lorsque nous écrivons $\|A\|$, nous disons implicitement qu'une norme a été choisie sur $\mathbb{K}$, et que nous avons pris la norme subordonnée sur $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$.

Proposition 12.110 ([322]).
Soit A une matrice de $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ ou $\mathbb{M}(n, \mathbb{C})$. Alors

$$\rho(A) \leqslant \|A\|. \tag{12.257}$$

Démonstration. Nous devons séparer les cas, suivant que le corps de base soit $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(i) **Pour** $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ Soit λ une valeur propre de A telle que $|\lambda|$ soit la plus grande. Nous avons donc $\rho(A) = |\lambda|$. Soit un vecteur propre $u \in \mathbb{C}^n$ pour la valeur propre λ. En prenant la norme sur l'égalité $Au = \lambda u$, et en utilisant le lemme 11.58,

$$|\lambda|\|u\| = \|Au\| \leqslant \|A\|\|u\|. \tag{12.258}$$

Donc $|\lambda| \leqslant \|A\|$ et $\rho(A) \leqslant \|A\|$.

(ii) **Pour** $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ L'endroit qui coince dans le raisonnement effectué pour $\mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ est que, certes $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ possède une plus grande valeur propre en module et qu'un vecteur propre lui est associé. Mais ce vecteur propre est, à priori, dans $\mathbb{C}^n$, et non dans $\mathbb{R}^n$. Nous pouvons donc écrire $Au = \lambda u$, mais pas $\|Au\| = |\lambda|\|u\|$ parce que nous ne savons pas quelle norme prendre sur $\mathbb{C}^n$.

Il n'est pas certain que nous ayons une norme sur $\mathbb{C}^n$ qui se réduit sur $\mathbb{R}^n$ à celle choisie implicitement dans l'énoncé. Nous allons donc ruser un peu.

Soit une norme N sur $\mathbb{C}^n$ [54]. Nous nommons également N la norme subordonnée sur $\mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ et la norme restreinte sur $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$. Vu que N est une norme sur $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ et que ce dernier est de dimension finie, le théorème 11.45 nous indique que N est équivalente à $\|.\|$. Il existe donc $C > 0$ tel que

$$N(B) \leqslant C\|B\| \tag{12.259}$$

pour tout $B \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$. Nous avons maintenant

$$\rho(A)^m \leqslant N(A^m) \leqslant C\|A^m\| \leqslant C\|A\|^m. \tag{12.260}$$

Justifications

— Par la proposition 12.108.

— Parce que $A^m \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ et la relation (12.259).

— Par itération du lemme 11.60.

54. Il y en a plein, par exemple celle du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_k x_k \bar{y}_k$.

Nous avons donc $\rho(A) \leqslant C^{1/m}\|A\|$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. En prenant $m \to \infty$ et en tenant compte de $C^{1/m} \to 1$ nous trouvons $\rho(A) \leqslant \|A\|$.

□

Lemme 12.111 ([322]).
Soit $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe une norme algébrique sur $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ telle que

$$N(A) \leqslant \rho(A) + \epsilon. \tag{12.261}$$

Démonstration. Soit par le lemme 12.96 une matrice inversible U telle que $T = UAU^{-1}$ soit triangulaire supérieure, avec les valeurs propres sur la diagonale. Notons que même si $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$, les matrices U et T sont, à priori, complexes.

Soit $s \in \mathbb{R}$ ainsi que les matrices

$$D_s = \operatorname{diag}(1, s^{-1}, s^{-2}, \ldots, s^{1-n}) \tag{12.262}$$

et $T_s = D_s T D_s^{-1}$. Nous fixerons un choix de s plus tard.

La norme que nous considérons est :

$$N(B) = \|(D_s U) B (D_s U)^{-1}\|_\infty \tag{12.263}$$

où $\|.\|_\infty$ est la norme sur $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ subordonnée à la norme $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$ dont nous avons déjà parlé dans l'exemple 11.53. Cela est bien une norme parce que

— Nous avons $\|B\|_\infty = 0$ si et seulement si $B = 0$, et comme $(D_s U)$ est inversible, nous avons $(D_s U) B (D_s U)^{-1} = 0$ si et seulement si $B = 0$.

— $N(\lambda B) = |\lambda| N(B)$.

— Pour l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
N(B + C) &= \|(D_s U) B (D_s U)^{-1} + (D_s U) C (D_s U)^{-1}\|_\infty && (12.264a)\\
&\leqslant \|(D_s U) B (D_s U)^{-1}\|_\infty + \|(D_s U) C (D_s U)^{-1}\|_\infty && (12.264b)\\
&= N(B) + N(C). && (12.264c)
\end{aligned}$$

En ce qui concerne la matrice A elle-même, nous avons

$$N(A) = \|(D_s U) A (D_s U)^{-1}\|_\infty = \|T_s\|_\infty. \tag{12.265}$$

C'est le moment de se demander comment se présente la matrice T_s. En tenant compte du fait que $(D_s)_{ik} = \delta_{ik} s^{1-i}$ nous avons

$$(T_s)_{ij} = \sum_{kl} (D_s)_{ik} T_{kl} (D_s^{-1})_{lj} = T_{ij} s^{j-i}. \tag{12.266}$$

La matrice T est encore triangulaire supérieure avec les valeurs propres de A sur la diagonale. Les éléments au-dessus de la diagonale sont tous multipliés par au moins s. Il est donc possible de choisir s suffisamment petit pour avoir [55]

$$\sum_{j=i+1}^{n} |(T_s)_{ij}| < \epsilon \tag{12.267}$$

Avec ce choix, la formule 11.162 donne

$$N(T_s) \leqslant \max_i \sum_k |(T_s)_{ik}| \leqslant \epsilon + \rho(A). \tag{12.268}$$

55. Il me semble qu'il manque un module dans [322].

En effet le ϵ vient de la somme sur toute la ligne sauf la diagonale (c'est-à-dire la partie $k \neq i$) et du choix (12.267) pour s. Le $\rho(A)$ provient du dernier terme de la somme (le terme sur la diagonale) qui est une valeur propre de A, donc majorable par $\rho(A)$.

Nous devons encore prouver que N est une norme algébrique. Pour cela nous allons montrer qu'elle est subordonnée à la norme

$$\begin{aligned} n\colon \mathbb{K}^n &\to \mathbb{R}^+ \\ v &\mapsto \|(UD_s)v\|_{\infty}. \end{aligned} \tag{12.269}$$

Cela sera suffisant pour avoir une norme algébrique par le lemme 11.60. La norme n sur $\mathbb{K}^n$ produit la norme suivante sur $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$:

$$n(B) = \sup_{v\neq 0} \frac{n(B)}{n(v)} = \sup_{v\neq 0} \frac{\|(UD_s)Bv\|_{\infty}}{\|UD_s v\|_{\infty}}. \tag{12.270}$$

Puisque UD_s est inversible, nous pouvons effectuer le changement de variables $v \mapsto (UD_s)^{-1}v$ pour écrire

$$n(B) = \sup_{v\neq 0} \frac{\|(UD_s)B(UD_s)^{-1}v\|_{\infty}}{\|(UD_s)(UD_s)^{-1}v\|_{\infty}} = \sup_{v\neq 0} \frac{\|(UD_s)B(UD_s)^{-1}v\|_{\infty}}{\|v\|_{\infty}} = \|(UD_s)B(UD_s)^{-1}\|_{\infty} = N(B). \tag{12.271}$$

□

Proposition 12.112.
Si $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ alors $\rho(A)^m = \rho(A^m)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Démonstration. La matrice A peut être vue dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ et nous pouvons lui appliquer le corolaire 12.107 :

$$\text{Spec}(A^k) = \{\lambda^k \text{ tel que } \lambda \in \text{Spec}(A)\}. \tag{12.272}$$

À noter qu'il n'y a pas de magie : le spectre de la matrice réelle A est déjà défini en voyant A comme matrice complexe. Le spectre dont il est question dans (12.272) est bien celui dont on parle dans la définition du rayon spectral.

Nous avons ensuite :

$$\begin{aligned} \rho(A^k) &= \max\{|\lambda| \text{ tel que } \lambda \in \text{Spec}(A^k)\} && (12.273a)\\ &= \max\{|\lambda^k| \text{ tel que } \lambda \in \text{Spec}(A)\} && (12.273b)\\ &= \max\{|\lambda|^k \text{ tel que } \lambda \in \text{Spec}(A)\} && (12.273c)\\ &= \rho(A)^k. && (12.273d) \end{aligned}$$

□

Proposition 12.113.
Soient des espaces vectoriels normés V de dimension n et W de dimension m sur $\mathbb{K}$ (corps normé). Nous considérons une base $\{e_s\}_{s=1,\ldots,n}$ de V et $\{f_\alpha\}_{\alpha=1,\ldots,m}$ de W.

Alors l'application

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathbb{M}(n\times m, \mathbb{K}) &\to \mathcal{L}(V, W) \\ \psi(A)v &= \sum_{s\alpha} A_{s\alpha} v_s f_\alpha \end{aligned} \tag{12.274}$$

est un isomorphisme d'espaces topologiques.

Pour rappel, la topologie sur $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ est donnée par la définition 7.188.

Démonstration. Nous savons déjà que ψ est une bijection. De plus, elle est linéaire et donc continue par la proposition 11.166. En ce qui concerne son inverse, c'est également une application linéaire (lemme 4.33) ; elle est alors également continue. □

Proposition 12.114.
Soit un espace vectoriel normé V de dimension finie. Soit une suite d'opérateurs $T_n \in \operatorname{End}(V)$. Si $\{e_i\}$ est une base de V et si $T_n(e_i) \xrightarrow{V} e_i$ pour tout i, alors $T_n \xrightarrow{\operatorname{End}(V)} \operatorname{Id}$.

Démonstration. Nous utilisons l'application $\psi\colon \mathbb{M}(n,\mathbb{K}) \to \operatorname{End}(V)$ définie en 4.65. Elle nous permet d'écrire

$$T_n(x) = \sum_{kl} \psi^{-1}(T_i)_{kl} x_l e_k, \tag{12.275}$$

que nous allons particulariser à $x = e_j$. Nous avons

$$e_j = \lim_{n\to\infty} T_n(e_j) \tag{12.276a}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{kl} \psi^{-1}(T_n)_{kl}\delta_{jl} e_k \tag{12.276b}$$
$$= \sum_k \big(\lim_{n\to\infty} \psi^{-1}(T_n)_{kj}\big) e_k \tag{12.276c}$$

En identifiant les coefficients de e_j, on trouve

$$\lim_{n\to\infty} \psi^{-1}(T_n)_{kj} = \delta_{kj}. \tag{12.277}$$

Pour chaque k et l, à gauche nous avons une limite dans $\mathbb{K}$. Vue la topologie sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ [56], nous pouvons écrire cela comme une limite dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$:

$$\lim_{n\to\infty} \psi^{-1}(T_n) = \mathbb{1}. \tag{12.278}$$

Nous savons que ψ^{-1} est continue (proposition 12.113) de telle sorte que nous pouvons la commuter avec la limite :

$$\mathbb{1} = \lim_{n\to\infty} \psi^{-1}(T_n) = \psi^{-1}\big(\lim_{n\to\infty} T_n\big). \tag{12.279}$$

Appliquant maintenant ψ des deux côtés, $\psi(\mathbb{1}) = \operatorname{Id}$ et

$$\operatorname{Id} = \lim_{n\to\infty} T_n. \tag{12.280}$$

□

Le point important de la définition 11.179 est la continuité. En dimension infinie, la continuité n'est par exemple pas équivalente à l'inversibilité (penser à $e_k \mapsto ke_k$).

Si V est un espace vectoriel normé, nous avons déjà défini son dual topologique V' comme étant l'ensemble des applications linéaires continues $V \to \mathbb{C}$ ou $V \to \mathbb{R}$ selon le corps de base de V. C'est la définition 4.119.

Proposition 12.115.
Soient un espace vectoriel normé V et un élément $v \in V$ vérifiant $\|v\| = 1$. Il existe une forme $\varphi \in V'$ telle que $\|\varphi\| = 1$ et $\varphi(v) = 1$.

Démonstration. Nous allons utiliser le théorème de la base incomplète 4.23. Pour cela nous considérons $I = V$ et la partie clairement génératrice $G = \{e_i = i\}_{i\in I}$ (si vous avez bien suivi, $G = V$ en fait ; rien de bien profond). Nous considérons ensuite $I_0 = \{v\}$. Le théorème de la base incomplète nous donne l'existence de I_1 tel que $I_0 \subset I_I \subset I$ et tel que $B = \{e_i\}_{i\in I_1}$ est une base.

Tout cela pour dire que $B = \{e_i\}_{i\in I_1}$ est une base contenant v. Nous allons aussi éventuellement redéfinir la norme de e_i pour avoir $\|e_i\| = 1$. Cette renormalisation n'affecte pas le fait que $v \in B$.

Nous passons maintenant à la définition de $\varphi\colon V \to \mathbb{K}$. Pour $x \in V$ nous commençons par écrire

$$x = \sum_{j\in J} x_j e_j \tag{12.281}$$

56. Toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes (théorème 11.45). Sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$, nous avons convenu dans la définition 7.188 de considérer la norme maximum.

et nous posons

$$\varphi(x) = \begin{cases} x_v & \text{si } v \in J \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{12.282}$$

Cette définition a un sens par la partie unicité de la proposition 4.6 de décomposition d'un élément dans une base.

Nous devons calculer la norme de φ. Par la proposition 11.50(3) nous avons

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\|=1} |\varphi(x)|. \tag{12.283}$$

Avec $x = v$ nous avons $\varphi(x) = 1$ et donc $\|\varphi\| \geqslant 1$.

Nous devons encore montrer que $\|\varphi\| \leqslant 1$. Un élément $x \in V$ s'écrit toujours sous la forme

$$x = \sum_{i \in J} x_j e_j \tag{12.284}$$

pour un certain J fini dans I_1 et pour certains $x_j \in \mathbb{K}$. Pour un tel x nous avons $\varphi(x) = x_v$. Si $|\varphi(x)| \geqslant 1$, alors $|x_v| \geqslant 1$, mais alors

$$\|x\| \leqslant \sum_{j \in J} |x_j| \|e_j\| = \sum_{j \in J} |x_j| \geqslant |x_v| > 1, \tag{12.285}$$

ce qui fait que ce x ne participe pas au supremum (12.283).

Notons que φ est continue (et donc bien dans V') parce qu'elle est bornée (proposition 11.61). □

12.12.2 Normes de matrices et d'applications linéaires

Théorème 12.116 (Norme matricielle et rayon spectral[323])**.**
La norme 2 d'une matrice est liée au rayon spectral de la façon suivante :

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)} \tag{12.286}$$

ou plus généralement par $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^* A)}$.

Lemme 12.117.
Soit une matrice $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ *qui est symétrique, strictement définie positive. Soient* λ_{min} *et* λ_{max} *les plus petites et plus grandes valeurs propres. Alors*

$$\|A\|_2 = \lambda_{max} \qquad \text{et} \qquad \|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\lambda_{min}}. \tag{12.287a}$$

Démonstration. Soient les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ formant une base orthonormée de vecteurs propres [57] de A. Nous notons v_{max} celui de λ_{max}. Nous avons :

$$\|A\|_2 \geqslant \|Av_{max}\| = |\lambda_{max}| \|v_{max}\| = |\lambda_{max}| = \lambda_{max}. \tag{12.288}$$

Voilà l'inégalité dans un sens. Montrons l'inégalité dans l'autre sens. Soit $x = \sum_i x_i v_i$ avec $\|x\|_2 = 1$. Alors

$$\|Ax\| = \left| \sum_i x_i \lambda_i v_i \right| \leqslant \sqrt{\sum_i x_i^2 \lambda_i^2} \leqslant \lambda_{max} \sqrt{\sum_i x_i^2} = \lambda_{max}. \tag{12.289}$$

En ce qui concerne l'affirmation pour la norme de A^{-1}, il suffit de remarquer que ses valeurs propres sont les inverses des valeurs propres de A. □

57. Possible par le théorème spectral 9.212.

Lemme 12.118 ([1, 324]).
Soit une matrice diagonale $D \in \mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ dont nous notons $\lambda_i \in \mathbb{C}$ les éléments diagonaux. Alors la norme opérateur[58] *de D est donnée par*

$$\|D\|_2 = \max_i\{|\lambda_i|\}. \tag{12.290}$$

Démonstration. En plusieurs points.

(i) **Le compact** Puisque la partie $\{x \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|x\|_2 = 1\}$ est compacte, nous pouvons utiliser un maximum au lieu d'un supremum dans la définition de la norme opérateur (théorème de Weierstrass 7.126.).

(ii) **Notations pour $\mathbb{C}^n$** Pour se mettre d'accord sur les notations, si $x \in \mathbb{C}^n$, alors $x = \sum_i x_i e_i$ où $e_1 \in \mathbb{C}^n$ est le vecteur $(1,0,\ldots,0)$. C'est un vecteur de base de $\mathbb{C}^n$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Et d'ailleurs $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$ est une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$.

(iii) **Norme dans $\mathbb{C}^n$** Lorsque A est un opérateur sur $\mathbb{C}^n$, nous avons

$$\|Ax\|_2 = \left(\sum_i |(Ax)_i|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_i \left|\sum_j A_{ij}x_j\right|^2\right)^{1/2}. \tag{12.291}$$

Nous avons utilisé les conventions (4.83).

(iv) **Le calcul** Si c'est bon pour vous, je me lance dans le calcul :

$$\begin{aligned}
\|D\|_2 &= \max_{\|x\|_2=1} \|Dx\|_2 && (12.292a)\\
&= \max_{\|x\|_2=1} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) && (12.292b)\\
&\leqslant \max_{\|x\|_2=1} \max_i |\lambda_i| \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}}_{=\|x\|_2} = \max_i |\lambda_i|. && (12.292c)
\end{aligned}$$

L'inégalité $\|D\|_2 \leqslant \max_i |\lambda_i|$ est prouvée. Nous démontrons à présent l'inégalité dans l'autre sens. Appliquons D au vecteur de base e_i : $De_i = \lambda_i e_i$. Donc

$$\|D\|_2 \geqslant \|De_i\|_2 = |\lambda_i e_i| = |\lambda_i|. \tag{12.293}$$

Cela étant valable pour tout i, nous avons $\|D\|_2 \geqslant \max_i |\lambda_i|$. □

Proposition 12.119.
La fonction

$$\begin{aligned}
f\colon \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) &\to \mathbb{R}\\
(X,Y) &\mapsto \operatorname{Tr}(X^tY)
\end{aligned} \tag{12.294}$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$.

Démonstration. Il faut vérifier la définition 9.155.

— La bilinéarité est la linéarité de la trace.

— La symétrie de f est le fait que $\operatorname{Tr}(A^t) = \operatorname{Tr}(A)$.

— L'application f est définie positive parce que si $X \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R})$, alors X^tX est symétrique définie positive, donc diagonalisable avec des nombres positifs sur la diagonale. La trace étant un invariant de similitude, nous avons $f(X,X) = \operatorname{Tr}(X^tX) \geqslant 0$. De plus si $\operatorname{Tr}(X^tX) = 0$, alors $X^tX = 0$ (pour la même raison de diagonalisation). Mais alors $\|Xu\| = 0$ pour tout $u \in E$, ce qui signifie que $X = 0$.

58. Norme opérateur, définition 11.50. La notation $\|D\|_2$ signifie la norme opérateur de $D\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ où l'on a mis la norme euclidienne sur $\mathbb{C}^n$, c'est à dire la norme de la définition 10.96.

□

Exemple 12.120.
Soient $m = n$, un point λ dans $\mathbb{R}$ et T_λ l'application linéaire définie par $T_\lambda(x) = \lambda x$. La norme de T_λ est alors

$$\|T_\lambda\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\|x\|_{\mathbb{R}^m} \leqslant 1} \|\lambda x\|_{\mathbb{R}^n} = |\lambda|.$$

Notez que T_λ n'est rien d'autre que l'homothétie de rapport λ dans $\mathbb{R}^m$. △

Exemple 12.121.
Toutes les isométries de $\mathbb{R}^n$ ont norme 1. En effet si T est une isométrie, $\|Tx\| = \|x\|$. En ce qui concerne la norme de T nous avons alors

$$\|T\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1. \tag{12.295}$$

△

Exemple 12.122.
Soient $m = n$, un point b dans $\mathbb{R}^m$ et T_b l'application linéaire définie par $T_b(x) = b \cdot x$ (petit exercice : vérifiez qu'il s'agit vraiment d'une application linéaire). La norme de T_b satisfait les inégalités suivantes

$$\|T_b\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\|x\|_{\mathbb{R}^m} \leqslant 1} \|b \cdot x\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \sup_{\|x\|_{\mathbb{R}^m} \leqslant 1} \|b\|_{\mathbb{R}^n} \|x \cdot x\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant \|b\|_{\mathbb{R}^n},$$

$$\|T_b\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\|x\|_{\mathbb{R}^m} \leqslant 1} \|b \cdot x\|_{\mathbb{R}^n} \geqslant \left\| b \cdot \frac{b}{\|b\|_{\mathbb{R}^n}} \right\|_{\mathbb{R}^n} = \|b\|_{\mathbb{R}^n},$$

donc $\|T_b\|_{\mathcal{L}} = \|b\|_{\mathbb{R}^n}$. △

Proposition 12.123.
Une application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ est continue.

Démonstration. Soit x un point dans $\mathbb{R}^m$. Nous devons vérifier l'égalité

$$\lim_{h \to 0_m} T(x + h) = T(x). \tag{12.296}$$

Cela revient à prouver que $\lim_{h \to 0_m} T(h) = 0$, parce que $T(x + h) = T(x) + T(h)$. Nous pouvons toujours majorer $\|T(h)\|_n$ par $\|T\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)} \|h\|_{\mathbb{R}^m}$ (lemme 11.58). Quand h s'approche de 0_m sa norme $\|h\|_m$ tend vers 0, ce que nous permet de conclure parce que nous savons que de toutes façons, $\|T\|_{\mathcal{L}}$ est fini. □

Note : dans un espace de dimension infinie, la linéarité ne suffit pas pour avoir la continuité : il faut de plus être borné (ce que sont toutes les applications linéaires $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$). Voir la proposition 11.61.

Proposition 12.124 ([1])**.**
Soit $A \in GL(n, \mathbb{C})$. La suite[59] *$(A^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est bornée*[60] *si et seulement si A est diagonalisable*[61] *et* $\mathrm{Spec}(A) \subset S^1$.

Démonstration. Nous commençons par supposer que A est diagonalisable et que $\mathrm{Spec}(A) \subset S^1$. Nous nommons λ_i ses valeurs propres. Par hypothèse $\lambda_i \in S^1$. Nous avons donc $|\lambda_i| = 1$ et, par la proposition 10.90(4), nous avons $|\lambda_i|^n = 1$.

59. Oui, c'est avec $n \in \mathbb{Z}$. Vu que A est dans GL, elle est inversible, donc pas de soucis à considérer A^{-1}.
60. Nous considérons sur $GL(n, \mathbb{C})$ la norme opérateur dérivant de la norme euclidienne sur $\mathbb{C}^n$ donnée par la formule (10.121).
61. Définition 9.200.

La proposition 9.201 permet de considérer une matrice inversible Q telle que $A = Q^{-1}DQ$ où D est la matrice diagonale $D_{ii} = \lambda_i$. Nous avons donc aussi

$$A^n = Q^{-1}D^nQ. \tag{12.297}$$

La matrice D^n est diagonale et $D^n_{ii} = \lambda_i^n$.

(i) **Pour $n \geqslant 0$** La norme matricielle étant une norme d'algèbre[62],

$$\|A^n\|_2 = \|Q^{-1}D^nQ\|_2 \leqslant \|Q^{-1}\|_2\|D^n\|_2\|Q\|_2. \tag{12.298}$$

En ce qui concerne la norme $\|D\|_2$, nous avons le lemme 12.118 qui nous annonce que $\|D\|_2 = \max_i\{|\lambda_i|\} = 1$. Dans notre cas, nous avons donc $\|D\|_2 = 1$ et

$$\|A^n\|_2 \leqslant \|Q^{-1}\|_2\|Q\|_2. \tag{12.299}$$

Autrement dit, la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée en norme par le nombre $\|Q^{-1}\|_2\|Q\|_2$.

(ii) **Pour $n \leqslant 0$** Alors il suffit de poser $B = A^{-1}$. La matrice B est autant diagonalisable que A et le même raisonnement s'applique : il existe une matrice inversible P telle que

$$\|B^n\|_2 \leqslant \|P^{-1}\|_2\|P\|_2. \tag{12.300}$$

(iii) **Pour tous les n** La suite $(A^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est donc majorée par le maximum entre $\|P^{-1}\|_2\|P\|$ et $\|Q^{-1}\|_2\|Q\|$.

Dans l'autre sens, maintenant.

Puisque nous travaillons sur $\mathbb{C}$, le polynôme caractéristique de A est scindé et la réduction de Jordan[63] s'applique. Nous considérons une matrice inversible Q telle que $A = Q^{-1}MQ$ avec

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1\mathbb{1} + N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s\mathbb{1} + N_s \end{pmatrix}, \tag{12.301}$$

où les N_i sont nilpotents. Notez qu'ici les « $\mathbb{1}$ » sont de différentes tailles.

(i) **Juste un bloc** Nous considérons un bloc de Jordan $\lambda\mathbb{1} + N$. Nous supposons que la suite $(\lambda\mathbb{1} + N)^n$ est bornée, et nous allons montrer que $|\lambda| = 1$ et $N = 0$.

En utilisant la formule du binôme, en nommant s la borne, et en nommant r le plus petit entier tel que $N^r = 0$, pour $n > r$ nous avons

$$(\lambda\mathbb{1} + N)^n = \sum_{k=0}^{r-1}\binom{n}{k}\lambda^{n-k}N^k < s. \tag{12.302}$$

Le lemme 9.198 indique que la partie $\{N^k\}$ est libre. En utilisant le lemme 7.146, nous en déduisons que

$$\left|\binom{n}{k}\lambda^{n-k}N^k\right| < s \tag{12.303}$$

pour tout $n > r$ et pour tout $k \leqslant n$.

En particulier, pour tout n nous pouvons considérer le terme $k = 0$. Cela donne

$$|\lambda|^n < s \tag{12.304}$$

qui implique $|\lambda| \leqslant 1$.

Nous avons donc deux possibilités : $|\lambda| < 1$ et $|\lambda| = 1$. Supposons $|\lambda| = 1$, et considérons l'inéquation (12.303) avec $k = 1$: $\|n\lambda^{n-1}N\| < s$. Cela implique que

$$n\|N\| < s \tag{12.305}$$

pour tout n. Cela n'est possible que si $\|N\| = 0$ parce que $\mathbb{R}$ est archimédien (théorème 1.374). Nous restons donc avec les deux possibilités

62. Lemme 11.60.
63. Théorème 9.275.

— $|\lambda| < 1$
— $|\lambda| = 1$ et $N = 0$.

Nous nous tournons maintenant sur la contrainte que $(\lambda\mathbb{1} + N)^n$ doive rester borné pour $n < 0$. Nous avons

$$\lambda\mathbb{1} + N = \lambda(\mathbb{1} + \lambda^{-1}N), \tag{12.306}$$

et nous pouvons appliquer la proposition 9.199 à l'opérateur nilpotent $-\lambda^{-1}N$ pour avoir

$$\begin{aligned}
\big(\mathbb{1} - (-\lambda^{-1}N)\big)^{-1} &= \sum_{k=0}^{\infty}(-\lambda)^{-k}N^k && (12.307a)\\
&= \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty}(-\lambda)^{-k}N^k && (12.307b)\\
&= \mathbb{1} + \sum_{k=1}^{r-1}(-\lambda)^{-k}N^k. && (12.307c)
\end{aligned}$$

Ceci pour dire que $(\lambda\mathbb{1} + N)^{-1} = \lambda^{-1}(\mathbb{1} + \lambda^{-1}N')$ pour une autre matrice nilpotente[64] $N' = \sum_{k=1}^{r-1}(-\lambda)^{-k}N^k$. Le travail déjà fait, appliqué à λ^{-1} et N', nous donne deux possibilités :

— $|\lambda^{-1}| < 1$
— $|\lambda^{-1}| = 1$ et $N' = 0$.

La possibilité $|\lambda^{-1}| < 1$ est exclue parce qu'elle impliquerait $|\lambda| > 1$ qui avait déjà été exclu. Il ne reste donc que la possibilité $|\lambda| = 1$ et $N = N' = 0$.

(ii) **<u>Pour la matrice M</u>** Nous supposons que $\{M^k\}$ est borné : $\|M^k\| \leqslant s$ pour tout s. En utilisant le lemme 11.51 et la proposition 11.52, pour tout n et pour tout i nous avons :

$$\|(\mathbb{1} + \lambda_i N_i)^k\| < s. \tag{12.308}$$

Nous appliquons ce que nous venons de montrer pour les blocs et nous obtenons $|\lambda_i| = 1$ et $N_i = 0$.

(iii) **<u>La matrice A</u>** Nous pouvons enfin parler de la matrice $A = Q^{-1}MQ$. Nous avons $A^n = Q^{-1}M^nQ$, et donc aussi

$$M^n = QA^nQ^{-1}. \tag{12.309}$$

En ce qui concerne la norme, si la suite (A^n) est bornée par le réel s, alors

$$\|M^n\| = \|QA^nA^{-1}\| \leqslant \|Q\|\|Q^{-1}\|\|A^n\| \leqslant s\|Q\|\|Q^{-1}\|. \tag{12.310}$$

Donc la suite (M^n) est bornée et nous pouvons appliquer à M^n ce que nous avons fait sur M. Nous avons donc

$$A = Q^{-1}MQ = Q^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s \end{pmatrix}Q \tag{12.311}$$

avec $|\lambda|_i = 1$. Nous avons prouvé que A est diagonalisable et que $\operatorname{Spec}(A) \subset S^1$.

□

12.13 Géométrie dans l'espace

12.125.
Les notions de droites, plans et parallélisme sont des notions vectorielles qui auraient pu être traitées beaucoup plus haut. La chose qui rend la géométrie un peu piquante est la notion de perpendicularité. Cette notion demande un produit scalaire et fait intervenir ici et là des polynômes du second degré. Travailler avec le second degré demande la connaissance des racines carrés[65] et donc d'un peu de topologie réelle et de continuité. La résolution dans $\mathbb{R}$ du polynôme du second degré est la proposition 10.99.

64. Notez que la somme part de $k = 1$, sinon ce serait raté pour la nilpotence de N'.
65. Définition 10.85.

12.13.1 Droites dans l'espace

La notion d'application affine entre espaces vectoriels est la définition 9.143.

Une application affine n'est pas linéaire, mais presque au sens où des increments égaux dans le paramètre donne des increments égaux dans la valeur.

Lemme 12.126.
Si f est affine alors pour tout $a, b, v \in V$ nous avons

$$f(a + v) - f(a) = f(b + v) - f(b). \tag{12.312}$$

Démonstration. Simple calcul :

$$f(a + v) - f(a) = u(a + v) + \alpha - u(a) - \alpha = u(a) + u(v) - u(a) = u(v). \tag{12.313}$$

Le même calcul partant de $f(b + v)$ donnera évidement aussi $u(v)$. □

Définition 12.127.
Soit un espace vectoriel E.

*(1) Une **droite vectorielle** dans E est un sous-espace vectoriel de dimension 1.*

*(2) Une **droite affine** est une partie de E de la forme $a + V$ où $a \in E$ et V est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de E.*

*(3) Un **plan vectoriel** est un sous-espace vectoriel de dimension 2.*

*(4) Une partie P est un **plan affine** si il existe un $v \in E$ tel que $P - v$ soit un plan vectoriel.*

Le plus souvent, nous parlerons de « droite » et « plan » sans préciser « vectoriel » ou « affine ». Dans ces cas, le plus souvent, ce sera « affine ».

Définition 12.128 (Perpendiculaires et parallèles)**.**
Deux notions importantes.

*(1) Nous disons que les droites $a + V$ et $b + W$ sont **parallèles** lorsque $V = W$.*

*(2) Nous disons que les droites $a + V$ et $b + W$ sont **perpendiculaires** si pour tout $v \in V$ et $w \in W$ nous avons $v \cdot w = 0$.*

Vous noterez que le parallélisme est une notion vectorielle alors que la perpendicularité dépend du produit scalaire ; c'est une notion comme qui dirait « métrique ».

Proposition 12.129.
Les propriétés usuelles.

(1) Deux droites parallèles ayant une intersection sont confondues.

(2) Le parallélisme est une relation d'équivalence sur l'ensemble des droites de E.

(3) Si la droite d_1 est parallèle à la droite d_2, alors une droite est perpendiculaire à d_1 si et seulement si elle est perpendiculaire à d_2.

Lemme 12.130.
Deux droites perpendiculaires ont un unique point d'intersection.

Proposition 12.131.
Soient une droite d et un point p.

(1) Il existe une unique droite parallèle à d contenant p.

(2) Il existe une unique droite perpendiculaire à d contenant p.

Lemme 12.132.
Si D est une droite et si $a, b \in D$, alors $D - a = D - b$ et $D - a$ est une droite vectorielle.

Démonstration. Vu que D est une droite, il existe $v \in V$ tel que $D - v$ soit une droite vectorielle que nous notons L. Nous allons montrer que $D - a = D - v$. Comme a est arbitraire, cela suffit.

(i) $D - a \subset D - v$ Un élément de $D - a$ est de la forme $x - a$ avec $x \in D$. Nous écrivons $x - a$ sous la forme $y - v$ et nous espérons que $y \in D$. Allons-y : d'abord nous isolons y dans $x - a = y - v$:

$$y = x - a + v = (x - v) - (a - v) + v. \tag{12.314a}$$

Puisque $x - v$ et $a - v$ sont des éléments de L, la somme est dans L et donc $y = l + v$ pour un certain élément de $l \in L$. Nous avons donc prouvé que $y \in D$ et donc que $x - a = y - v \in D - v$.

(ii) $D - v \subset D - a$ Nous notons $x - v$ un élément générique de $D - v$ ($x \in D$). En posant $y - a = x - v$, nous trouvons

$$y = x - v + a = \underbrace{x - v}_{\in L} + \underbrace{(a - v)}_{\in L} + v \tag{12.315}$$

Donc $y \in D$ et $x - v = y - a \in D - a$.

□

Proposition 12.133.
L'image d'une droite par une application affine[66] *est une droite.*

Lemme 12.134.
Soit un espace vectoriel V sur le corps $\mathbb{K}$.

(1) Si L est une droite vectorielle, alors pour tout $a \neq 0$ dans L, nous avons $L = \mathrm{Image}(f)$ où f est l'application linéaire donnée par

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{K} &\to V \\ \lambda &\mapsto \lambda a. \end{aligned} \tag{12.316}$$

(2) Si D est une droite affine, alors pour tout $a \neq b$ sur D nous avons $D = \mathrm{Image}(f)$ où f est l'application affine donnée par

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{K} &\to V \\ \lambda &\mapsto a + \lambda(b - a). \end{aligned} \tag{12.317}$$

(3) Une partie $D \subset V$ est une droite (affine) si et seulement si il existe $a, v \in V$ tels que

$$D = \{a + \lambda v\}_{\lambda \in \mathbb{K}}. \tag{12.318}$$

Démonstration. En deux parties.

(i) **Pour (1)** Comme L est un sous-espace de dimension 1, il possède une base contenant un unique élément, disons $\{b\}$. En particulier $a = \mu b$ pour un certain $\mu \in \mathbb{K}$. Si $x \in L$ nous avons $x = \lambda_x b$ pour un certain λ_x, et donc

$$x = \frac{\lambda_x}{\mu} a. \tag{12.319}$$

Donc $x = f(\lambda_x / \mu)$. Cela prouve que $L \subset \mathrm{Image}(f)$.
L'inclusion inverse est simplement le fait que $\lambda a \in L$ dès que $a \in L$ parce que L est vectoriel.

(ii) **Pour (2)** Le lemme 12.132 nous indique qu'il existe une droite vectorielle L telle que $D - x = L$ pour tout $x \in D$.

(i) $D \subset \mathrm{Image}(g)$ Nous nommons $f \colon \mathbb{K} \to V$ l'application linéaire qui donne L. Puisque $b - a \in L$ nous avons

$$f(\lambda) = \lambda(b - a), \tag{12.320}$$

et tout élément de L est de la forme $f(\lambda)$. Nous avons aussi $D = L + a$; donc un élément de D est de la forme $f(\lambda) + a$ et donc de la forme $\lambda(b - a) + a = g(\lambda)$.

66. Définition 9.143.

(ii) Image$(g) \subset D$ Un élément de Image(g) est de la forme $a + \lambda(b - a)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$. Mais $b - a \in L$, donc $\lambda(b - a) \in L$ et

$$g(\lambda) = a + \lambda(b - a) \in a + L = D. \tag{12.321}$$

□

Proposition 12.135.
Si a et b sont deux points distincts de $\mathbb{R}^n$, alors il existe une unique droite contenant a et b.

Proposition 12.136.
Soient deux droites d_1 et d_2 dans $\mathbb{R}^n$. Alors nous sommes dans une des trois situations suivantes :

(1) $d_1 \cap d_2 = \emptyset$.

(2) $\operatorname{Card}(d_1 \cap d_2) = 1$

(3) $d_1 = d_2$.

Exemple 12.137.
Les exemples les plus courants d'applications affines sont les droites et les plans ne passant pas par l'origine.

Les droites Une droite dans $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) qui ne passe pas par l'origine est l'image d'une fonction de la forme $s(t) = ut + v$, avec $t \in \mathbb{R}$, et u et v dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ selon le cas.

En choisissant des coordonnées adéquates, les droites peuvent être aussi vues comme graphes de fonctions affines. Dans le cas de $\mathbb{R}^2$, on retrouve la fonction de l'exemple 4.31, pour $n = m = 1$.

Les plans De la même façon nous savons que tout plan qui ne passe pas par l'origine dans $\mathbb{R}^3$ est le graphe d'une application affine, $P(x, y) = (a, b)^T \cdot (x, y)^T + (c, d)^T$, lorsque les coordonnées sont bien choisies.

△

12.13.2 Projection orthogonale

Le théorème suivant n'est pas indispensablissime parce qu'il est le même que le théorème de la projection sur les espaces de Hilbert [67]. Cependant la partie existence est plus simple en se limitant au cas de dimension finie.

Théorème-Définition 12.138 (Théorème de la projection)**.**
Soit E un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie, $x \in E$, et C un sous-ensemble fermé convexe de E.

(1) Les deux conditions suivantes sur $y \in E$ sont équivalentes :

(1a) $\|x - y\| = \inf\{\|x - z\|$ *tel que* $z \in C\}$,

(1b) pour tout $z \in C$, $\operatorname{Re}\langle x - y, z - y\rangle \leqslant 0$.

(2) Il existe un unique $y \in E$, noté $y = \mathtt{proj}_C(x)$ vérifiant ces conditions.

Démonstration. Nous commençons par prouver l'existence et l'unicité d'un élément dans C vérifiant la première condition. Ensuite nous verrons l'équivalence.

(i) **Existence** Soit $z_0 \in C$ et $r = \|x - z_0\|$. La boule fermée $\overline{B(x, r)}$ est compacte [68] et intersecte C. Vu que C est fermé, l'ensemble $C' = C \cap \overline{B(x, r)}$ est compact. Tous les points qui minimisent la distance entre x et C sont dans C' ; la fonction

$$\begin{aligned} C' &\to \mathbb{R} \\ z &\mapsto d(x, z) \end{aligned} \tag{12.322}$$

67. Théorème 25.7
68. C'est ceci qui ne marche plus en dimension infinie.

est continue sur un compact et donc a un minimum qu'elle atteint[69]. Un point P réalisant ce minimum prouve l'existence d'un point vérifiant la première condition.

(ii) **Unicité** Soient y_1 et y_2, deux éléments de C minimisant la distance avec x, et soit d ce minimum. Nous avons par l'identité du parallélogramme (11.3) que

$$\|y_1 - y_2\|^2 = -4\left\|\frac{y_1 + y_2 - x}{2}\right\|^2 + 2\|y_1 - x\|^2 + 2\|y_2 - x\|^2 \leqslant -4d + 2d + 2d = 0. \tag{12.323}$$

Par conséquent $y_1 = y_2$.

(iii) **(1a)⇒ (1b)** Soit $z \in C$ et $t \in]0,1[$; nous notons $P = \texttt{proj}_C\, x$. Vu que y et P sont dans C et que C est convexe[70], le point $z = ty + (1-t)P$ est également dans C, et par conséquent,

$$\|x - P\|^2 \leqslant \|x - tz - (1-t)P\|^2 = \|(x-P) - t(z-P)\|^2. \tag{12.324}$$

Nous sommes dans un cas $\|a\|^2 \leqslant |a-b|^2$, qui implique $2\operatorname{Re}\langle a, b\rangle \leqslant \|b\|^2$. Dans notre cas,

$$2\operatorname{Re}\langle x - P, t(z-P)\rangle \leqslant t^2\|z-P\|^2. \tag{12.325}$$

En divisant par t et en faisant $t \to 0$ nous trouvons l'inégalité demandée[71] :

$$2\operatorname{Re}\langle x - P, z - P\rangle \leqslant 0. \tag{12.326}$$

(iv) **(1b)⇒ (1a)** Soit un point $P \in C$ vérifiant

$$\operatorname{Re}\langle x - P, z - P\rangle \leqslant 0 \tag{12.327}$$

pour tout $z \in C$. Alors en notant $a = x - P$ et $b = P - z$,

$$\begin{aligned}\|x - z\|^2 = \|x - P + P - z\|^2 &= \|a + b\|^2\\ &= \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle a, b\rangle\\ &= \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x - P, z - P\rangle\\ &\geqslant \|b\|^2,\end{aligned} \tag{12.328}$$

ce qu'il fallait.

□

Proposition 12.139.
Soient une droite d dans $\mathbb{R}^3$ ainsi qu'un point p. La projection[72] $\texttt{proj}_d(p)$ est le point d'intersection[73] entre d et la perpendiculaire à d passant par p.

Démonstration. Nous considérons la droite $d = \{a + \lambda v\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ et un point $p \in \mathbb{R}^3$. Nous notons $x(\lambda) = a + \lambda v$ le point courant dans d. Conformément à la définition 12.138 de la projection orthogonale, nous allons minimiser la distance $\|p - x(\lambda)\|$ par rapport à λ.

Puisque $\|p - x(\lambda)\|$ est toujours positif, nous pouvons chercher à minimiser le carré :

$$\|p - x(\lambda)\| = \|p\|^2 - 2p \cdot a - 2\lambda p \cdot v + \|a\|^2 + |\lambda|^2\|v\|^2 + 2\lambda a \cdot v. \tag{12.329}$$

Quitte à minimiser ça par rapport à λ, nous pouvons oublier les termes ne contenant pas λ. Nous posons donc

$$f(\lambda) = \|v\|^2\lambda^2 + 2(a-p)\cdot v\lambda \tag{12.330}$$

69. Théorème 10.49.
70. Définition 7.134.
71. Ici nous utilisons la proposition 12.38, et c'est une des choses qui font que cette partie sur la « géométrie élémentaire » demande en réalité d'être placée après déjà une partie de l'analyse réelle.
72. Définition 12.138.
73. Lemme 12.130.

Comme le coefficient de λ^2 est positif, la proposition 10.99 nous dit que cette fonction aura un minimum (et non un maximum). La valeur λ_0 pour laquelle f est minimal se découvre grâce à 10.99(2) :

$$\lambda_0 = \frac{-2(a-p)\cdot v}{2\|v\|^2}. \tag{12.331}$$

Cela est la valeur de λ pour laquelle

$$\mathtt{proj}_d(p) = x(\lambda_0); \tag{12.332}$$

nous avons donc

$$x(\lambda_0) = a - \frac{(a-p)\cdot v}{\|v\|^2}v. \tag{12.333}$$

Nous devons voir maintenant que $\big(p - x(\lambda_0)\big)\cdot v = 0$. Il suffit d'un peu déballer :

$$\big(p-x(\lambda_0)\big)\cdot v = p\cdot v - a\cdot v + \frac{(a-p)\cdot v}{\|v\|^2}\|v\|^2 = p\cdot v - a\cdot v + (a-p)\cdot v = 0. \tag{12.334}$$

□

Lemme 12.140.
Soit $v_1 \in \mathbb{R}^3$. Il existe des vecteurs v_2 et v_3 tels que les v_i sont deux à deux perpendiculaires.

Démonstration. Nous considérons $w \neq v$ dans $\mathbb{R}^3$ et nous profitons de la proposition 11.33 pour poser $v_2 = v_1 \times w$. Enfin nous définissons $v_3 = v_1 \times v_2$. □

Lemme 12.141.
Soient trois éléments $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ deux à deux perpendiculaires. Si $x \perp v_1$, alors $x \in \operatorname{Span}\{v_2, v_3\}$.

Démonstration. Il faut se rappeler de la proposition 11.14 qui fait de $\{v_1, v_2, v_3\}$ une partie libre. Elle est donc une base par la proposition 4.17(2).

Soit $x \perp v_1$. Nous le décomposons dans la base $\{v_1, v_2, v_3\}$: $x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$. En prenant le produit scalaire par v_1, et en tenant compte du fait que $v_1\cdot v_2 = v_2\cdot v_3 = 0$ nous trouvons $0 = v_1\cdot x = \lambda_1\|v_1\|^2$. Donc $\lambda_1 = 0$ et $x \in \operatorname{Span}\{v_2, v_3\}$. □

12.13.3 Plan médiateur

Proposition 12.142 (plan médiateur[1])**.**
Soient un espace euclidien V ainsi que deux points distincts $a, b \in V$. Nous avons

$$\{x \in V \textit{ tel que } x - m \perp b - a\} = \{x \in V \textit{ tel que } \|x-a\| = \|x-b\|\}. \tag{12.335}$$

Dans le cas de $V = \mathbb{R}^3$, alors cet ensemble est un plan[74].

Ce plan est le ***plan médiateur*** *du segment $[a, b]$.*

Démonstration. Nous notons

$$M = \{x \in V \text{ tel que } x - m \perp b - a\}, \tag{12.336a}$$
$$N = \{x \in V \text{ tel que } \|x-a\| = \|x-b\|\}. \tag{12.336b}$$

(i) <u>$M \subset N$</u> Soit $x \in M$. Nous avons $(x-m)\cdot(b-a) = 0$, et nous pouvons utiliser Pythagore 11.22 dans les triangles xbm et xma :

$$\|x-a\|^2 = \|x-m\|^2 + \|a-m\|^2 \tag{12.337a}$$
$$\|x-b\|^2 = \|x-m\|^2 + \|m-b\|^2. \tag{12.337b}$$

Vu que m est le milieu, nous avons $a-m = m-b$ et donc $\|a-m\| = \|m-b\|$. Nous voyons donc que les membres de droites des deux équations (12.337) sont égaux. Donc $\|x-a\|^2 = \|x-b\|^2$. Comme une norme est toujours positive, les carrés peuvent être simplifiés : $\|x-a\| = \|x-b\|$. Donc $x \in N$.

74. Définition 12.127.

(ii) <u>$N \subset M$</u> Soit $x \in N$. Nous posons $h = \texttt{proj}_{(ab)}(x)$, la projection de x sur la droite (ab). La proposition 12.139 nous dit que h est l'unique point de (ab) tel que $x - h \perp b - a$.
Le théorème de Pythagore 11.22 dans le triangle ahx donne

$$\|x-a\|^2 = \|a-h\|^2 + \|x-h\|^2 \tag{12.338}$$

et dans le triangle bhx il donne :

$$\|b-x\|^2 = \|b-h\|^2 + \|h-x\|^2. \tag{12.339}$$

Par hypothèse nous avons $\|x-a\|^2 = \|x-b\|^2$ et donc

$$\|a-h\| = \|b-h\|. \tag{12.340}$$

Nous cherchons à présent quel(s) point(s) h de la droite (ab) vérifie(nt) cette condition, et nous espérons que ce sera $(a+b)/2$.
Nous cherchons h sous la forme $h = a + \lambda(b-a)$. D'une part nous avons $\|a-h\|^2 = \|\lambda(b-a)\|^2 = \lambda^2\|b-a\|^2$, et d'autre part

$$\|b-h\|^2 = \|b-a-\lambda(b-a)\|^2 = |1-\lambda|^2\|b-a\|^2 \tag{12.341}$$

Nous en déduisons que $|\lambda| = |1-\lambda|$. Cela laisse deux possibilités : la première est $\lambda = 1-\lambda$ qui donne $\lambda = 1/2$ et la seconde est $\lambda = -(1-\lambda)$ qui est impossible. Donc $\lambda = 1/2$ et

$$h = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}. \tag{12.342}$$

Donc en posant $m = (a+b)/2$ nous avons bien $b - a \perp x - m$.

(iii) <u>**C'est un plan**</u> Nous nous mettons maintenant dans le cas où V est l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa norme usuelle. Posons $f_1 = b - a$ et considérons deux vecteurs f_2, f_3 tels que les f_i soient deux à deux perpendiculaires (lemme 12.140).
Nous allons prouver que $M = \mathrm{Span}\{f_2, f_3\} + m$.

(i) <u>**Une inclusion**</u> Si $x \in \mathrm{Span}(f_2, f_3) + m$, alors $x = \alpha f_2 + \beta f_3 + m$ et nous avons bien $x - m \perp b - a$.

(ii) <u>**L'autre inclusion**</u> Soit $x \in M$. Donc $x - m \perp b - a$. Le lemme 12.141 nous indique alors que $x - m \in \mathrm{Span}\{f_2, f_3\}$, ce qu'il fallait.

□

12.13.4 Tétraèdre

Définition 12.143 ([1]).
*Un **tétraèdre régulier** est un ensemble de 4 points A, B, C et D de $\mathbb{R}^3$ deux à deux équidistants.*

Nous allons nommer $\{a_i\}$ les segments entre les points, $\{d_i\}$ les droites sur ces segments, et $\{s_i\}$ les sommets.

Lemme 12.144.
Un tétraèdre régulier existe.

Démonstration. Prenez un triangle équilatéral ABC dans le plan $(.,.,0)$, et prenez ensuite un point D à la verticale du centre, placé à la bonne hauteur pour que les longueurs $\|AD\|$, $\|BD\|$ et $\|CD\|$ soient égales à $\|AB\|$. □

Lemme 12.145.
Si T est un tétraèdre régulier, nous avons $d_i \cap T = a_i$.

Lemme 12.146.
Les droites $\{d_i\}_{i=1,\ldots,6}$ ne sont pas confondues ni parallèles.

Démonstration. Si trois points A, B, C sont alignés, il n'est pas possible d'avoir $\|AB\| = \|AC\| = \|BC\|$. Donc il n'y a pas deux droites parmi les $\{d_i\}$ qui sont confondues.

Supposons que deux des droites AB et CD sont parallèles. En particulier, les points A, B, C et D sont dans un même plan : le plan $A + \text{Span}\{B - A, C - A\}$. Il n'est pas possible d'avoir 4 points dans un plan, tous équidistants deux à deux. □

Dans la suite, quand nous parlerons du « tétraèdre », nous parlerons de ses six points et six segments les joignant. L'ensemble $T \subset \mathbb{R}^3$ ne contient pas les surfaces et les volumes.

Lemme 12.147.
Soit un tétraèdre régulier T. Un point de $\mathbb{R}^3$ est un sommet si et seulement si il est l'intersection de deux des droites $\{d_i\}$ différentes.

Démonstration. En deux parties.

(i) **Sens direct** Par définition les sommets sont les points A, B, C, D ; et les droites d_i sont les droites (AB), (AC), (AD), (BC), (DB) et (CD). Donc oui, les sommets sont à des intersections de ces droites.

(ii) **Sens inverse** Soit un point $X \in \mathbb{R}^3$ à l'intersection entre deux des d_i. Nous avons déjà vu dans le lemme 12.146 que ces droites ne sont ni parallèles ni confondues. Donc elles ont au plus un point d'intersection. Voyons les couples possibles de droites.

On a une série de possibilités comme $(AB) \cap (AC)$. Dans ce cas, l'intersection entre ces deux droits est A qui est un des sommets. Ensuite nous avons une série de possibilités comme $(AB) \cap (CD)$. Ces deux droites n'ont pas d'intersection parce que si elles en avaient, les points A, B, C et D seraient dans le même plan, ce qui est impossible. Donc deux droites d_i ont soit, pas d'intersection, soit, une intersection qui est un sommet.

□

12.14 Géométrie dans le plan

Lemme 12.148 (Équation de droite)**.**
Si D est une droite[75] *dans $\mathbb{R}^2$, alors D est d'une des deux formes suivantes :*

— *Soit il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x = a\}, \tag{12.343}$$

— *soit il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y = ax + b\}. \tag{12.344}$$

Le premier cas correspond aux droites verticales.

Proposition 12.149.
Si D est une droite dans $\mathbb{R}^2$, il existe une application affine[76] *$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que*

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } f(x) = 0\}. \tag{12.345}$$

Nous disons qu'une telle application affine est une application associée à D.

Si f est une application affine quelle que $f(x) = 0$ donne la droite D, alors pour tout réel non nul λ, l'application affine λf donnent également D. Il n'y a donc pas d'unicité.

75. Définition 12.127, mais c'est surtout la caractérisation du lemme 12.134(3) que nous devons avoir en tête.
76. Définition 9.143.

Définition 12.150.
*Soit une application affine $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Nous appelons **demi-plans** associés à f les parties*

$$H_f^+=\{x\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } f(x)>0\}\tag{12.346}$$

et

$$H_f^-=\{x\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } f(x)<0\}.\tag{12.347}$$

Lemme 12.151 ([1]).
Les demi-plans sont convexes[77].

Démonstration. Soit une applications affine $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ainsi que $a,b\in\mathbb{R}^2$ tels que $f(a)>0$ et $f(b)>0$. Vu que f est affine, il existe une application linéaire $l\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ainsi que $\alpha\in\mathbb{R}$ tels que $f(x)=l(x)+\alpha$ pour tout x.

Nous considérons

$$\begin{aligned} \gamma\colon \mathbb{R}&\to\mathbb{R}^2\\ t&\mapsto a+t(b-a). \end{aligned}\tag{12.348}$$

Nous devons prouver que $(f\circ\gamma)(t)>0$ pour tout $t\in[0,1]$.

Nous avons $(f\circ\gamma)(0)>0$ et $(f\circ\gamma)(1)>0$. Nous avons d'abord

$$\begin{aligned} (f\circ\gamma)(t)&=l\big(a+t(b-a)\big)+\alpha &(12.349a)\\ &=l(a)+fl(b)-tl(a)+\alpha &(12.349b)\\ &=(1-t)l(a)+tl(b)+t\alpha+(1-t)\alpha &(12.349c)\\ &=(1-t)f(a)+tf(b). &(12.349d) \end{aligned}$$

Les nombres $f(a)$ et $f(b)$ sont strictement positifs. Les nombres $(1-t)$ et t sont positifs, mais ne s'annulent pas en même temps. Donc dans (12.349d), au moins un des deux termes est strictement positifs tandis que l'autre est positif ou nul. Bref, $(f\circ\gamma)(t)>0$.

Cela prouve que le demi-plan $f(x)>0$ est convexe. Le même raisonnement tient pour le demi-plan $f(x)<0$. □

Lemme 12.152 ([1]).
Si $f,g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ sont affines et si $\ker(f)=\ker(g)$, alors

$$\{H_f^+,H_f^-\}=\{H_g^+,Hgh^-\}.\tag{12.350}$$

Démonstration. Il existe un $a\in\mathbb{R}^2$ tel que $f(a)>0$. En effet $f(x)=l(x)+\alpha$ où $l\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est linéaire et $\alpha\in\mathbb{R}$. Il suffit de prendre x tel que $f(x)<-\alpha$. Soit $a\int\mathbb{R}^2$ tel que $f(a)>0$. Il y a deux possibilités : $g(a)>0$ ou $g(a)<0$ parce que $g(a)=0$ n'est pas possible du fait que f et g s'annulent aux mêmes points..

(i) **Si** $g(a)>0$ Nous allons prouver qu'alors $H_f^+=H_g^+$ et $H_f^-=H_g^-$. Soit $b\in H_f^+$. Nous savons que H_f^+ est convexe (lemme 12.151), de telle sorte que $f\big([a,b]\big)>0$. En particulier f ne s'annule pas sur le segment $[a,b]$, et g non plus. Autrement dit, la fonction

$$\begin{aligned} s\colon[0,1]&\to\mathbb{R}\\ t&\mapsto g\big((1-t)a+tb\big) \end{aligned}\tag{12.351}$$

ne s'annule pas. Vu que $s(0)=g(a)>0$, le théorème des valeurs intermédiaires[78] nous indique que $g(b)=s(1)>0$. Donc $b\in H_g^+$.

Nous avons prouvé que $H_f^+\subset H_g^+$. En inversant les rôles de f et g nous prouvons que $H_g^+\subset H_f^+$.

(ii) **Si** $g(a)<0$ Il se prouve de même que $H_f^+=H_g^-$ et $H_f^-=H_g^+$.

77. Définition 7.134.
78. Théorème 10.82.

□

Proposition 12.153.
Si $f\colon \mathbb{R}^2\to \mathbb{R}$ est une application affine non nulle, alors $\ker(f)$ est une droite[79].

Démonstration. Posons $f(x)=l(x)+\alpha$ où $l\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est linéaire et $\alpha\in\mathbb{R}$.

Commençons avec $\alpha=0$. Considérons $a\in\ker(f)$ et prouvons que $\ker(f)=\{\lambda a\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$. D'abord $f(\lambda a)=l(\lambda a)=\lambda l(a)=0$. Donc $\{\lambda a\}_{\lambda\in\mathbb{R}}\subset\ker(f)$. D'autre part si $f(x)=0$ alors que x n'est pas de la forme λa. Dans ce cas, $\{x,a\}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ et nous concluons que $\ker(f)=\mathbb{R}^2$, ce qui est contraire à l'hypothèse comme quoi $f\neq 0$.

Nous ne supposons plus que $\alpha=0$. Soit $a\in\mathbb{R}^2$ tel que $l(a)=-\alpha$. Nous allons prouver que $\ker(f)=a+\ker(l)$.

(i) $a+\ker(l)\subset\ker(f)$ Soit $z\in\ker(l)$. Nous avons $f(a+z)=l(a)+l(z)+\alpha=-\alpha+0+\alpha=0$. Donc $a+z\in\ker(f)$.

(ii) $\ker(f)\subset a+\ker(l)$. Soit $b\in\ker(f)$. Nous prouvons que $b-a\in\ker(l)$. Nous avons $0=f(b)=l(b)+\alpha$ et donc $l(b)=-\alpha$. Donc
$$l(b-a)=l(b)-l(a)=-\alpha+\alpha=0. \tag{12.352}$$
parce que $l(a)=-\alpha$.

La conclusion est que $\ker(f)=a+\ker(l)$. La première partie ayant déjà montré que $\ker(l)$ est une droite, nous avons fini. □

Lemme 12.154.
Soit une fonction affine $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Soient $a,b\in\mathbb{R}^2$ tels que $f(a),f(b)\neq 0$.

(1) L'intersection $[a,b]\cap\ker(f)$ contient 0 ou 1 point.

(2) Si $[a,b]\cap\ker(f)=\varnothing$ alors $f(a)$ et $f(b)$ ont même signe.

(3) Si $[a,b]\cap\ker(f)\neq\varnothing$ alors $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe opposés.

Démonstration. Point par point.

(i) **Pour (1)** Nous savons que $\ker(f)$ est une droite (proposition 12.153). Vu que $f(a)\neq 0$, l'unique droite passant par a et b (proposition 12.135) n'est pas la droite $\ker(f)$. Donc parmi les trois possibilités de la proposition 12.135, nous sommes forcément dans le cas où l'intersection est vide ou réduite à un unique point.

(ii) **Pour (2)** Nous supposons que $\ker(f)\cap[a,b]=\varnothing$. Considérons la fonction
$$\begin{aligned} s\colon [0,1]&\to\mathbb{R}\\ t&\mapsto f\big((1+t)a+tb\big). \end{aligned} \tag{12.353}$$
La fonction s est continue et ne s'annule pas parce que les points $(1-t)a+tb$ sont ceux de $[a,b]$. Si $s(0)$ et $s(1)$ étaient de signe différents, le théorème des valeurs intermédiaires 10.82 donnerait un $t_0\in\,]0,1[$ tel que $s(t_0)=0$. Donc $s(0)$ et $s(1)$ ont le même signe.

(iii) **Pour (3)** Nous savons déjà que si $[a,b]$ coupe $\ker(f)$, ce sera en un seul point. Soit donc $[a,b]\cap\ker(f)=\{z\}$. Vu que $z\in\,]a,b[$, il existe $t_0\in\,]0,1[$ tel que
$$z=(1-t_0)a+t_0b. \tag{12.354}$$
Nous allons étudier les signes de f aux points $z-\epsilon(b-a)$ et $z+\epsilon(b-a)$ où ϵ est assez petit pour que $B(t_0)\subset[0,1]$. Pour cela nous utilisons le lemme 12.126 pour les points $z-\epsilon(b-a)$ et z avec l'increment $\epsilon(b-a)$:
$$f\big(z-\epsilon(b-a)+\epsilon(b-a)\big)-f\big(z-\epsilon(b-a)\big)=f\big(z+\epsilon(b-a)\big)-f(z). \tag{12.355}$$

79. La caractérisation 12.134(3) est plus pratique que la définition.

En utilisant le fait que $f(z) = 0$ cela donne

$$-f\big(z - \epsilon(b-a)\big) = f\big(z + \epsilon(b-a)\big). \tag{12.356}$$

En y substituant $z = a + t_0(b-a)$ nous trouvons

$$f\big(a + (t_0+\epsilon)(b-a)\big) = -f\big(a + (t_0+\epsilon)(b-a)\big). \tag{12.357}$$

L'application

$$\begin{aligned} s\colon [0,1] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f\big(a + t(b-a)\big) \end{aligned} \tag{12.358}$$

ne s'annule que pour $t = t_0$. Donc $s(0)$ a le même signe que $s(t_0 - \epsilon)$ et $s(t_0+\epsilon)$ a le même signe que $s(1)$. Nous venons de voir que les signes de $s(t_0-\epsilon)$ et de $s(t_0+\epsilon)$ étaient opposés. Donc ceux de $s(0)$ et $s(1)$ sont également opposés.

□

Lemme 12.155 ([1]).
Soient une application affine f. Soient $a \in \ker(f)$ et $v \in \mathbb{R}^2$ tels que[80] $\ker(f) = \{a + \lambda v\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$*. Soit un vecteur non nul $w \in \mathbb{R}^2$ non parallèle à v.*

(1) $\{v, w\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

(2) Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} p\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ \lambda v + \mu w &\mapsto \mu. \end{aligned} \tag{12.359}$$

Alors l'application

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto p(x-a) \end{aligned} \tag{12.360}$$

est affine.

(3) Les demi-plans de f et de g sont les mêmes.

Démonstration. Point par point.

(i) **Pour (1)** Les vecteurs v et w ne sont pas colinéaire et forment donc une base par le lemme 4.8(1).

(ii) **Pour (2)** L'application p est linéaire. Nous avons

$$g(x) = p(x-a) = p(x) - p(a). \tag{12.361}$$

L'application g est donc bien affine.

(iii) **Pour (3)** Les applications f et g sont affines. Si $x \in \ker(g)$, alors $p(x-a) = 0$, c'est à dire que $x - a = \lambda v$ et donc $x = \lambda v + a \in \ker(f)$. Donc $\ker(g) \subset \ker(f)$. De même nous trouvons que $\ker(f) \subset \ker(g)$.

Deux applications affines ayant le même noyau ont les mêmes demi-plans par le lemme 12.152.

□

Lemme 12.156 ([1]).
Soit une application affine f ainsi qu'une application continue $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telles que $\ker(f) = \ker(g)$. Supposons l'existence de $a, b \in \mathbb{R}^2$ tels que $g(a) > 0$ et $g(b) < 0$.

Alors les demi-plans de f sont les parties $\{x$ tel que $g(x) > 0\}$ et $\{x$ tel que $g(x) < 0\}$.

Proposition 12.157 ([1]).
Soit une droite d dans $\mathbb{R}^2$ et une chemin dérivable $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Nous supposons que $\gamma(t_0) \in d$ et que $\gamma'(t_0)$ est non nul et non parallèle à d.

Alors il existe δ tel que pour tout $\epsilon < \delta$, $\gamma(t_0+\epsilon)$ est dans un demi-plan de d et $\gamma(t_0-\epsilon)$ est dans l'autre demi-plan de d.

80. Si on en croit la proposition 12.153, ça existe parce que le noyau d'une application affine est une droite.

Démonstration. Posons $a = \gamma(t_0)$. Nous considérons un vecteur $b_1 \in \mathbb{R}^2$ tel que $d = \{a + \lambda b_1\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$, ainsi que b_2 tel que $\{b_1, b_2\}$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.

Tout élément de $\mathbb{R}^2$ peut être écrit de façon unique sous la forme

$$x = a + x_1 b_1 + x_2 b_2. \tag{12.362}$$

Cela nous donne des fonctions continues $\sigma_i \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\gamma(t) = a + \sigma_1(t)b_1 + \sigma_2(t)b_2, \tag{12.363}$$

et que

$$\gamma'(t) = \sigma_1'(t)b_1 + \sigma_2'(t)b_2. \tag{12.364}$$

Vu que $\gamma'(t_0)$ n'est pas parallèle à la droite d, nous avons $\sigma_2'(t_0) \neq 0$. De plus $\gamma(t_0) = a$, de telle sorte que $\sigma_1(t_0) = \sigma_2(t_0) = 0$.

Que dites-vous ? La fonction dérivable $\sigma_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vaut zéro en t_0 et sa dérivée y est non nulle ? Supposons pour fixer les idées que $\sigma_2'(t_0) > 0$. Il existe donc un $\epsilon > 0$ tel que σ_2 est strictement positive sur $[t_0 - \epsilon, t_0[$ et strictement négative sur $]t_0, t_0 + \epsilon]$.

En vertu du lemme 12.155, les points de γ tels que $\sigma_2 > 0$ sont dans un demi-plan de d et les points de γ avec $\sigma_2 < 0$ sont dans l'autre demi-plan. □

Théorème 12.158 (Théorème de Thalès[325]).
Soient trois points A, B, C non alignés dans $\mathbb{R}^2$. Soient $D \in (AB)$ et $E \in (AC)$. Nous supposons que (DE) est parallèle à BC.

Alors

(1)
$$\frac{\|D - A\|}{\|B - A\|} = \frac{\|E - A\|}{\|C - A\|} = \frac{\|E - D\|}{\|C - B\|} \tag{12.365}$$

(2) Il existe une homothétie $\phi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ centrée en A telle que $\phi(B) = D$ et $\phi(C) = E$.

Théorème 12.159 (Théorème de Thalès dans le cercle[326]).
Soient des points O, A, B, C dans $\mathbb{R}^2$ tels que

(1) $\|A - O\| = \|B - O\| = \|C - O\|$.

(2) A, O et B sont alignés.

Alors le triangle ABC est rectangle en C.

12.15 Dérivée : exemples introductifs

12.15.1 La vitesse

Lorsqu'un mobile se déplace à une vitesse variable, nous obtenons la *vitesse instantanée* en calculant une vitesse moyenne sur des intervalles de plus en plus petits. Si le mobile a un mouvement donné par $x(t)$, la vitesse moyenne entre $t = 2$ et $t = 5$ sera

$$v_{\text{moy}}(2 \to 5) = \frac{x(5) - x(2)}{5 - 2}.$$

Plus généralement, la vitesse moyenne entre 2 et $2 + \Delta t$ est donnée par

$$v_{\text{moy}}(2 \to 2 + \Delta t) = \frac{x(2 + \Delta t) - x(2)}{\Delta t}.$$

Cela est une fonction de Δt. Oui, mais rappellons qu'on a dans l'idée de calculer une vitesse instantanée, c'est-à-dire de voir ce que vaut la vitesse moyenne sur un intervalle très très très très petit. La notion de limite semble toute indiquée pour décrire mathématiquement l'idée physique de vitesse instantanée.

Nous allons dire que la vitesse instantanée d'un mobile est la limite quand Δt tend vers zéro de sa vitesse moyenne sur l'intervalle de temps Δt, ou en formule :

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0) - x(t_0 + \Delta t)}{\Delta t}. \tag{12.366}$$

12.15.2 La tangente à une courbe

Passons maintenant à tout autre chose, mais toujours dans l'utilisation de la notion de limite pour résoudre des problèmes intéressants. Comment trouver l'équation de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(x_0, f(x_0))$?

Essayons de trouver la tangente au point P donné de la courbe donnée à la figure 12.1.

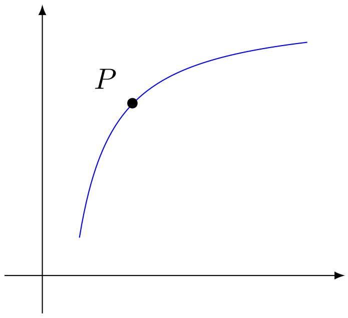


FIGURE 12.1 – Comment trouver la tangente à la courbe au point P ?

La tangente est la droite qui touche la courbe en un seul point sans la traverser. Afin de la construire, nous allons dessiner des droites qui touchent la courbe en P et un autre point Q, et nous allons voir ce qu'il se passe quand Q est très proche de P. Cela donnera une droite qui, certes, touchera la courbe en deux points, mais en deux points *tellement proches que c'est comme si c'étaient les mêmes*. On sent que la notion de limite va encore intervenir.

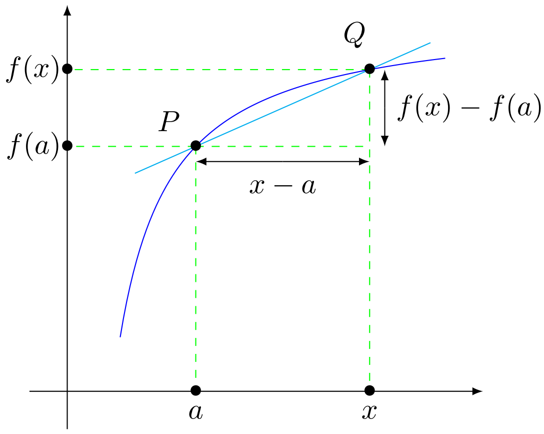


FIGURE 12.2 – Traçons d'abord une corde entre le point P et un point Q un peu plus loin.

Nous avons placé le point, sur la figure 12.2, le point P en a et le point Q un peu plus loin, en x. En d'autres termes leurs coordonnées sont

$$P = \big(a, f(a)\big) \qquad\qquad Q = \big(x, f(x)\big). \tag{12.367}$$

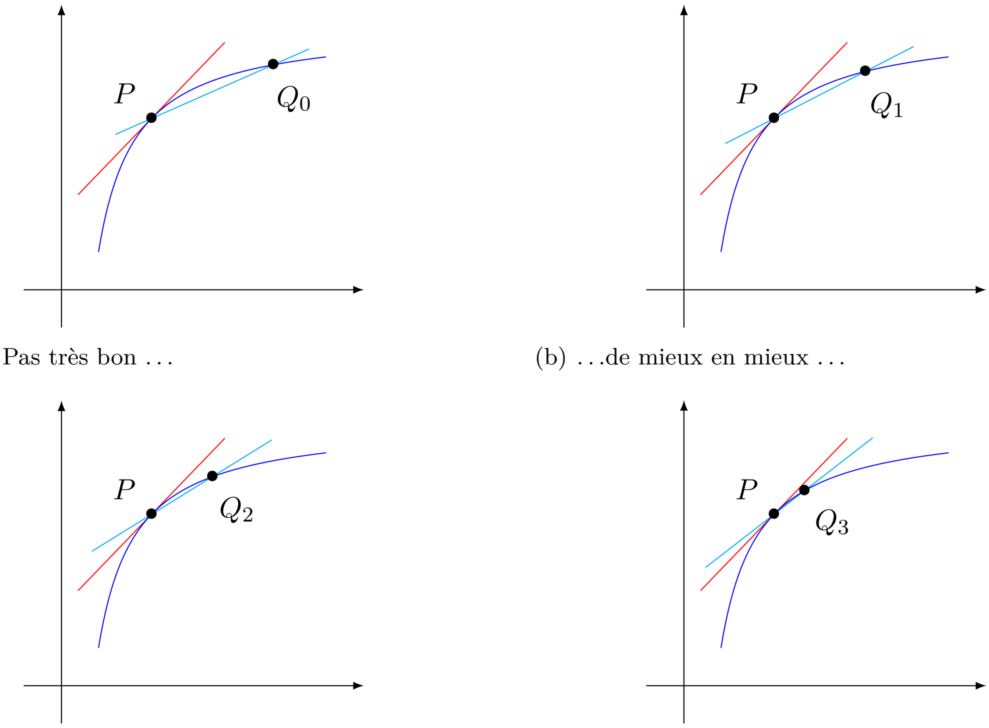
En regardant par exemple la figure 12.2, le coefficient directeur de la droite qui passe par ces deux points est donné par

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \tag{12.368}$$

et bang ! Encore le même rapport que celui qu'on avait trouvé à l'équation (12.366) en parlant de vitesses. En regardant la figure 12.3, on constate réellement qu'en faisant tendre x vers a, on obtient la tangente.

12.15.3 L'aire en dessous d'une courbe

Encore un exemple. Nous voudrions bien pouvoir calculer l'aire en dessous d'une courbe. Nous notons $S_f(x)$ l'aire en dessous de la fonction f entre l'abscisse 0 et x, c'est-à-dire l'aire bleue de la figure 12.4.



(a) Pas très bon ...

(b) ...de mieux en mieux ...

(c) ...de mieux en mieux ...

(d) ...presque parfait

FIGURE 12.3 – Recherche de la tangente par approximations successives.

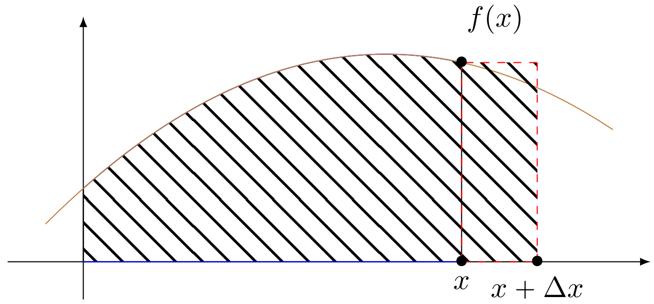


FIGURE 12.4 – L'aire en dessous d'une courbe. Le rectangle rouge d'aire $f(x)\Delta x$ approxime l'augmentation de l'aire lorsqu'on passe de x à $x + \Delta x$.

Si la fonction f est continue et que Δx est assez petit, la fonction ne varie pas beaucoup entre x et $x+\Delta x$. L'augmentation de surface entre x et $x+\Delta x$ peut donc être approximée par le rectangle de surface $f(x)\Delta x$. Ce que nous avons donc, c'est que quand Δx est très petit,

$$S_f(x + \Delta x) - S_f(x) = f(x)\Delta x, \tag{12.369}$$

c'est-à-dire

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S_f(x + \Delta x) - S_f(x)}{\Delta x}. \tag{12.370}$$

Donc, la fonction f est la dérivée de la fonction qui représente l'aire en dessous de f. Calculer des surfaces revient donc au travail inverse de calculer des dérivées.

Nous avons déjà vu que calculer la dérivée d'une fonction n'est pas très compliqué. Aussi étonnant que cela puisse paraitre, il se fait que le processus inverse est très compliqué : il est en général extrêmement difficile (et même souvent impossible) de trouver une fonction dont la dérivée est une fonction donnée.

Une fonction dont la dérivée est la fonction f s'appelle une **primitive** de f, et la fonction qui donne l'aire en dessous de la fonction f entre l'abscisse 0 et x est notée

$$S_f(x) = \int_0^x f(t)dt. \tag{12.371}$$

Nous pouvons nous demander si, pour une fonction f donnée, il existe une ou plusieurs primitives, c'est-à-dire si il existe une ou plusieurs fonctions F telles que $F' = f$. La réponse viendra par le corolaire 12.199.

12.16 Dérivation de fonctions réelles

On considère dans la suite une fonction $f : A \to \mathbb{R}$, où $a \in A \subset \mathbb{R}$; cependant, les notions de continuité et de dérivabilité se généralisent immédiatement au cas de fonctions à valeurs vectorielles ; la notion de continuité se généralise au cas des fonctions à plusieurs variables (la notion de dérivabilité est remplacée par celle de différentiabilité dans ce cadre).

Définition 12.160.
La fonction f est ***dérivable*** *en a si $a \in \operatorname{Int} A$ et si*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe. On note alors cette quantité $f'(a)$, c'est le nombre dérivé de f en a. La ***fonction dérivée*** *de f est*

$$\begin{aligned} f' \colon A' &\to \mathbb{R} \\ a &\mapsto f'(a) \end{aligned} \tag{12.372}$$

définie sur l'ensemble noté A' des points a où f est dérivable.

Exemple 12.161.
Montrons que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$ est continue et dérivable. Exceptionnellement (bien qu'on sache que la dérivabilité implique la continuité), montrons ces deux assertions séparément.

Continuité Pour prouver la continuité au point $a \in \mathbb{R}$ nous devons montrer que

$$\lim_{x \to a} x = a \tag{12.373}$$

c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}\, |x - a| < \delta \Rightarrow |x - a| < \epsilon \tag{12.374}$$

ce qui est clair en prenant $\delta = \epsilon$.

Dérivabilité Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculons la limite du quotient différentiel

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{x - a}{x - a} = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} 1 = 1 \tag{12.375}$$

ce qui prouve que f est dérivable et que sa dérivée vaut 1 en tout point a de $\mathbb{R}$.

On a donc montré que la fonction $x \mapsto x$ est continue, dérivable, et que sa dérivée vaut 1 en tout point a de son domaine.

△

Proposition 12.162.
Une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

Démonstration. Soit I un intervalle sur lequel la fonction f est dérivable, et soit $x_0 \in I$. Nous allons prouver la continuité de f en x_0. Le fait que la limite

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{12.376}$$

existe implique a fortiori que

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) - f(x_0) = 0. \tag{12.377}$$

Cela signifie la continuité de f en vertu du critère 12.54. □

Théorème 12.163.
Toute fonction dérivable en un point est continue en ce point.

Démonstration. Soient $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}$. Nous supposons que f n'est pas continue en a et nous allons en déduire qu'elle n'est pas non plus dérivable en a. Pour cela nous considérons le lien entre limite et continuité donné dans le théorème 12.54. Nier que f est continue en a revient à dire qu'il existe un voisinage V de $f(a)$ tel que

$$\forall r>0, \exists\epsilon<r \text{ tel que } f(a+\epsilon)\notin V. \tag{12.378}$$

Si $B\big(f(a),R\big)\subset V$ [81], et si $r=1/n$, nous construisons une suite $\epsilon_n\to 0$ telle que

$$|f(a+\epsilon_n)-f(a)|>R. \tag{12.379}$$

Avec cela nous avons

$$\frac{|f(a+\epsilon_n)-f(a)|}{\epsilon_n} > \frac{R}{\epsilon_n}\to\infty. \tag{12.380}$$

Donc la fonction f ne peut pas être dérivable en a. □

Remarque 12.164.
La réciproque du théorème précédent n'est pas vraie : il existe bien des fonctions qui sont continues en un point x_0, mais qui ne sont pas dérivables en x_0. La fonction valeur absolue, $x\mapsto |x|$, par exemple est continue sur tout $\mathbb{R}$ mais elle n'est pas dérivable en 0.

Si f est une fonction dérivable, il peut arriver que la fonction dérivée f' soit elle-même dérivable. Dans ce cas nous notons f'' ou $f^{(2)}$ la dérivée de la fonction f'. Cette fonction f'' est la **dérivée seconde** de f. Elle peut encore être dérivable ; dans ce cas nous notons $f^{(3)}$ sa dérivée, et ainsi de suite. Nous définissons $f^{(n)}=(f^{(n-1)})'$ la dérivée n^{e} de f. Nous posons évidemment $f^{(0)}=f$.

12.16.1 Exemples

Exemple 12.165.
Commençons par la fonction $f(x)=x$. Dans ce cas nous avons

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{x-a}{x-a}=1. \tag{12.381}$$

La dérivée est donc 1. △

Proposition 12.166.
La dérivé de la fonction $x\mapsto x$ vaut 1, en notations compactes : $(x)'=1$.

Démonstration. D'après la définition de la dérivée, si $f(x)=x$, nous avons

$$f(x)=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{(x+\epsilon)-x}{\epsilon}=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon}{\epsilon}=1, \tag{12.382}$$

et c'est déjà fini. □

81. Existence par la définition de la topologie métrique 7.98.

12.16.1.1 La fonction carré

Prenons ensuite $f(x) = x^2$. En utilisant le produit remarquable $(x^2 - a^2) = (x-a)(x+a)$ nous trouvons

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = x + a. \tag{12.383}$$

Lorsque $x \to a$, cela devient $2a$. Nous avons par conséquent

$$f'(x) = 2x. \tag{12.384}$$

Lemme 12.167.
Si $f(x) = x^2$, alors $f'(x) = 2x$.

Démonstration. Utilisons la définition, et remplaçons f par sa valeur :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} && (12.385a)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{(x+\epsilon)^2 - x^2}{\epsilon} && (12.385b)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{x^2 + 2x\epsilon + \epsilon^2 - x^2}{\epsilon} && (12.385c)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\epsilon(2x+\epsilon)}{\epsilon} && (12.385d)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0} (2x+\epsilon) && (12.385e)\\
&= 2x, && (12.385f)
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait prouver. □

12.16.1.2 La fonction racine carré

Considérons maintenant la fonction $f(x) = \sqrt{x}$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}\\
&= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})}\\
&= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}.
\end{aligned} \tag{12.386}$$

Lorsque $x \to a$, nous obtenons

$$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}. \tag{12.387}$$

Notons que la dérivée de $f(x) = \sqrt{x}$ n'existe pas en $x = 0$. En effet elle serait donnée par le quotient

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}}. \tag{12.388}$$

Mais si x devient très petit, la dernière fraction tend vers l'infini.

12.16.2 Interprétation géométrique de la dérivée : tangente

Considérons le **graphe** de la fonction f sur I, c'est-à-dire l'ensemble

$$\{(x, f(x)) \text{ tel que } x \in I\}. \tag{12.389}$$

Le nombre

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{12.390}$$

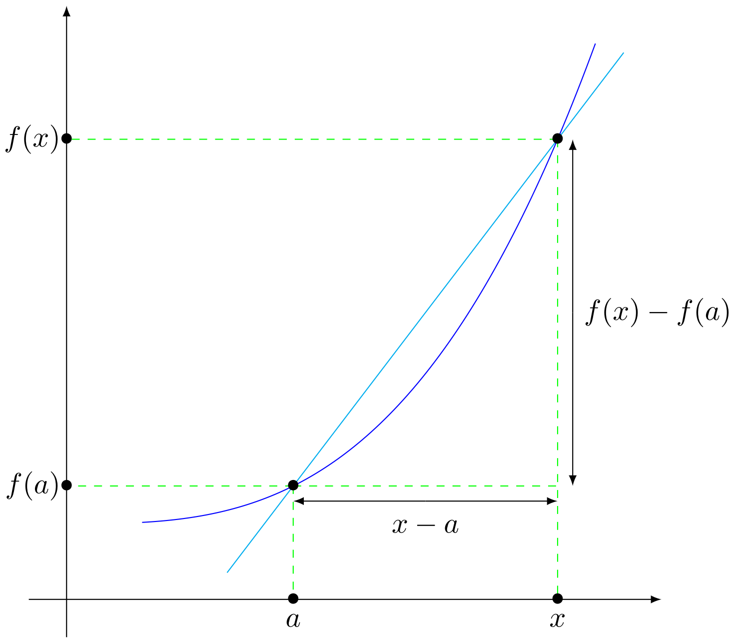


FIGURE 12.5 – Le coefficient directeur de la corde entre a et x.

est la pente de la droite qui joint les points $\big(x, f(x)\big)$ et $\big(a, f(a)\big)$, voir la figure 12.5.

Étant donné que $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente au point $\big(a, f(a)\big)$, l'équation de la tangente est

$$y - f(a) = f'(a)(x - a). \tag{12.391}$$

12.16.3 Interprétation géométrique de la dérivée : approximation affine

Le fait que la fonction f soit dérivable au point $a \in I$ signifie que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell \tag{12.392}$$

pour un certain nombre ℓ. Cela peut être réécrit sous la forme

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \ell = 0, \tag{12.393}$$

ou encore

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - \ell(x - a)}{x - a} = 0. \tag{12.394}$$

Introduisons la fonction

$$\alpha(t) = \frac{f(a + t) - f(a) - t\ell}{t}. \tag{12.395}$$

Cette fonction est faite exprès pour que

$$\alpha(x - a) = \frac{f(x) - f(a) - \ell(x - a)}{x - a}; \tag{12.396}$$

par conséquent $\lim_{x \to a} \alpha(x - a) = 0$. Nous récrivons l'équation (12.396) sous la forme

$$f(x) - f(a) - \ell(x - a) = (x - a)\alpha(x - a). \tag{12.397}$$

Le second membre tend vers zéro lorsque x tend vers a avec une « vitesse au carré » : c'est le produit de deux facteurs tous deux tendant vers zéro. Si x n'est pas très loin de a, il n'est donc pas une mauvaise approximation de dire

$$f(x) - f(a) - \ell(x - a) \simeq 0, \tag{12.398}$$

c'est-à-dire

$$f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x-a). \tag{12.399}$$

Nous avons retrouvé l'équation (12.391). La manipulation que nous venons de faire revient donc à dire que la fonction f, au voisinage de a, est bien approximée par sa tangente.

L'équation (12.399) peut être aussi écrite sous la forme

$$f(x+\Delta x) \simeq f(x) + f'(x)\Delta x \tag{12.400}$$

qui est une approximation d'autant meilleure que Δx est petit.

12.16.4 Développement limité au premier ordre

Si une fonction est dérivable en a alors elle peut être approximée « au premier ordre » par une formule simple qui sera généralisée pour des dérivées d'ordre supérieurs avec les séries de Taylor, théorème 12.447. Pour trouver des versions avec des dérivations partielles, voir le thème 53.

Proposition 12.168 (Développement limité au premier ordre)**.**
Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable, alors il existe une fonction $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \alpha(h) \tag{12.401}$$

et

$$\lim_{h\to 0} \frac{\alpha(h)}{h} = 0. \tag{12.402}$$

Il existe aussi une fonction $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\beta(h) \tag{12.403}$$

telle que $\lim_{h\to 0} \beta(h) = 0$.

Démonstration. La fonction f étant dérivable en a nous avons l'existence de la limite suivante :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \tag{12.404}$$

ce qui revient à dire qu'en définissant la fonction β par

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \beta(h) \tag{12.405}$$

alors $\beta(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$. En réduisant au même dénominateur, et en multipliant par h, nous avons la formule (12.403).

En nommant $\alpha(h) = h\beta(h)$ nous trouvons la fonction α de la formule (12.401) :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \alpha(h) \tag{12.406}$$

avec

$$\lim_{h\to 0} \frac{\alpha(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \beta(h) = 0. \tag{12.407}$$

□

12.17 Règles de calcul

D'abord une dérivée facile, qui sera utile pour démontrer la formule de dérivation d'un quotient.

Lemme 12.169.
Nous avons :

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}. \tag{12.408}$$

Démonstration. En posant $f(x) = 1/x$, nous avons le calcul

$$\frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon} = \frac{\frac{1}{x+\epsilon}-\frac{1}{x}}{\epsilon} = \frac{x-(x+\epsilon)}{\epsilon x(x+\epsilon)} = \frac{-1}{x(x+\epsilon)}. \tag{12.409}$$

Nous trouvons le résultat en passant à la limite et en tenant compte de la proposition 12.12 sur la limite d'un quotient. □

Proposition 12.170 ([327, 328, 329])**.**
Nous avons les règles suivantes.

(1) Si $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont dérivables en $a \in \mathbb{R}$, alors $f+g$ est dérivable en a et

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a). \tag{12.410}$$

(2) Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors (λf) est dérivable en a et

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a). \tag{12.411}$$

(3) Si $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont dérivables en $a \in \mathbb{R}$, alors fg est dérivable en a et

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a). \tag{12.412}$$

*Cette formule est appelée **règle de Leibnitz**.*

(4) Soient deux intervalles I, J dans $\mathbb{R}$. Soient des fonctions $f\colon I \to J$ et $g\colon J \to \mathbb{R}$. Soit encore $a \in I$. Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big)f'(a). \tag{12.413}$$

(5) Soient $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ des fonctions sur un intervalle ouvert I. Soit $a \in I$; supposons que $g(a) \neq 0$. Alors la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}. \tag{12.414}$$

En particulier, la dérivation est une opération linéaire sur l'espace des fonctions infiniment dérivables.

Démonstration. Point par point.

(i) **Pour (1)** Soit $\epsilon > 0$. Nous avons

$$\frac{(f+g)(a+\epsilon)-(f+g)(a)}{\epsilon} = \frac{f(a+\epsilon)-f(a)}{\epsilon} + \frac{g(a+\epsilon)-g(a)}{\epsilon}. \tag{12.415}$$

Par hypothèse, les deux termes de droite ont une limite lorsque $\epsilon \to 0$. Donc le membre de gauche a une limite qui vaut la somme des deux limites[82], c'est à dire $f'(a) + g'(a)$.

82. Limite de sommes, proposition 12.5(1).

(ii) **Pour (2)** Écrivons la définition de la dérivée avec (λf) au lieu de f, et calculons un petit peu :

$$
\begin{aligned}
(\lambda f)'(x) &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{(\lambda f)(x+\epsilon)-(\lambda f)(x)}{\epsilon} && (12.416a)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\lambda\big(f(x+\epsilon)\big)-\lambda f(x)}{\epsilon} && (12.416b)\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\lambda\frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon} && (12.416c)\\
&= \lambda\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon} && (12.416d)\\
&= \lambda f'(x). && (12.416e)
\end{aligned}
$$

(iii) **Pour (3), règle de Leibnitz** La définition de la dérivée dit que

$$
(fg)'(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(x+\epsilon)g(x+\epsilon)-f(x)g(x)}{\epsilon}. \tag{12.417}
$$

La subtilité est d'ajouter au numérateur la quantité $-f(x)g(x+\epsilon)+f(x)g(x+\epsilon)$, ce qui est permis parce que cette quantité est nulle[83]. Le numérateur de (12.417) devient donc

$$
\begin{aligned}
f(x+\epsilon)g(x+\epsilon)&-f(x)g(x+\epsilon)+f(x)g(x+\epsilon)-f(x)g(x)\\
&= g(x+\epsilon)\big(f(x+\epsilon)-f(x)\big)+f(x)\big(g(x+\epsilon)-g(x)\big),
\end{aligned} \tag{12.418}
$$

où nous avons effectué deux mises en évidence. Étant donné que nous avons deux termes, nous pouvons couper la limite en deux :

$$
\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{\epsilon\to 0} g(x+\epsilon)\frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon}+\lim_{\epsilon\to 0} f(x)\frac{g(x+\epsilon)-g(x)}{\epsilon}\\
&= \lim_{\epsilon\to 0} g(x+\epsilon)\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon}+f(x)\lim_{\epsilon\to 0}\frac{g(x+\epsilon)-g(x)}{\epsilon},
\end{aligned} \tag{12.419}
$$

où nous avons utilisé le théorème 12.15 pour scinder la première limite en deux, ainsi que la propriété (12.19) pour sortir le $f(x)$ de la limite dans le second terme. Maintenant, dans le premier terme, nous avons évidemment[84] $\lim_{\epsilon\to 0} g(x+\epsilon) = g(x)$. Les limites qui restent sont les définitions classiques des dérivées de f et g au point x :

$$
(fg)'(x) = g(x)f'(x)+f(x)g'(x), \tag{12.420}
$$

ce qu'il fallait démontrer.

(iv) **Pour (4)** Nous posons $b = f(a)$ et nous considérons la fonction suivante :

$$
\begin{aligned}
u\colon J &\to \mathbb{R}\\
y &\mapsto u(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y)-g(b)}{y-b} & \text{si } y\neq b\\ g'(b) & \text{si } y = b. \end{cases}
\end{aligned} \tag{12.421}
$$

Vu que g est dérivable en b, la seconde ligne existe et u est continue en $y = b = f(a)$. C'est la définition de la dérivée.

Mais f est continue en a, donc $u\circ f$ est également continue en a, et nous avons

$$
\lim_{x\to a}(u\circ f)(x) = u\big(f(a)\big) = u(b) = g'(b). \tag{12.422}
$$

83. Nous avons déjà fait le coup d'ajouter et enlever la même chose durant la démonstration du théorème 12.15. C'est une technique assez courante en analyse.

84. Pas tout à fait évidemment : selon le théorème 12.54, *limite et continuité*, il faut que g soit continue.

En réécrivant la définition de u en $f(x)$, l'expression suivante est une fonction continue de x :

$$u\big(f(x)\big) = \begin{cases} \dfrac{g\big(f(x)\big) - g(b)}{f(x) - b} & \text{si } f(x) \neq b \\ g'(b) & \text{si } y = b. \end{cases} \tag{12.423}$$

Si $f(x) \neq b$ nous avons :

$$g\big(f(x)\big) - g(b) = u\big(f(x)\big)\big(f(x) - b\big). \tag{12.424}$$

Si par contre $f(x) = b$, en réalité, l'égalité (12.424) est encore valable parce qu'elle se résume à $0 = 0$. Nous divisons par $x - a$ et nous avons l'égalité

$$\frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big)}{x - a} = u\big(f(x)\big)\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{12.425}$$

qui est valable sur $I\backslash\{a\}$.

Il ne s'agit pas maintenant de prendre la limite $x \to a$ des deux côtés, parce que la limite du membre de gauche est précisément ce que ce théorème s'efforce de prouver exister. Nous montrons que la limite du membre de gauche existe en montrant que celle de droite existe.

D'une part, $u \circ f$ est continue et

$$\lim_{x \to a} u\big(f(x)\big) = u\big(f(a)\big) = u(b) = g'(b). \tag{12.426}$$

D'autre part, f est dérivable en a, donc

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a). \tag{12.427}$$

Tout cela pour dire qu'à droite, la limite existe et vaut $g'(b)f'(a)$. Donc nous avons l'existence de la limite que nous définissons $(g \circ f)'(a)$, et la valeur

$$\lim_{x \to a} \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big)}{x - a} = g'\big(f(a)\big)f'(a). \tag{12.428}$$

Le résultat est prouvé.

(v) **Pour (5)** Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} i \colon \mathbb{R}\backslash\{0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x}. \end{aligned} \tag{12.429}$$

La fonction g est dérivable en a, la fonction i est dérivable en $g(a)$. Donc par le théorème de dérivation des fonctions composées[85], la fonction $i \circ g$ est dérivable en a et

$$(i \circ g)'(a) = i'\big(g(a)\big)g'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}. \tag{12.430}$$

Pour le quotient, nous utilisons la formule de la dérivée du produit sur $\frac{f}{g}(x) = f(x)\frac{1}{g(x)}$ pour dire que f/g est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = f'(a)\frac{1}{g(a)} + f(a)\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)}{g(a)} - \frac{f(a)g'(a)}{g(a)^2} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}, \tag{12.431}$$

ce qu'il fallait démontrer.

□

85. Proposition 12.170(4).

Remarque 12.171.
Nous ne pouvons pas dire que la dérivée est une opération linéaire sur l'espace des fonctions dérivables. Certes la proposition 12.170 implique entre autres que l'ensemble des fonctions dérivables est un espace vectoriel. Mais la dérivée d'une fonction dérivable n'est pas spécialement dérivable.

Remarque 12.172.
La formule $(1/u)' = -u'/u^2$ ne peut pas être vue comme un cas particulier de $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}$ (proposition 12.437) parce que cette formule est utilisée dans la démonstration de la formule générale.

Pour les fonctions à valeurs dant $\mathbb{R}^n$, nous posons la définition suivante.

Définition 12.173.
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ dont les composantes $f_i\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sont dérivables. Nous définissons la fonction f' par

$$f'(x)=\sum_i f_i'(x)e_i, \tag{12.432}$$

c'est-à-dire une dérivation composante par composante.

Cette définition est celle pour une fonction $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, et elles est facile. Très différente est la situation d'une fonction $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ dans laquelle il faudra introduire la notion de différentielle[86].

Lemme 12.174.
Soit une fonction dérivable $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Nous posons

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ t&\mapsto f(a+\lambda t) \end{aligned} \tag{12.433}$$

où $a\in\mathbb{R}$. Alors g est dérivable et $g'(0)=\lambda f'(0)$.

Démonstration. Nous devons prouver que la limite

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{g(\epsilon)-g(0)}{\epsilon} \tag{12.434}$$

existe et vaut $\lambda f'(0)$. Nous y allons avec les accroissements finis 12.168 :

$$g(\epsilon)-g(0)=f(a+\lambda\epsilon)-f(a)=f(a)+\lambda\epsilon f'(a)-f(a)=\lambda\epsilon f'(a). \tag{12.435}$$

Le quotient différentiel devient donc

$$\frac{g(\epsilon)-g(0)}{\epsilon}=\frac{\lambda\epsilon f'(a)}{\epsilon}=\lambda f'(a). \tag{12.436}$$

Il n'y a donc pas de problème à passer à la limite et nous avons $g'(0)=f'(a)$. □

Par rapport à la dérivation, les produits scalaire et vectoriel vérifient une règle de Leibnitz.

Proposition 12.175.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si u et v sont dans $C^1(I,\mathbb{R}^3)$, alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\big(u(t)\cdot v(t)\big)&=\big(u'(t)\cdot v(t)\big)+\big(u(t)\cdot v'(t)\big)\\ \frac{d}{dt}\big(u(t)\times v(t)\big)&=\big(u'(t)\times v(t)\big)+\big(u(t)\times v'(t)\big). \end{aligned} \tag{12.437}$$

86. Ce sera pour la définition 11.169.

Démonstration. Nous considérons des fonctions dérivables $f,g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, et nous posons $\varphi(t)=f(t)\cdot g(t)$. En ce qui concerne la dérivée de la fonction $f\cdot g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, nous devons étudier la limite

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\varphi(t+\epsilon)-\varphi(t)}{\epsilon}=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(t+\epsilon)\cdot g(t+\epsilon)-f(t)\cdot g(t)}{\epsilon}. \tag{12.438}$$

La fonction f étant dérivable, la proposition 12.168 nous donne une fonction $\alpha\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ telle que

$$f(t+\epsilon)=f(t)+\epsilon f'(t)+\epsilon\alpha(\epsilon) \tag{12.439}$$

et $\lim_{\epsilon\to 0}\alpha(\epsilon)=0$. En substituant cela dans le numérateur de (12.438) nous calculons un peu :

$$\begin{aligned}
f(t+\epsilon)\cdot g(t+\epsilon)-f(t)\cdot g(t)&=\big(f(t)+\epsilon f'(t)+\epsilon\alpha(\epsilon)\big)\cdot\big(g(t)+\epsilon g'(t)+\epsilon\beta(\epsilon)\big) && (12.440\text{a})\\
&\quad -f(t)\cdot g(t) && (12.440\text{b})\\
&=\epsilon f(t)\cdot g'(t)+\epsilon f(t)\cdot\beta(\epsilon) && (12.440\text{c})\\
&\quad +\epsilon f'(t)\cdot g(t)+\epsilon^2 f'(t)\cdot g'(t)+\epsilon^2 f'(t)\cdot\beta(\epsilon) && (12.440\text{d})\\
&\quad +\epsilon\alpha(\epsilon)\cdot g(t)+\alpha(\epsilon)\epsilon^2\cdot g'(t)+\epsilon^2\alpha(\epsilon)\cdot\beta(\epsilon). && (12.440\text{e})
\end{aligned}$$

En divisant cela par ϵ et en prenant la limite $\epsilon\to 0$, il nous reste

$$f(t)\cdot g'(t)+f'(t)\cdot g(t). \tag{12.441}$$

□

12.17.1 Dérivée de la réciproque

Proposition 12.176 ([330]).
Soit $f\colon I\to J$ une fonction bijective, continue et dérivable[87]*. Soient $x_0\in I$ et $y_0=f(x_0)$. Si $f'(x_0)\neq 0$ alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en y_0 et sa dérivée est donnée par*

$$(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}. \tag{12.442}$$

Démonstration. Pour rappel, une fonction dérivable est toujours continue (proposition 12.162).

Prouvons que f^{-1} est dérivable au point $b=f(a)\in J$. Étant donné que f est dérivable en a, nous avons

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}. \tag{12.443}$$

Par ailleurs, étant donnée la continuité de f^{-1} donnée par la proposition 12.52(4), nous avons

$$\lim_{\epsilon\to 0}f^{-1}(b+\epsilon)=f^{-1}(b)=a. \tag{12.444}$$

Nous pouvons donc remplacer dans (12.443) tous les x par $f^{-1}(b+\epsilon)$ et prendre la limite $\epsilon\to 0$ au lieu de $x\to a$:

$$\begin{aligned}
f'(a)&=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f\big(f^{-1}(b+\epsilon)\big)-f(a)}{f^{-1}(b+\epsilon)-a}\\
&=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{b+\epsilon-f(a)}{f^{-1}(b+\epsilon)-f^{-1}(b)}\\
&=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon}{f^{-1}(b+\epsilon)-f^{-1}(b)}\\
&=\frac{1}{\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f^{-1}(b+\epsilon)-f^{-1}(b)}{\epsilon}}\\
&=\frac{1}{(f^{-1})'(b)}.
\end{aligned} \tag{12.445}$$

Nous avons utilisé le fait que $f(a)=b$ et $a=f^{-1}(b)$. □

87. Définition 12.160.

Exemple 12.177 (difféomorphisme entre $\mathbb{R}$ et un ouvert borné)**.**
Nous cherchons à construire une application dérivable et d'inverse dérivable entre $\mathbb{R}$ (en entier) et un ouvert borné de $\mathbb{R}$. Il serait tentant de prendre l'application arc tangente

$$\begin{aligned} \arctan\colon \mathbb{R} &\to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x &\mapsto \arctan(x) \end{aligned}, \tag{12.446}$$

mais elle ne sera définie que dans le théorème 18.37.

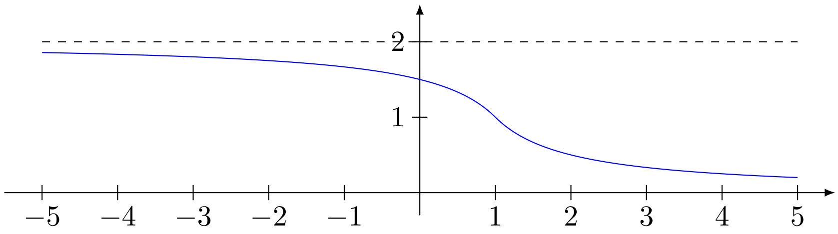
Nous posons

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{1}{x-2} & \text{si } x \leqslant 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1. \end{cases} \tag{12.447}$$

Cette fonction est continue en $x = 1$: il suffit de calculer les deux valeurs. En ce qui concerne la dérivabilité en $x = 1$, nous devons étudier

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(1+\epsilon) - f(1)}{\epsilon}. \tag{12.448}$$

La limite à gauche est égale à la dérivée de $x \mapsto 2 + \frac{1}{x-2}$ en $x = 1$ et la limite à droite est égale à la dérivée de $x \mapsto 1/x$ en $x = 1$. Dans les deux cas nous trouvons -1.



Nous voyons vite que cette fonction est strictement décroissante ; et un calcul de limite nous dit qu'il s'agit d'une bijection dérivable

$$f\colon \mathbb{R} \to]0, 2[. \tag{12.449}$$

La proposition 12.176 s'applique et la bijection réciproque est également dérivable (donc continue aussi). △

¡¡ Avertissement/question à la lectrice !! 12.178
Si vous connaissez un autre exemple, plus simple, de difféomorphisme $f\colon \mathbb{R} \to]a, b[$, faites-le moi savoir. Ne pas utiliser d'exponentielle (vous pensiez à bricoler quelque chose à partir de la primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$?) ni de fonctions trigonométriques.

Exemple 12.179.
Nous aimerions donner le logarithme comme exemple, mais l'exponentielle ne sera définie que dans longtemps, à partir des séries entières. Allez voir l'exemple 15.88 pour le logarithme comme réciproque de l'exponentielle. △

12.17.2 Dérivée de fonction composée

Proposition 12.180 ([331])**.**
Soient des intervalles I et J dans $\mathbb{R}$ ainsi que des fonctions $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $g\colon J \to \mathbb{R}$ tels que $g(J) \subset I$. Soit $a \in J$. Nous supposons que f est dérivable en $g(a)$ et g est dérivable en a.

Alors $f \circ g$ est dérivable en a et

$$(f \circ g)'(a) = f'\big(g(a)\big)g'(a). \tag{12.450}$$

Démonstration. Nous considérons la formule des accroissements finis sous la forme (12.403). Pour la fonction g, nous écrivons

$$g(a+\epsilon) = g(a) + \epsilon g'(a) + \epsilon\alpha(\epsilon) \tag{12.451}$$

avec $\alpha(\epsilon) \to 0$. Et de même pour $f\big(g(a)\big)$:

$$f\big(g(a+\epsilon)\big) = f\big(g(a) + \epsilon g'(a) + \epsilon\alpha(\epsilon)\big) \tag{12.452a}$$
$$= f\big(g(a)\big) + \big(\epsilon g'(a) + \epsilon\alpha(\epsilon)\big)f'\big(g(a)\big) + \epsilon\beta\big(\epsilon g'(a) + \epsilon\alpha(\epsilon)\big) \tag{12.452b}$$

avec $\beta(\epsilon) \to 0$. Nous avons donc, pour ϵ assez petit pour que tout reste dans I et J[88], que

$$\frac{(f\circ g)(a+\epsilon) - (f\circ g)(a)}{\epsilon} = \big(g'(a) + \alpha(\epsilon)\big)f'\big(g(a)\big) + \beta\big(\epsilon g'(a) + \epsilon\alpha(\epsilon)\big). \tag{12.453}$$

En ce qui concerne la limite $\epsilon \to 0$, nous avons entre autres,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\beta\big(\epsilon g'(a) + \epsilon\alpha(\epsilon)\big) = 0, \tag{12.454}$$

et donc bien $(f\circ g)'(a) = g'(a)f'\big(g(a)\big)$. □

12.17.3 Dérivée de fonction périodique

Définition 12.181.
Une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est ***périodique*** *si il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que*

$$f(x+T) = f(x) \tag{12.455}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Un tel T est une ***période*** *de f. Nous disons que T est* la *période de f si il est le minimum vérifiant la propriété.*

Lemme 12.182 ([1])**.**
Si f est une fonction périodique de période T, alors toutes les périodes sont de la forme kT avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration. Considérons une période t. Nous avons $t > T$ par hypothèse. Si t n'est pas un multiple de T, la division euclidienne 1.224 permet d'écrire $t = kT + l$ avec $l < T$. Nous avons alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(x+t) = f(x+kT+l) = f(x+l). \tag{12.456}$$

Donc l est une période de f. Cela n'est pas possible parce que T est la plus petite. □

Lemme 12.183.
Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique et si T est une période de f, alors f' est périodique et T en est une période.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}$. Par hypothèse f est dérivable en a et les limites qui suivent existent :

$$f'(a+T) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(a+T+\epsilon) - f(a+T)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(a+\epsilon) - f(a)}{\epsilon} = f'(a). \tag{12.457}$$

Nous avons utilisé la condition de périodicité en a et en $a+\epsilon$. □

88. Et c'est là qu'on utilise la continuité de f et g garantie par la proposition 12.162.

12.18 Dérivation et croissance

Supposons une fonction dont la dérivée est positive. Étant donné que la courbe est « collée » à ses tangentes, tant que les tangentes montent, la fonction monte. Or, une tangente qui monte correspond à une dérivée positive, parce que la dérivée est le coefficient directeur de la tangente.

Ce résultat très intuitif peut être prouvé rigoureusement. C'est la tache à laquelle nous allons nous atteler maintenant.

Proposition 12.184.
Si f et f' sont des fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$ et si f' est strictement positive sur $[a,b]$, alors f est strictement croissante sur $[a,b]$.

De la même manière, si f' est strictement négative sur $[a,b]$, alors f est strictement décroissante sur $[a,b]$.

Démonstration. Nous n'allons prouver que la première partie. La seconde partie se prouve en considérant $-f$ et en invoquant alors la première[89]. Prenons x_1 et x_2 dans $[a,b]$ tels que $x_1 < x_2$. Par hypothèse, pour tout x dans $[x_1,x_2]$, nous avons

$$f'(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon} > 0. \tag{12.458}$$

Maintenant, la proposition 12.14 dit que quand une limite est positive, alors la fonction dans la limite est positive sur un voisinage. En appliquant cette proposition à la fonction

$$r(\epsilon) = \frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon}, \tag{12.459}$$

dont la limite en zéro est positive, nous trouvons que $r(\epsilon) > 0$ pour tout ϵ pas trop éloigné de zéro. En particulier, il existe un $\delta > 0$ tel que $\epsilon < \delta$ implique $r(\epsilon) > 0$; pour un tel ϵ, nous avons donc

$$r(\epsilon) = \frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon} > 0. \tag{12.460}$$

Étant donné que $\epsilon > 0$, nous avons que $f(x+\epsilon) - f(x) > 0$, c'est-à-dire que f est strictement croissante entre x et $x+\epsilon$.

Jusqu'ici, nous avons prouvé que la fonction f était strictement croissante dans un voisinage autour de chaque point de $[a,b]$. Cela n'est cependant pas encore tout à fait suffisant pour conclure. Ce que nous voudrions faire, c'est de prendre un voisinage $]a,m_1[$ autour de a sur lequel f est croissante. Donc, $f(m_1) > f(a)$. Ensuite, on prend un voisinage $]m_1,m_2[$ de m_1 sur lequel f est croissante. De ce fait, $f(m_2) > f(m_1) > f(a)$. Et ainsi de suite, nous voulons construire des m_3, m_4,. . ., jusqu'à arriver en b. Hélas, rien ne dit que ce processus va fonctionner. Il faut trouver une subtilité. Le problème est que les voisinages sur lesquels la fonction est croissante sont peut-être de plus en plus petits, de telle sorte à ce qu'il faille une infinité d'étapes avant d'arriver à bon port (en b).

Heureusement, nous pouvons drastiquement réduire le nombre d'étapes en nous souvenant du théorème de Borel-Lebesgue 10.18. Nous notons par $\mathcal{O}_x$, un ouvert autour de x tel que f soit strictement croissante sur $\mathcal{O}_x$. Un tel voisinage existe. Cela fait une infinité d'ouverts tels que

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{x\in[a,b]} \mathcal{O}_x. \tag{12.461}$$

Ce que le théorème dit, c'est qu'on peut en choisir un nombre fini qui recouvre encore $[a,b]$. Soient $\{\mathcal{O}_{x_1},\ldots,\mathcal{O}_{x_n}\}$, les heureux élus, que nous supposons pris dans l'ordre : $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Nous avons

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}_i. \tag{12.462}$$

89. Méditer cela.

Quitte à les rajouter à la collection, nous supposons que $x_1 = a$ et que $x_n = b$. Maintenant nous allons choisir encore un sous-ensemble de cette collection d'ouverts. On pose $\mathcal{A}_1 = \mathcal{O}_{x_1}$. Nous savons que $\mathcal{A}_1$ intersecte au moins un des autres $\mathcal{O}_{x_i}$. Cette affirmation vient du fait que $[a,b]$ est connexe (proposition 10.47), et que si $\mathcal{O}_{x_1}$ n'intersectait personne, alors

$$\mathcal{O}_{x_1} \quad \text{et} \quad \bigcup_{i=2}^{n} \mathcal{O}_{x_i} \tag{12.463}$$

forment une partition de $[a,b]$ en deux ouverts disjoints, ce qui n'est pas possible parce que $[a,b]$ est connexe. Nous nommons $\mathcal{A}_2$, un des ouverts $\mathcal{O}_{x_i}$ qui intersecte $\mathcal{A}_1$. Disons que c'est $\mathcal{O}_k$. Notons que $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ est un intervalle sur lequel f est strictement croissante. En effet, si y_{12} est dans l'intersection, $f(a) < f(y_{12})$ parce que f est strictement croissante sur $\mathcal{A}_1$, et pour tout $x > y_{12}$ dans $\mathcal{A}_2$, $f(x) > f(y_{12})$ parce que f est strictement croissante dans $\mathcal{A}_2$.

Maintenant, nous éliminons de la liste des $\mathcal{O}_{x_i}$ tous ceux qui sont inclus dans $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$. Dans ce qu'il reste, il y en a automatiquement un qui intersecte $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, pour la même raison de connexité que celle invoquée plus haut. Nous appelons cet ouvert $\mathcal{A}_3$, et pour la même raison qu'avant, f est strictement croissante sur $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$.

En recommençant suffisamment de fois, nous finissons par devoir prendre un des $\mathcal{O}_{x_i}$ qui contient b, parce qu'au moins un des $\mathcal{O}_{x_i}$ contient b. À ce moment, nous avons fini la démonstration. □

Il est intéressant de noter que ce théorème concerne la croissance d'une fonction sous l'hypothèse que la dérivée est positive. Il nous a fallu très peu de temps, en utilisant la positivité de la dérivée, pour conclure qu'autour de tout point, la fonction était strictement croissante. À partir de là, c'était pour ainsi dire gagné. Mais il a fallu un réel travail de topologie très fine [90] pour conclure. Étonnant qu'une telle quantité de topologie soit nécessaire pour démontrer un résultat essentiellement analytique dont l'hypothèse est qu'une limite est positive, n'est-ce pas ?

Proposition 12.185.
Soit une fonction dérivable $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Si $f' \geqslant 0$ sur $[a,b]$, alors f y est croissante.

Démonstration. Soit f, une fonction croissante sur l'intervalle I, et x un point intérieur de I. La dérivée de f en x vaut

$$f'(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}, \tag{12.464}$$

mais, comme f est croissante sur I, nous avons toujours que $f(x+\epsilon) - f(x) \geqslant 0$ quand $\epsilon > 0$, et $f(x+\epsilon) - f(x) \leqslant 0$ quand $\epsilon < 0$, donc cette limite est une limite de nombres positifs ou nuls, qui est donc positive ou nulle. Cela prouve que $f'(x) \geqslant 0$. □

Proposition 12.186 (Dérivée et croissance)**.**
Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Une fonction dérivable $f\colon I \to \mathbb{R}$ est

(1) strictement croissante sur I si et seulement si $f' > 0$ sur I,

(2) croissante sur I si et seulement si $f' \geqslant 0$ sur I.

(3) strictement décroissante sur I si et seulement si $f' < 0$ sur I,

(4) décroissante sur I si et seulement si $f' \leqslant 0$ sur I.

Proposition 12.187 ([332])**.**
Soient des intervalles I et J dans $\mathbb{R}$. Soit $f\colon I \to J$ une fonction dérivable et strictement monotone. Si f' ne s'annule pas sur I alors

(1) la fonction f est une injective de I vers J,

(2) la fonction f' ne s'annule pas sur I,

(3) la fonction f^{-1} est dérivable sur J,

90. et je te rappelle que nous avons utilisé la proposition 10.47, qui elle même était déjà un très gros boulot !

(4) et nous avons la formule

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}. \tag{12.465}$$

Démonstration. La clef du tout est la proposition 12.186. Nous supposons que f est strictement croissante sur I. Les adaptations à faire en cas de fonction strictement décroissante sont laissées au lecteur. En plusieurs points.

(i) **Pour (1)** Une fonction strictement croissante est injective.

(ii) **Pour (2)** Proposition 12.186.

(iii) **Pour (3)** Vu que f' ne s'annule pas, la la proposition 12.176 dit que f^{-1} est dérivable.

(iv) **Pour (4)** Formule 12.442.

□

12.188.
Très souvent on préfère retenir la formule

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'\left((f^{-1})(y_0)\right)} \tag{12.466}$$

Elle est très simple à retrouver : il suffit d'écrire

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x \tag{12.467}$$

puis de dériver les deux côtés par rapport à x en utilisant la règle de dérivation des fonctions composées de la proposition 12.180 :

$$(f^{-1})'\big(f(x)\big)f'(x) = 1. \tag{12.468}$$

12.18.1 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Théorème 12.189 (Théorème de Rolle[333, 334])**.**
Soit f, une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe un point $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. Étant donné que $[a,b]$ est un intervalle compact, l'image de $[a,b]$ par f est un intervalle compact, soit $[m,M]$ (théorème 7.186). Si $m = M$, alors le théorème est évident : c'est que la fonction est constante, et la dérivée est par conséquent nulle. Supposons que $M > f(a)$ (il se peut que $M = f(a)$, mais alors si f n'est pas constante, il faut avoir $m < f(a)$ et le reste de la preuve peut être adaptée).

Comme M est dans l'image de $[a,b]$ par f, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = M$. Considérons maintenant la fonction

$$\tau(x) = \frac{f(c+x) - f(c)}{x}. \tag{12.469}$$

Par définition, $\lim_{x\to 0} \tau(x) = f'(c)$. Par hypothèse, si $u < c$,

$$\tau(u-c) = \frac{f(u) - f(c)}{u-c} > 0 \tag{12.470}$$

parce que $u - c < 0$ et $f(u) - f(c) < 0$. Par conséquent, $\lim_{x\to 0} \tau(x) \geqslant 0$. Nous avons aussi, pour $v > c$,

$$\tau(v-c) = \frac{f(v) - f(c)}{v-c} < 0 \tag{12.471}$$

parce que $v - c > 0$ et $f(v) - f(c) < 0$. Par conséquent, $\lim_{x\to 0} \tau(x) \leqslant 0$. Mettant les deux ensemble, nous avons $f'(c) = \lim_{x\to 0} \tau(x) = 0$, et c est le point que nous cherchions. □

Voici une généralisation du théorème de Rolle, dans le cas où nous n'aurions pas deux points sur lesquels la fonction est identique, mais deux points en lesquels la limite de la fonction est identique. Typiquement, lorsque les points en question sont $\pm\infty$.

Théorème 12.190 (Généralisation du théorème de Rolle[333]).
Soient $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Soit une fonction dérivable $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to b} f(x) = \ell \tag{12.472}$$

avec $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$. Alors il existe $x \in]a,b[$ tel que $f'(x) = 0$.

Démonstration. Soit un difféomorphisme[91] strictement croissant $\varphi\colon \mathbb{R} \to]\alpha,\beta[$. Pour cela vous pouvez bricoler à partir de l'exemple 12.177. Mais n'utilisez pas la fonction arc tangente, parce qu'elle n'est définie qu'au théorème 18.37.

Nous posons $\tilde{a} = \varphi(a)$, $\tilde{b} = \varphi(b)$ et

$$g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon]\tilde{a},\tilde{b}[\to]\alpha,\beta[. \tag{12.473}$$

Cela est une fonction dérivable et continue sur $[\tilde{a},\tilde{b}]$ en posant $g(\tilde{a}) = g(\tilde{b}) = \varphi(\ell)$.

Donc il existe $\tilde{c} \in]\tilde{a},\tilde{b}[$ tel que $g'(\tilde{c}) = 0$. En posant $c = \varphi^{-1}(\tilde{c})$ nous avons $c \in]a,b[$ et, en utilisant de nombreuses fois la règle de dérivation des fonctions composées 12.170(4),

$$\begin{aligned}
f'(c) &= f'\big(\varphi^{-1}(\tilde{c})\big) && (12.474a)\\
&= (\varphi^{-1})'\Big((g\circ\varphi)\big(\varphi^{-1}(\tilde{c})\big)\Big)(g\circ\varphi)'\big(\varphi^{-1}(\tilde{c})\big) && (12.474b)\\
&= (\varphi^{-1})'\big(g(\tilde{c})\big)\underbrace{g'(\tilde{c})}_{=0}\varphi'\big(\varphi^{-1}(\tilde{c})\big) && (12.474c)\\
&= 0. && (12.474d)
\end{aligned}$$

□

Une autre généralisation du théorème de Rolle, avec des dérivées d'ordre supérieur :

Proposition 12.191 ([335]).
Soit un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ contenant a, b $(a \neq b)$. Soit une fonction $f \in C^{k+1}(I,\mathbb{R})$. Si $f(a) = f(b)$ et si $f^{(j)}(a) = 0$ pour $j = 1,\ldots,n$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n+1)}(c) = 0$.

Démonstration. Le théorème de Rolle 12.189 nous dit qu'il existe $c_1 \in]a,b[$ tel que $f'(c_1) = 0$. Mais alors $f'(a) = f'(c_1) = 0$, et le théorème de Rolls appliqué à f' donne $c_2 \in]a,c_1[$ tel que $f''(c_2) = 0$. Continuant ainsi n fois, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n+1)}(c) = 0$. □

Le théorème suivant est le théorème des **accroissements finis**. Une version avec des dérivées partielles sera la proposition 12.246.

Théorème 12.192 (Accroissements finis).
Soit f, une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

(1) Il existe au moins un réel $c \in]a,b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{12.475}$$

Autrement dit, la tangente en c est parallèle à la corde entre a et b.

(2) Nous avons la majoration

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \leqslant \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)||b-a|. \tag{12.476}$$

91. Définition 11.172.

Démonstration. Considérons la fonction

$$\tau(x) = f(x) - \Big(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x + f(a) - a\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Big), \tag{12.477}$$

c'est-à-dire la fonction qui donne la distance entre f et le segment de droite qui lie $(a, f(a))$ à $(b, f(b))$. Par construction, $\tau(a) - \tau(b) = 0$, donc le théorème de Rolle s'applique à τ pour laquelle il existe donc un $c \in]a, b[$ tel que $\tau'(c) = 0$.

En utilisant les règles de dérivation, nous trouvons que la dérivée de τ vaut

$$\tau'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \tag{12.478}$$

donc dire que $\tau'(c) = 0$ revient à dire que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$, ce qu'il fallait démontrer.

La majoration est une conséquence immédiate, parce que le supremum de $|f'(x)|$ est forcément plus grand que $|f'(c)|$. □

Une généralisation pour une fonction sur un intervalle $]a, b[$ où a et b peuvent être infinis.

Théorème 12.193 (Généralisation des accroissements finis)**.**
Soient $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et f, g des fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$.

Si $a = -\infty$:

- *Nous demandons la continuité sur $]-\infty, b]$ et la dérivabilité sur $]-\infty, b[$.*
- *Nous notons $f(a)$ la limite $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, et nous supposons qu'elle est finie.*

Mêmes conventions si $b = +\infty$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\big(f(b) - f(a)\big)g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(c). \tag{12.479}$$

Démonstration. Nous posons

$$h(t) = \big(g(b) - g(a)\big)f(t) - \big(f(b) - f(a)\big)g(t). \tag{12.480}$$

Nous avons $\lim_{t\to a} h(t) = \lim_{t\to b} h(t)$, de telle sorte que le théorème de Rolle généralisé 12.190 s'applique et il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$. Pour ce c nous avons

$$0 = h'(c) = \big(f(b) - f(a)\big)g'(c) - \big(g(b) - g(a)\big)f'(c), \tag{12.481}$$

et donc

$$\big(f(b) - f(a)\big)g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(c). \tag{12.482}$$

□

12.18.2 Règle de l'Hospital

Proposition 12.194 (Règle de l'Hospital pour $\frac{0}{0}$[336])**.**
Soient des fonctions f, g dérivables sur $]a, b[$ et dont la limite en a est nulle. Si g' ne s'annule pas sur $]a, b[$ et si

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \tag{12.483}$$

alors

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell. \tag{12.484}$$

Ici $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$, et les hypothèses garantissent l'existence de la limite (12.484).

Démonstration. Soit $x \in]a, b[$. Les fonctions f et g sont dérivables sur $]a, x[$ et continues sur $[a, x]$, de telle sorte que le théorème 12.193 s'applique et nous avons $c_x \in]a, x[$ tel que

$$\big(f(x) - f(a)\big)g'(c_x) = \big(g(x) - g(a)\big)f'(c_x). \tag{12.485}$$

Nous nous souvenons de ce que signifient les notations dans le théorème : les notations $f(a)$, $f(x)$, $g(a)$ et $g(x)$ désignent en réalité les limites. Donc dans (12.485), nous avons $f(a) = g(a) = 0$.

D'autre part nous avons $g(x) \neq g(a)$, sinon le théorème de Rolle 12.190 annulerait g' quelque part dans $]a, x[$. Nous pouvons donc réécrire (12.485) sous la forme

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}. \tag{12.486}$$

Mais $\lim_{x\to a^+} c_x = a$ parce que $c_x \in]a, x[$. Donc la limite du membre de droite de (12.486) lorsque $x \to a^+$ existe et vaut ℓ. La même limite à gauche doit alors exister et valoir la même valeur. □

Proposition 12.195 (L'Hospital pur $\frac{\infty}{\infty}$)**.**
Soient f et g deux fonctions

(1) dérivables sur $]a, b[$,

(2) dont les limites en a sont toutes deux ∞,

(3) $g' \neq 0$ sur $]a, b[$.

(4)
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \bar{\mathbb{R}}. \tag{12.487}$$

Alors
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell. \tag{12.488}$$

Cette dernière égalité signifie « la limite existe et vaut ℓ ».

Démonstration. Soit un intervalle $]x, y[$ strictement inclus dans $]a, b[$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Par le théorème des accroissements finis généralisés 12.193 il existe $c \in]x, y[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{12.489}$$

Notons que le dénominateur à gauche n'est pas nul à cause du théorème de Rolle et de l'hypothèse que g' ne s'annule pas sur $[x, y]$. Nous isolons $f(x)$:

$$f(x) = \frac{f'(c)}{g'(c)}\Big(g(x) - g(y)\Big) + f(y). \tag{12.490}$$

Avant de diviser par $g(x)$ nous devons prendre quelques précautions. Soit V, un voisinage de ℓ[92]. Vu la limite (12.487), il existe $y \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f'(t)}{g'(t)} \in V \tag{12.491}$$

pour tout $t \in]a, y[$. Nous utilisons ici avec subtilité le fait que ces intervalles sont une base de la topologie autour de ∞. Maintenant $f(y)$ et $g(y)$ sont fixés et sont des nombres réels. Vu que $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ nous pouvons choisir $r < y$ tel que nous ayons simultanément

(1) $g(x) \neq 0$ sur $]a, r[$,

92. Vous savez ce que signifie un « voisinage de ∞ » ? Allez voir la définition 12.27.

(2)
$$\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| \leqslant \epsilon \tag{12.492}$$
et
$$\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| \leqslant \epsilon \tag{12.493}$$
pour tout $x \in \,]a, r[$.

Nous sommes maintenant armés de y et r satisfaisant tout cela et nous pouvons traiter avec la formule (12.490) en ne la considérant que pour $x \in \,]a, r[$. Soit $x \in \,]a, r[$; il existe $c_x \in \,]a, x[$ tel que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}. \tag{12.494}$$

Nous avons :

(1) $\lim_{x\to a^+} c_x = a$,

(2)
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell, \tag{12.495}$$

(3)
$$\lim_{x\to a^+} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) = 1, \tag{12.496}$$

(4) $\lim_{x\to a^+} \frac{f(y)}{g(x)} = 0$.

Donc chaque partie du membre de droite de (12.494) a une limite bien déterminée pour $x \to a^+$. Les règles de calcul s'appliquent et nous avons

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \times 1 + 0 = \ell. \tag{12.497}$$

□

12.18.3 Dérivée et primitive

Corolaire 12.196.
Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$ telle que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors f est constante sur $[a, b]$.

Démonstration. Si f n'était pas constante sur $[a, b]$, il existerait un $x_1 \in]a, b[$ tel que $f(a) \neq f(x_1)$, et dans ce cas, il existerait, par le théorème des accroissements finis 12.192, un $c \in]a, x_1[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} \neq 0, \tag{12.498}$$

ce qui contredirait les hypothèses. □

Corolaire 12.197.
Soient f et g, deux fonctions dérivables sur $[a, b]$ telles que

$$f'(x) = g'(x) \tag{12.499}$$

pour tout $x \in [a, b]$. Alors il existe un réel C tel que $f(x) = g(x) + C$ pour tout $x \in [a, b]$.

Démonstration. Considérons la fonction $h(x) = f(x) - g(x)$, dont la dérivée est, par hypothèse, nulle. L'annulation de la dérivée entraine par le corolaire 12.197 que h est constante. Si $h(x) = C$, alors $f(x) = g(x) + C$, ce qu'il fallait prouver. □

Définition 12.198.
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et une fonction $f\colon I\to\mathbb{R}$. La fonction $F\colon I\to\mathbb{R}$ est une ***primitive*** *de f si F est dérivable sur I et si $F'(x)=f(x)$ pour tout x dans I.*

Exprimé en termes des primitives, le corolaire 12.197 signifie que

Corolaire 12.199.
Si F et G sont deux primitives de la même fonction f sur un intervalle, alors il existe une constante C pour laquelle $F(x)=G(x)+C$.

Cela signifie qu'il n'y a, en réalité, pas des milliards de primitives différentes à une fonction. Il y en a essentiellement une seule, et puis les autres, ce sont juste les mêmes, mais décalées d'une constante.

Remarque 12.200.
L'hypothèse de se limiter à un intervalle est importante parce que si on considère la fonction sur deux intervalles disjoints, nous pouvons choisir la constante indépendamment dans l'un et dans l'autre. Par exemple la fonction

$$F(x)=\begin{cases} \ln(x)+1 & \text{si } x>0\\ \ln(x)-7 & \text{si } x<0\end{cases} \tag{12.500}$$

est une primitive de $\frac{1}{x}$ sur l'ensemble $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Certains ne s'en privent pas. Le logiciel Sage par exemple fait ceci :

```
sage: f(x)=1/x
sage: F=f.integrate(x)
sage: A=F(x)-F(-x)
sage: A.full_simplify()
I*pi
```

En réalité lorsque $x>0$, Sage définit $\ln(-x)=\ln(x)+i\pi$. Cela a une certaine logique parce que $\ln(-1)=i\pi$ (du fait que $e^{i\pi}=-1$), mais si on ne le sait pas, ça peut étonner.

12.201.
Il existe plusieurs primitives à une fonction donnée. En physique, la constante arbitraire est souvent fixée par une condition initiale, comme nous le verrons dans la section 42.1.

12.19 Fonctions de plusieurs variables

La physique, et les sciences en général, regorgent de fonctions à plusieurs variables.

Accélération centripète [93] Si une masse m tourne sur un cercle, elle subira une accélération dirigée vers l'intérieur égale à

$$F(v,r)=\frac{mv^2}{r} \tag{12.501}$$

où r est le rayon du cercle et v est la vitesse.

Pression dans un gaz Si on a n moles de gaz dans un volume V a une température T, alors la pression sera donnée par la fonction de trois variables

$$p=\frac{nRT}{V} \tag{12.502}$$

où R est la constante des gaz parfaits.

93. Appelez la « centrifuge » si vous voulez ; ça ne me fait ni chaud ni froid.

En mathématique, on peut inventer de nombreuses fonctions de plusieurs variables. La fonction

$$f(x,y) = x^2 + xy\cos(x^2 + y^3) \tag{12.503}$$

est définie sur $\mathbb{R}^2$. La fonction

$$f(x,y,z) = \frac{x+y-2z}{1-x^2-y^2-z^2} \tag{12.504}$$

est définie sur $\mathbb{R}^3$ moins la sphère unité $\{x^2+y^2+z^2=1\}$.

Consacrons nous à l'étude des fonctions de plusieurs variables, en donnant tout d'abord quelques indications sur comment «dessiner» une telle fonction. Vous connaissez déjà la définition de graphe pour une fonction f d'une seule variable à valeurs dans $\mathbb{R}$: c'est l'ensemble des points du plan de la forme $(x, f(x))$. Vous voyez que cet ensemble n'est pas vraiment un gros morceau de $\mathbb{R}^2$ parce que son intérieur est vide : il y a une seule valeur de f qui correspond au point x, donc une boule de $\mathbb{R}^2$ centrée en $(x, f(x))$ de n'importe quel rayon contient toujours des points qui ne font pas partie du graphe de f.

Nous voulons donner une définition assez générale pour le graphe d'une fonction.

Définition 12.202.
Soit f une fonction de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$. Le ***graphe*** *de f est la partie de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ de la forme*

$$\operatorname{Graph} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \,|\, y = f(x)\}. \tag{12.505}$$

Cette définition se spécialise de la façon suivante dans les cas communs. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$. Le graphe de f est la partie de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ donné par

$$\operatorname{Graph} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \,|\, y = f(x)\}. \tag{12.506}$$

Et pour les fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$\operatorname{Graph} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } z = f(x,y)\}. \tag{12.507}$$

C'est cette définition qu'il faut garder à l'esprit lorsqu'on travaille sur des dessins en trois dimensions.

Si f est une fonction de deux variables indépendantes x et y à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors un point dans le graphe de f est un point $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$z = f(x,y), \tag{12.508}$$

ou encore, un point de la forme

$$\big(x, y, f(x,y)\big). \tag{12.509}$$

Nous avons parfois besoin de donner des représentations graphiques d'une fonction. Nous pouvons, par exemple, penser à la fonction qui associe à un point de la Terre, son altitude. Lorsqu'on part pour une promenade en montagne on a envie de connaitre le graphe de cette fonction qui correspond en fait à la surface de la montagne. Bien sûr, nous ne voulons pas amener avec nous un modèle en 3D de la montagne, donc il nous faut une méthode efficace pour projeter le graphe de f sur le plan x-y tout en gardant les informations fondamentales. Pour cela nous avons besoin de deux définitions (à ne pas confondre !)

Définition 12.203.
Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et soit c dans $\mathbb{R}$. La ***z-section*** *de* Graph f *à la hauteur c est donné par*

$$S_c^z = \{(x,y,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(x,y) = c\}.$$

Définition 12.204.
Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et soit c dans $\mathbb{R}$. La ***courbe de niveau*** *de f à la hauteur c est l'ensemble*

$$N_c = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, f(x_1, \ldots, x_n) = c\}. \tag{12.510}$$

On peut représenter la fonction f d'une façon très précise en traçant quelques-unes de ses courbes de niveau. Dans la suite, on pourra considérer aussi les x-sections et les y-sections du graphe d'une fonction de deux variables. La x-section de $\operatorname{Graph} f$ à la hauteur a est

$$S_a^x = \{(a, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(a, y) = z\}.$$

Comme vous avez peut être déjà compris, S_a^x est le graphe de la fonction de y qu'on obtient de f en fixant $x = a$. Cette fonction est appelée x-section de f pour $x = a$.

Certaines surfaces dans $\mathbb{R}^3$ sont le graphe d'une fonction.

Exemple 12.205.
Quelques graphes importants.

Un plan non vertical Tout plan dans $\mathbb{R}^3$ peut être décrit par une équation de la forme

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = r,$$

où, (x_0, y_0, z_0) est vecteur dans $\mathbb{R}^3$, et a, b, c et r sont des nombres réels. Si $c \neq 0$ alors le plan n'est pas vertical et on peut dire qu'il est le graphe de la fonction

$$P(x, y) = \frac{r + cz_0 - a(x - x_0) - b(y - y_0)}{c},$$

quitte à choisir des nouvelles constantes s, t, q,

$$P(x, y) = sx + ty + q.$$

Un paraboloïde elliptique Pour tous α et β dans $\mathbb{R}$ les graphes des fonctions

$$PE_1(x, y) = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}$$

ou de la fonction

$$PE_2(x, y) = -\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}$$

sont des paraboloïdes elliptiques. Le premier est contenu dans le demi-espace $z \geqslant 0$, l'autre dans $z \leqslant 0$. Le nom de cette surface vient de la forme de ses sections. En fait toutes sections S_c^z sont des ellipses, alors que les sections S_a^x et S_b^y sont des paraboles.

Un paraboloïde hyperbolique (selle) Pour tous α et β dans $\mathbb{R}$ les graphes des fonctions

$$PH_1(x, y) = \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}$$

ou de la fonction

$$PH_2(x, y) = -\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}$$

sont des paraboloïdes hyperboliques. Remarquez que les sections S_c^z de ce graphe sont des hyperboles, alors que les sections S_a^x et S_b^y sont des paraboles.

Une demi-sphère La fonction $S^+(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ a pour graphe la demi-sphère supérieure centrée en l'origine et de rayon R. Le dernier de ces exemples nous signale une chose très importante : une sphère entière n'est pas le graphe d'une fonction de x et y. Par contre, une demi-sphère est bien le graphe de la fonction $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

L'équation que nous utilisons pour décrire une sphère de rayon R centrée en l'origine est

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Donc, à chaque point (x, y) dans le disque $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ (notez que ce disque est contenu dans la section S_0^z), on peut associer deux valeurs de z : $z_1 = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ et $z_2 = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Par définition, une fonction n'associe qu'une seule valeur à chaque point de son domaine, d'où l'impossibilité de décrire cette sphère comme le graphe d'une fonction de x et y.

$\triangle$

Considérons la fonction $Sp\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ qui associe à (x, y, z) la valeur $x^2 + y^2 + z^2$. La sphère de rayon R centrée en l'origine est l'ensemble de niveau N_{R^2} de Sp. L'ensemble de niveau N_0 de Sp est l'origine, et tous les ensembles de niveau de hauteur négative sont vides. La même chose est vraie pour les ellipsoïdes centrées en l'origine avec les axes x, y et z comme axes principaux et comme longueurs de demi-axes a, b et c. Voici la fonction dont il sont les ensembles de niveau

$$El(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

Exemple 12.206.
Des ensembles de niveau importants.

Tout graphe Le graphe de toute fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ peut être considéré comme l'ensemble de niveau zéro de la fonction $F(x, y, z) = z - f(x, y)$.

Hyperboloïdes Les hyperboloïdes, comme les ellipsoïdes, sont une famille d'ensemble de niveau. En particulier, nous considérons des hyperboloïdes dont l'axe de symétrie est l'axe des z et qui sont symétriques par rapport un plan x-y. Une fois que les paramètres a, b et c sont fixés la fonction que nous intéresse est

$$Hyp(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}.$$

Les ensembles de niveau N_d pour $d > 0$ sont connexes, on les appelle *hyperboloïdes à une feuille*. L'ensemble de niveau N_0 est un *cône (elliptique)*, les deux moitiés du cône se touchent en l'origine. Enfin, les ensembles de niveau N_d pour $d < 0$ ne sont pas connexes et pour cette raison on les appelle *hyperboloïdes à deux feuilles*.

$\triangle$

12.19.1 Graphes de fonctions à plusieurs variables

Le **graphe** d'une fonction de deux variables $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est l'ensemble

$$\Big\{\big(x, y, f(x, y)\big) \text{ tel que } (x, y) \in D\Big\} \subset \mathbb{R}^3. \tag{12.511}$$

Ce graphe est une surface dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple 12.207.
Tracer le graphe de la fonction

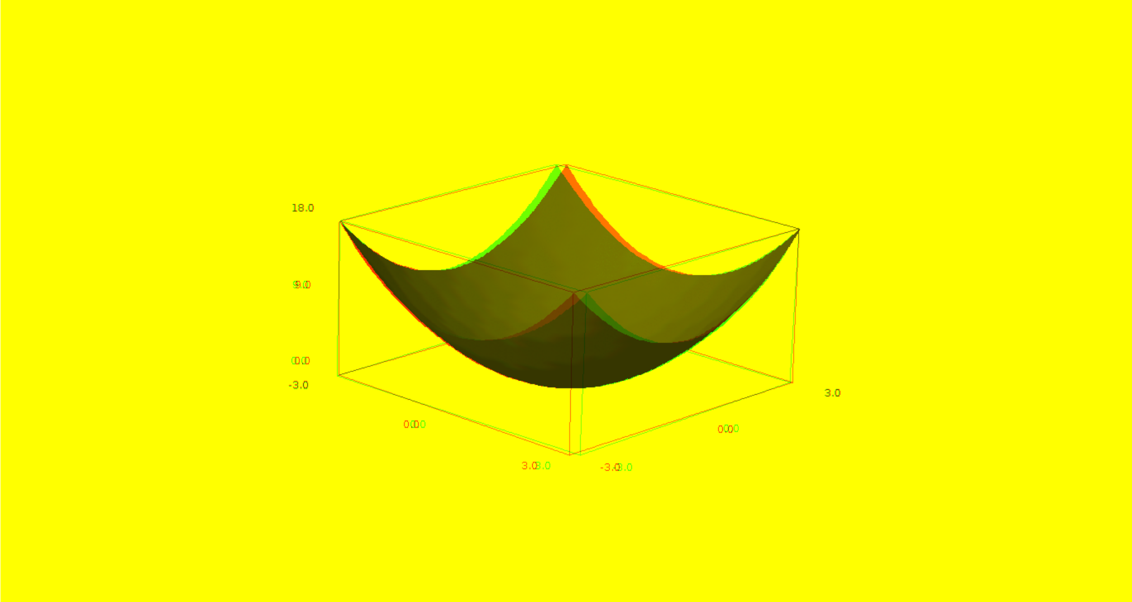
$$(x, y) \mapsto x^2 + y^2. \tag{12.512}$$

Le plus simple est de demander à Sage de nous fournir une représentation 3D

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.6.1, Release Date: 2011-01-11                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: f(x,y)=x**2+y**2
sage: plot3d(f,(x,-3,3),(y,-3,3))
```

Voici ce que cela donne[94] : (à regarder avec des lunettes bleues et rouges) :

94. En vrai, ce que Sage donne est un objet qu'on peut même faire bouger.



À part que l'ordinateur l'a dit, est-ce qu'on peut comprendre pourquoi le graphe de la fonction $x^2 + y^2$ ressemble à un bol ? En coordonnées cylindriques, le graphe s'écrit

$$z = r^2. \tag{12.513}$$

Donc il apparaît que plus on s'éloigne du point $(0, 0)$ dans le plan XY, plus le graphe va monter. Et il monte à quelle vitesse ? Il monte à la vitesse r^2. Il s'agit donc de dessiner la fonction $z = r^2$ dans le plan et de la « faire tourner ». △

12.19.2 Courbes de niveau

Une technique utile pour se faire une idée de la forme d'une fonction en trois dimensions est de tracer les **courbes de niveau**. La courbe de niveau de hauteur h est la courbe dans le plan donnée par l'équation

$$f(x, y) = h. \tag{12.514}$$

Exemple 12.208.
Dessinons par exemple les courbes de niveau de la fonction

$$f(x, y) = x + y + 2. \tag{12.515}$$

La courbe de niveau h est donnée par l'équation $x + y + 2 = h$, c'est-à-dire

$$y(x) = -x + h - 2. \tag{12.516}$$

Par conséquent la courbe de niveau de hauteur 0 est $y = -x - 2$, celle de hauteur 5 est $y = -x + 3$, etc.

Nous pouvons également nous aider de Sage pour ce faire :

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.6.1, Release Date: 2011-01-11                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: f(x,y)=x+y+2
sage: var('h')
h
sage: niveau(h,x)=solve(f(x,y)==h,y)[0].rhs()
sage: g1(x)=niveau(1,x)
sage: g1
x |--> -x - 1
```

Ici la fonction `g1` est la courbe de niveau 1.

Si on veut faire tracer une courbe de niveau, Sage peut le faire :

```
sage: implicit_plot(f(x,y)==1,(x,-3,3),(y,-4,4))
```

Cela tracera la courbe de niveau $h = 1$ dans la partie du plan $x \in [-3, 3]$ et $y \in [-4, 4,]$.

$\triangle$

Il est bien entendu possible de créer automatiquement 50 courbes de niveau et de demander de les tracer toutes sur le même graphe.

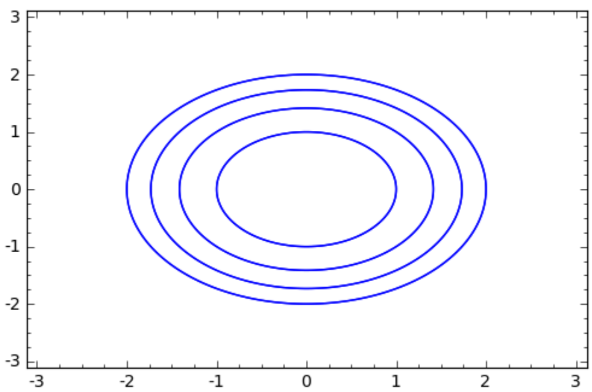
```
#! /usr/bin/sage -python
# -*- coding: utf8 -*-

from sage.all import *

var('x,y')
f=x**2+y**2
G=Graphics()
a=3
for i in range(0,5):
  G=G+implicit_plot(f==i,(x,-a,a),(y,-a,a))
show(G)
```

tex/frido/courbeNiveau.py

Le résultat est :



Notez que les courbes sont censées être des cercles : les axes X et Y n'ont pas la même échelle.

Exemple 12.209.
Un exemple plus riche en enseignements est celui de la fonction

$$f(x, y) = x^2 - y^2. \tag{12.517}$$

La courbe de niveau h est donnée par l'équation $x^2 - y^2 = h$.

Commençons par $h = 0$. Dans ce cas nous avons $(x + y)(x - y) = 0$ et par conséquent les courbes de niveau de hauteur zéro sont les deux droites $x + y = 0$ et $x - y = 0$.

Voyons ensuite la courbe de niveau $h = 1$. Cela est l'équation $x^2 - y^2 = 1$, c'est-à-dire

$$y(x) = \pm\sqrt{x^2 - 1}. \tag{12.518}$$

C'est une fonction qui n'est définie que pour $|x| \geqslant 1$. Avec $x = 1$ nous avons $y = 1$. Ensuite, lorsque x grandit, y grandit également, mais la courbe ne peut pas croiser la courbe de niveau $h = 0$. Donc,

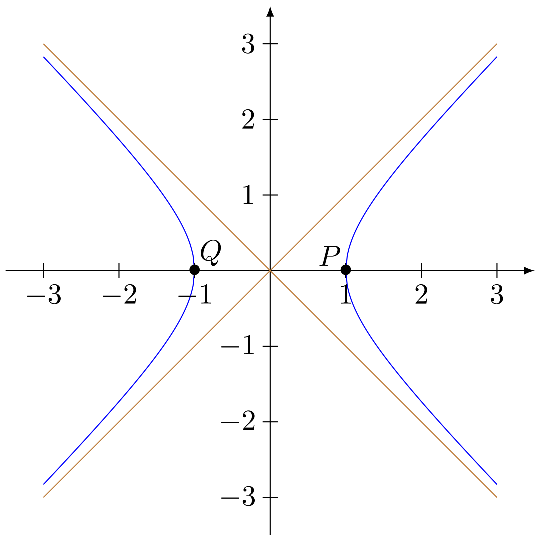


FIGURE 12.6 – La courbe de niveau $h = 1$ de $x^2 - y^2$. Notez qu'elle est en deux morceaux.

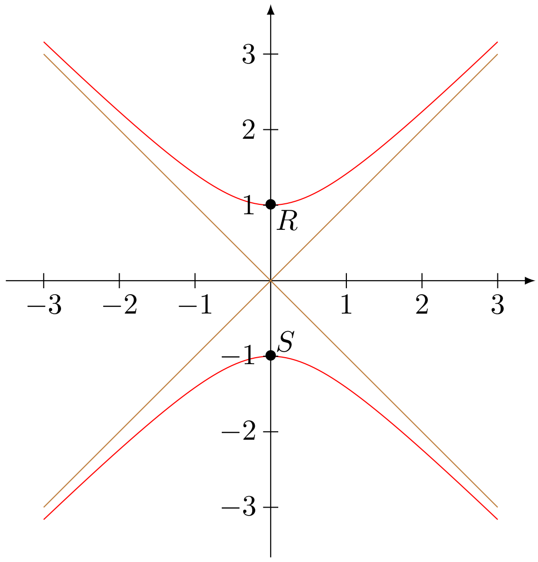


FIGURE 12.7 – La courbe de niveau $x^2 - y^2 = -1$.

suivant les notations de la figure 12.6, la courbe de niveau « part » de P et doit monter sans croiser les diagonales.

En ce qui concerne la courbe de niveau $h = -1$, elle correspond à la courbe $y = \pm\sqrt{1+x^2}$ qui est définie pour tous les $x \in \mathbb{R}$. Le même raisonnement que précédemment nous amène à la figure 12.7. $\triangle$

Une autre façon de voir les courbes de niveau est de dire que la courbe de niveau de hauteur h est la projection dans le plan XY de la section du graphe de f par le plan $z = h$.

On peut également définir le graphe de fonctions de trois (ou plus) variables. Le graphe de la fonction $f\colon D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est l'ensemble

$$\big\{\big(x, y, z, f(x, y, z)\big) \text{ tel que } (x, y, z) \in D\big\} \subset \mathbb{R}^4. \tag{12.519}$$

De tels graphes ne peuvent pas être représentés sur une feuille de papier. Il est toutefois possible de définir les ensembles de niveaux :

$$E_h = \big\{(x, y, z) \in D \text{ tel que } f(x, y, z) = h\big\}. \tag{12.520}$$

Ce sont des surfaces dans $\mathbb{R}^3$ que l'on peut dessiner.

Exemple 12.210.
Les surfaces de niveau de la fonction $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sont des sphères. Il n'y a pas de surfaces de niveau pour les « hauteurs » négatives. △

Exemple 12.211.
Considérons la fonction $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$. En coordonnées cylindriques, cette fonction s'écrit

$$f(r,\theta,z) = r^2 - z^2. \tag{12.521}$$

La surface de niveau 0 est donnée par l'équation $r = |z|$. Cela fait un cercle à chaque hauteur, dont le rayon grandit linéairement avec la hauteur ; le tout est donc un cône. C'est d'ailleurs le cône obtenu par rotation de la courbe de niveau $h = 0$ que nous avions obtenu pour la fonction $x^2 - y^2$.

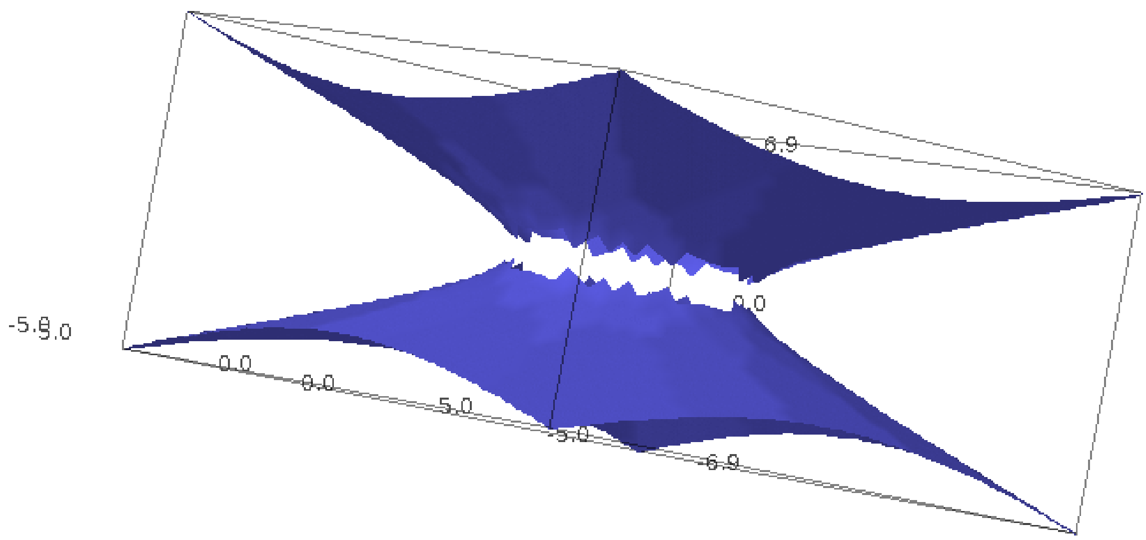
En ce qui concerne les ensembles de niveau positifs, ils sont donnés par

$$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - h}. \tag{12.522}$$

Notez qu'ils ne sont pas définis pour $r \geqslant h$. Cela pose un petit problème quand on veut le tracer à l'ordinateur :

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.6.1, Release Date: 2011-01-11                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: var('x,y')
(x, y)
sage: f(x,y)=sqrt(x**2+y**2-3)
sage: F=plot3d(f(x,y),(x,-5,5),(y,-5,5))
sage: G=plot3d(-f(x,y),(x,-5,5),(y,-5,5))
sage: F+G
```

Le résultat est [95] :



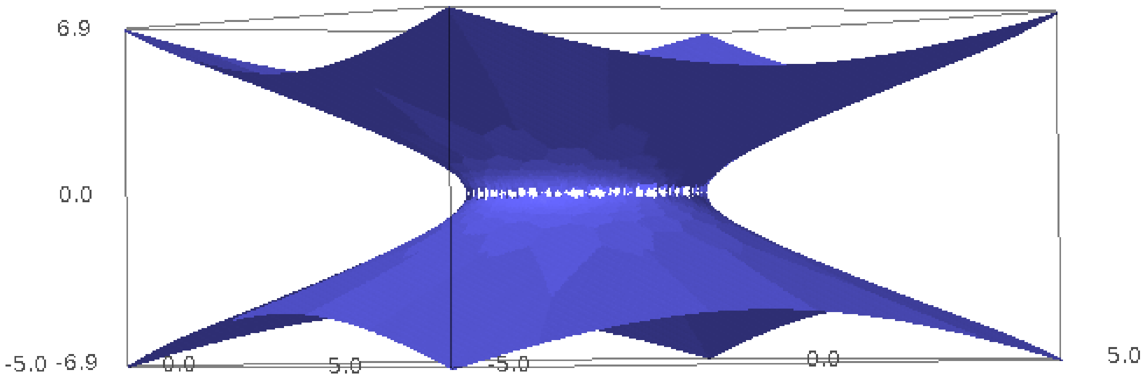
On voit qu'il y a un grand trou au centre correspondant aux z proches de zéro. Or d'après l'équation, il n'en est rien : en $z = 0$ il y a bel et bien tout un cercle. Afin d'obtenir une meilleur image, il faut demander de tracer avec un maillage plus fin :

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.6.1, Release Date: 2011-01-11                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
```

95. Encore une fois : ça donne mieux à l'écran, et vous pouvez le faire bouger ; je vous encourage à le faire !

```
----------------------------------------------------------------------
sage: var('x,y')
(x, y)
sage: f(x,y)=sqrt(x**2+y**2-3)
sage: F=plot3d(f(x,y),(x,-5,5),(y,-5,5),plot_points=300)
sage: G=plot3d(-f(x,y),(x,-5,5),(y,-5,5),plot_points=300)
sage: F+G
```

Le temps de calcul est un peu plus long, mais le résultat est meilleur :



$\triangle$

12.20 Limites à plusieurs variables

Prenons une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Nous disons que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \tag{12.523}$$

lorsque $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta$ tel que $\|x - x_0\| \leqslant \delta$ implique $|f(x) - l| \leqslant \epsilon$.

Remarquez qu'ici, $x \in \mathbb{R}^n$, et sachez distinguer $\|.\|$, la norme dans $\mathbb{R}^n$ de $|.|$ qui est la valeur absolue dans $\mathbb{R}$. Une autre façon d'exprimer cette définition est que l'ensemble des valeurs atteintes par f dans une boule de rayon δ autour de x_0 n'est pas très loin de l. Nous définissons donc

$$E_\delta = \{f(x) \text{ tel que } x \in B(x_0, \delta)\}. \tag{12.524}$$

Notez que si f n'est pas définie en x_0, il n'y a pas de valeurs correspondantes au centre de la boule dans E_δ. Ceci est évidemment la situation générique lorsqu'il y a une indétermination à lever dans le calcul de la limite. Nous avons alors

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \tag{12.525}$$

lorsque $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta$ tel que

$$\sup\{|v - l| \text{ tel que } v \in E_\delta\} \leqslant \epsilon. \tag{12.526}$$

Une façon classique de montrer qu'une limite n'existe pas, est de prouver que, pour tout δ, l'ensemble E_δ contient deux valeurs constantes. Si par exemple $0 \in E_\delta$ et $1 \in E_\delta$ pour tout δ, alors aucune valeur de l (même pas $l = \pm\infty$) ne peut satisfaire à la condition (12.526) pour toute valeur de ϵ.

Nous laissons à la sagacité de l'étudiant le soin d'adapter tout ceci pour le cas $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$.

La proposition suivante semble évidente, mais nous sera tellement utile qu'il est préférable de l'expliciter :

Proposition 12.212.
Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de domaine D, $a \in \operatorname{Adh}(D)$ et un voisinage V de a. Nous supposons que $V \cap D$ s'écrive comme une intersection finie :

$$V \cap D = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$$

telle que $a \in \operatorname{Adh} A_i$ pour tout $i \leqslant k$. Alors, la limite

$$\lim_{x \to a} f(x) \tag{12.527}$$

existe et vaut $b \in \mathbb{R}$ si et seulement si chacune des limites

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A_i}} f(x) \tag{12.528}$$

existe et vaut b.

Démonstration. On sait déjà que si la limite de $f : D \to \mathbb{R}$ existe, alors toute restriction à A_i admet la même limite[96]. Il suffit donc de prouver la réciproque.

Fixons provisoirement un entier i entre 1 et k ainsi que $\epsilon > 0$. Vu que $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A_i}} f(x) = b$, il existe $\delta_i > 0$ tel que si $x \in A_i$ et si $0 < |x - a| < \delta_i$, alors

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon. \tag{12.529}$$

Quitte à prendre δ_i un peu plus petit, nous supposons que $V \subset B(a, \delta_i)$.

Nous posons $\delta = \min\{\delta_i\}_{i=1,\ldots,k}$, et nous considérons $x \in D$ tel que $0 < |x - a| < \delta$. Nous avons alors

(1) $x \in V \cap D$,

(2) il existe i tel que $x \in A_i$.

Ce x est donc un élément de A_i vérifiant $0 < |x-a| < \delta \leqslant \delta_i$. Il vérifie donc (12.529) : $|f(x)-f(a)| < \epsilon$.

Cela prouve la limite (12.527). □

Exemple 12.213. (1) Pour qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admette une limite en $a \in \mathbb{R}$, il faut et il suffit qu'elle y admette une limite à droite et une limite à gauche qui soient égales. Cela est une application de la proposition 12.212 avec $\mathbb{R} =]-\infty, a[\cup]a, \infty[$.

(2) Une suite (x_k) admet une limite si et seulement si les sous-suites (x_{2k}) et (x_{2k+1}) convergent vers la même limite. Ceci n'est pas une application directe de la proposition, mais la teneur est la même.

△

Lemme 12.214 ([1]).
Soient deux espaces vectoriels E et F. Soit une fonction $f \colon \mathbb{R} \to F$ telle que $\lim_{t \to 0} f(t) = y \in F$. Nous posons

$$\begin{aligned} \varphi \colon E &\to F \\ h &\mapsto f(\|h\|). \end{aligned} \tag{12.530}$$

Alors φ admet une limite pour $h \to 0$ et elle est donnée par

$$\lim_{h \to 0} \varphi(h) = \lim_{t \to 0} f(t). \tag{12.531}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Il existe δ tel que si $t < \delta$ alors $\|f(t) - y\|_F < \epsilon$. Si $\|h\| < \delta$ nous avons

$$\|\varphi(h) - y\| = \|f(\|h\|) - y\| < \epsilon. \tag{12.532}$$

Donc c'est bon. □

96. C'est une conséquence de la caractérisation séquentielle de la continuité 7.175.

Voici, dans le même ordre d'idée, un autre résultat qui permet de réduire le nombre de variables dans une limite lorsque la fonction ne dépend pas de certaines variables.

Lemme 12.215 ([1]).
Soit une fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vérifiant*

$$\lim_{t\to a} g(t) = \ell. \tag{12.533}$$

Alors pour tout $b \in \mathbb{R}$*, la fonction*

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto g(x) \end{aligned} \tag{12.534}$$

vérifie

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ x\neq a}} f(x,y) = \ell. \tag{12.535}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse sur la limite de g en a, il existe $\delta > 0$ tel que $0 < |t-a| < \delta$ implique $|g(t) - \ell| < \epsilon$.

Attention : passage subtil[97]. Si $0 < \|(x,y) - (a,b)\| < \delta$, alors nous avons évidemment aussi $|x-a| < \delta$, mais pas spécialement $0 < |x-a| < \delta$ comme le requis pour utiliser la limite de g.

Dans le calcul de la limite restreinte à $x \neq a$, les points qui interviennent sont les valeurs de (x,y) dans $B\big((a,b),\delta\big)\setminus\{x=a\}$. Or pour celles-là nous avons bien $0 < |x-a| < \delta$. Le calcul suivant fonctionne donc :

$$|f(x,y) - \ell| = |g(x) - \ell| < \epsilon. \tag{12.536}$$

□

Exemple 12.216.
Pourquoi prendre la limite $(x,y) \to (a,b)$ avec $x \neq a$ dans l'énoncé du lemme 12.215 ? Imaginons la fonction

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{12.537}$$

Dans ce cas, le graphe de la fonction $f(x,y) = g(x)$ est tout plat sauf la ligne $x = 0$ qui est en hauteur. Nous avons donc $f(0,t) = 1$ pour tout t et donc nous n'avons pas $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$: tout voisinage de $(0,0)$ contient des points (x,y) tels que $f(x,y) = 1$ et des points (x,y) tels que $f(x,y) = 0$. △

12.217.
Il existe de nombreuses façons de calculer des limites à plusieurs variables. Plus nous connaîtrons de mathématiques, plus nous aurons de techniques à notre disposition. Nous allons tout de suite voir quelques méthodes. Voir le thème 65 pour plus de techniques et d'exemples.

12.20.1 Caractérisation de la limite par les suites

Exemple 12.218.
Considérons la fonction

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \tag{12.538}$$

et remarquons que, quelle que soit la valeur de y, cette fonction est nulle lorsque $x = 0$. De la même manière, nous voyons que si $x = y$, alors la fonction vaut[98] $\frac{1}{2}$.

Il est impossible que la fonction ait une limite en $(0,0)$ parce qu'on ne peut pas trouver un ℓ dont on s'approche à la fois en suivant la ligne $x = 0$ et la ligne $x = y$.

Deux autres chemins avec encore deux autres valeurs sont dessinés sur la figure 12.8.

Cet exemple pourra être formalisé en utilisant le théorème 12.219. Voir l'exemple 12.220. △

97. Je rejette déjà en bloc et d'un revers de main toute tentative de dire « la limite épointée, c'est mieux ». Voir aussi l'exemple 12.216.

98. En fait ce que nous sommes en train de faire est de poser $\theta = \pi/2$ et $\theta = \pi/4$ dans (18.768).

Théorème 12.219 (Caractérisation de la limite par les suites)**.**
Une fonction $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ admet une limite ℓ en un point d'accumulation a de D si et seulement si pour toute suite (x_n) dans $D\backslash\{a\}$ convergente vers a, la suite $\big(f(x_n)\big)$ dans $\mathbb{R}^n$ converge vers ℓ.

Démonstration. Supposons d'abord que la fonction ait une limite ℓ lorsque $x \to a$, et considérons une suite (x_n) dans $D\backslash\{a\}$ convergente vers a. Nous devons montrer que la suite $y_n = f(x_n)$ converge vers ℓ, c'est-à-dire que si nous choisissons $\varepsilon > 0$ nous devons montrer qu'il existe un N tel que $n > N$ implique $\|y_n - \ell\| = \|f(x_n) - \ell\| < \varepsilon$.

Nous avons deux hypothèses. La première est la convergence de la fonction et la seconde est la convergence de la suite (x_n). L'hypothèse de convergence de la fonction nous dit que (le ε a déjà été choisi dans le paragraphe précédent)

$$\exists\delta \text{ tel que } 0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon. \tag{12.539}$$

Une fois choisi ce δ qui « va avec » le ε qui a été choisi précédemment, la définition de la convergence de la suite nous enseigne que

$$\exists N \text{ tel que } n > N \Rightarrow \|x_n - a\| < \delta. \tag{12.540}$$

Récapitulons ce que nous avons fait. Nous avons choisi un ε, et puis nous avons construit un N. Lorsque $n > N$, nous avons $\|x_n - a\| < \delta$. Mais alors, par construction de ce δ, nous avons $\|f(x_n) - \ell\| < \varepsilon$. Au final, $n > N$ implique bien $\|y_n - \ell\| < \varepsilon$, ce qu'il nous fallait.

Nous supposons maintenant que la fonction f *ne* converge *pas* vers ℓ, et nous allons construire une suite d'éléments x_n qui converge vers a sans que $(y_n) = (f(x_n))$ ne converge vers ℓ. La fonction f vérifie la condition (12.70). Nous prenons donc un ε tel que $\forall\delta$, il existe un x qui vérifie *en même temps* les deux conditions

$$\begin{cases} 0 < \|x - a\| < \delta & (12.541a)\\ \|f(x) - \ell\| > \varepsilon. & (12.541b)\end{cases}$$

Un tel x existe pour tout choix de δ. Choisissons un n arbitraire et $\delta = \frac{1}{n}$. Nous nommons x_n le x correspondant à ce choix de n. La suite (x_n) ainsi construite converge vers a parce que

$$\|x_n - a\| < \delta_n = \frac{1}{n}, \tag{12.542}$$

donc dès que n est grand, $\|x_n - a\|$ est petit. Mais la suite $y_n = f(x_n)$ ne converge pas vers ℓ parce que

$$\|f(x_n) - \ell\| > \varepsilon \tag{12.543}$$

pour tout n. La suite y_n ne s'approche donc jamais à moins d'une distance ε de ℓ. □

Exemple 12.220.
Reprenons l'exemple 12.218. Considérons les deux suites $x_n = (0, \frac{1}{n})$ et $y_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Ce sont deux suites dans $\mathbb{R}^2$ qui tendent vers $(0, 0)$. Si la fonction f convergeait vers ℓ, alors nous aurions au moins

$$\lim f(x_n) = \ell \tag{12.544a}$$

$$\lim f(y_n) = \ell, \tag{12.544b}$$

mais nous savons que pour tout n, $f(x_n) = f(0, \frac{1}{n}) = 0$ et $f(y_n) = f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$. Il n'y a donc aucun nombre ℓ qui vérifie les deux équations (12.544) parce que $\lim f(x_n) = 0$ et $\lim f(y_n) = \frac{1}{2}$. △

12.20.2 Règle de l'étau

Une première façon de calculer la limite d'une fonction est de la « coincer » entre deux fonctions dont nous connaissons la limite.

Théorème 12.221 (Règle de l'étau[337])**.**
Soit $\mathcal{O}$, un ouvert de $\mathbb{R}^m$ contenant le point a. Soient f, g et h, trois fonctions définies sur $\mathcal{O}\setminus\{a\}$. Supposons que

(1)

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x). \tag{12.545}$$

pour tout $x \in \mathcal{O}\setminus\{a\}$

(2)

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \ell. \tag{12.546}$$

Alors la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ existe et vaut ℓ.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Nous devons trouver un voisinage V de a tel que $|f(x) - \ell| < \epsilon$ pour tout $x \in V\setminus\{a\}$. Étant donné que $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \ell$, il existe un voisinage ouvert V de a tel que[99]

$$|g(x) - \ell| < \epsilon \tag{12.547a}$$
$$|h(x) - \ell| < \epsilon. \tag{12.547b}$$

pour tout $x \in V\setminus\{a\}$. Pour tout $x \neq a$ dans V, nous avons

$$\ell - \epsilon \leqslant g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) \leqslant \ell + \epsilon. \tag{12.548}$$

Donc $|f(x) - \ell| < \epsilon$, comme nous l'avions annoncé. □

Cette méthode est très pratique lorsqu'on a des fonctions trigonométriques qui se factorisent parce qu'elles sont toujours majorables par 1 ; voir l'exemple 18.68.

Exemple 12.222.
Prouver la continuité en $(0,0)$ de la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{12.549}$$

Considérons une suite $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ qui tend vers $(0,0)$. Étant donné que $\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} < 1$ pour tout x et y, nous avons

$$0 \leqslant |f(x_n,y_n)| = \left|\frac{x_n|y_n|}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}\right| \leqslant |x_n| \to 0. \tag{12.550}$$

Donc nous avons

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0), \tag{12.551}$$

ce qui prouve que la fonction est continue en $(0,0)$ par la proposition 7.117. Nous avons utilisé la règle de l'étau (théorème 12.221). △

12.223.
Nous notons $f \sim g$ pour $x \to a$ lorsque $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Cela signifie que f et g tendent vers la même limite, à la même vitesse.

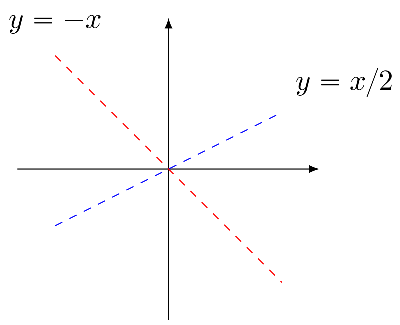


FIGURE 12.8 – Sur toute la droite $y = -x$, la fonction vaut $-1/2$, tandis que sur toute la droite $y = x/2$, elle vaut $\frac{2}{5}$. Il est donc impossible que la fonction ait une limite en $(0, 0)$, parce que dans toute boule autour de zéro, il y aura toujours un point de chacune de ces deux droites.

12.20.3 Méthode des chemins

Lorsque la limite n'existe pas, il y a une façon en général assez simple de le savoir, c'est la **méthode des chemins**.

C'est la proposition suivante qui va faire une grosse partie du travail.

Proposition 12.224 ([1]).
Soit $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et a un point d'adhérence de D. Alors nous avons

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \tag{12.552}$$

si et seulement si pour toute fonction $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ telle que $\lim_{t\to 0} \gamma(t) = a$, nous avons

$$\lim_{t \to 0} (f \circ \gamma)(t) = \ell. \tag{12.553}$$

Démonstration. En deux parties.

(i) **Sens direct** Soit une fonction $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ telles que $\lim_{t\to 0} \gamma(t) = a$. Par le théorème 12.219, il suffit de montrer que $(f \circ \gamma)(t_n) \to \ell$ pour toute suite $t_n \to 0$ dans $\mathbb{R}$.

Nous savons que la suite $n \mapsto \gamma(t_n)$ est une suite qui converge vers a. Mais l'hypothèse $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ implique que pour toute suite $x_n \to a$ nous avons $f(x_n) \to \ell$. Cela est en particulier vrai pour la suite $n \mapsto \gamma(t_n)$. Donc :

$$\lim_{n \to \infty} f\big(\gamma(t_n)\big) = \ell, \tag{12.554}$$

ce qu'il fallait prouver.

(ii) **Réciproque** Pour les mêmes raisons de caractérisation séquentielle que précédemment, il faut prouver que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$ pour tout suite $x_n \to a$.

(i) **Un chemin** Soit la fonction $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ affine par morceaux et telle que

$$\gamma\left(\frac{1}{n}\right) = x_n. \tag{12.555}$$

Nous prolongeons γ par $\gamma(t) = a$ pour $t \leqslant 0$.

(ii) $\underline{\gamma(t) \to a}$ Nous montrons que $\lim_{t\to 0} \gamma(t) = a$. Soient $\epsilon > 0$ et N tel que $x_n \in B(a, \epsilon)$ pour tout $n \geqslant N$. Si $t < \frac{1}{N}$ alors $t \in [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$ pour un certain $k > N$. Donc

$$\gamma(t) \in [\gamma(\frac{1}{k+1}), \gamma(\frac{1}{k})] \tag{12.556}$$

99. Si vous ne voyez pas comment avoir les deux conditions en même temps, prenez V_1 pour g et V_2 pour h, et considérez $V = V_1 \cap V_2$ qui sera encore un ouvert.

et donc $\gamma(t) \in [x_{k+1}, x_k]$ parce que γ est formé de ces segments de droites. Mais comme $B(a,\epsilon)$ est convexe[100], nous avons

$$\gamma(t) \in [x_{k+1}, x_k] \subset B(a,\epsilon). \tag{12.557}$$

Nous avons donc bien $\lim_{t\to 0}\gamma(t) = a$.

(iii) **Conclusion** L'hypothèse nous donne alors $\lim_{t\to 0}(f\circ\gamma)(t) = \ell$. En particulier le critère de la caractérisation séquentielle de la limite dit que

$$\lim_{n\to\infty} f\big(\gamma(\frac{1}{n})\big) = \ell, \tag{12.558}$$

ce qui signifie $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$.

□

Corolaire 12.225.
Soient $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et a un point d'accumulation de D. Si nous avons deux fonctions $\gamma_1, \gamma_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ telles que

$$\lim_{t\to 0}\gamma_1(t) = \lim_{t\to 0}\gamma_2(t) = a \tag{12.559}$$

tandis que

$$\lim_{t\to 0}(f\circ\gamma_1)(t) \neq \lim_{t\to 0}(f\circ\gamma_2)(t), \tag{12.560}$$

ou bien que l'une des deux limites n'existe pas, alors la limite de $f(x)$ lorsque $x\to a$ n'existe pas.

Corolaire 12.226.
Soient $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et a un point d'accumulation de D. Si il existe une fonction $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ avec $\gamma(0) = a$ telle que la limite $\lim_{t\to 0}(f\circ\gamma)(t)$ n'existe pas, alors la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ n'existe pas.

En ce qui concerne le calcul de limites, la méthode des chemins peut être utilisé de trois façons :

(1) Dès que l'on trouve une fonction $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ telle que $\lim_{t\to 0}(f\circ\gamma)(t) = \ell$, alors nous savons que *si la limite* $\lim_{x\to a} f(x)$ *existe*, alors cette limite vaut ℓ.

(2) Dès que l'on a trouvé deux fonctions γ_i qui tendent vers a, mais dont les limites de $\lim_{t\to 0}(f\circ\gamma_i)(t)$ sont différentes, alors la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ n'existe pas.

(3) Dès qu'on trouve une chemin le long duquel il n'y a pas de limite, alors la limite n'existe pas (corolaire 12.226).

La méthode des chemins ne permet donc pas de calculer une limite quand elle existe. Elle permet uniquement de la « deviner », ou bien de prouver que la limite n'existe pas.

Exemple 12.227.
Soit à calculer

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}. \tag{12.561}$$

Si nous prenons le chemin $\gamma_1(t) = (t,t)$, nous avons bien $\lim_{t\to 0}\gamma_1(t) = (0,0)$, et nous avons

$$\lim_{t\to 0}(f\circ\gamma_1)(t) = \lim_{t\to 0}\frac{t-t}{t+t} = 0. \tag{12.562}$$

Donc si la limite (12.561) existait, elle vaudrait obligatoirement 0. Mais si nous considérons $\gamma_2(t) = (0,t)$, nous avons

$$(f\circ\gamma_2)(t) = \frac{-t}{t} = -1, \tag{12.563}$$

donc si la limite existe, elle doit obligatoirement valoir -1. Ne pouvant être égale à 0 et à -1 en même temps, la limite (12.561) n'existe pas. △

100. C'est la proposition 8.29.

12.21 Dérivée directionnelle

Nous sommes capables de dériver une fonction de deux variables $f(x, y)$ par rapport à x et par rapport à y. C'est-à-dire que nous sommes capables de donner la variation de la fonction lorsqu'on bouge le long des axes horizontal et vertical. Il est évidemment souhaitable de parler de la variation de la fonction lorsqu'on se déplace le long d'autre droites.

Soit donc $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ un vecteur unitaire (c'est-à-dire $u_1^2 + u_2^2 = 1$), et considérons la fonction de une variable

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(a + tu_1, b + tu_2). \end{aligned} \tag{12.564}$$

La fonction φ n'est rien d'autre que la fonction f vue le long de la droite de direction donnée par le vecteur u. Nous pouvons aussi l'écrire $\varphi(t) = f(p + tu)$.

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. La façon la plus naturelle de définir une dérivée à deux variables est de considérer les **dérivées partielles** définies par

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) &= \lim_{y \to b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}. \end{aligned} \tag{12.565}$$

Ces nombres représentent la façon dont le nombre $f(x, y)$ varie lorsque soit seul x varie soit seul y varie. Les dérivées partielles se calculent de la même façon que les dérivées normales. Pour calculer $\partial_x f$, on fait « comme si » y était une constante, et pour calculer $\partial_y f$, on fait comme si x était une constante.

12.21.1 Dérivée partielle et directionnelles

Soit une fonction $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Si $n \neq 1$, la notion de *dérivée* de la fonction f n'a plus de sens puisqu'on ne peut plus parler de pente de *la* tangente au graphe de f en un point. On introduit alors quelques notions qui feront, en dimension quelconque, le même travail que la dérivée en dimension un : les dérivées directionnelles et la différentielle. Nous allons voir qu'en dimension un, la différentielle coïncide avec la dérivée.

Définition 12.228.
Soit une fonction $f\colon V \to W$ où V et W sont des espaces vectoriels normés. Soient $a \in V$ et $v \in V$. Nous posons $\varphi\colon \mathbb{R} \to W$ donnée par

$$\varphi(t) = f(a + tv). \tag{12.566}$$

*Nous disons que f admet une **dérivée suivant le vecteur** v **au point** a si la fonction φ est dérivable en a. Nous notons alors*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \varphi'(a), \tag{12.567}$$

ou alors

$$\partial_v f(a) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}. \tag{12.568}$$

*Si une base $\{e_i\}$ de V est donnée, nous notons $\partial_i f$ la dérivée de f dans la direction de e_i. La fonction $\partial_i f$ est la **dérivée partielle** de f. Dans le cas de $V = \mathbb{R}^n$, cela est souvent noté*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{d}{dt}\Big[f(a + te_i)\Big]_{t=0}. \tag{12.569}$$

Si $m = 2, 3$ on peut utiliser la notation f_x, ∂_x ou ∂_1 pour la dérivée partielle suivant e_1, f_y, ∂_y ou ∂_2 pour la dérivée partielle suivant e_2 et f_z, ∂_z ou ∂_3 pour la dérivée partielle suivant e_3. En général, nous écrivons ∂_i pour noter la dérivée partielle suivant e_i.

Des exemples faisant intervenir les fonctions trigonométriques, exponentielles et logarithme sont les exemples 18.242, 15.89.

La fonction d'une seule variable qu'on obtient à partir de f en fixant les $p-1$ variables $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_p$ et qui associe à x_i la valeur $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_p)$, est appelée x_i-ème **section** de f en $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_p$. L'$i$-ème dérivée partielle de f au point $a = (x_1, \ldots, x_m)$ est la dérivée de l'i-ème section de f au point x_i. En pratique, pour calculer les dérivées partielles d'une fonction on fait une dérivation par rapport à la variable choisie en considérant les autres variables comme des constantes.

Géométriquement, il s'agit du taux de variation instantané de f en a dans la direction du vecteur u, c'est-à-dire de la pente de la tangente dans la direction du vecteur u au graphe de f au point $(a, f(a))$.

Remarque 12.229.
De nombreuses sources parlent de dérivée **dans la direction** du vecteur v en définissant (avec une certaine raison) une **direction** dans $\mathbb{R}^m$ comme étant un vecteur de norme 1.

Ces personnes ne définissent alors $\partial_u f$ que pour $\|u\| = 1$. Pourquoi ? Le but de la dérivée directionnelle dans la direction u est de savoir à quelle vitesse la fonction monte lorsque l'on se déplace en suivant la direction u. Cette information n'aura un caractère « objectif » que si l'on avance à une vitesse donnée. En effet, si on se déplace deux fois plus vite, la fonction montera deux fois plus vite. Par convention, on demande alors d'avancer à vitesse 1.

Ici, pour être plus souple en termes de notations et de manipulations, nous définissons $\partial_u f$ pour tout u (non nul). Nous devons cependant garder en tête que le nombre $(\partial_v f)(a)$ ne peut pas être interprété comme étant une « vitesse de croissance de f en a » de façon trop sérieuse.

Cas particulier où $n = 2$:

$a = (a_1, a_2)$, $u = (u_1, u_2)$ et

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a_1, a_2) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1 + tu_1, a_2 + tu_2) - f(a_1, a_2)}{t} \tag{12.570}$$

Un cas particulier des dérivées directionnelles est la dérivée partielle. Si nous considérons la base canonique e_i de $\mathbb{R}^n$, nous notons

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial e_i}. \tag{12.571}$$

Dans le cas d'une fonction à deux variables, nous avons donc les deux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) \tag{12.572}$$

qui correspondent aux dérivées directionnelles dans les directions des axes. Ces deux nombres représentent de combien la fonction f monte lorsqu'on part de a en se déplaçant dans le sens des axes X et Y.

12.21.1.1 Quelques propriétés et notations

(1) Si on prend $u = e_j$ le j-ème vecteur de la booYSEMooPFvFTxase canonique de $\mathbb{R}^n$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial e_j}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \tag{12.573}$$

c'est-à-dire que la dérivée de f au point a dans la direction e_j est la dérivée partielle de f par rapport à sa j-ème variable.

(2) Une fonction peut être dérivable dans certaines directions mais pas dans d'autres (rappelez vous que si la limite à droite est différente de la limite à gauche, la limite n'existe pas).

(3) Même si une fonction est dérivable en un point dans toutes les directions, on n'est pas sûr qu'elle soit continue en ce point. La dérivabilité directionnelle n'est donc pas une notion suffisante pour assurer la continuité. C'est pourquoi on introduit le concept de *différentiabilité*.

Lemme 12.230.
Nous notons $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient deux espaces vectoriels E et F sur $\mathbb{K}$. Soient une application $f\colon E \to F$ ainsi que $a, u \in E$ tels que $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$ existe.

Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\partial_{\lambda u} f)(a)$ existe et

$$\frac{\partial f}{\partial(\lambda u)}(a) = \lambda \frac{\partial f}{\partial u}(a). \tag{12.574}$$

Démonstration. Nous allons utiliser le lemme 12.11. D'abord nous avons, pour tout t, λ et a :

$$\frac{f(a + t\lambda u) - f(a)}{t} = \lambda \frac{f(a + t\lambda u) - f(a)}{\lambda t}. \tag{12.575}$$

En posant $g(t) = \frac{f(a+tu)-f(a)}{t}$ (t est une variable dans $\mathbb{R}$), l'hypothèse est que $\lim_{t\to 0} g(t)$ existe et vaut $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$. Le lemme 12.11 indique que $\lim_{t\to 0} g(\lambda t)$ existe aussi et vaut la même chose. Donc

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a + \lambda tu) - f(a)}{\lambda t} = \frac{\partial f}{\partial u}(a). \tag{12.576}$$

En prenant la limite dans (12.575), nous avons le résultat. □

Exemple 12.231.
Considérons la fonction $f(x, y) = 2xy^2$. Lorsque nous calculons $\partial_x f(x, y)$, nous faisons comme si y était constant. Nous avons donc $\partial_x f(x, y) = 2y^2$. Par contre lors du calcul de $\partial_y f(x, y)$, nous prenons x comme une constante. La dérivée de y^2 par rapport à y est évidemment $2y$, et par conséquent, $\partial_y f(x, y) = 4xy$. △

Définition 12.232.
Soient f une application de $U \subset \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$ et u un vecteur de $\mathbb{R}^m$. La fonction f est ***dérivable sur U suivant le vecteur*** *u, si f est dérivable suivant le vecteur u en tout point de U.*

Pour les fonctions d'une seule variable, la dérivabilité en un point a implique la continuité en a. Cela n'est pas vrai pour les fonctions de plusieurs variables : il existe des fonctions f qui sont dérivables suivant tout vecteur au point a sans pour autant être continue en a.

Exemple 12.233.
Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{12.577}$$

Pour voir que f n'est pas continue en $(0, 0)$ il suffit de calculer la limite de f restreinte à la parabole $y = x^2$

$$\lim_{x\to 0} f(x, x^2) = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Pourtant la fonction f est dérivable en $(0, 0)$ dans toutes les directions. En effet, soit $v = (v_1, v_2)$. Si $v_2 \neq 0$, alors

$$\partial_v f(a) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{t^3 v_1^2 v_2}{t^5 v_1^4 + t^3 v_2^2} = \frac{v_1^2}{v_2}, \tag{12.578}$$

tandis que si $v_2 = 0$, alors la valeur de $f(tv_1, 0)$ est 0 pour tout t et v_1, donc la dérivée partielle de f par rapport à x en l'origine existe et est nulle. △

Exemple 12.234.
Pour une fonction réelle à variable réelle, la dérivabilité entraine la continuité. Il n'en va pas de même pour les fonctions à plusieurs variables, comme le montre l'exemple suivant :

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0\\ \dfrac{y}{x}\sqrt{x^2+y^2} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{12.579}$$

Nous avons tout de suite

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0. \tag{12.580}$$

De plus si $u_x \neq 0$ nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \frac{u_y}{u_x}\|u\|. \tag{12.581}$$

Donc toutes les dérivées directionnelles de f en $(0,0)$ existent alors que la fonction n'y est manifestement pas continue. En effet sous forme polaire,

$$f(r,\theta) = \frac{r\sin(\theta)}{\cos(\theta)}, \tag{12.582}$$

et quelle que soit la valeur de r, en prenant θ suffisamment proche de $\pi/2$, la fraction peut être arbitrairement grande.

Nous verrons par la proposition 12.262 que la différentiabilité d'une fonction implique sa continuité. $\triangle$

Théorème 12.235 (Accroissements finis pour les dérivées suivant un vecteur)**.**
Soit U un ouvert dans $\mathbb{R}^m$ et soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction. Soient a et b deux points distincts dans U, tels que le segment[101] *$[a,b]$ soit contenu dans U. Soit u le vecteur*

$$u = \frac{b-a}{\|b-a\|_m}.$$

Si $\partial_u f(x)$ existe pour tout x dans $[a,b]$ on a

$$\|f(b)-f(a)\|_n \leqslant \sup_{x\in[a,b]} \|\partial_u f(x)\|_n \|b-a\|_m.$$

Démonstration. Nous considérons la fonction $g(t) = f\big((1-t)a - tb\big)$. Elle décrit la droite entre a et b parce que $g(0) = a$ et $g(1) = b$. En ce qui concerne la dérivée,

$$\begin{aligned} g'(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f\big((1-t-h)a-(t+h)b\big)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f\big(a+(t+h)(b-a)\big)-f\big(a+t(b-a)\big)}{h}\\ &= \frac{\partial f}{\partial u}\big(a+t(b-a)\big)\|b-a\|. \end{aligned} \tag{12.583}$$

Le dernier facteur $\|b-a\|$ apparaît pour la normalisation du vecteur u. En effet dans la limite, il apparaît $h(b-a)$, ce qui donnerait la dérivée le long de $b-a$, tandis que u vaut $(b-a)/\|b-a\|$.

Par le théorème des accroissements finis pour g, il existe $t_0 \in]0,1[$ tel que

$$g(1) = g(0) + g'(t_0)(1-0). \tag{12.584}$$

Donc

$$\|g(1)-g(0)\| \leqslant \sup_{t_0}\|g'(t_0)\| = \sum_{t_0\in]0,1[}\left\|\frac{\partial f}{\partial u}(a+t_0(b-a))\right\|\|b-a\|. \tag{12.585}$$

Mais lorsque t_0 parcourt $]0,1[$, le point $a+t_0(b-a)$ parcourt le segment $]a,b[$, d'où le résultat. $\square$

101. Définition 10.46.

Corolaire 12.236.
Dans les mêmes hypothèses, si $n = 1$, alors il existe $\bar{x}$ dans $]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = \partial_u f(\bar{x}) \|b - a\|_m.$$

Définition 12.237.
Le nombre

$$\lim_{t \to 0} \frac{f\big(a + tu_1, b + tu_2\big) - f(a, b)}{t} \tag{12.586}$$

est la ***dérivée directionnelle*** *de f dans la direction de u au point (a, b). Il sera noté*

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a, b), \tag{12.587}$$

ou plus simplement $\partial_u f(a, b)$.

Lorsque f est différentiable, la dérivée directionnelle est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial u}(p) = \nabla f(p) \cdot u. \tag{12.588}$$

Lemme 12.238.
Les projections canonniques sont des applications différentiables.

Lemme 12.239.
Toute fonction polynômiale à n variables est différentiable comme applucation de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$.

Lemme 12.240.
Toute fonction rationnelle, du type $f(x)\frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont des polynômes, est différentiable en tout point a tel que $Q(a) \neq 0$.

Lemme 12.241.
Pour une fonction d'une variable $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, le caractère différentiable et le caractère dérivable coïncident. De plus, on a

$$df_a(u) = f'(a)u. \tag{12.589}$$

12.242.
En pratique, ayant une formule pour la fonction f, nous la dérivons par rapport à la variable x_i en utilisant les règles usuelle de dérivation en considérant que les autres (x_j avec $j \neq i$) sont des constantes.

Exemple 12.243.
Pour $f(x, y) = xy + x^2$, les dérivées partielles s'écrivent

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

$\triangle$

12.21.2 Gradient : direction de plus grande pente

Étant donné que u est de norme 1, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left|\nabla f(a, b) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right| \leqslant \|\nabla f(a, b)\|. \tag{12.590}$$

Donc

$$-\|\nabla f(p)\| \leqslant \nabla f(p) \cdot u \leqslant \|\nabla f(p)\|. \tag{12.591}$$

La norme de la dérivée directionnelle (qui est la valeur absolue du nombre au centre) est donc « coincée » entre $-\|\nabla f(p)\|$ et $\|\nabla f(p)\|$. Prenons par exemple

$$u = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}. \tag{12.592}$$

Dans ce cas, nous avons exactement

$$\nabla f(p) \cdot u = \|\nabla f(p)\|, \tag{12.593}$$

qui est la valeur maximale que la dérivée directionnelle peut prendre.

La direction du gradient est donc la direction suivant laquelle la dérivée directionnelle est la plus grande. Pour la même raison, la dérivée directionnelle est la plus petite dans le sens opposé au gradient.

En termes bien clairs : lorsqu'on veut aller le plus vite possible au ski, on prend la direction du gradient de la piste de ski. C'est dans cette direction que ça descend le plus vite. Dans quelle direction vont les débutants ? Ils vont perpendiculairement à la pente (ce qui ennuie tout le monde, mais c'est un autre problème). Les débutants vont donc dans la direction perpendiculaire au gradient. Prenons donc $u \perp \nabla f(p)$ et calculons la dérivée directionnelle de f dans la direction u en utilisant la formule 12.588 :

$$\frac{\partial f}{\partial u}(p) = \nabla f(p) \cdot u = 0 \tag{12.594}$$

parce que nous avons choisi $u \perp \nabla f(p)$. Nous voyons donc que les débutants en ski ont eu la bonne intuition que la direction dans laquelle la piste ne descend pas, c'est la direction perpendiculaire au gradient.

C'est aussi pour cela que l'on a tendance à faire du zig-zag à vélo lorsqu'on monte une pente très forte et qu'on est fatigué. C'est toujours pour cela que les routes de montagne font de longs lacets. La montée est moins rude en suivant une direction proche d'être perpendiculaire au gradient !

Théorème 12.244.
Le gradient des fonctions suit à peu près les mêmes règles que les dérivées. Soient f et g deux fonctions différentiables. Nous avons entre autres

(1) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$;

(2) $\nabla(fg)(a,b) = g(a,b)\nabla f(a,b) + f(a,b)\nabla g(a,b)$;

(3) Dès que $g(a,b) \neq 0$, nous avons

$$\nabla \frac{f}{g} = \frac{g(a,b)\nabla f(a,b) - f(a,b)\nabla g(a,b)}{g(a,b)^2}. \tag{12.595}$$

12.21.3 Gradient : orthogonal au plan tangent

Vu que le gradient d'une fonction est la direction de plus grande pente et que le plan tangent est le plan de plus petite pente, quoi de plus naturel que de penser que le gradient est orthogonal au plan tangent ?

Lemme 12.245.
Soit $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et la partie

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \phi(x) = C\} \tag{12.596}$$

pour une certaine constante C.

Soit $x_0 \in \Gamma$. Le gradient de ϕ en x_0 est orthogonal au plan tangent à Γ en x_0.

Démonstration. Un vecteur tangent à Γ en x_0 est de la forme $\gamma'(0)$ où $\gamma\colon \mathbb{R} \to \Gamma$ vérifie $\gamma(0) = x_0$. Puisque ϕ est constante sur Γ nous avons

$$\frac{d}{ds}\Big[\phi\big(\gamma(s)\big)\Big]_{s=0} = 0, \tag{12.597}$$

ce qui donne
$$\sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\big(\gamma(0)\big)\gamma_i'(0) = 0, \tag{12.598}$$
ce qui signifie exactement $\langle(\nabla\phi)(x_0), \gamma'(0)\rangle = 0$. Le vecteur $(\nabla\phi)(x_0)$ est donc perpendiculaire à tout vecteur tangent de Γ en x_0. □

12.21.4 Mise en bouche en dimension 2

Nous savons déjà comment dériver les fonctions composées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. C'est la proposition 12.180. Si nous avons deux fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nous formons la composée $\varphi = f \circ u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont la dérivée vaut
$$\varphi'(a) = f'\big(u(a)\big)u'(a). \tag{12.599}$$

Considérons maintenant le cas un peu plus compliqué des fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et de la composée
$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ \varphi(x,y) &= f\big(u(x,y)\big). \end{aligned} \tag{12.600}$$
Afin de calculer la dérivée partielle de φ par rapport à x, nous admettons que pour tout a, b et t, il existe $c \in [a, a+t]$ tel que
$$u(a+t,b) = u(a,b) + t\frac{\partial u}{\partial x}(c,b). \tag{12.601}$$
Cela est une généralisation immédiate du théorème 12.192. Nous devons calculer
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(a,b) = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(a+t,b) - \varphi(a,b)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f\big(u(a+t,b)\big) - f\big(u(a,b)\big)}{t}. \tag{12.602}$$

Étant donné l'hypothèse que nous avons faite sur u, nous avons
$$f\big(u(a+t,b)\big) = f\big(u(a,b) + t\frac{\partial u}{\partial x}(c,b)\big). \tag{12.603}$$

En utilisant le théorème des accroissements finis pour f, nous avons un point d entre $u(a,b)$ et $u(a,b) + t\frac{\partial u}{\partial x}(c,b)$ tel que
$$f\big(u(a,b) + t\frac{\partial u}{\partial x}(c,b)\big) = f\big(u(a,b)\big) + t\frac{\partial u}{\partial x}(c,b)f'(d). \tag{12.604}$$

Le numérateur de (12.602) devient donc
$$t\frac{\partial u}{\partial x}(c,b)f'(d). \tag{12.605}$$

Certes les points c et d sont inconnus, mais nous savons que c est entre a et $a+t$ ainsi que d se situe entre $u(a,b)$ et $u(a,b) + t\frac{\partial u}{\partial x}(c,b)$. Lorsque nous prenons la limite $t \to 0$, nous avons donc $\lim_{t\to 0} c = a$ et $\lim_{t\to 0} d = u(a,b)$. Nous avons alors
$$\lim_{t\to 0}\frac{t\frac{\partial u}{\partial x}(c,b)f'(d)}{t} = \frac{\partial u}{\partial x}(a,b)f'\big(u(a,b)\big). \tag{12.606}$$

La formule que nous avons obtenue (de façon pas très rigoureuse) est
$$\frac{\partial}{\partial x} f\big(u(x,y)\big) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)f'\big(u(x,y)\big). \tag{12.607}$$

Prenons maintenant un cas un peu plus compliqué où nous voudrions connaître les dérivées partielles de la fonction φ donnée par
$$\varphi(x,y,z) = f\big(u(x,y), v(x,y,z)\big) \tag{12.608}$$

où $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Commençons par la dérivée partielle par rapport à z. Étant donné que φ ne dépend de z que via la seconde entrée de f, il est normal que seule la dérivée partielle de f par rapport à sa seconde entrée arrive dans la formule :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial v}\big(u(x,y), v(x,y,z)\big)\frac{\partial v}{\partial z}(x,y,z). \tag{12.609}$$

La dérivée partielle par rapport à y demande de tenir compte en même temps de la façon dont f varie avec sa première entrée et la façon dont elle varie avec sa seconde entrée ; cela nous fait deux termes :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial u}\big(u(x,y), v(x,y,z)\big)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}\big(u(x,y), v(x,y,z)\big)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y,z). \tag{12.610}$$

Cette formule a une interprétation simple. Lançons un caillou du sommet d'une falaise. Son mouvement est une chute libre avec une vitesse initiale horizontale :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t & (12.611\text{a}) \\ y(t) = h_0 - \dfrac{gt^2}{2} & (12.611\text{b}) \end{cases}$$

où v_0 est la vitesse initiale horizontale et h_0 est la hauteur de la falaise. Si nous sommes intéressés à la distance entre le caillou et le bas de la falaise (point $(0,0)$), le théorème de Pythagore nous dit que

$$d(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}. \tag{12.612}$$

Pour trouver la variation de la distance par rapport au temps il faut savoir de combien la distance varie lorsque x varie et multiplier par la variation de x par rapport à t, et puis faire la même chose avec y.

12.21.5 Accroissements finis et dérivées partielles

Proposition 12.246 (Accroissements finis)**.**
Soient des espaces vectoriels normés V et W. Soit une application $f\colon V \to W$. Soient des points $a, b \in V$ tels que f est continue sur le segment $[a,b]$ et partiellement dérivable dans la direction $b-a$ sur $]a,b]$. Alors il existe $c \in \,]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (\partial_\beta f)(c) \tag{12.613}$$

où $c \in [a,b]$ et $\beta = b - a$.

Démonstration. Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} \varphi\colon [0,1] &\to W \\ t &\mapsto f\big(a + t(b-a)\big). \end{aligned} \tag{12.614}$$

Par le théorème des accroissements finis 12.192, il existe $s \in [0,1]$ tel que [102]

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(s)(1-0). \tag{12.615}$$

Autrement dit,

$$f(b) = f(a) + (\partial_\beta f)\big(a + s(b-a)\big). \tag{12.616}$$

Nous avons le résultat en posant $c = a + s(b-a)$. □

102. Les a et b dans l'énoncé de 12.192 sont les valeurs $s = 0$ et $s = 1$ ici. Rien à voir avec les a et b d'ici qui sont des éléments de V.

Lemme 12.247 (Accroissements finis[1]).
Soient des espaces vectoriels normés V et W. Soit une fonction $f\colon V\to W$ qui est différentiable sur un voisinage $\mathcal{O}$ de $a\in V$. Soient $v\in V$ et $\epsilon>0$ tels que $a+\epsilon v$ reste dans $\mathcal{O}$.

Nous considérons une base de V pour donner un sens aux dérivées partielles $\partial_k f$. Alors il existe une fonction $\alpha\colon V\to W$ telle que

$$f(a+\epsilon v)=f(a)+\sum_{k=1}^{n}\epsilon v_k(\partial_k f)\big(a+\sum_{i=k+1}^{n}\epsilon v_i e_i\big)+\epsilon\alpha(\epsilon) \tag{12.617}$$

où la somme sur i est nulle dans le cas $k=n$.

Démonstration. Nous commençons par nous attaquer à la dérivation par rapport à la première variable. La définition 12.228 de la dérivation partielle nous invite à poser

$$\varphi(t)=f\big(a+\sum_{k=2}^{n}\epsilon v_k e_k+tv_1e_1\big). \tag{12.618}$$

Nous avons :

$$\varphi'(0)=v_1(\partial_1 f)\big(a+\sum_{k=2}^{n}\epsilon v_k e_k\big). \tag{12.619}$$

Nous appliquons les accroissements finis 12.168 à la fonction φ en $t=0$. Nous avons une fonction $\alpha\colon\mathbb{R}\to W$ telle que $\lim_{t\to 0}\alpha_1(t)=0$ et

$$\varphi(t)=\varphi(0)+t\varphi'(0)+t\alpha_1(t). \tag{12.620}$$

Nous écrivons cette égalité pour $t=\epsilon$, tout en rappelant que $\varphi(\epsilon)=f(a+\epsilon v)$:

$$f(a+\epsilon v)=\varphi(\epsilon)=f\big(a+\sum_{k=2}^{n}\epsilon v_k e_k\big)+\epsilon v_1(\partial_1 f)\big(a+\sum_{k=2}^{n}\epsilon v_k e_k\big)+\epsilon\alpha_1(\epsilon). \tag{12.621}$$

Pour la suite, il suffit de recommencer en écrivant $\sum_{k=2}^{n}\epsilon v_k e_k=\epsilon v_2e_2+\sum_{k=3}^{n}\epsilon v_k e_k$ dans le second terme. □

Voici une version un peu moins technologique.

Proposition 12.248.
Soit une fonction $f\colon V\to\mathbb{R}$ où V est un espace vectoriel métrique. Soit $a\in V$ tel que $(\partial_i f)(a)$ existe. Alors il existe une fonction $\alpha\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tel que

$$f(a+\epsilon e_i)=f(a)+\epsilon(\partial_i f)(a)+\epsilon\alpha(\epsilon) \tag{12.622}$$

et $\lim_{\epsilon\to 0}\alpha(\epsilon)=0$.

Démonstration. Nous posons

$$\begin{aligned}\varphi\colon\mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ t&\mapsto f(a+te_i).\end{aligned} \tag{12.623}$$

Par hypothèse (et définition 12.228 de la dérivée partielle), la fonction φ est dérivable et

$$\varphi'(0)=(\partial_i f)(a). \tag{12.624}$$

Nous appliquons le théorème des accroissements finis 12.168 sur la fonction φ :

$$\varphi(t)=\varphi(0)+\varphi'(0)+t\alpha(t) \tag{12.625}$$

pour une certaine fonction $\alpha\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ qui vérifie $\lim_{t\to 0}\alpha(t)=0$. En remplaçant φ par sa valeur en termes de f dans (12.625),

$$f(a+te_i)=f(a)+(\partial_i f)(a)+t\alpha(t). \tag{12.626}$$

□

12.22 Formes différentielles

Nous parlerons de formes différentielles exactes et fermées dans la section 20.85.

12.22.1 Décomposition dans la base duale

Définition 12.249.
*Soit U, un ouvert dans $\mathbb{R}^n$. Une 1-**forme différentielle** ω sur U est une application*

$$\begin{aligned} \omega\colon U &\to (\mathbb{R}^n)^* \\ x &\mapsto \omega_x. \end{aligned} \tag{12.627}$$

Remarque 12.250.
L'ensemble des 1-formes différentielles forment un espace vectoriel avec les définitions

$$\begin{aligned} (\lambda\omega)_x(v) &= \lambda\omega_x(v) \\ (\omega+\mu)_x(v) &= \omega_x(v)+\mu_x(v). \end{aligned} \tag{12.628}$$

Nous connaissons la base de $(\mathbb{R}^n)^*$ définie en 4.120. Nous allons noter ces formes par dx_i :

$$\begin{aligned} e_1^* &= dx_1\colon v\mapsto v_1 \\ &\vdots \\ e_n^* &= dx_n\colon v\mapsto v_n \end{aligned} \tag{12.629}$$

Toute forme différentielle s'écrit

$$\omega_x = \sum_{i=0}^n a_i(x)dx_i \tag{12.630}$$

où $a_1,\ldots,a_n$ sont les composantes de ω dans la base usuelle, et sont des fonctions à valeurs réelles.

Lemme 12.251.
*Une 1-forme différentielle est **continue** si les fonctions a_i sont continues. La forme sera C^k quand les a_i seront C^k.*

Pour un vecteur $v=(v_1,\ldots,v_n)$ on a donc par définition de dx_i

$$\omega_x(v) = \sum_{i=0}^n a_i(x)v_i. \tag{12.631}$$

Ces fonctions a_i peuvent être trouvées en appliquant ω aux éléments de la base canonique de $\mathbb{R}^n$:

$$a_j(x) = \omega_x(e_j) \tag{12.632}$$

parce que $\omega_x(e_j) = \sum_i a_i(x)dx_i(e_i) = \sum_i a_i(x)\delta_{ij} = a_j(x)$.

12.22.2 L'isomorphisme musical

Si G est un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$, et si $x\in\mathbb{R}^n$, nous pouvons définir

$$\begin{aligned} G_x^\flat\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto \langle G(x), v\rangle \end{aligned} \tag{12.633}$$

Pour chaque x, l'application $G_x^\flat$ est une forme sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$. Nous écrivons que

$$G_x^\flat \in \big(\mathbb{R}^n\big)^*. \tag{12.634}$$

Nous pouvons ainsi déterminer le développement de $G^\flat$ dans la base des dx_i en faisant le calcul

$$G_x^\flat(e_i) = \langle G(x), e_i\rangle = G_i(x), \tag{12.635}$$

donc les composantes de $G^\flat$ dans la base dx_i sont exactement les composantes de G dans la base e_i :

$$G^\flat_x = G_1(x)dx_1 + \cdots + G_n(x)dx_n. \tag{12.636}$$

La construction inverse existe également. Si ω est une 1-forme différentielle, nous pouvons définir le champ de vecteurs $\omega^\sharp$ par la formule (implicite)

$$\omega_x(v) = \langle \omega^\sharp(x), v\rangle \tag{12.637}$$

pour tout $v \in \mathbb{R}^n$. Par définition, $(\omega^\sharp)^\flat = \omega$.

Lemme 12.252.
En composantes nous avons :

$$\omega^\sharp(x) = \big(a_1(x), \ldots, a_n(x)\big). \tag{12.638}$$

Si G est un champ de vecteurs, alors $(G^\flat)^\sharp = G$.

12.23 Différentielle

Nous avons déjà donné une définition abstraite de la différentielle dans la définition 11.169. Nous en voyons maintenant quelques motivations dans le cas de fonctions sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^n$.

12.23.1 Exemples introductifs

La notion de dérivée est associée à la recherche de la droite tangente à une courbe. Reprenons rapidement le cheminement. La dérivée de $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ au point a est un nombre $f'(a)$, qui définit donc une application linéaire dont le coefficient angulaire est $f'(a)$, et que nous notons df_a :

$$\begin{aligned} df_a\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto f'(a)u. \end{aligned} \tag{12.639}$$

La droite donnée par l'équation

$$y(a+u) = f'(a)u \tag{12.640}$$

est parallèle à la tangente en a. Pour trouver la tangente, il suffit de la décaler de la hauteur qu'il faut. L'équation de la droite tangente au graphe de f au point $\big(a, f(a)\big)$ devient

$$y(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = f(a) + df_a(x-a). \tag{12.641}$$

Nous nous proposons de généraliser cette formule au cas de la recherche du plan tangent à une surface.

Exemple 12.253.
Considérons $f(x,y) = x^2y + y^2e^x$. Les dérivées partielles sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2xy + y^2e^x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 + 2ye^x. \end{aligned} \tag{12.642}$$

△

Cet exemple était l'exemple facile où tout se passe bien.

Exemple 12.254.
Les choses sont moins simples lorsqu'on considère la fonction suivante :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{12.643}$$

On voit que pour tout x et tout y, nous avons $f(x,0) = f(0,y) = 0$. Donc cette fonction est nulle sur les axes horizontaux et verticaux. Nous avons en particulier

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= 0. \end{aligned} \tag{12.644}$$

Donc ces dérivées partielles existent.

Il n'est par contre pas question de dire que cette fonction « va bien » autour du point $(0,0)$. En effet si nous regardons sa valeur sur la droite diagonale $y = x$, nous avons

$$f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}. \tag{12.645}$$

Par conséquent si nous suivons la fonction le long de la droite $y = x$, la hauteur vaut $\frac{1}{2}$ en permanence, sauf juste en $(0,0)$ où la fonction fait un grand plongeon !

```
sage: var('x,y')
(x, y)
sage: f(x,y)=(x*y)/(x**2+y**2)
sage: plot3d(f,(x,-2,2),y(-2,2))
```

D'ailleurs elle fait un plongeon le long de toutes les droites (sauf verticale et horizontale). En effet si nous regardons la fonction le long de la droite $y = mx$, nous avons

$$f(x,mx) = \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}. \tag{12.646}$$

La fonction est donc *constante* sur chacune de ces droites. Il n'est donc pas question de dire que cette fonction est « dérivable » en $(0,0)$, vu qu'elle fait des grands sauts dans presque toutes les directions. $\triangle$

Nous devons donc trouver mieux que les dérivées partielles pour étudier le comportement des fonctions un peu problématiques.

12.23.2 Différentielle

Nous nous souvenons de l'équation (12.397) qui nous dit que pour une fonction d'une variable la dérivabilité signifiait qu'il existait un nombre ℓ et une fonction α tels que

$$f(x) = f(a) + \ell(x-a) + (x-a)\alpha(x-a) \tag{12.647}$$

et $\lim_{t\to 0} \alpha(t) = 0$.

En nous inspirant de cela, nous comprenons peut-être un peu le pourquoi de la définition 11.169.

12.255.
L'objet df_a est *en soi* une application $df_a\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Nous notons $df_a(u)$ la valeur de df_a sur le vecteur $u \in \mathbb{R}^m$. En particulier, l'application df est une forme différentielle au sens de la définition 12.249.

12.256.
Les propositions 12.266 et 12.269 vont montrer qu'en étudiant bien les dérivées partielles, nous pouvons conclure à la différentiabilité d'une fonction. Attention cependant, nous verrons dans l'exemple 12.275 que l'existence des dérivées directionnelles partielles ne permettait pas de conclure à la différentiabilité.

12.23.3 Matrice de la différentielle

La différentielle est une application linéaire. Elle possède donc une matrice lorsque des bases sont fixées.

Proposition 12.257.
Soient une application différentiable $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^m$. Dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$, la matrice de df_a est

$$(df_a)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a). \tag{12.648}$$

Démonstration. Le lien entre matrice et application linéaire est vu dans la proposition 4.68. Dans le cas des bases canoniques de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ nous savons qu'extraire une composante revient à prendre le produit scalaire. Nous avons donc

$$(df_a)_{ij} = \big(df_a(e_j)\big)_i = df_a(e_j) \cdot e_i. \tag{12.649}$$

La linéarité de la dérivation donne alors

$$(df_a)_{ij} = df_a(e_j) \cdot e_i = \frac{d}{dt}\Big[f(a+te_j)\Big]_{t=0} \cdot e_i = \frac{d}{dt}\Big[f_i(a+te_j)\Big]_{t=0} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a). \tag{12.650}$$

□

Lemme 12.258 ([1])**.**
Soit une fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. Nous posons

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto g(x). \end{aligned} \tag{12.651}$$

Alors f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. Le problème lorsqu'il faut démontrer qu'une fonction est de classe C^∞, c'est que $d^k f$ sera une application de $\mathbb{R}^2$ vers un espace qui est un terrible emboîtement de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \ldots)$. Pour traiter cette difficulté, nous considérons les espaces suivants : $V_0 = \mathbb{R}$ et par récurrence $V_{k+1} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, V_k)$.

Et nous considérons également les éléments

$$\begin{aligned} \alpha_1\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (u,v) &\mapsto u \end{aligned} \tag{12.652}$$

et plus généralement $\alpha_k \in V_k$ donné par

$$\begin{aligned} \alpha_k\colon \mathbb{R}^2 &\to V_{k-1} \\ (u,v) &\mapsto u\alpha_{k-1}. \end{aligned} \tag{12.653}$$

Notons que dans l'expression $u\alpha_{k-1}$, il s'agit d'un produit entre un scalaire $u \in \mathbb{R}$ et un vecteur $\alpha_{k+1} \in V_{k-1}$.

Nous prouvons maintenant par récurrence que $d^k f_{(a,b)} = g^{(k)}(a)\alpha_k$, en utilisant directement la définition.

(i) **Initialisation** Pour $k = 1$, nous calculons

$$\frac{|f(a+h_1, b+h_2) - f(a,b) - g'(a)\alpha_1(h)|}{\|h\|} = \frac{|g(a+h_1) - g(a) - g'(a)h_1|}{\|h\|} \tag{12.654}$$

Notre but est de calculer la limite de cela lorsque $h \xrightarrow{\mathbb{R}^2} 0$ avec $h \neq 0$. L'hypothèse sur la dérivabilité de g nous indique que si $0 < |t| < \delta$, alors

$$\frac{|g(a+t) - g(a) - tg'(a)|}{|t|} < \epsilon. \tag{12.655}$$

Nous considérons donc la boule épointée de $\mathbb{R}^2$ de rayon δ : $B = B\big((0,0),\delta\big)\backslash\{(0,0)\}$, et nous considérons $h \in B$. Deux cas sont à distinguer : $h_1 = 0$ et $h_1 \neq 0$.
Si $h_1 = 0$, alors

$$\frac{|g(a+h_1) - g(a) - g'(a)h_1|}{\|h\|} = 0. \tag{12.656}$$

Sinon nous avons $0 < h_1 \leqslant \|h\| < \delta$ et donc

$$\frac{|g(a+h_1) - g(a) - g'(a)h_1|}{\|h\|} \leqslant \frac{|g(a+h_1) - g(a) - g'(a)h_1|}{|h_1|} < \epsilon \tag{12.657}$$

par la relation (12.655). Nous avons donc bien

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(a+h_1, b+h_2) - f(a,b) - g'(a)\alpha_1(h)|}{\|h\|} = 0. \tag{12.658}$$

(ii) **Récurrence** Nous supposons que $d^k f_{a,b} = g^{(k)}(a)\alpha_k$, et nous devons prouver que $d^k f$ est différentiable et que $d^{k+1} f_{(a,b)} = g^{(k+1)}(a)\alpha_{k+1}$. Pour cela nous introduisons tout dans la définition de la différentielle pour voir ce qui arrive.
Nous avons :

$$\begin{aligned} &\frac{d^k f_{(a+h_1, b+h_2)} - d^k f_{(a,b)} - g^{(k+1)}(a)\alpha_{k+1}(h_1,h_2)}{\|h\|} \\ &= \frac{g^{(k)}(a+h_1)\alpha_k - g^{(k)}(a)\alpha_k - g^{(k+1)}(a)h_1\alpha_k}{\|h\|}. \end{aligned} \tag{12.659}$$

Cela est, pour chaque $h \neq 0$, un élément V_k, mais le coefficient α_k se factorise de telle sorte que nous devons seulement calculer la limite (si elle existe)

$$\lim_{h\to 0} \frac{g^{(k)}(a+h_1) - g^{(k)}(a) - h_1 g^{(k+1)}(a)}{\|h\|}. \tag{12.660}$$

Le même jeu de séparation entre $h_1 = 0$ et $h_1 \neq 0$ que dans le cas $k = 1$ nous permet de déduire que cette limite existe et vaut zéro, grace à la définition de $g^{(k+1)}$.

Nous avons donc prouvé que f est différentiable autant que fois que souhaité. Elle est donc de classe C^∞ comme annoncé. □

12.23.4 Différentielle, dual et forme différentielle

12.23.4.1 Dans la base duale

Nous avons déjà parlé en (12.629) de la base $\{dx_i\}_{i=1,\ldots,n}$ des formes différentielles sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 12.259.
La forme de base dx_i est la différentielle de la fonction de projection

$$\begin{aligned} \mathtt{proj}_i \colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto v_i. \end{aligned} \tag{12.661}$$

Autrement dit nous avons

$$d(\mathtt{proj}_i)_a = dx_i \tag{12.662}$$

pour tout i et pour tout a.

Démonstration. Le quotient

$$\frac{\mathtt{proj}_i(a+h) - \mathtt{proj}_i(a) - dx_i(h)}{\|h\|} \tag{12.663}$$

est toujours nul. La limite est a fortiori nulle. □

Nous avons donc $(d\,\mathtt{proj}_i)_a = dx_i$ pour tout a. Notons que les fonctions dx_i et $\mathtt{proj}_i$ sont les mêmes. Cela justifie la notation « dx_i » pour les formes différentielles de base, parce que ce sont les différentielles des fonctions « coordonnées » que nous pouvons noter x_i.

Étant donnée une fonction f, il est légitime de nous demander comment (si elle existe) la différentielle se décompose en chaque point dans la base duale. C'est-à-dire fixer les fonctions a_i en termes des dérivées de f pour avoir

$$df_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i. \tag{12.664}$$

C'est ce que nous allons faire dans le corolaire 12.264.

Exemple 12.260.
Si $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction C^2, sa différentielle est la forme

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy. \tag{12.665}$$

Si nous nommons f et g les fonctions $\partial_x F$ et $\partial_y F$, nous avons donc

$$Df = f dx + g dy, \tag{12.666}$$

qui vérifie

$$\partial_y f = \partial_x g, \tag{12.667}$$

parce que $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial g}{\partial x}$. Ce que nous avons donc prouvé, c'est que △

Lemme 12.261.
Si $f dx + g dy$ est la différentielle d'une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, alors $\partial_y f = \partial_x g$.

12.23.5 Ce n'est pas la différentielle extérieure

Il existe une notion de différentielle extérieure, mais ce n'est pas celle-là que nous utilisons la majorité du temps. En particulier si E et F sont des espaces vectoriels normés, lorsque $f\colon E \to F$ est une fonction, df est une application

$$df\colon E \to \mathcal{L}(E, F) \tag{12.668}$$

et la différentielle seconde est la différentielle de cette application-là. Chose faisable parce que $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel on ne peut plus respectable.

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$. Par définition de la différentielle extérieure d'une 1-forme, nous avons une formule de Leibnitz

$$d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega. \tag{12.669}$$

En particulier,

$$d(f dx) = df \wedge dx + f \underbrace{d(dx)}_{=0} = \frac{\partial f}{\partial x} dx \underbrace{dx \wedge dx}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx. \tag{12.670}$$

Attention : la différentielle extérieure n'est pas la différentielle usuelle. Certes dans le cas d'une 0-forme (c'est-à-dire d'une fonction), les deux notions coïncident, mais ça ne va pas plus loin. La différentielle extérieure vérifie $d^2\omega = 0$ pour tout ω, y compris pour les fonctions : si $\omega = df$ alors $d\omega = 0$.

Nous mentionnerons la différentielle extérieure dans le cas de

(1) Théorème de Stockes 20.74.

12.23.6 Continuité, dérivabilité et différentiabilité

Le théorème suivant reprend les principales propriétés d'une fonction différentiable. Il est à ne pas confondre avec le théorème 12.306 qui dira que si les dérivées partielles sont continues sur un voisinage de a, alors f est différentiable en a.

Proposition 12.262.
Soit un espace vectoriel normé V et une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to V$. Si f est différentiable au point $a \in \mathbb{R}^n$ alors

(1) elle est continue en a,

(2) elle admet une dérivée dans toutes les directions de $\mathbb{R}^n$,

(3) toutes les dérivées directionnelles $\partial_u f(a)$ existent et nous avons l'égalité

$$\begin{aligned} df_a\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ u &\mapsto df_a(u) = \frac{\partial f}{\partial u}(a) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) u_i, \end{aligned} \tag{12.671}$$

si les u_i sont les composantes de u dans la base canonique $\mathbb{R}^n$.

La dernière égalité sera de temps en temps utilisée sous la forme

$$df_a(u) = \frac{d}{dt}\Big[f(a+tu)\Big]_{t=0}. \tag{12.672}$$

Démonstration. La limite

$$\lim_{h\to 0_m} \frac{\|f(a+h) - f(a) - T(h)\|_n}{\|h\|_m} = 0,$$

implique que

$$\lim_{h\to 0_m} \|f(a+h) - f(a) - T(h)\|_n = 0.$$

Comme T est dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, on a $\lim_{h\to 0} T(h) = 0$, d'où la continuité de f au point a.

Si u est un vecteur non nul, la différentiabilité de f au point a implique

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|f(a+tu) - f(a) - T(tu)\|_n}{\|tu\|_m} = 0,$$

par la linéarité de T et par l'égalité $\|tu\|_m = |t|\|u\|_m$ on obtient

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{|t|} = T(u).$$

Donc f est dérivable suivant le vecteur u et $\partial_u f(a) = T(u) = df_a(u)$. □

Corolaire 12.263 (Différentielle et dérivée)**.**
Soit une application différentiable $f\colon \mathbb{R} \to V$ où V est un espace vectoriel normé. Alors $f'(u) = df_u(1)$.

Démonstration. En vertu de la proposition 12.262, nous avons

$$df_u(1) = \frac{d}{dt}\Big[f(u+t1)\Big]_{t=0} = f'(u). \tag{12.673}$$

Nous avons utilisé le fait que pour une fonction sur $\mathbb{R}$, l'unique dérivée partielle est la dérivée normale. □

Corolaire 12.264.
Si f est différentiable, alors la forme différentielle df_a se décompose en

$$df_a f = \sum_i (\partial_i f)(a) dx_i. \tag{12.674}$$

Démonstration. Vue la définition des formes dx_i nous pouvons remplacer u_i par $dx_i(u)$ dans l'égalité (12.671) et écrire

$$df_a(u) = \sum_i (\partial_i f)(a) dx_i(u) \tag{12.675}$$

et donc écrire l'égalité demandée. □

Le lemme suivant regroupe quelques égalités avec lesquelles nous allons souvent travailler. Il explique comment sont liées les dérivées directionnelles, les dérivées partielles et la différentielle.

Lemme 12.265.
Si $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une fonction différentiable, alors

$$df_a(u) = \frac{\partial f}{\partial u}(a) = \frac{d}{dt}\Big[f(a+tu)\Big]_{t=0} = \sum_{i=1}^m u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \nabla f(a) \cdot u \tag{12.676}$$

pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^m$

Démonstration. La première égalité est la proposition 12.262, et la seconde est seulement la définition de la dérivée directionnelle avec des notations un peu plus snob. En particulier nous avons

$$df_a(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a). \tag{12.677}$$

Pour le reste c'est la linéarité de la différentielle qui joue : le vecteur u peut être écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de base

$$u = \sum_{i=1}^m u_i e_i, \qquad u_i \in \mathbb{R},\ \forall i \in \{1, \ldots, m\}.$$

Alors, la linéarité de df_a nous donne

$$df_a(u) = df_a\left(\sum_{i=1}^m u_i e_i\right) = \sum_{i=1}^m u_i\,(df_a e_i) = \sum_{i=1}^m u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a). \tag{12.678}$$

Le lien avec le gradient est la définition du produit scalaire (9.160). □

La formule $df_a(u) = \frac{d}{dt}\Big[f(a+tu)\Big]_{t=0}$ est bien utile pour calculer des différentielles, mais elle ne permet pas de prouver que f est différentiable. Autrement dit, même si le calcul de la dérivée $\frac{d}{dt}\Big[f(a+tu)\Big]_{t=0}$ donne un résultat pour tout u, nous ne pouvons pas en déduire que f est différentiable au point a.

Proposition 12.266.
Soient f une fonction de x et y et un point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Si les nombres $\partial_x f(a,b)$ et $\partial_y f(a,b)$ existent et si il existe une fonction $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(a,b) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \\ &+ \|(x,y)-(a,b)\|\alpha\Big(\|(x,y)-(a,b)\|\Big) \end{aligned} \tag{12.679}$$

et

$$\lim_{t\to 0} \alpha(t) = 0, \tag{12.680}$$

alors f est différentiable en (a,b).

12.267.
Dans cet énoncé nous avons écrit $d\big((x,y),(a,b)\big)$ la distance entre (x,y) et (a,b), c'est-à-dire le nombre $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$. Afin d'écrire l'équation (12.679) sous forme plus compacte, nous introduisons le vecteur

$$\nabla f(a,b)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b). \end{pmatrix} \tag{12.681}$$

L'équation (12.679) devient alors

$$f(X)=f(P)+\nabla f(a,b)\cdot(X-P)+\|X-P\|\alpha\big(\|X-P\|\big). \tag{12.682}$$

Le vecteur $(\nabla f)(a,b)$ est appelé le **gradient** de f au point (a,b).

Remarque 12.268.
Nous avons introduit la notation ∇f pour le gradient d'une fonction f. Nous allons par la suite introduire $\nabla\cdot F$ pour la divergence du champ de vecteurs F et $\nabla\times F$ pour son rotationnel.

Toutes les formules pour ∇f, $\nabla\cdot F$ et $\nabla\times F$ peuvent facilement être mémorisées en pensant à ∇ comme étant le vecteur

$$\nabla=\begin{pmatrix} \partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z \end{pmatrix}. \tag{12.683}$$

Nous allons ici cependant seulement penser à (12.683) comme un moyen mnémotechnique ; nous ne donnons pas de définition à « ∇ » tout seul.

Proposition 12.269.
Soit f une fonction de deux variables admettant des dérivées partielles $\partial_x f(x,y)$ et $\partial_y f(x,y)$ qui sont elles-mêmes des fonctions continues de x et y. Alors la fonction f est différentiable partout.

Proposition 12.270.
Si f est différentiable en (a,b) alors pour tout vecteur u, la fonction

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ t&\mapsto f(a+tu_1,b+tu_2) \end{aligned} \tag{12.684}$$

est dérivable en 0 et on a

$$\varphi'(0)=\nabla f(p)\cdot u \tag{12.685}$$

où nous avons noté $p=(a,b)$.

Démonstration. Réécrivons la formule (12.682) sous la forme

$$f(x)=f(p)+\nabla f(p)\cdot(x-p)+\|x-p\|\alpha(\|x-p\|). \tag{12.686}$$

Cela étant vrai pour tout x, nous l'écrivons en particulier pour $x=p+tu$ où t est un réel et u est le vecteur unitaire choisi. Nous avons donc

$$f(p+tu)=f(p)+t\nabla f(p)\cdot u+\|tu\|\alpha(\|tu\|). \tag{12.687}$$

En utilisant le fait que u est unitaire, $\|tu\|=|t|\|u\|=|t|$. La dérivée de φ en 0 est alors donnée par

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(p+tu)-f(p)}{t}=\lim_{t\to 0}\nabla f(p)\cdot u+\alpha(|t|). \tag{12.688}$$

Lorsque nous prenons la limite, le membre de gauche devient $\varphi'(0)$ tandis que dans le membre de droite, le second terme disparaît. Nous avons finalement

$$\varphi'(0)=\nabla f(p)\cdot u \tag{12.689}$$

□

12.23.7 Calcul de valeurs approchées

Si nous remplaçons les accroissements $x-a$ et $y-b$ par h et k, le critère de différentiabilité s'écrit

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k)=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k\\ +\sqrt{h^2+k^2}\alpha\big(\sqrt{h^2+k^2}\big). \end{aligned} \tag{12.690}$$

Le dernier terme du membre de droite tend vers zéro à une vitesse double lorsque h et k tendent vers zéro : d'une part parce que $\sqrt{h^2+k^2}$ tend vers zéro et d'autre part parce que $\alpha\big(\sqrt{h^2+k^2}\big)$ tend vers zéro. Nous avons donc la « bonne » approximation

$$f(x,y)\simeq f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b). \tag{12.691}$$

lorsque (x,y) n'est pas trop loin de (a,b). Cette expression est évidemment une généralisation immédiate de l'équation (12.400). Elle exprime que l'on peut obtenir des informations sur la valeur d'une fonction en (x,y) si on peut calculer la fonction et ses dérivées en un point (a,b) non loin de (x,y).

Cette formule peut aussi être vue sous la forme suivante, plus pratique dans certains calculs :

$$f(a+\Delta x,b+\Delta y)\simeq f(a,b)+\Delta x\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+\Delta y\frac{\partial f}{\partial y}(a,b). \tag{12.692}$$

Exemple 12.271.
Prenons la fonction $f(x,y)=\cos(x)\sin(y)$ et calculons une approximation de

$$f\big(\frac{\pi}{3}+0.01,\frac{\pi}{2}+0.03\big). \tag{12.693}$$

D'abord les dérivées partielles sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=-\sin(x)\sin(y)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)&=\cos(x)\cos(y). \end{aligned} \tag{12.694}$$

Nous allons utiliser l'approximation

$$f\big(\frac{\pi}{3}+0.01,\frac{\pi}{2}+0.03\big)\simeq f\big(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\big)+0.01\frac{\partial f}{\partial x}\big(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\big)+0.03\frac{\partial f}{\partial y}\big(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\big). \tag{12.695}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}\big(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\big)&=-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\big(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\big)&=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{2}=0. \end{aligned} \tag{12.696}$$

Par conséquent

$$f\big(\frac{\pi}{3}+0.01,\frac{\pi}{2}+0.03\big)\simeq\frac{1}{2}-0.01\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{200}. \tag{12.697}$$

```
sage: var('x,y')
(x, y)
sage: f(x,y)=cos(x)*sin(y)
sage: a=f(pi/3+0.01,pi/2+0.03)
sage: numerical_approx(a)
0.491093815387986
sage: b=1/2-sqrt(3)/200
sage: numerical_approx(b)
0.491339745962156
sage: numerical_approx(a-b)
-0.000245930574169814
```

Cela fait une erreur de l'ordre du dix millième.

△

Remarque 12.272.
Les esprits les plus critiques diront que cette vérification par Sage n'en est pas une parce que Sage a certainement utilisé un algorithme d'approximation qui se base sur la même idée que ce que nous venons de faire, et que par conséquent le fait qu'il obtienne le même résultat que nous est un peu tautologique.

Ils n'auront pas tort. Cependant, le code source de Sage est disponible publiquement [103] ; vous pouvez aller le lire et vérifier qu'il y a effectivement une *preuve* que le résultat fourni par Sage possède une bonne dizaine de décimales correctes.

Cette disponibilité publique du code source est une des nombreuses différences fondamentales entre Sage et votre calculatrice [104]. Dois-je vous rappeler qu'un des principes fondamentaux de l'éthique scientifique est que les résultats et les méthodes utilisés doivent être absolument ouverts à la vérification et à la critique de tous ?

12.23.8 Différentielle et tangente

La notion de dérivée partielle (ou de dérivée suivant un vecteur) pour une fonction de plusieurs variables n'est pas une généralisation de la notion de dérivée en une variable d'espace. En fait, du point de vue géométrique, la dérivée de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ au point a est la pente de la ligne droite tangente au graphe de g au point $(a, g(a))$. Cette ligne, d'équation $r(x) = g'(a)x + g(a)$, est la meilleure approximation affine du graphe de g au point a, comme à la figure 12.9.

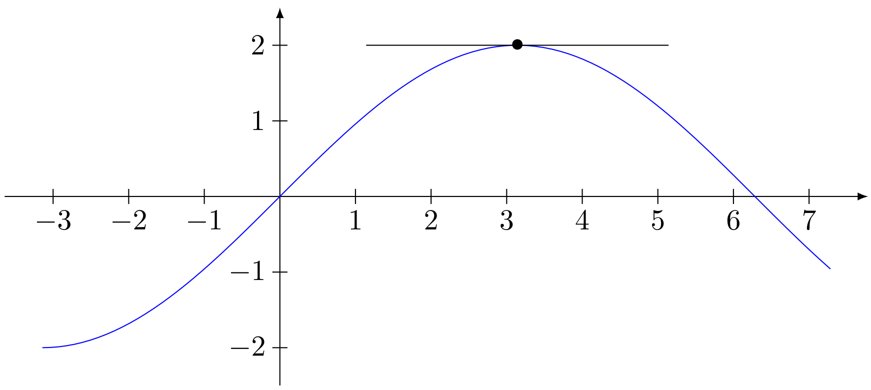


FIGURE 12.9 – Tangentes au graphe d'une fonction d'une variable

Le graphe d'une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est une surface de deux paramètres dans $\mathbb{R}^3$. Si l'approximation affine d'une telle surface au point $(x, y, f(x, y))$ existe, alors elle est un plan tangent. En dimension plus haute, le graphe de la fonction $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ est une surface de m paramètres dans $\mathbb{R}^{m+1}$ et son approximation affine (si elle existe) est un hyperplan de $\mathbb{R}^m$.

Nous allons voir que si f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^n$ l'approximation affine de f au point a est l'élément de $f(a) + \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ qui ressemble le plus à f au voisinage de a. Plus précisément, on utilise les définitions suivantes.

Définition 12.273.
Soient f et g deux applications d'un ouvert U de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$. On dit que g est ***tangente*** *à f au point $a \in U$ si $f(a) = g(a)$ et*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{\| f(x) - g(x) \|_n}{\| x - a \|_m} = 0.$$

La relation de tangence est une relation d'équivalence. Nous sommes particulièrement intéressés par le cas où f admet une application affine tangente au point a.

103. Voir http://www.sagemath.org
104. et les autres logiciels de type fenêtre, pomme ou feuille d'érable.

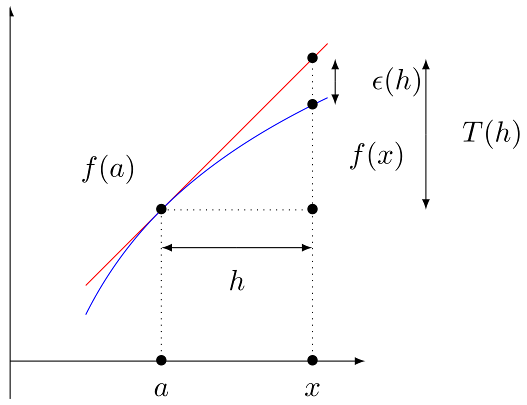


FIGURE 12.10 – Interprétation géométrique de la différentielle.

En ce qui concerne l'interprétation géométrique, si nous regardons la figure 12.10, et d'ailleurs aussi en voyant la définition 11.454, la fonction est différentiable et la différentielle est T si il existe une fonction α telle que

$$f(a+u)-f(a)-T(u)=\alpha(u) \tag{12.698}$$

où la fonction α satisfait

$$\lim_{u\to 0}\frac{\|\alpha(u)\|}{\|u\|}=0 \tag{12.699}$$

C'est cela qui fait écrire $f(a+u)-f(a)-df_a(u)=o(\|u\|)$ à ceux qui n'ont pas peur de la notation o.

La différentielle df_a est donc la partie linéaire de l'application affine qui approxime au mieux la fonction f autour du point a. La notion de différentielle est la vraie généralisation du concept de dérivée pour fonctions de plusieurs variables, en outre elle nous permet d'expliciter la relation qui associe au vecteur u la dérivée $\partial_u f(a)$, pour f et a fixés.

Remarque 12.274.
Si on remplace les normes $\|\cdot\|_m$ et $\|\cdot\|_n$ par d'autres normes, l'existence et la valeur de la différentielle de f au point a ne sont pas remises en cause. En effet, soient $\|\cdot\|_M$ une norme sur $\mathbb{R}^m$ et $\|\cdot\|_N$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Par le théorème 11.45, ces normes sont équivalentes à $\|.\|_m$ et $\|.\|_n$ respectivement ; il existe donc des constantes k, K, l, $L>0$ telles que pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^m$ et tout vecteur v de $\mathbb{R}^n$

$$k\|u\|_M\leqslant\|u\|_m\leqslant K\|u\|_M,$$

$$l\|v\|_N\leqslant\|v\|_n\leqslant L\|v\|_N.$$

Les éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ sont les mêmes et on a

$$\begin{aligned}&\frac{l}{K}\frac{\|f(a+h)-f(a)-T(h)\|_N}{\|h\|_M}\leqslant\frac{\|f(a+h)-f(a)-T(h)\|_n}{\|h\|_m}\leqslant\\&\leqslant\frac{L}{k}\frac{\|f(a+h)-f(a)-T(h)\|_N}{\|h\|_M}.\end{aligned} \tag{12.700}$$

Il est donc possible, pour démontrer la différentiabilité ou pour calculer la différentielle, d'utiliser le critère (11.454) avec une norme au choix. Parfois c'est utile.

12.23.9 Prouver qu'une fonction n'est pas différentiable

Chacun des points du théorème 12.262 est en soi un critère pour montrer qu'une fonction n'est pas différentiable en un point.

12.23.9.1 Continuité

Le premier critère à vérifier est donc la continuité. Si une fonction n'est pas continue en un point, alors elle n'y sera pas différentiable. Pour rappel, la continuité en a se teste en vérifiant si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

12.23.9.2 Linéarité

Un second test est la linéarité de la dérivée directionnelle par rapport à la direction : l'application $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial u}(a)$ doit être linéaire, sinon df_a n'existe pas.

Exemple 12.275.
Examinons la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{12.701}$$

Prenons $u=(u_1,u_2)$ et calculons la dérivée de f dans la direction de u au point $(0,0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(tu_1,tu_2)-f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\frac{tu_1t^2u_2^2}{t^2u_1^2+t^4u_2^4}\right) \\ &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{u_1u_2^2}{u_1^2+t^2u_2^4}\right) \\ &= \begin{cases} \dfrac{u_2^2}{u_1} & \text{si } u_1\neq 0 \\ 0 & \text{si } u_1=0. \end{cases} \end{aligned} \tag{12.702}$$

Cette application n'est pas linéaire par rapport à u. En effet, notons

$$\begin{aligned} A\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \frac{\partial f}{\partial u}(0,0), \end{aligned} \tag{12.703}$$

et vérifions que pour tout u et v dans $\mathbb{R}^n$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, nous ayons $A(\lambda u)=\lambda A(u)$ et $A(u+v)=A(u)+A(v)$. La première égalité est vraie, parce que

$$A(\lambda u) = A(\lambda u_1,\lambda u_2) = \frac{\lambda^2u_2^2}{\lambda u_1} = \lambda\frac{u_2^2}{u_1} = \lambda A(u). \tag{12.704}$$

Mais nous avons par exemple

$$A\big((0,1)+(2,3)\big) = A(2,4) = \frac{16}{2} = 8, \tag{12.705}$$

tandis que

$$A(0,1)+A(2,3) = 0+\frac{9}{2}\neq 8. \tag{12.706}$$

La fonction f n'est donc pas différentiable en $(0,0)$, parce que la candidate différentielle, $df_{(0,0)}(u)=\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$, n'est même pas linéaire.

△

Voici une autre façon de traiter la fonction de l'exemple 12.275.

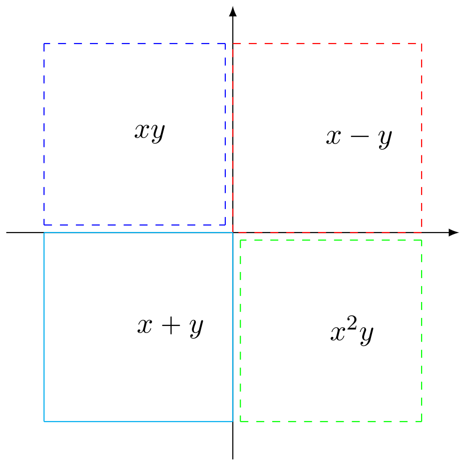


FIGURE 12.11 – La fonction de l'exemple 12.276.

Exemple 12.276.
La figure 12.11 représente le domaine d'une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et sur chacune des parties, elle est définie différemment.

L'expression de f est ici

$$f(x,y) = \begin{cases} xy & \text{si } x < 0 \text{ et } y > 0\\ x-y & \text{si } x \geqslant 0 \text{ et } y \geqslant 0\\ x^2y & \text{si } x > 0 \text{ et } y < 0\\ x+y & \text{sinon.} \end{cases} \tag{12.707}$$

On note que les deux axes forment une zone à problèmes. La zone hors des axes est un ouvert sur lequel f est différentiable car composée de polynômes. Analysons chacun des points de la forme (a,b) dans la zone à problèmes (c'est-à-dire si $ab = 0$).

(i) **Si** $a = 0$ **et** $b > 0$ Un tel point $(0,b)$ est sur l'axe vertical, dans la moitié supérieure. Pour calculer la limite de f en ce point, on peut restreindre notre étude au demi-plan ouvert $y > 0$, ce qui revient à comparer la limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ y>0\\ x\geqslant 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ y>0\\ x\geqslant 0}} x - y = 0 - b = -b$$

avec la limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ y>0\\ x<0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ y>0\\ x<0}} xy = 0b = 0$$

qui sont différentes puisque b est supposé non nul.

Conclusion : f n'est pas continue en un point du type $(0,b)$ avec $b > 0$.

(ii) **Si** $a = 0$ **et** $b < 0$ Un tel point $(0,b)$ est sur l'axe vertical, dans la moitié inférieure. Pour calculer la limite de f en ce point, on peut restreindre notre étude au demi-plan ouvert $y < 0$, ce qui revient à comparer la limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ y<0\\ x\geqslant 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ y<0\\ x\geqslant 0}} x^2y = 0^2b = 0$$

avec la limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ y<0\\ x<0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ y<0\\ x<0}} x + y = 0 + b = b$$

qui sont différentes puisque b est supposé non nul.

Conclusion : f n'est pas continue en un point du type $(0,b)$ avec $b < 0$.

(iii) **<u>Si $a > 0$ et $b = 0$</u>** Un tel point $(a, 0)$ est sur l'axe horizontal, dans la moitié droite. Pour calculer la limite de f en ce point, on peut restreindre notre étude au demi-plan ouvert $x > 0$, ce qui revient à comparer la limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ x>0\\ y\geqslant 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ x>0\\ y\geqslant 0}} x - y = a - 0 = a$$

avec la limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ x>0\\ y<0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ x>0\\ y<0}} x^2 y = a^2 0 = 0$$

qui sont différentes puisque a est supposé non nul.
Conclusion : f n'est pas continue en un point du type $(a, 0)$ avec $a > 0$.

(iv) **<u>Si $a < 0$ et $b = 0$</u>** Un tel point $(a, 0)$ est sur l'axe horizontal, dans la moitié gauche. Pour calculer la limite de f en ce point, on peut restreindre notre étude au demi-plan ouvert $x < 0$, ce qui revient à comparer la limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ x<0\\ y>0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ x<0\\ y>0}} xy = a0 = 0$$

avec la limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ x<0\\ y\leqslant 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,0)\\ x<0\\ y\leqslant 0}} x + y = a + 0 = a$$

qui sont différentes puisque a est supposé non nul.
Conclusion : f n'est pas continue en un point du type $(a, 0)$ avec $a < 0$.

(v) **<u>Si $a = 0$ et $b = 0$</u>** Le cas du point $(0, 0)$ est particulier, puisque il est adhérent aux quatre composantes du domaine où la fonction est définie différemment. Pour étudier la continuité, il faut donc étudier quatre limites. Ces limites ont déjà été étudiées ci-dessus et valent toutes 0, ce qui prouve la continuité de f en $(0, 0)$.
En ce qui concerne la différentiabilité, on sait qu'il est nécessaire que toutes les dérivées directionnelles existent. Calculons la dérivée dans la direction $(0, 1)$ (au point $(0, 0)$) :

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f((0,0) + t(0,1)) - f(0,0)}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(0,t)}{t} = \ldots$$

qu'on sépare en deux cas, car $f(0, t)$ possède une formule différente si $t < 0$ ou si $t \geqslant 0$:

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(0,t)}{t} = \begin{cases} \lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \frac{f(0,t)}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \frac{0+t}{t} = 1 \\ \lim_{\substack{t\to 0\\ t\geqslant 0}} \frac{f(0,t)}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\geqslant 0}} \frac{0-t}{t} = -1 \end{cases}$$

ce qui prouve que la limite n'existe pas, donc que la dérivée directionnelle n'existe pas, et finalement que la fonction n'est pas différentiable.
Conclusion : La fonction donnée est continue hors des axes et au point $(0, 0)$, mais discontinue partout ailleurs sur les axes. Elle est différentiable hors des axes, mais ne l'est pas sur les axes.

△

12.23.9.3 Cohérence des dérivées partielles et directionnelle

Dans la pratique, nous pouvons calculer $\partial_u f(a)$ pour une direction u générale, et puis en déduire $\partial_x f$ et $\partial_y f$ comme cas particuliers en posant $u = (1, 0)$ et $u = (0, 1)$. Une chose incroyable, mais pourtant possible est qu'il peut arriver que

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) \neq \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) u_i. \tag{12.708}$$

Ceci se produit lorsque f n'est pas différentiable en a.

12.23.9.4 Un candidat dans la définition (marche toujours)

Lorsqu'une fonction est donnée, un candidat différentielle au point (a_1, a_2) est souvent assez simple à trouver en un point :

$$T(u_1, u_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)u_2. \tag{12.709}$$

L'application T est la candidate différentielle en ce sens que si la différentielle existe, alors elle est égale à T. Ensuite, il faut vérifier si

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{f(x, y) - f(a_1, a_2) - T\big((x, y) - (a_1, a_2)\big)}{\|(x, y) - (a_1, a_2)\|} = 0 \tag{12.710}$$

ou non. Si oui, alors la différentielle existe et $df_{(a,b)}(u) = T(u)$, sinon [105], la différentielle n'existe pas.

Attention : dans la ZAP, les dérivées partielles $\partial_x f$ et $\partial_y f$ ne peuvent en général pas être calculées en utilisant les règles de calcul (c'est bien pour ça que la ZAP est une zone à problèmes). Il faut d'office utiliser la définition

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t}, \tag{12.711}$$

et la définition correspondante pour $\partial_y f$.

Conclusion

Soient $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, et $a \in \mathrm{Int}(A)$. Si f est différentiable en a,

$$(df_a(e_j))_i = d(f_i)_a(e_j) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) = [Jac(f)_{|a}]_{ij} \tag{12.712}$$

et la matrice de l'application linéaire df_a est la matrice jacobienne $m \times n$ de f en a notée $Jac(f)_{|a}$.

12.23.10 Gradient

Définition 12.277.
*Soit f une fonction différentiable de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$. On appelle **gradient** de f la fonction ∇f : $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de composantes*

$$\partial_1 f, \ldots, \partial_m f.$$

*Soit f une fonction de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$, $f(a) = (f_1(a), \ldots, f_n(a))^T$. On appelle **matrice jacobienne** de f la fonction $J(f) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ définie par*

$$a \mapsto \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \ldots & \partial_m f_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_n(a) & \ldots & \partial_m f_n(a) \end{pmatrix} \tag{12.713}$$

12.23.11 Linéarité

La proposition suivante signifie que la différentiation est une opération linéaire sur l'ensemble des fonctions différentiables.

Proposition 12.278.
Soient f et g deux fonctions de $U \subset \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ différentiables au point $a \in U$, et soit λ dans $\mathbb{R}$. Alors les fonctions $f + g$ et λf sont différentiables au point a et on a

$$\begin{aligned} d(f + g)(a) &= df(a) + dg(a), \\ d(\lambda f)(a) &= \lambda df(a), \end{aligned} \tag{12.714}$$

105. y compris si la limite (12.710) n'existe même pas.

Démonstration.

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0_m}\frac{\|(f(a+h)+g(a+h))-(f(a)+g(a))-df(a).h-dg(a).h\|_n}{\|h\|_m}\leqslant\\&\lim_{h\to 0_m}\frac{\|f(a+h)-f(a)-df(a).h\|_n}{\|h\|_m}+\lim_{h\to 0_m}\frac{\|g(a+h)-g(a)-dg(a).h\|_n}{\|h\|_m}=0.\end{aligned}\tag{12.715}$$

De même on démontre la propriété $d(\lambda f)(a)=\lambda df(a)$. □

12.24 Produit

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$. Nous notons $f\cdot g$ la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ donnée par le produit scalaire point par point, c'est-à-dire

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)\tag{12.716}$$

pour tout $x\in\mathbb{R}^m$. Le point dans le membre de droite est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$. Le cas particulier $n=1$ revient au produit usuel de fonctions :

$$(fg)(x)=f(x)g(x).\tag{12.717}$$

Lemme 12.279.
Si f et g sont des fonctions différentiables sur $\mathbb{R}^m$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors la fonction produit fg est également différentiable et

$$(dfg)_a=g(a)fd_a+f(a)dg_a\tag{12.718}$$

au sens où pour chaque u dans $\mathbb{R}^m$,

$$(dfg)_a(u)=g(a)df_a(u)+f(a)dg_a(u).\tag{12.719}$$

Démonstration. Ce que nous devons faire pour vérifier la formule 12.718, c'est de vérifier le critère (11.454) en remplaçant f par fg et $T(h)$ par $g(a)df(a).h+f(a)dg(a).h$.

Ce que nous avons au numérateur est

$$\begin{aligned}\clubsuit&=(fg)(a+h)-(fg)(a)-g(a)df(a).h-f(a)dg(a).h\\&=f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)-g(a)df(a).h-f(a)dg(a).h.\end{aligned}\tag{12.720}$$

Maintenant, nous allons faire apparaitre $\big(f(a+h)-f(a)-df(a)\big)g(a+h)$ en ajoutant et soustrayant ce qu'il faut pour conserver $\clubsuit$:

$$\begin{aligned}\clubsuit=&\big(f(a+h)-f(a)-df(a).h\big)g(a+h)\\&+f(a)g(a+h)+g(a+h)df(a).h\\&-f(a)g(a)-g(a)df(a).h-f(a)dg(a).h.\end{aligned}\tag{12.721}$$

Nous mettons maintenant $f(a)$ et $fd(a).h$ en évidence là où c'est possible :

$$\begin{aligned}\clubsuit=&\big(f(a+h)-f(a)-df(a).h\big)g(a+h)\\&+f(a)\big(g(a+h)-g(a)-dg(a).h\big)\\&+\big(g(a+h)-g(a)\big)df(a).h.\end{aligned}\tag{12.722}$$

Nous devons maintenant considérer la limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|\clubsuit\|}{\|h\|}.\tag{12.723}$$

Étant donné que f et g sont différentiables, les deux premiers termes sont nuls :

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\big(f(a+h)-f(a)-df(a).h\big)}{\|h\|}g(a+h)=0\\\lim_{h\to 0}f(a)\frac{\big(g(a+h)-g(a)-dg(a).h\big)}{\|h\|}=0.\end{aligned}\tag{12.724}$$

En ce qui concerne le troisième terme, en utilisant la norme d'une application linéaire, nous avons

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|df(a).h\|}{\|h\|}\leqslant \sup_{h\in\mathbb{R}^m}\frac{\|df(a).h\|}{\|h\|}=\|df(a)\|, \tag{12.725}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \lim_{h\to 0}\|g(a+h)-g(a)\|\frac{\|df(a).h\|\|h\|}{\|h\|}\\ &\leqslant \lim_{h\to 0}\|g(a+h)-g(a)\|\|df(a)\|=0 \end{aligned} \tag{12.726}$$

parce que g est continue (la limite du premier facteur est nulle tandis que la norme de $df(a)$ est un nombre constant). Nous avons donc bien prouvé que la formule (12.718) est la différentielle de fg au point a. □

Ce résultat se généralise pour des fonctions f et g de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ dans la proposition suivante qui généralise tout en même temps la proposition 12.175.

Proposition 12.280.
Soient f et g deux fonctions de $U\subset\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ différentiables au point $a\in U$. Alors la fonction $f\cdot g$ est différentiable au point a et on a

$$d(f\cdot g)(a)=g(a)\cdot df(a)+f(a)\cdot dg(a) \tag{12.727}$$

au sens où

$$d(f\cdot g)_a(u)=g(a)\cdot\big(df_a(u)\big)+f(a)\cdot\big(dg_a(u)\big) \tag{12.728}$$

pour tout $u\in\mathbb{R}^m$.

Démonstration. La preuve du cas $n=1$ est déjà faite ; c'est la formule (12.718). Pour le cas général $n\geqslant 2$, nous passons aux composantes en nous rappelant que

$$(f\cdot g)(a)=\sum_{i=1}^n f_i(a)g_i(a)=\sum_{i=1}^n(f_ig_i)(a). \tag{12.729}$$

En utilisant la linéarité de la différentiation, nous nous réduisons donc au cas des produits f_ig_i qui sont des fonctions de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} d(f\cdot g)(a) &= d\left(\sum_{i=1}^n f_ig_i\right)(a)\\ &=\sum_{i=1}^n\big(df_i(a)g_i(a)+f_i(a)dg_i(a)\big)\\ &=g(a)\cdot df(a)+f(a)\cdot dg(a). \end{aligned} \tag{12.730}$$

Ceci termine la preuve. □

12.24.1 Difficulté d'ordre supérieur

12.281.
Il serait tentant de faire une récurrence sur le lemme 12.279 pour dire que si f et g sont de classe C^p, alors le produit fg est également de classe C^p, parce que la formule de $d(fg)$ contient des produits de fonctions de classe C^p et C^{p-1}.

Le problème est que le lemme 12.279 est énoncé et prouvé pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors que déjà la formule

$$d(fg)=gdf+fdg \tag{12.731}$$

contient le produit de $g\colon E\to\mathbb{R}$ par $df\colon E\to\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$. Lorsque nous montons dans les différentielles, la situation empire, et les produits dont sont composés les formules sont réellement à définir…

Oublions un instant les questions de régularité, et calculons sans ménagement, pour voir ce qu'il se passe. Nous considérons un espace vectoriel E ainsi que des fonctions $f\colon E \to \mathbb{R}$ et $g\colon E \to V$ où V est un autre espace vectoriel.

Nous avons

$$d(fg)_a(u) = df_a(u)g(a) + f(a)dg_a(u). \tag{12.732}$$

Les deux termes sont des produits $\mathbb{R} \times V \to \mathbb{R}$. Montons un coup :

$$d(gdf)_a(u) = \frac{d}{dt}\Big[(gdf)(a+tu)\Big]_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big[g(a+tu)df_{a+tu}\Big]_{t=0} = dg_a(u)df_a + g(a)(d^2f)_a(u). \tag{12.733}$$

Un autre pour voir comment ça se passe plus haut :

$$d(dfdg)_a(u) = \frac{d}{dt}\Big[(dfdg)(a+tu)\Big]_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big[df_{a+tu}dg_{a+tu}\Big]_{t=0} = (d^2f)_a(u)dg_a + df_a(d^2g)_a(u). \tag{12.734}$$

Là déjà vous noterez que nous sommes passés par le produit

$$df_{a+tu}df_{a+tu} \tag{12.735}$$

qui pour chaque t est un produit $\mathcal{L}(E,\mathbb{R}) \times \mathcal{L}(E,V)$ que nous n'avons pas réellement défini.

En continuant le calcul ainsi nous trouvons par exemple

$$\begin{aligned}(d^3fg)_a(u) = d^3f_a(u)g(a) &+ d^2f_adg_a(u)\\ &+ d^2f_a(u)dg_a + df_ad^2g_a(u)\\ &+ d^2f_a(u)dg_a + df_a(d^2g)_a(u)\\ &+ df_a(u)d^2g_a + f(a)(d^3g)_a(u).\end{aligned} \tag{12.736}$$

Vous noterez que cette formule contient trois termes que nous aurions eu envie de noter d^2fdg. Or ces trois termes ne sont pas identiques : deux sont $d^2f_a(u)dg_a$ et un est $(d^2f)_adg_a(u)$.

12.24.2 Solution : produit tensoriel

Afin de donner un sens à tous les produits, nous allons passer par les produits tensoriels. Nous avons déjà le théorème 11.192 qui fait pratiquement tout.

Proposition 12.282 ([1]).
Soient des fonctions $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^p. Alors fg est de classe C^p.

Démonstration. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{R}\otimes\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ 1\otimes 1 &\mapsto 1\end{aligned} \tag{12.737}$$

dont nous avons déjà parlé dans le lemme 11.164. En utilisant la notation $\tilde{\otimes}$ de la définition 11.188, nous avons

$$fg = \varphi \circ (f\tilde{\otimes}g). \tag{12.738}$$

La proposition 11.192 nous dit que $f\tilde{\otimes}g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\otimes\mathbb{R}$ est de classe C^p. Vu que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, la proposition 11.185 nous dit que $\varphi\circ(f\tilde{\otimes}g)$ est encore de classe C^p.

Et voilà. □

12.24.3 Formes bilinéaires

Nous avons aussi une formule importante pour la différentielle des formes bilinéaires.

Lemme 12.283.
Toute application bilinéaire

$$\begin{aligned} B\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^p \\ B(a_1, a_2) &= a_1 \star a_2 \end{aligned} \tag{12.739}$$

est différentiable en tout point (a_1, a_2) *de* $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$*, et on a*

$$dB(a_1, a_2).(h_1, h_2) = h_1 \star a_2 + a_1 \star h_2.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} &\frac{\|B(a_1+h_1, a_2+h_2) - B(a_1, a_2) - (h_1 \star a_2 + a_1 \star h_2)\|_p}{\|(h_1, h_2)\|_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n}} = \\ &= \frac{\|(a_1+h_1) \star (a_2+h_2) - a_1 \star a_2 - (h_1 \star a_2 + a_1 \star h_2)\|_p}{\|(h_1, h_2)\|_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n}} = \spadesuit \end{aligned} \tag{12.740}$$

on rajoute et on enlève la quantité $(a_1 + h_1) \star a_2$ dans le numérateur, et on obtient

$$\begin{aligned} \spadesuit &= \frac{\|(a_1+h_1) \star h_2 + h_1 \star a_2 - (h_1 \star a_2 + a_1 \star h_2)\|_p}{\|(h_1, h_2)\|_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n}} = \\ &= \frac{\|h_1 \star h_2\|_p}{\|(h_1, h_2)\|_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n}} \leqslant C \frac{\|h_1\|_m \|h_2\|_n}{\|(h_1, h_2)\|_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n}} \\ &\leqslant C \frac{\|(h_1, h_2)\|^2_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n}}{\|(h_1, h_2)\|_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n}} = C \|(h_1, h_2)\|_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n}. \end{aligned} \tag{12.741}$$

Si on prend la limite de cette expression pour $(h_1, h_2) \to (0_m, 0_n)$ on obtient 0, donc la preuve est complète. À noter, que dans l'avant-dernier passage on a utilisé la continuité des applications linéaires $\mathtt{proj}_m : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $\mathtt{proj}_n : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui à chaque point (a_1, a_2) de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ associent a_1 et a_2 respectivement. □

Proposition 12.284.
Soit V *et* W *deux espaces vectoriels et* $\varphi\colon V \to W$ *un isomorphisme. Soit* $f\colon \mathbb{C} \to V$ *une application telle que* $\varphi \circ f\colon \mathbb{C} \to W$ *soit différentiable.*

Alors f *est différentiable et* $df = \varphi^{-1} \circ d(\varphi \circ f)$.

Démonstration. Si T est la différentielle de $\varphi \circ f$ au point z nous avons

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{(\varphi \circ f)(z+h) - (\varphi \circ f)(z) + T(h)}{h} = 0. \tag{12.742}$$

En appliquant φ aux deux membres, et en permutant avec la limite (parce que φ est continue),

$$\varphi \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z) + \varphi^{-1} T(h)}{h} = 0, \tag{12.743}$$

ce qui signifie que f est différentiable et que $df = \varphi^{-1} \circ T = \varphi^{-1} \circ d(\varphi \circ f)$. □

12.25 Différentielle de fonction composée

Une importante règle de différentiation est la règle de différentiation d'une fonction composée (*chain rule* dans les livres anglais et américains). Cette règle généralise la règle de dérivation pour fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Cette règle a déjà été donnée dans le théorème 11.183, mais si vous avez seulement envie d'entendre parler de $\mathbb{R}^n$, vous pouvez lire le lemme 12.285 suivi de la proposition 12.287.

Le lemme suivant est essentiellement une reformulation du lemme 11.178.

Lemme 12.285.
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$. La fonction $f : U \to \mathbb{R}^n$ est différentiable au point a dans U, si et seulement si il existe une fonction $\sigma_f : U \times U \to \mathbb{R}^n$ telle que

$$
\begin{aligned}
\sigma_f(a,a) &= \lim_{x\to a}\sigma_f(a,x) = 0 && (12.744a)\\
f(x) &= f(a) + T(x-a) + \sigma_f(a,x)\|x-a\|_m, && (12.744b)
\end{aligned}
$$

pour une certaine application linéaire $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Si les conditions (12.744) sont satisfaites alors T est la différentielle de f en a. En effet, dans ce cas nous avons

$$f(a+h) = f(a) + T(h) + \sigma_f(a,a+h)\|h\|, \tag{12.745}$$

et la condition (11.454) devient

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|\sigma_f(a,a+h)\|\|h\|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0}\|\sigma_f(a,a+h)\| = 0 \tag{12.746}$$

Si f est différentiable au point a il suffit de prendre $T = df(a)$ et

$$\sigma_f(a,x) = \frac{f(x) - f(a) - df(a).(x-a)}{\|x-a\|_m}.$$

□

Remarque 12.286.
La fonction $\sigma_f(a,x)\|x-a\|_m$ est ce qui avait été appelé $\epsilon(h)$ sur la figure 12.10.

Proposition 12.287.
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soient $f : U \to V$ et $g : V \to \mathbb{R}^p$ deux fonctions différentiables respectivement au point a dans U et $b = f(a)$ dans V. Alors la fonction composée $g \circ f : U \to \mathbb{R}^p$ est différentiable au point a et

$$d(g\circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a. \tag{12.747}$$

Démonstration. En tenant compte du lemme 12.285 on peut écrire

$$
\begin{aligned}
f(a+h) - f(a) &= df_a(h) + \sigma_f(a,a+h)\|h\|_m, && \forall h \in U\setminus\{0\}, && (12.748a)\\
g(b+k) - g(b) &= dg_b(k) + \sigma_g(b,b+k)\|k\|_n, && \forall k \in V\setminus\{0\}. && (12.748b)
\end{aligned}
$$

On sait que $f(a) = b$ et que $f(a+h)$ est un élément de V et $f(a+h) = f(a) + k$ pour $k = df(a).h + \sigma_f(a,a+h)\|h\|_m$. Par substitution dans la deuxième équation on obtient

$$
\begin{aligned}
&g\big(f(a+h)\big) - g\big(f(a)\big)\\
&\quad= dg_{f(a)}\Big(df_a(h) + \sigma_f(a,a+h)\|h\|_m\Big)\\
&\qquad+ \sigma_g\left(f(a), f(a+h)\right)\left\|df_a(h) + \sigma_f(a,a+h)\|h\|_m\right\|_n\\
&\quad= g\circ f(a+h) - g\circ f(a)\\
&\quad= dg_{f(a)}\circ df_a(h)\\
&\qquad+ \|h\|_m\Big[dg_{f(a)}\sigma_f(a,a+h)\\
&\qquad+ \sigma_g\left(f(a), f(a+h)\right)\Big\|df_a\frac{h}{\|h\|_m} + \sigma_f(a,a+h)\Big\|_n\Big],
\end{aligned}
\tag{12.749}
$$

donc

$$(g\circ f)(a+h) - (g\circ f)(a) = dg_f(a)\circ df_a(h) + S(a,a+h)\|h\|_m \tag{12.750}$$

où S représente le contenu du dernier grand crochet. Il ne reste plus qu'à prouver que $S(a,a+h)$ est $o(\|h\|_m)$. En tenant compte du fait que $\sigma_f(a,a+h)$ et $\sigma_g\big(f(a),f(a+h)\big)$ sont $o(\|h\|_m)$,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0_m}\frac{S(a,a+h)}{\|h\|_m}&=\lim_{h\to 0_m}\frac{dg_{f(a)}\sigma_f(a,a+h)}{\|h\|_m}+\\+\lim_{h\to 0_m}&\frac{\sigma_g\big(f(a),f(a+h)\big)\left\|df_a\frac{h}{\|h\|_m}+\sigma_f(a,a+h)\right\|_n}{\|h\|_m}=0.\end{aligned}\tag{12.751}$$

□

Remarque 12.288.
Note : la formule (12.747) est à comprendre de la façon suivante. Si $u\in\mathbb{R}^m$, alors

$$d(g\circ f)_a(u)=\underbrace{dg_{f(a)}}_{\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)}\Big(\underbrace{df_a(u)}_{\in\mathbb{R}^n}\Big)\in\mathbb{R}^p.\tag{12.752}$$

Le lemme suivant sert à prouver les théorèmes 15.8 et 20.75. Il est fondamentalement la raison de la formule définissant l'intégrale d'une forme sur un chemin (définition 20.50).

Lemme 12.289 ([1])**.**
Soient un espace vectoriel normé F de dimension finie, ainsi que E, un espace vectoriel normé. Nous considérons un chemin de classe C^1

$$\gamma\colon [a,b]\to E\tag{12.753}$$

et une application de classe C^1

$$f\colon E\to F.\tag{12.754}$$

Si $g=f\circ\gamma$, alors

$$g'(t)=(df)_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)\tag{12.755}$$

pour tout $t\in[a,b]$.

Démonstration. Nous écrivons la dérivée de g de la façon suivante :

$$\begin{aligned}g'(t)&=\frac{d}{ds}\Big[g(t+s)\Big]_{s=0}&&(12.756a)\\&=\frac{d}{ds}\Big[(f\circ\gamma)(t+s)\Big]_{s=0}&&(12.756b)\\&=d(f\circ\gamma)_t(1)&&(12.756c)\\&=(df)_{\gamma(t)}\big(d\gamma_t(1)\big)&&(12.756d)\\&&&(12.756e)\end{aligned}$$

Justifications :

— Pour (12.756c) : les formules (12.265). Notez que le 1 à qui s'applique la différentielle de $f\circ\gamma$ est le vecteur de $\mathbb{R}$ qui est multiplié par s dans l'expression $(f\circ\gamma)(t+s)$.

— Pour (12.756d) : la différentiation de fonctions composées de la proposition 12.287.

Mais

$$d\gamma_t(1)=\frac{d}{ds}\Big[\gamma(t+s)\Big]_{s=0}=\gamma'(t).\tag{12.757}$$

En remettant au bout de (12.756), nous obtenons le résultat. □

12.25.1 Fonctions composées

Cette façon de voir la différentielle nous permet de jeter un nouveau regard sur la formule de différentiation des fonctions composées. Soient

$$\begin{aligned} f &\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n \\ g &\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{12.758}$$

et $h\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(u) = g\big(f(u)\big) = (g \circ f)(u). \tag{12.759}$$

Nous allons noter x les coordonnées de $\mathbb{R}^p$, a un point de $\mathbb{R}^p$ et u, un vecteur de $\mathbb{R}^p$ accroché au point a. Pour $\mathbb{R}^n$, les notations seront y pour les coordonnées, b pour un point de $\mathbb{R}^n$ et v, un vecteur « accroché » au point b.

Nous avons

$$dg_b(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_i}(b) dy_i(v). \tag{12.760}$$

Ici $dy_i(v)$ signifie la $i$ème composante de v. C'est simplement v_i. Cette formule étant valable pour tout point $b \in \mathbb{R}^n$ et pour tout vecteur v, nous pouvons l'écrire en particulier pour

$$\begin{cases} b = f(a) & (12.761a) \\ v = df_a(u). & (12.761b) \end{cases}$$

Cela donne

$$dg_{f(a)}\big(df_a(u)\big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_i}\big(f(a)\big) dy_i\big(df_a(u)\big). \tag{12.762}$$

Mais

$$df_a(u) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) dx_j(u), \tag{12.763}$$

donc la $i$ème composante de ce vecteur est

$$\big(df_a(u)\big)_i = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) dx_j(u). \tag{12.764}$$

En remplaçant $dy_i\big(df_a(u)\big)$ par cela dans l'expression (12.762), nous trouvons

$$dg_{f(a)}\big(df_a(u)\big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_i}\big(f(a)\big) \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) dx_j(u). \tag{12.765}$$

Nous pouvons vérifier que c'est la différentielle de $g \circ f$ au point a, appliquée au vecteur u. En effet

$$d(g \circ f)_a(u) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}(a) dx_j(u), \tag{12.766}$$

tandis que, par la dérivation de fonctions composées,

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_i}\big(f(a)\big) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a). \tag{12.767}$$

Au final, ce que nous avons prouvé est que

$$d(g \circ f)_a(u) = dg_{f(a)}\big(df_a(u)\big). \tag{12.768}$$

12.26 Autres trucs sur la différentielle

12.26.1 Différentielle et dérivées partielles

Étant donné que pour tout vecteur u dans $\mathbb{R}^m$ on a $\partial_u f(a) = \nabla f(a) \cdot u$, le gradient de f nous donne la direction dans laquelle la croissance de f est maximale.

La matrice jacobienne calculée au point a est la matrice associée canoniquement à l'application linéaire $df_a : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

12.26.2 Plan tangent

On a dit au début de cette section que si f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ alors le graphe de f est surface à deux paramètres et que l'application affine tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$ est un plan. Maintenant on sait que ce plan est celui d'équation

$$T_a(x,y) = f(a_1,a_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)(x-a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)(y-a_2). \tag{12.769}$$

Le plan tangent au graphe de f au point a est le graphe de cette fonction T_a.

Proposition 12.290.
Il existe des fonctions différentiables dont les dérivées partielles ne sont pas continues.

Retenez que si vous obtenez que les dérivées partielles d'une fonction ne sont pas continues, vous ne pouvez pas immédiatement en conclure que la fonction ne sera pas différentiable.

12.26.3 Notes idéologiques quant au concept de plan tangent

Notons G, le graphe d'une fonction f, c'est-à-dire

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } z = f(x,y)\}. \tag{12.770}$$

Première affirmation : si $\gamma\colon \mathbb{R} \to G$ est une courbe telle que $\gamma(0) = \big(a, f(a)\big)$, alors $\gamma'(0) \in \mathbb{R}^n$ est dans le plan tangent à G au point $\big(a, f(a)\big)$.

Plus fort : tous les éléments du plan tangent sont de cette forme.

Le plan tangent à G en un point $x \in G$ est donc constitué des vecteurs vitesse de tous les chemins qui passent par x.

Prenons maintenant S, une courbe de niveau de G, c'est-à-dire

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } f(x,y) = C\}. \tag{12.771}$$

Si nous prenons un chemin dans G qui est, de plus, contraint à S, c'est-à-dire tel que $\gamma(t) \in S$, alors $\gamma'(0)$ sera tangent à G (ça, on le savait déjà), mais en plus, $\gamma'(0)$ sera tangent à S, ce qui est logique.

La morale est que si vous prenez un chemin qui se ballade dans n'importe quoi, alors la dérivée du chemin sera un vecteur tangent à ce n'importe quoi.

En outre, si $\gamma(t) \in S$ et $\gamma(0) = a$, alors

$$\langle \nabla f(a), \gamma'(0) \rangle = 0, \tag{12.772}$$

c'est-à-dire que le vecteur tangent à la courbe de niveau est perpendiculaire au gradient. Cela est intuitivement logique parce que la tangente à la courbe de niveau correspond à la direction de *moins* grande pente.

12.26.4 Gradient et recherche du plan tangent

Nous avons maintenant en main les concepts utiles pour trouver l'équation du plan tangent à une surface.

De la même manière que la tangente à une courbe était la droite de coefficient directeur donné par la dérivée, maintenant, le plan tangent à une surface est le plan dont les vecteurs directeurs sont les dérivées partielles :

La généralisation de l'équation (12.641) est

$$T_a(x) = f(a) + \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)(x-a)_k \tag{12.773}$$

Nous introduisons aussi souvent l'opérateur différentiel abstrait **nabla**, noté ∇ et qui est donné par le vecteur

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right). \tag{12.774}$$

Les égalités suivantes sont juste des notations, sommes toutes logiques, liées à ∇ :

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right), \tag{12.775}$$

et

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right). \tag{12.776}$$

Ce dernier est un élément de $\mathbb{R}^n$: chaque entrée est un nombre réel.

Définition 12.291.
Le vecteur gradient de f au point a est le vecteur donné par la formule (12.776).

La notation ∇ permet d'écrire la différentielle sous forme un peu plus compacte. En effet, la formule (12.671) peut être notée

$$df_a(u) = \langle \nabla f(a), u \rangle. \tag{12.777}$$

En utilisant ce produit scalaire, l'équation (12.773) peut se réécrire

$$T_a(x) = f(a) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x-a)^i = f(a) + \langle \nabla f(a), x-a \rangle. \tag{12.778}$$

Afin d'éviter les confusions, il est souhaitable de bien mettre les parenthèses et noter $(\nabla f)(a)$ au lieu de $\nabla f(a)$.

12.26.4.1 Plan tangent en dimension deux

Le plan T_a avec $a = (a_1, a_2)$ a pour équation dans $\mathbb{R}^3$:

$$z = f(a_1, a_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)\,(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)\,(y - a_2). \tag{12.779}$$

Définition 12.292.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en un point a. Le plan tangent *au graphe de f en $(a, f(a))$ est l'ensemble des points*

$$\begin{aligned} T_a f &= \{(x,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \text{ tel que } z = f(a) + df_a(x-a)\} \\ &= \{(x,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \text{ tel que } z = f(a) + \langle \nabla f(a), x-a \rangle\} \end{aligned}$$

Exemple 12.293.
Étudiez la continuité, la dérivabilité et la continuité de la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

(1) $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

(2) $x \mapsto \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(3) $x \mapsto \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(4) $x \mapsto \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Dans ces exercices, les fonctions données sont dérivables et à dérivée continue sur $\mathbb{R}_0$ car pour $a \in \mathbb{R}_0$, il existe toujours une boule autour de a dans laquelle la fonction est composée de fonctions dérivables (sin, $\frac{1}{x}$, ...). L'intérêt de l'exercice est donc d'établir (ou réfuter) la continuité et la dérivabilité en 0.

(1) Notons f cette fonction. f n'est pas continue en 0 car

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} 0 = 0 \neq f(0)$$

En particulier f n'est pas dérivable en 0 (et donc la continuité de sa dérivée n'a pas de sens en 0).

(2) Dans ce cas-ci, la limite « restreinte »

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

n'existe pas puisque, par exemple, pour la suite de terme général

$$x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

on a bien $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ mais

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = 1 \neq f(0)$$

puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(x_k) = 1$. Donc la fonction n'est pas continue.

(3) Montrons que la fonction, notée f, est continue en 0. Pour tout x réel, nous avons

$$0 \leqslant |f(x)| = |x| \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant |x|$$

ce qui montre que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ par la règle de l'étau.
Par ailleurs, f n'est pas dérivable en 0 car la limite

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

n'existe pas, comme on l'a vu précédemment.

(4) Montrons que cette fonction, notée f, est dérivable en 0 (ce qui prouvera qu'elle y est continue). Calculons

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

où la dernière égalité a été montrée à l'exercice précédent. Nous avons donc $f'(0) = 0$.
Par ailleurs, en utilisant les règles de calcul usuelles sur les dérivées, nous obtenons pour $x \neq 0$

$$f'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

qui est une fonction ne possédant pas de limite en 0 puisque, par exemple, si x_k est tel que

$$\frac{1}{x_k} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

alors la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, mais $f'(x_k)$ tend vers $+\infty$ lorsque $k \to +\infty$. La dérivée n'est donc pas continue en zéro.

$\triangle$

Exemple 12.294.
Dessiner les courbes de niveaux des fonctions suivantes. Représenter ensuite leur graphe dans l'espace. Donner l'équation du plan tangent en l'origine.

(1) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.
(2) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$.
(3) $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 8xy$.

Les courbes de niveau de l'exercice (3) sont les *ovales de Cassini* ; en particulier, la courbe de niveau 0 est la *lemniscate de Bernouilli*.

(1)
(2) $f(x) = \sqrt{x^2+y^2}$. Les courbes de niveau $f(x) = C$ sont des cercles (sauf $f(x) = 0$ qui se réduit à un point). Les sections horizontales étant des cercles, et le rayon de ces cercles augmentant linéairement, le graphe est une cône. Nous pouvons nous en convaincre en vérifiant par exemple que la droite $t \mapsto (t,0,t)$ est bien entièrement contenue dans $z = f(x,y)$.
Afin de déterminer la différentielle, nous calculons les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{12.780}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{12.781}$$

Pour le plan tangent, nous essayons d'utiliser la formule (12.779). Pour cela, nous devons trouver les dérivées partielles en zéro.
Il est vite vu que la formule (12.780) n'a pas de limite pour $(x,y) \to (0,0)$. Ceci *ne prouve pas* que la différentielle de f n'existe pas en $(0,0)$. L'existence de la différentielle implique la continuité de la fonction, et non de la différentielle elle-même. En effet, une différentielle peut exister en un point sans qu'elle soit la limite de la différentielle aux autres points. Nous avons vu par exemple, dans l'exercice 12.293(4), un exemple de fonction dérivable [106] en 0, mais dont la dérivée n'est pas continue en zéro.
Il ne suffit donc pas de calculer les limites de 12.780 et de 12.781 pour trouver la différentielle de f en $(0,0)$. Il n'est par contre pas très compliqué de remarquer que les dérivées partielles n'existent pas en $(0,0)$, par exemple parce que

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} \tag{12.782}$$

n'existe pas pour cause de limite différente pour $t > 0$ et $t < 0$. Il n'y a donc pas de plan tangent. Ceci est conforme à l'intuition : il n'y a pas de plan tangent à un cône en son sommet.
Nous pouvons faire une petite vérification du fait que le graphe est bien un cône : la droite reliant $(0,0,0)$ à $(x,y,\sqrt{x^2+y^2})$ est entièrement contenue dans le graphe de f. En effet si nous posons

$$\gamma(t) = (tx, ty, t\sqrt{x^2+y^2}), \tag{12.783}$$

pour tout t, nous avons $\gamma_z(t) = f\big(\gamma_x(t)^2 + \gamma_y(t)^2\big)$.

106. Pour rappel, en dimension un, la dérivée est *exactement* la notion de différentielle.

(3) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$. Les courbes de niveau $f(x,y)=C$ n'existent que pour $C\leqslant 1$, et ce sont des cercles
$$x^2+y^2=1-C. \tag{12.784}$$
Cette fois, le graphe est une coupole ce sphère. Nous allons en effet vérifier que l'arc de cercle centré en $(0,0,0)$ joignant se sommet $(0,0,1)$ à $(1,0,0)$ dans le plan $y=0$ est entièrement contenu dans le graphe de f. La symétrie de f sous les rotations dans le plan $x-y$ fait le reste. L'arc de cercle en question est le chemin
$$\gamma(t)=\big(1-t,0,\sqrt{1-(1-t)^2}\big). \tag{12.785}$$
Chaque point de ce chemin vérifie bien la relation
$$f\big(\gamma_x(t),\gamma_y(t)\big)=\gamma_z(t). \tag{12.786}$$
Le plan tangent à la coupole de sphère en $(0,0,1)$ est évidement horizontal. Nous nous attendons donc à trouver que la différentielle de f en $(0,0)$ est nulle. Simple calcul :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \tag{12.787}$$
et
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{2}\frac{-2y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}. \tag{12.788}$$
Évaluées en $(0,0)$, ce deux dérivées partielles sont nulles. Donc *si la différentielle existe* en $(0,0)$, elle sera nulle (voir l'expression (12.671)). Afin de voir qu'elle existe, il faut juste montrer que $df_{(0,0)}(x,y)=0$ fonctionne dans la définition 11.169.

(4) $f(x,y)=(x^2+y^2)^2-8xy$. La courbe de niveau zéro, en coordonnées polaires est donnée par
$$r=2\sqrt{\sin(2\theta)}. \tag{12.789}$$
Les dérivées partielles sont données par
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=4(x^2+y^2)x-8y\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)&=4(x^2+y^2)y-8x\end{aligned} \tag{12.790}$$

△

12.26.4.2 Plan tangent en dimension trois

Nous avons vu que, de la même façon qu'en deux dimensions nous avions l'approximation (12.399) d'une fonction par sa tangente, en trois dimensions nous avons l'approximation suivante d'une fonction de deux variables :
$$f(x,y)\simeq f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \tag{12.791}$$
lorsque (x,y) n'est pas trop loin de (a,b). Cela signifie que le graphe de f ressemble au graphe de la fonction $T_{(a,b)}$ donnée par
$$T_{(a,b)}(x,y)=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(x-a). \tag{12.792}$$
En notations compactes :
$$T_p(x)=f(p)+\nabla f(p)\cdot(x-p). \tag{12.793}$$
Le graphe de la fonction T_p sera le **plan tangent** au graphe de f au point p. L'équation du plan tangent sera donc
$$z-f(p)=\nabla f(p)\cdot(x-p). \tag{12.794}$$

Remarque 12.295.
Lorsque nous utilisons la notation vectorielle, la lettre « x » désigne le vecteur (x,y). Il faut être attentif. Dans un cas x est un vecteur dans l'autre c'est une composante d'un vecteur.

12.27 Jacobienne

12.27.1 Rappels et définitions

Dans cette section nous considérons des fonctions $f : D \to \mathbb{R}^m$ où $D \subset \mathbb{R}^n$, et un point $a \in \operatorname{Int} D$ où f est différentiable.

Remarque 12.296.
La définition de continuité (resp. différentiabilité) pour une fonction à valeurs vectorielles est celle introduite précédemment, et on remarque que pour avoir la continuité (resp. différentiabilité) de f en un point, il faut et il suffit que chacunes des composantes de $f = (f_1, \ldots, f_m)$, vues séparément comme fonctions à n variables et à valeurs réelles, soient continues (resp. différentiables) en ce point.

Définition 12.297.
*La **jacobienne** de f en a est la matrice de l'application linéaire donnée par la différentielle. Elle a de nombreuses notations*

$$J_f(a) = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial x_1, \ldots, x_m} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \tag{12.795}$$

*Autrement dit, c'est la matrice composée de l'ensemble des dérivées partielles de f. Le **jacobien** de f au point a est le déterminant de cette matrice.*

*Si $m = 1$, cette matrice ne contient qu'une ligne ; c'est donc un vecteur appelé le **gradient** de f au point a et noté $\nabla f(a)$.*

Remarque 12.298. (1) Si la fonction est supposée différentiable, calculer la jacobienne revient à connaitre la différentielle. En effet, par linéarité de la différentielle et par définition des dérivées partielles, nous avons

$$df_a(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

où $u = (u_1, \ldots, u_n)$ et où le membre de droite est un produit matriciel

(2) Remarquons que la jacobienne peut exister en un point donné sans que la fonction soit différentiable en ce point !

12.299.
Le théorème de différentiation de fonctions composées 12.287 peut également se lire au niveau des matrices jacobiennes. La matrice jacobienne de $g \circ f$ au point a est le produit matriciel des matrices jacobiennes de g et de f. Plus précisément, nous avons

$$J_{g\circ f}(a) = J_g\big(f(a)\big) J_f(a). \tag{12.796}$$

Remarquez que nous considérons la matrice jacobienne de g au point $f(a)$.

Dans le cas particulier où $m = 1$ et f est une fonction d'un intervalle I dans $\mathbb{R}^n$, dérivable au point a, on trouve que la fonction composée $g \circ f$ est dérivable au point a si g est différentiable, et alors

$$(g \circ f)'(a) = dg\,(f(a))\,.f'(a).$$

En fait, pour les fonctions d'une seule variable la dérivabilité coïncide avec la différentiabilité.

12.28 Fonctions de classe C^1

Soit f une fonction différentiable de U, ouvert de $\mathbb{R}^m$, dans $\mathbb{R}^n$. L'application différentielle de f est une application de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} df\colon \mathbb{R}^m &\to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)\\ a &\mapsto df_a \end{aligned} \tag{12.797}$$

Nous savons que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel normé avec la définition 4.29. Si T est un élément dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ alors la norme de T est définie par

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^m} \frac{\|T(x)\|_n}{\|x\|_m} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^m\\ \|x\|_m\leqslant 1}} \|T(x)\|_n.$$

Lorsqu'il existe un $M > 0$ tel que $\|df(a)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)} < M$ pour tout a dans U, nous disons que la différentielle de f est **bornée** sur U.

Définition 12.300.
Une application $f\colon V \to E$ entre deux espaces vectoriels normés est dite être de ***de classe*** C^1 *si son application différentielle $df\colon V \to \mathcal{L}(V, E)$ est continue*[107].

12.301.
Dans la suite, si $\{e_i\}$ est une base d'un espace vectoriel V, nous allons noter

$$\begin{aligned} \omega_i\colon V &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto x_i. \end{aligned} \tag{12.798}$$

Ce ω_i est ce qu'on appelle souvent e_i^*. Plus généralement, si I est le multiindice $(i_1, \ldots, i_l)$ nous notons $\omega_I \in \mathcal{L}^l(V, \mathbb{R})$ par

$$\begin{aligned} \omega_I\colon V^l &\to \mathbb{R}\\ (x^{(1)}, \ldots, x^{(l)}) &\mapsto x^{(1)}_{i_1} \ldots x^{(l)}_{i_l}. \end{aligned} \tag{12.799}$$

Ce seront nos formes multilinéaires de base.

Afin de garder des notations très explicites, nous ne pouvons pas écrire des formules comme

$$df_a = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\omega_i$$

parce que si f prend ses valeurs dans $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$, lorsqu'on écrit $df_a(v)$, il n'y a aucune raison à priori de vouloir que v soit pris par ω_i au lieu de $\partial_i f(a)$.

Nous introduisons donc un produit fait exprès pour dire que « c'est celui de droite qui prend ».

Définition 12.302 ([1])**.**
Si W est un espace vectoriel, nous définissons le produit $\times_n$ par

$$\begin{aligned} \times_1\colon W \times \mathcal{L}(V, \mathbb{R}) &\to \mathcal{L}(V, W)\\ (w \times_1 \alpha)(v) &= \alpha(v)w \end{aligned} \tag{12.800}$$

et par

$$\begin{aligned} \times_n\colon W \times \mathbb{R}_n &\to W_n\\ (w \times_n \alpha)(v) &= w \times_{n-1} \alpha(v) \end{aligned} \tag{12.801}$$

12.303.
Quelques précisions sur l'énoncé de la proposition 12.304. Lorsque nous parlons de $\partial_i f$, nous supposons donnée une base de V. Il n'y a aucune raison que la norme sur V soit adaptée à cette base. Nous allons donc utiliser une norme « euclidienne » adaptée à la base, et invoquer l'équivalence de toutes les normes pour dire que si une fonction est différentiable pour une norme elle l'est pour toutes les normes.

107. Sur $\mathcal{L}(V, E)$ nous considérons la topologie de la norme opérateur 11.50.

12.28.0.1 Différentielle et dérivées partielles

Proposition 12.304 ([272]).
Soient des espaces vectoriels normés de dimensions finies V et E ainsi qu'une application $f\colon V \to E$. Nous supposons que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existent sur un voisinage de $a \in V$ et qu'elles sont continues en a.

Alors

(1) l'application f est différentiable en a,

(2) la différentielle est donnée par

$$df_a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \times_1 \omega_j. \tag{12.802}$$

Démonstration. L'espace V a une norme que nous notons $\|.\|_V$; nous n'allons presque pas l'utiliser. Nous nommons $\{e_i\}$ la base de V sous-entendue lorsque nous parlons des dérivées partielles, et nous considérons la norme $\|\|$ sur V donnée par $\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ pour $x = \sum_i x_i e_i$. Toutes les normes et boules dont nous allons parler dans la suite seront par rapport à cette norme.

Nous posons $\epsilon > 0$. La continuité des dérivées partielles en a nous permet de considérer $\delta > 0$ tel que

$$\|\frac{\partial f}{\partial x_j}(s) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\| < \epsilon \tag{12.803}$$

pour tout $s \in B(a, \delta)$, et pour tous les j en même temps [108].

Soit $x \in B(a, \delta)$. Nous considérons les points

$$s_j = (x_1, \ldots, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n). \tag{12.804}$$

Précision : $s_n = x$.

(i) **Un peu de convexité** Nous montrons que le segment $[s_j, s_{j-1}]$ est dans $B(a, \delta)$. Nous avons $s_j - a = (x_1 - a_1, \ldots, x_j - a_j, 0, \ldots, 0)$, et donc

$$\|s_j - a\| \leqslant \|x - a\| < \delta, \tag{12.805}$$

et donc $s_j \in B(a, \delta)$ pour tout j. Vu que la sphère $B(a, \delta)$ est convexe [109], tout le segment entre s_j et s_{j-1} est dedans.

(ii) **Accroissements finis** En nous souvenant que x et a ont été fixés, nous considérons les fonctions intermédiaires suivantes :

$$\begin{cases} g_1(t) = f(f, a_2, \ldots, a_n) & (12.806a)\\ g_j(t) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n) & (12.806b)\\ g_n(t) = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, t). & (12.806c) \end{cases}$$

Elles vérifient en particulier $g_j(x_j) = f(s_j)$ et $g_j(a_j) = f(s_{j-1})$. Donc le théorème des accroissements finis 12.192 nous donne l'existence de τ_j entre x_j et a_j tel que

$$f(s_j) - f(s_{j-1}) = g_j(x_j) - g_j(a_j) = g_j'(\tau_j)(x_j - a_j). \tag{12.807}$$

(iii) **Dérivées partielles** Les fonctions g_j ont été construites de telle sorte à donner les dérivées partielles de f via une simple dérivation :

$$g_j'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_{j-1}, t_0, a_{j+1}, \ldots, a_n). \tag{12.808}$$

108. Ce qui peut n'être pas possible en dimension infine. Je dis ça comme ça, juste pour faire remarquer que cette proposition n'est peut-être pas vraie en dimension infine. Voir aussi l'exemple de la fonction (25.136).
109. Proposition 8.29.

Or lorsque[110] $t_0 \in [x_j, a_j]$, le point $(x_1, \ldots, x_{j-1}, t_0, a_{j+1}, \ldots, a_n)$ est dans $[s_j, s_{j-1}]$. Cela est le cas pour $t_0 = \tau_j$. Nous notons

$$\bar{s}_j = (x_1, \ldots, x_{j-1}, \tau_j, a_{j+1}, \ldots, a_n) \tag{12.809}$$

et nous avons

$$g_j'(\tau_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{s}_j) \tag{12.810}$$

avec $\bar{s}_j \in [s_{j-1}, s_j]$. Tout cela pour récrire (12.807) sous la forme

$$f(s_j) - f(s_{j-1}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{s}_j)(x_j - a_j). \tag{12.811}$$

(iv) **Une belle somme télescopique** En nous souvenant que $s_0 = a$ et que $s_n = x$, nous avons cette somme télescopique

$$f(x) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} \big(f(s_j) - f(s_{j-1})\big) \tag{12.812a}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{s}_j)(x_j - a_j) \tag{12.812b}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \big[(\partial_j f)(\bar{s}_j) - (\partial_j f)(a)\big](x_j - a_j) + \sum_{j=1}^{n} (\partial_i f)(a)(x_j - a_j). \tag{12.812c}$$

Nous isolons les termes qui nous intéressent dans la définition de la différentielle :

$$f(x) - f(a) - \sum_{j=1}^{n} (\partial_j f)(a)(x_j - a_j) = \sum_{j=1}^{n} \big[(\partial_j f)(\bar{s}_j) - (\partial_j f)(a)\big](x_j - a_j). \tag{12.813}$$

(v) **Et enfin : le quotient différentiel** En utilisant la majoration (12.803), et en remarquant que $\|x - a\|$ majore $|x_j - a_j|$ pour chaque j, nous avons l'inégalité

$$\|f(x) - f(a) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)(x_j - a_j)\| \leqslant n\epsilon \|x - a\|. \tag{12.814}$$

Autrement dit, en posant $T = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\omega_j$ nous avons

$$\|f(a + h) - f(a) - T(h)\| \leqslant n\epsilon \|h\|, \tag{12.815}$$

et donc

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(a + h) - f(a) - T(h)\|}{\|h\|} = 0. \tag{12.816}$$

(vi) **Et donc ?** La limite (12.816) nous indique que f serait différentiable de différentielle T si $\|.\|$ était la norme sur V. C'est l'équivalence de toutes les normes[111] qui fait en sorte que la norme sur V n'est pas importante.

□

Proposition 12.305.
Soient des espaces vectoriels normés de dimensions finies V et E ainsi qu'une application $f \colon V \to E$. Nous supposons que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existent et sont continues sur un ouvert $\mathcal{U}$ de V. Alors f est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$.

110. Retournez éventuellement les intervalles sur $a_j < x_j$.
111. Sur un espace de dimension finie, 11.45.

Démonstration. Nous notons $\mathcal{U}$ le voisinage sur lequel les dérivées partielles de f existent et sont continues. Il s'agit d'appliquer la proposition 12.304 en chaque point de $\mathcal{U}$. Nous avons alors

$$df_x = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \times_1 \omega_j \tag{12.817}$$

pour tout $x \in \mathcal{U}$. Pour $a \in V$ et $h \in V$ supposé petit, nous avons

$$\begin{aligned}
\|df_a - df_{a+h}\|_{\mathcal{L}(V,E)} &= \sup_{\|v\|=1} \|df_a(v) - df_{a+h}(v)\|_E && (12.818a)\\
&= \sup_{\|v\|=1} \|\sum_{j=1}^{n} \big(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a+h)\big)v_j\| && (12.818b)\\
&\leqslant \sup_{\|v\|=1} \|\sum_{j=1}^{n} \big(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a+h)\big)\||v_i| && (12.818c)\\
&\leqslant \|\sum_{j=1}^{n} \big(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a+h)\big)\| && (12.818d)
\end{aligned}$$

Justifications :

— Pour (12.818d), nous avons majoré $|v_i| \leqslant \|v\| = 1$.

— Pour (12.818c), nous avons utilisé le lemme 11.58.

La continuité de $\partial_j f$ conclu que $\lim_{h\to 0} \|df_a - df_{a+h}\| = 0$, ce qui signifie que df est continue et donc que f est de classe C^1. □

Théorème 12.306.
Soient des espaces vectoriels normés de dimensions finies V et E. Soit un ouvert $\mathcal{U}$ de V. Une application $f\colon V \to E$ est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$ si et seulement si ses dérivées partielles existent et sont continues sur $\mathcal{U}$.

Dans ce cas, nous avons la formule

$$df_a = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \times_1 \omega_i. \tag{12.819}$$

Démonstration. Le premier sens, y compris la formule (12.819), a été fait dans la proposition 12.305. Nous supposons maintenant que f est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$ et nous allons prouver que ses dérivées partielles existent et sont continues. Pour tout $t \neq 0$ nous avons l'égalité

$$\frac{f(a+te_i) - f(a)}{t} = \frac{f(a+te_i) - f(a) - df_a(fe_i)}{t} + df_a(e_i). \tag{12.820}$$

Par définition de la différentielle, prendre la limite $t \to 0$ à droite donne $df_a(e_i)$ parce que la fraction tend vers zéro. La limite définissant la dérivée partielle existe donc et vaut

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = df_a(e_i). \tag{12.821}$$

Il nous reste à prouver que les dérivées partielles sont continues :

$$\begin{aligned}
\|\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+h) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\| &= \|df_a(e_i) - df_{a+h}(e_i)\| && (12.822a)\\
&= \|(df_{a+h} - df_a)(e_i)\| && (12.822b)\\
&\leqslant \|df_{a+h} - df_a\|\|e_i\| && (12.822c)\\
&= \|df_{a+h} - df_a\|. && (12.822d)
\end{aligned}$$

Vu que f est de classe C^1, la limite $h \to 0$ de cela donne zéro. □

Voici une version du même théorème, démontré dans le cas seulement de dimension deux. Il rend peut-être aussi plus clairement pourquoi ça ne marche pas en dimension infinie.

Proposition 12.307.
Soit U un ouvert dans $\mathbb{R}^m$ et a un point dans U. Soit f une application de U dans $\mathbb{R}^n$. Si toutes les dérivées partielles de f existent sur U et sont continues au point a alors f est différentiable au point a.

Démonstration. On se limite au cas $m = 2$. Pour rendre les calculs plus simples on utilise ici la norme $\| \cdot \|_\infty$ dans l'espace $\mathbb{R}^2$, mais comme on a vu plus en haut, cela ne peut pas avoir des conséquences sur la différentiabilité de f. Si la différentielle de f au point a existe alors elle est définie par la formule

$$df_a(v) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)v_2$$

pour tout v dans $\mathbb{R}^m$.

On commence par prouver le résultat en supposant que les dérivées partielles de f au point a sont nulles. La différentiabilité de f signifie que pour toute constante $\varepsilon > 0$ il y a une constante $\delta > 0$ telle que si $\|v\|_\infty \leqslant \delta$ alors

$$\frac{\|f(a_1 + v_1, a_2 + v_2) - f(a_1, a_2)\|_n}{\|v\|_\infty} \leqslant \varepsilon.$$

On écrit alors

$$\begin{aligned} &\|f(a_1 + v_1, a_2 + v_2) - f(a_1, a_2)\|_n = \\ &= \|f(a_1 + v_1, a_2 + v_2) - f(a_1 + v_1, a_2) + f(a_1 + v_1, a_2) - f(a_1, a_2)\|_n \leqslant \\ &\leqslant \|f(a_1 + v_1, a_2 + v_2) - f(a_1 + v_1, a_2)\|_n + \|f(a_1 + v_1, a_2) - f(a_1, a_2)\|_n. \end{aligned} \tag{12.823}$$

Comme la dérivée partielle $\partial_x f$ est nulle au point a on sait que pour toute constante $\varepsilon > 0$ il y a une constante $\delta_1 > 0$ telle que si $|v_1| \leqslant \delta_1$ alors

$$\|f(a_1 + v_1, a_2) - f(a_1, a_2)\|_n \leqslant \varepsilon|v_1|.$$

Pour l'autre terme on a, par la proposition 12.235,

$$\|f(a_1 + v_1, a_2 + v_2) - f(a_1 + v_1, a_2)\|_n \leqslant \sup\{\|\partial_y f(x)\|_n \mid x \in S\}|v_2|. \tag{12.824}$$

où S est le segment d'extrémités $(a_1 + v_1, a_2)$ et $(a_1 + v_1, a_2 + v_2)$. Comme la dérivée partielle $\partial_y f$ est continue et nulle au point a on sait que pour toute constante $\varepsilon > 0$ il existe une constante $\delta_2 > 0$ telle que si $\|(u_1, u_2)\|_\infty \leqslant \delta_2$ alors $\|\partial_y f(a_1 + u_1, a_2 + u_2)\|_n \leqslant \varepsilon$. Si on choisit $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ le segment S est contenu dans la boule de rayon δ centrée au point a et on obtient

$$\|f(a_1 + v_1, a_2 + v_2) - f(a_1, a_2)\|_n \leqslant \varepsilon|v_1| + \varepsilon|v_2| \leqslant 2\varepsilon\|v\|_\infty.$$

Cela prouve que f est différentiable en (a_1, a_2) et que la différentielle est nulle :

$$df_{(a_1,a_2)} = 0. \tag{12.825}$$

Dans le cas général, où les dérivées partielles de f au point a ne sont pas spécialement nulles, on peut considérer la fonction [112]

$$g(x, y) = f(x, y) - \partial_1 f(a)x - \partial_2 f(a)y, \tag{12.826}$$

qui a dérivées partielles nulles au point a. La fonction g est donc différentiables. La fonction f est maintenant la somme de g et de la fonction linéaire et continue $(x, y) \mapsto \partial_1 f(a)x - \partial_2 f(a)y$. On verra dans la prochaine section que la somme de deux fonctions différentiables est une fonction différentiable. Par conséquent, la fonction f est différentiable. □

112. Vous verrez dans la discussion à propos de la fonction (25.136) pourquoi cette fonction ne fonctionne pas dans le cas de la dimension infinie.

Remarque 12.308.
En dimension infinie, il n'est pas vrai que l'existence et la continuité de toutes les dérivées partielles en un point implique la différentiabilité en ce point. Pour donner un exemple, nous allons continuer l'exemple 11.62 avec la fonction 25.136 sur un espace de Hilbert.

En dimension infinie nous aurons le théorème 11.196 qui donnera quelque chose de moins fort.

12.28.0.2 Dérivée partielle de fonctions composées

12.309.
Une petite note sur les notations du théorème de dérivation partielle de fonctions composées. La formule (12.838) est plus souvent écrite sous la forme

$$\frac{\partial(f\circ g)}{\partial x_i}(a)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial y_k}\big(g(a)\big)\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(a). \tag{12.827}$$

Du point de vue du névrosé des notations précises que je suis, cette façon d'écrire est délicate à exprimer parce qu'il faudrait décider ce que signifie « noter x les variables de $\mathbb{R}^n$ et y celles de $\mathbb{R}^m$ ».

Et je ne vous parle même pas des problèmes que ça pose si x est justement le nom d'une fonction quand on considère un changement de variable.

12.310.
À propos de changement de variables ...J'ai une bonne nouvelle : il n'y a pas de notions de « différentielle partielle » et de « différentielle totale ». Ces notions sont introduites par les personnes qui utilisent de mauvaises notations pour distinguer deux notions différentes qu'ils sont incapables de distinguer par des notations claires[113].

Les choses mal faites en une dimension Voici comment on présente (mal) les choses. Soit une fonction $y(x)$. Si on effectue un changement de variables $x=x(t)$, on peut voir y comme une fonction de t au lieu de x, et parler de la dérivée de y à travers x.

Si $y(x)=x^2$ et si $x(t)=\sin(t)$, on se retrouve à écrire

$$y'(t)=2\sin(t)\cos(t) \tag{12.828}$$

et

$$y'(x)=2x. \tag{12.829}$$

Comment l'objet y' peut dépendre du nom de la variable ?!? Notez qu'en substituant $x=\sin(t)$ dans (12.829), le compte n'est pas bon : on n'a pas (12.828).

Pour résoudre ce problème, on peut dire que la bonne quantité à regarder n'est pas y' mais bien dy. Alors on doit en fait regarder non $y'(x)$ mais $y'(x)dx$ où $dx=\cos(t)dt$. Avec ça, on a en effet

$$dy=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}dt=2\sin(t)\cos(t)dt, \tag{12.830}$$

et

$$dy=\frac{dy}{dt}dt=2\sin(t)\cos(t)dt. \tag{12.831}$$

Il faut alors bien comprendre que le « y » dans $\frac{dy}{dt}$ n'est pas le même que le y dans $\frac{dy}{dx}$.

113. Là je vise la quasi totalité des sources parlant de changement de variable dans les équations différentielles et les physiciens, en particulier les mécaniciens.

Les choses bien faites en une dimension Soit une fonction $y\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Nous considérons une application (appelée « changement de variable » si on veut, mais surtout appelée « difféomorphisme de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ ») $x\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Maintenant que la notation « x » est prise pour désigner une fonction, il n'est plus possible d'écrire $y(x)$, parce que y est une application qui prend en argument un élément de $\mathbb{R}$ et non de $C^{\infty}(\mathbb{R})$.

On introduit donc une nouvelle fonction $z = y\circ x$. Donc $z(t) = y\big(x(t)\big) = \sin(t)^2$. Le nom de la variable importe peu tant que ce n'est pas un nom déjà utilisé. Nous avons alors aucune ambigüité :

$$y'(u) = 2u \tag{12.832}$$

et

$$z'(u) = 2\sin(u)\cos(u). \tag{12.833}$$

Notez que les égalités suivante sont parfaitement correctes et ne souffrent d'aucun problème d'interprétation :

— $y(t) = t^2$
— $z(\xi) = \sin(\xi)^2$
— $x(s) = \sin(s)$
— $x\big(y(u)\big) = \sin\big(y(u)\big) = \sin(u^2)$.

Si les fonctions y et x représentent des quantités physiques, certaines de ces formules sont peut-être idiotes à écrire, mais elles sont correctes.

Les choses mal faites en dimension 2 Soit une fonction f de la position et du temps qu'on note $f(x,t)$. Cette fonction vérifie une équation aux dérivées partielles, mettant en jeu $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial t}$.

Coup de théâtre : on veut savoir la valeur de f le long d'une trajectoire $x(t)$. Nous voici avec

$$f\big(x(t),t\big). \tag{12.834}$$

Et là quand on veut parler de la dérivée de f par rapport à t, on doit distinguer la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial t}$ qui consiste à ne dériver l'expression $f\big(x(t),t\big)$ que par rapport aux t qui apparaissent « vraiment », de la « dérivée totale » qui consiste à dériver par rapport à toutes les occurrences de t, y compris à travers x.

Les choses bien faites en dimension 2 Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Prenons par exemple $f(x,t) = x\sin(t)$. Soit une trajectoire $s\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que nous nous gardons bien de noter « x ». Ce qu'on entend par « voir f sur la trajectoire s » signifie en réalité considérer la fonction

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ t&\mapsto f\big(s(t),t\big).\end{aligned} \tag{12.835}$$

Ce qu'on aurait appelé la dérivée totale de f par rapport à t est simplement la dérivée usuelle φ' de φ en tant que bête fonction $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Si par exemple $s(t) = t^2$, nous avons

$$\varphi(t) = t^2\sin(t). \tag{12.836}$$

Nous avons donc toutes les dérivées sans ambigüité :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \sin(t) \tag{12.837a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = x\cos(t) \tag{12.837b}$$

$$\varphi'(t) = 2t\sin(t) + t^2\cos(t). \tag{12.837c}$$

Le mieux serait même d'écrire $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ au lieu de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial t}$, parce que ce sont des fonctions complètement déterminées par f et non par la notation x et t qu'on a choisie pour nommer les variables au moment d'écrire $f(x,t) = x\sin(t)$.

12.311.
Et d'ailleurs en mathématique, il n'y a rien qui s'appelle « changement de variable ». Il y a seulement des choses qui s'appellent « composition de fonction ».

Cela n'est pas limité à l'analyse. Il n'y a par exemple pas de concept de « choisir une base dans laquelle une matrice est diagonale ». Si S est une matrice symétrique, il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale A telles que $D = ASA^{-1}$. Quand on veut démontrer une théorème sur S, on commence par démontrer le théorème dans le cas particulier où S est diagonale, puis on espère que le résultat se généralise facilement aux matrices de la forme ADA^{-1} où D est diagonale et A est orthogonale.

12.312.
Tout cela pour dire que nous allons maintenant prouver le théorème de dérivation partielle de fonctions composées. C'est ce théorème qui est utilisé chaque fois qu'on fait un « changement de variables » dans une équation aux dérivées partielles.

Théorème 12.313 ([1, 338]).
Soient :

(1) *trois espaces vectoriels normés U, V et W de dimension fine*
(2) *$a \in V$, un voisinage Ω de a*
(3) *des applications $g\colon \Omega \to U$ et $f\colon g(\Omega) \to W$*
(4) *des bases de U, V et W de telle sorte que parler des dérivées partielles ait un sens. Toutes les bases vont être notées $\{e_i\}$ sans précisions. Sinon, on ne va pas s'en sortir.*

Nous supposons que

(1) *f est de classe C^1 sur un voisinage de $g(a)$ [114],*
(2) *g admet une dérivée partielle dans la direction de e_i en a.*

Alors

(1) *La fonction $f \circ g$ a une dérivée partielle dans la direction de e_i en a,*
(2) *nous avons la formule*
$$\partial_i(f \circ g)(a) = \sum_k (\partial_k f)\big(g(a)\big)(\partial_i g_k)(a). \tag{12.838}$$

Démonstration. Vu que f est différentiable en $g(a)$, nous pouvons y utiliser le lemme 12.265 et écrire

$$df_{g(a)}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)\right) = \frac{d}{dt}\Big[f\Big(g(a) + t\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)\Big)\Big]_{t=0} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f\big(g(a) + \epsilon\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)\big) - f\big(g(a)\big)}{\epsilon}. \tag{12.839}$$

Maintenant, le jeu est de travailler $f\big(g(a) + \epsilon\partial_i(a)\big)$ de deux façons différentes. D'une part en effectuant un développement de f autour de $g(a)$ et d'autre part dé-développant $g(a) + \epsilon\partial_i(a)$ pour le changer en $g(a + \epsilon e_i)$.

(i) **Développer f** En utilisant le lemme 12.247 pour f autour de $g(a)$, nous avons

$$\begin{aligned} f\big(g(a) + \epsilon\partial_i g(a)\big) &= f\big(g(a) + \epsilon\sum_k (\partial_i g_k)(a) e_k\big) && (12.840a)\\ &= f\big(g(a)\big) + \epsilon\sum_k (\partial_i g_k)(a)(\partial_k f)\big(g(a) + \epsilon u_k\big) && (12.840b)\end{aligned}$$

où $u_k = \sum_{j=k+1}^n (\partial_i g_l)(a) e_l$. La forme exacte de u_k n'est pas importante pour notre histoire.

114. Classe C^1, définition 11.170.

En mettant cela dans la dernière fraction de (12.839),

$$\frac{f\big(g(a)+\epsilon(\partial_i g)(a)\big)-f\big(g(a)\big)}{\epsilon} \tag{12.841a}$$

$$=\frac{f\big(g(a)\big)+\epsilon\sum_k(\partial_i g_k)(a)(\partial_k f)\big(g(a)+\epsilon u_k\big)+\epsilon\alpha(\epsilon)-f\big(g(a)\big)}{\epsilon} \tag{12.841b}$$

$$=\sum_k(\partial_i g_k)(a)(\partial_k f)\big(g(a)+\epsilon u_k\big)+\alpha(\epsilon). \tag{12.841c}$$

Nous prenons la limite $\epsilon\to 0$ en tenant compte du fait que $\lim_{\epsilon\to 0}\alpha(\epsilon)=0$ et du fait que les dérivées partielles de f sont continues en $g(a)$ (théorème 12.306). Nous avons

$$df_{g(a)}\big((\partial_i g)(a)\big)=\sum_k(\partial_i g_k)(a)(\partial_k f)\big(g(a)\big). \tag{12.842}$$

(ii) **Développer** g Nous développons maintenant g à l'intérieur de f. Pour cela nous utilisons les accroissements finis 12.248 pour g :

$$g(a)+\epsilon\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=g(a+\epsilon e_i)-\epsilon\alpha(\epsilon). \tag{12.843}$$

Pour avancer dans (12.839), nous considérons le terme

$$f\Big(g(a)+\epsilon\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)\Big)=f\big(g(a+\epsilon e_i)-\epsilon\alpha(\epsilon)\big) \tag{12.844}$$

dans lequel nous allons développer f autour de $g(a+\epsilon e_i)$. Vu que la fonction $\epsilon\mapsto g(a+\epsilon e_i)$ est continue (elle est dérivable par hypothèse), pourvu que ϵ soit assez petit, le point $g(a+\epsilon e_i)$ est encore dans le voisinage de $g(a)$ sur lequel f est de classe C^1, de telle sorte qu'un développement de f ne pose pas de problèmes. Nous pouvons appliquer le lemme (12.247) :

$$f\big(g(a+\epsilon e_i)-\epsilon\alpha(\epsilon)\big)=f\big(g(a+\epsilon e_i)\big)-\sum_k\epsilon\alpha(\epsilon)_k(\partial_k f)\big(g(a+\epsilon e_i)+\epsilon u_k\big)+\epsilon\beta(\epsilon). \tag{12.845}$$

Ce que nous avons dans la limite dans (12.839) est

$$\frac{f\big(g(a+\epsilon e_i)\big)-\sum_k\epsilon\alpha(\epsilon)_k(\partial_k f)\big(g(a+\epsilon e_i)+\epsilon u_k\big)-f\big(g(a)\big)}{\epsilon} \tag{12.846a}$$

$$=\frac{(f\circ g)(a+\epsilon e_i)-(f\circ g)(a)}{\epsilon}-\sum_k\alpha(\epsilon)_k(\partial_k f)\big(f(a+\epsilon e_i)+\epsilon u_k\big). \tag{12.846b}$$

Nous allons passer à la limite. Vu que f est de classe C^1, ses dérivées partielles sont continue. Le vecteur u_k ne dépendant pas de ϵ, toute la partie $(\partial_k f)\big(g(a+\epsilon e_i)+\epsilon u_k\big)$ peut être majorée uniformément en ϵ. Et comme $\alpha(\epsilon)\to 0$, tout le second terme disparait.
Ce qui reste à la limite est

$$df_{g(a)}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)\right)=\frac{\partial(f\circ g)}{\partial x_i}(a). \tag{12.847}$$

□

Donnons un exemple d'utilisation de cette formule. Si

$$\begin{aligned} g&\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3\\ f&\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}, \end{aligned} \tag{12.848}$$

nous avons $\varphi\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Les dérivées partielles de φ sont données par les formules

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(g(x,y)\big)\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial x_2}\big(g(x,y)\big)\frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial x_3}\big(g(x,y)\big)\frac{\partial g_3}{\partial x}(x,y) \tag{12.849}$$

et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(g(x,y)\big)\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial x_2}\big(g(x,y)\big)\frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial x_3}\big(g(x,y)\big)\frac{\partial g_3}{\partial y}(x,y) \tag{12.850}$$

Notez que les dérivées de φ et des composantes de g sont calculées en (x,y), tandis que celles de f sont calculées en $g(x,y)$.

12.29 Différentielle et dérivée complexe

12.314.
Nous commençons par donner quelques éléments à propos de dérivée et de différentielle pour des fonctions $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ parce que les séries entières vont souvent être des fonctions complexes. Le gros du chapitre sur les fonctions holomorphes est le chapitre 26.

Nous identifions $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ par l'application

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathbb{R}^2&\to\mathbb{C}\\ (x,y)&\mapsto x+iy.\end{aligned} \tag{12.851}$$

Dans cette partie, nous désignons par Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

Définition 12.315.
*Une fonction $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-**dérivable** si la limite*

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{12.852}$$

existe. Dans ce cas, cette limite est la dérivée de f et est notée f'.

Définition 12.316.
*Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{C}$. Une fonction $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ est **holomorphe** si elle est $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω.*

Une avalanche de conditions équivalentes à l'holomorphie est donnée dans le théorème 26.37.

Définition 12.317.
*Si K est un compact de $\mathbb{C}$, nous disons qu'une fonction est **holomorphe** sur K si il existe un ouvert contenant K sur lequel f est holomorphe.*

Et si f n'est réellement définie que sur K, elle est holomorphe sur K si il existe une extension holomorphe de f vers un ouvert contenant K.

Définition 12.318.
Une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\-\beta&\alpha\end{pmatrix} \tag{12.853}$$

*avec $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ est une **similitude**.*

Lemme 12.319.
En tant qu'application linéaire $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, l'opération de multiplication par $\alpha+\beta i$ est la matrice

$$\begin{pmatrix}\alpha&-\beta\\\beta&\alpha\end{pmatrix}. \tag{12.854}$$

Démonstration. Cela est vite remarqué en calculant explicitement $(\alpha+\beta i)(u_1+iu_2)$. □

Lemme 12.320.
Une application $A\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement si elle est une similitude en tant qu'application $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$.

Dans ce cas, il existe $z_0\in\mathbb{C}$ tel que $A(z)=z_0z$ pour tout $z\in\mathbb{C}$.

Démonstration. Commençons par considérer l'application A sur $\mathbb{R}^2$. Elle est en particulier une application $\mathbb{R}$-linéaire et par conséquent il existe une matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ telle que

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{12.855}$$

Nous voulons maintenant imposer la $\mathbb{C}$-linéarité, c'est-à-dire que nous voulons

$$A\big((a+bi)(x+iy)\big) = (a+bi)A(x+iy) \tag{12.856}$$

pour tout $a, b, x, y \in \mathbb{R}$. À gauche nous avons

$$A\big(ax - by + i(bx + ay)\big) \tag{12.857}$$

et à droite nous avons

$$(a+bi)\big(\alpha x + \beta y + i(\gamma x + \delta y)\big). \tag{12.858}$$

En égalant les deux expressions nous obtenons les équations

$$\begin{cases} \beta b = -b\gamma & (12.859a)\\ -\alpha b + \beta a = a\beta - b\delta & (12.859b)\\ \delta b = b\alpha & (12.859c)\\ -\gamma b + \delta a = b\beta + a\delta, & (12.859d) \end{cases}$$

dont nous tirons immédiatement que $\gamma = -b\beta$ et $\delta = \alpha$. La matrice de A est donc de la forme demandée.

Inversement nous devons prouver que la fonction

$$f(x+iy) = \alpha x + \beta y + i(-\beta x + \alpha y) \tag{12.860}$$

est $\mathbb{C}$-linéaire, c'est-à-dire qu'elle vérifie $f(z_0 z) = z_0 f(z)$ pour tout $z_0, z \in \mathbb{C}$. Cela est un simple calcul que nous confions à Sage : le code suivant affiche « 0 ».

```python
#! /usr/bin/sage -python
# -*- coding: utf8 -*-

from sage.all import *

def f(z):
    var('alpha,beta')
    x=z.real_part()
    y=z.imag_part()
    return alpha*x+beta*y+I*( -beta*x+alpha*y  )


var('a,b,x,y')

A=a+b*I
Z=x+y*I

z1=f( A*Z  )
z2=A*f( Z )

rep=z1-z2
print(rep.full_simplify())
```

tex/frido/code_sage3.py

Pour conclure, notons que la fonction (12.860) est la fonction de multiplication par $\alpha - i\beta$. $\square$

12.321.
Soient une fonction $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et l'isomorphisme canonique $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$. La fonction f définit une la fonction

$$F = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2. \tag{12.861}$$

Cela est la fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ associée à f. Il serait tentant de croire que tout ce qui est vrai pour F est également vrai pour f. Eh bien non.

Par exemple, F peut être différentiable sans que f le soit. La proposition suivant donne une condition sur dF pour que f soit différentiable.

La proposition suivante donne le lien entre df et la dérivée complexe f'. Pour avoir le lien avec $\partial_z f$, il faudra voir la proposition 26.4.

Proposition 12.322.
Une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en $a \in \Omega$ si et seulement si elle est différentiable en a et si df_a est une similitude.

Plus précisément avec les notations de 12.321, la fonction f est $\mathbb{C}$-dérivable (donc holomorphe) au point $z_0 = x_0 + iy_0$ si et seulement si la fonction F est différentiable en (x_0, y_0) et si la matrice de dF est de la forme

$$dF = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \tag{12.862}$$

c'est-à-dire si $dF_{(x_0,y_0)}$ fournit une application $\mathbb{C}$-linéaire.

Dans ce cas, le lien entre $\mathbb{C}$-dérivée et différentielle est donné par

$$(df_{z_0})(z) = f'(z_0)z. \tag{12.863}$$

Démonstration. Nous décomposons f en parties réelles et imaginaires :

$$f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y) \tag{12.864}$$

où P et Q sont des fonctions réelles. La jacobienne de F est la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}, \tag{12.865}$$

et la condition dont nous parlons s'écrit comme le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} & \text{(12.866a)} \\[2mm] \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}. & \text{(12.866b)} \end{cases}$$

Si F est différentiable en (x_0, y_0) alors nous avons

$$F\big((x_0, y_0) + (h, k)\big) = F(x_0, y_0) + dF_{(x_0,y_0)} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + s(|h| + |k|) \tag{12.867}$$

où s est une fonction vérifiant $\lim_{t\to 0} \frac{s(t)}{t} = 0$. Soit

$$dF_{(x_0,y_0)} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}. \tag{12.868}$$

Si nous posons $\sigma = \alpha - i\beta$ et $w = h + ik$, l'équation (12.867) s'écrit dans $\mathbb{C}$ sous la forme

$$f(z_0 + w) = f(z_0) + \sigma w + s(|w|), \tag{12.869}$$

ce qui implique que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0.

Supposons maintenant que f soit $\mathbb{C}$-dérivable en z_0. Alors nous avons

$$f'(z_0) = \lim_{w\to 0} \frac{f(z_0+w)-f(z_0)}{w} = \sigma \in \mathbb{C}, \tag{12.870}$$

ce qui se récrit sous la forme

$$\lim_{w\to 0} \frac{f(z_0+w)-f(z_0)-\sigma w}{w} = 0. \tag{12.871}$$

Si nous posons $z_0 = x_0 + iy_0$, $w = h + ik$ et $\sigma = \alpha - i\beta$ nous avons

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left| \frac{F\big((x_0,y_0)+(h,k)\big) - F(x_0,y_0) - \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}{|w|} \right| = 0, \tag{12.872}$$

ce qui signifie que F est différentiable et que sa différentielle est la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}. \tag{12.873}$$

La matrice (12.873) est, vue dans $\mathbb{R}^2$, la matrice de multiplication dans $\mathbb{C}$ par $\alpha - i\beta = f'(z_0)$. En d'autre termes, dans $\mathbb{C}$ nous avons

$$df_{z_0}(z) = f'(z_0)z, \tag{12.874}$$

et en particulier la différentielle est donnée par

$$df_{z_0} = f'(z_0)dz. \tag{12.875}$$

□

Exemple 12.323 (Une application C^∞ mais pas $\mathbb{C}$-dérivable)**.**
Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ x+iy &\mapsto x. \end{aligned} \tag{12.876}$$

Vu que c'est une application linéaire, elle est différentiable une infinité de fois et sa différentielle est elle-même. C'est donc une application C^∞.

Elle n'est cependant pas $\mathbb{C}$-dérivable. En effet le quotient différentiel est, pour $\epsilon \in \mathbb{C}$:

$$\frac{f(x+iy+\epsilon_x+i\epsilon_y)-f(x+iy)}{\epsilon} = \frac{\epsilon_x}{\epsilon}. \tag{12.877}$$

Cela n'a pas de limite lorsque $\epsilon \to 0$. Pour voir cela nous invoquons la méthode des chemins du corolaire 12.225 avec les chemins $\epsilon_1(t) = t$ et $\epsilon_2(t) = it$. Dans le premier cas, le quotient différentiel vaut 1 pour tout t, tandis que dans le second il vaut zéro pour tout t. △

12.29.1 Quelques règles de calcul

Lemme 12.324.
Si f et g sont deux fonctions holomorphes sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ et si g ne s'annule pas sur Ω, alors f/g est holomorphe sur Ω.

12.30 Théorèmes des accroissements finis

Nous avons déjà démontré (lemme 12.265) que si f est différentiable au point x alors $df_x(u) = \partial_u f(x)$. Une importante conséquence est le théorème des accroissements finis

Théorème 12.325 (Accroissements finis, inégalité de la moyenne)**.**
Soit U un ouvert dans $\mathbb{R}^m$ et soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable. Soient a et b deux points dans U, $a \neq b$, tels que le segment $[a, b]$ soit contenu dans U. Alors

$$\|f(b) - f(a)\|_n \leqslant \sup_{x\in[a,b]} \|df_x\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)} \|b - a\|_m. \tag{12.878}$$

Démonstration. On utilise le théorème 12.235 et le fait que

$$\|\partial_u f(x)\|_n \leqslant \|df_x\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)} \|u\|_m,$$

pour tout u dans $\mathbb{R}^m$. □

La proposition suivante est une application fondamentale du théorème des accroissements finis 12.325.

Proposition 12.326.
Soit U un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{R}^m$ et une fonction $f : U \to \mathbb{R}^n$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) f est constante ;

(2) f est différentiable et $df(a) = 0$ pour tout $a \in U$;

(3) les dérivées partielles $\partial_1 f, \ldots, \partial_m f$ existent et sont nulles sur U.

Démonstration. Nous allons démonter les équivalences en plusieurs étapes. D'abord (1) ⇒ (2), puis (2) ⇒ (3), ensuite (3) ⇒ (2) et enfin (2) ⇒ (1).

Commençons par montrer que la condition (1) implique la condition (2). Si $f(x)$ est constante, alors la condition (11.454) est vite vérifiée en posant $T(h) = 0$.

Afin de voir que la condition (2) implique la condition (3), remarquons d'abord que la différentiabilité de f implique que les dérivées partielles existent (proposition 12.262) et que nous avons l'égalité $df(a).u = \sum_i u_i \partial_i f(a)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^m$ (lemme 12.265). L'annulation de $\sum_i u_i \partial_i f(a)$ pour tout u implique l'annulation des $\partial_i f(a)$ pour tout i.

Prouvons maintenant que la propriété (3) implique la propriété (2). D'abord, par le théorème 12.306, l'existence et la continuité des dérivées partielles $\partial_i f(a)$ implique la différentiabilité de f. Ensuite, la formule $df(a).u = \sum_i u_i \partial_i f(a)$ implique que $df(a) = 0$.

Il reste à montrer que (2) implique la condition (1), c'est-à-dire que l'annulation de la différentielle implique la constance de la fonction. C'est ici que nous allons utiliser le théorème des accroissements finis. En effet, si a et b sont des points de U, le théorème 12.325 nous dit que

$$\|f(b) - f(a)\|_n \leqslant \sup_{x\in[a,b]} \|df(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)} \|b - a\|_m. \tag{12.879}$$

Mais $\|df(x)\| = 0$ pour tout $x \in U$, donc ce supremum est nul et $f(b) = f(a)$, ce qui signifie la constance de la fonction. □

12.31 Fonctions Lipschitziennes

Définition 12.327.
Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques[115]*, $f : E \to F$ une application et un réel k*

115. Pour rappel, les espaces métriques sont définis par la définition 7.97 et le théorème 7.98 ; je précise que nous ne supposons pas que E soit vectoriel ; en particulier il peut être un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

strictement positif. Nous disons que f est ***Lipschitzienne*** *de constante k sur E si pour tout $x, y \in E$,*

$$d_F\big(f(x) - f(y)\big) \leqslant k d_E(x, y). \tag{12.880}$$

Soit f une fonction k-Lipschitzienne. Si $y \in \overline{B(x,\delta)}$ alors $\|x-y\| \leqslant \delta$ et donc $\big\|f(x)-f(y)\big\| \leqslant k\delta$. Cela signifie que la condition Lipschitz pour s'énoncer en termes de boules fermées par

$$f\big(\overline{B(x,\delta)}\big) \subset \overline{B\big(f(x), k\delta\big)} \tag{12.881}$$

tant que $\overline{B(x,\delta)}$ est contenue dans le domaine sur lequel f est Lipschitz.

Proposition 12.328.
Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^m$, et soit $f: U \to \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable. La fonction f est Lipschitzienne sur U si et seulement si df est bornée sur U.

Démonstration. Le fait que l'application différentielle df soit bornée signifie qu'il existe un $M > 0$ dans $\mathbb{R}$ tel que $\|df_a\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)} \leqslant M$, pour tout a dans U. Si cela est le cas, alors le théorème 12.325 et la convexité[116] de U impliquent évidemment que f est de Lipschitz de constante plus petite ou égale à M.

Inversement, si f est Lipschitz de constante k, alors pour tout a dans U et u dans $\mathbb{R}^m$ on a

$$\left\|\frac{f(a+tu) - f(a)}{t}\right\|_n \leqslant k\|u\|_m,$$

En passant à la limite pour $t \to 0$ on a

$$\|\partial_u f(a)\|_n = \|df_a(u)\|_n \leqslant k\|u\|_m,$$

donc la norme de df_a est majorée par k pour tout a dans U. □

Notez cependant qu'une fonction peut être Lipschitzienne sans être différentiable.

Proposition 12.329.
Une fonction Lipschitzienne $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.

Démonstration. Nous utilisons la caractérisation de la continuité donnée par le théorème 7.170. Prouvons donc la continuité en $a \in \mathbb{R}$. Pour tout x nous avons

$$\big|f(x) - f(a)\big| \leqslant k|x - a|. \tag{12.882}$$

Si $\epsilon > 0$ est donné, il suffit de prendre $\delta < \frac{\epsilon}{k}$ pour avoir

$$\big|f(x) - f(a)\big| \leqslant k\frac{\epsilon}{k} = \epsilon. \tag{12.883}$$

Donc f est continue en a. □

Définition 12.330.
Une fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R}^p \\ (t,y) &\mapsto f(t,y) \end{aligned} \tag{12.884}$$

est ***localement Lipschitz*** *en y au point (t_0, y_0) si il existe des voisinages V de t_0 et W de y_0 et un nombre $k > 0$ tels que pour tout $(t,y) \in V \times W$ on ait*

$$\big\|f(t_0,y_0) - f(t,y)\big\| \leqslant k\|y - y_0\|. \tag{12.885}$$

La fonction est localement Lipschitz sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ si elle est localement Lipschitz en chaque point de U.

116. La convexité de U sert à assurer que la droite reliant a à b est contenue dans U ; c'est ce que nous utilisons dans la démonstration du théorème 12.325.

12.331.
Autrement dit, une fonction est localement Lipschitzienne en sa deuxième variable lorsque tout point admet un voisinage sur lequel elle est Lipschitzienne.

Proposition 12.332.
Toute application Lipschitz[117] *est uniformément continue*[118].

Démonstration. Soit une application k-lipschitzienne $f\colon E \to F$ entre deux espaces métriques. Soient $\epsilon > 0$ ainsi que $a \in E$. Nous considérons $\delta = \epsilon/k$. Si $x \in B(a, \delta)$ nous avons

$$d_F\big(f(a), f(x)\big) \leqslant k d_E(a, x) \leqslant kr \leqslant \epsilon. \tag{12.886}$$

□

Proposition 12.333.
Si f et g sont deux fonctions localement Lipschitz alors $f + g$ l'est.

Démonstration. Il s'agit d'un simple calcul avec une majoration standard :

$$\begin{aligned}
\|(f+g)(t_0, y_0) - (f+g)(t, y)\| &\leqslant \|f(t_0, y_0) - f(t, y)\| + \|g(t_0, y_0) - g(t, y)\| && (12.887a)\\
&\leqslant k_f\|y - y_0\| + k_g\|y - y_0\| && (12.887b)\\
&= (k_f + k_g)\|y - y_0\|. && (12.887c)
\end{aligned}$$

□

Lemme 12.334.
La fonction donné par

$$f(t, (x, y)) = xy \tag{12.888}$$

est localement Lipschitz en tout point.

Démonstration. Nous avons la majoration classique

$$|f\big(t, (x_0, y_0)\big) - f\big(t, (x, y)\big)| = |x_0y_0 - xy| \leqslant |x_0y_0 - x_0y| + |x_0y - xy| \leqslant |x_0||y_0 - y| + |y||x_0 - x|. \tag{12.889}$$

Vu que nous parlons de fonction *localement Lipschitzienne*, nous pouvons majorer $|y|$ et $|x_0|$ par un même nombre k dans un voisinage de (x_0, y_0). Cela donne

$$|f\big(t, (x_0, y_0)\big) - f\big(t, (x, y)\big)| \leqslant k\big(|y_0 - y| + |x_0 - x|\big) \leqslant \sqrt{2}k\| \begin{pmatrix} x_0 - x \\ y_0 - y \end{pmatrix} \|. \tag{12.890}$$

Nous avons utilisé l'équivalence de norme de la proposition 11.43(1). □

12.32 Différentielles d'ordre supérieur

12.32.1 Différentielle et dérivées partielles

Soient deux espaces vectoriels normés V et W ainsi qu'une application $f\colon V \to W$. La différentielle est une application $df\colon V \to \mathcal{L}(V, W)$. Pour être clair, la différentielle seconde consiste à différentier df_x par rapport à x. C'est-à-dire que la différentielle seconde est une application $d(df)\colon V \to \mathcal{L}\big(V, \mathcal{L}(V, W)\big)$.

Et c'est là que commencent les problèmes. Les différentielles successives font intervenir des emboîtements de plus en plus profonds d'espaces comme $d^2f\colon V \to \mathcal{L}\Big(V, \mathcal{L}\big(V, \mathcal{L}(V, W)\big)\Big)$.

117. Définition 12.327.
118. Définition 7.282.

Nous introduisons maintenant quelques notations et lemmes pour traiter ces problèmes. Soient des espaces vectoriels normés V et W. Nous commençons par les espaces emboîtés par récurrence :

$$\begin{cases} E_0 = E & (12.891a)\\ E_{k+1} = \mathcal{L}(V, E_k). & (12.891b)\end{cases}$$

Lemme 12.335 ([1, 339])**.**
À propos de dimensions,

(1) $\dim(E_n) = \dim(V)^n \dim(E)$.

(2) $\dim\big(\mathcal{L}^n(V,E)\big) = \dim(E)\dim(V)^n$.

Nous commençons par une sorte de projection ; pour $u \in V$ nous définissons

$$\begin{aligned} \texttt{proj}_u\colon \mathcal{L}^n(V,E) &\to \mathcal{L}^{n-1}(V,E)\\ \texttt{proj}_u(\omega)(v_1,\ldots,v_{n-1}) &= \omega(u,v_1,\ldots,v_{n-1}). \end{aligned} \tag{12.892}$$

Lemme 12.336 ([1])**.**
Nous définissons les ϕ_k par récurrence. D'abord

$$\begin{aligned} \phi_1\colon \mathcal{L}^n(V,E) &\to \mathcal{L}\big(V, \mathcal{L}^{n-1}(V,E)\big)\\ \phi_1(\omega)u &= \mathit{proj}_u(\omega), \end{aligned} \tag{12.893}$$

et ensuite

$$\begin{aligned} \phi_k\colon \mathcal{L}^n(V,E) &\to \mathcal{L}^{n-k}(V,E)_k\\ \phi_k(\omega)u &= \phi_{k-1}\big(\mathit{proj}_u(\omega)\big). \end{aligned} \tag{12.894}$$

Les applications ϕ_k sont bijectives.

Démonstration. Nous prouvons par récurrence.

(i) **Injective, $k = 1$** Soit $\omega \in \mathcal{L}^n(V,E)$ tel que $\phi_1(\omega) = 0$. Pour tout $u \in V$ nous avons $\phi_1(\omega)u = 0$, ce qui signifie que $\texttt{proj}_u(\omega) = 0$ ou encore que pour tout $v_1,\ldots,v_{n-1} \in V$ nous avons $\omega(u,v_1,\ldots,v_{n-1}) = 0$. Nous avons donc bien $\omega = 0$.

(ii) **Surjective, $k = 1$** Soit $\alpha \in \mathcal{L}\big(V,\mathcal{L}^{n-1}(V,E)\big)$. Nous allons construire $\omega \in \mathcal{L}^n(V,E)$ tel que $\phi_1(\omega) = \alpha$. Nous posons

$$\omega(v_0,\ldots,v_{n-1}) = \alpha(v_0)(v_1,\ldots,v_{n-1}). \tag{12.895}$$

Avec lui nous avons bien $\texttt{proj}_{v_0}(\omega) = \alpha(v_0)$.

(iii) **Injective, $k = k$** Nous supposons que $\phi_k(\omega) = 0$, c'est-à-dire que pour tout $u \in V$ nous avons

$$\phi_{k-1}\big(\texttt{proj}_u(\omega)\big) = 0. \tag{12.896}$$

Cela implique $\texttt{proj}_u(\omega) = 0$ parce que ϕ_{k-1} est injective par hypothèse de récurrence. Nous déduisons que $\omega = 0$, et que ϕ_k est injective.

(iv) **Surjective, $k = k$** Nous allons montrer que $\phi_k\colon \mathcal{L}^n(V,E) \to \mathcal{L}^{n-k}(V,E)_k$ est une application linéaire injective entre deux espaces de même dimension.

Il s'agit d'utiliser le lemme 12.335. D'abord

$$\dim\big(\mathcal{L}^{n-k}(V,E)_k\big) = \dim(V)^k \dim\big(\mathcal{L}^{n-k}(V,E)\big) = \dim(V)^n\dim(E). \tag{12.897}$$

Ensuite $\dim\big(\mathcal{L}^n(V,E)\big) = \dim(V)^n\dim(E)$. Le compte est bon.

Le théorème du rang (formule (4.46)) avec $\dim\big(\ker(\phi_k)\big) = 0$ nous dit que le rang de ϕ_k est maximal et donc que ϕ_k est surjective.

□

Lemme 12.337.
Soit $w \in W$. Nous avons

$$\big[w \times_k \phi_k(\omega_I)\big] \times_1 \omega_l = w \times_{k+1} \phi_{k+1}(\omega_{l,I}). \tag{12.898}$$

Démonstration. Il s'agit d'appliquer les deux membres à un élément $v \in V$. D'abord

$$\begin{aligned}\big[w \times_k \phi_k(\omega_I)\big] \times_1 \omega_l(v) &= \omega_l(v) w \times_k \phi_k(\omega_I) && (12.899a)\\ &= w \times_k \big(\phi_k(\omega_I)v_l\big) && (12.899b)\end{aligned}$$

Pour (12.899b) nous avons utilisé le fait que $\omega_{l,I}(v) = v_l \in \mathbb{R}$ et que le produit $\times_k$ est linéaire. De l'autre côté, en utilisant les définitions de $\times_k$ et de ϕ_k, nous avons

$$\begin{aligned}\big[w \times_{k+1} \phi_{k+1}(\omega_{l,I})\big]v &= w \times_k \big(\phi_{k+1}(\omega_{l,I})v\big) && (12.900a)\\ &= w \times_k \phi_k\big(\mathtt{proj}_v(\omega_{l,I})\big) && (12.900b)\\ &= w \times_k \phi_k(v_l\omega_I) && (12.900c)\end{aligned}$$

parce que $\mathtt{proj}_v(\omega_{l,I}) = v_l\omega_I$. □

Proposition 12.338 ([1]).
Soit une application $f\colon V \to E$ de classe C^n. Alors

(1) pour tout n-multiindice I, la dérivée partielle $\partial_I^n f$ existe,

(2) nous avons la formule

$$(d^n f)_a = \sum_{i_1,\ldots,i_n} \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_n}}(a) \times_n \phi_n(\omega_{i_1,\ldots,i_n}) \tag{12.901}$$

où la somme porte sur tous les multiindices de taille n, le produit $\times_n$ est la définition 12.302 et l'application ϕ_n est donnée dans l'énoncé du lemme 12.336.

Démonstration. Nous faisons tout cela par récurrence. Le cas $n = 1$ est déjà fait par le théorème 12.306 parce que $\phi_1(\omega) = \omega$. Nous supposons que le résultat est démontré pour une valeur k, et nous considérons f de classe C^n avec $n \geqslant k+1$. L'hypothèse de récurrence dit que

$$(d^k f)_a = \sum_I (\partial_I f)(a) \times_k \phi_k(\omega_I) \tag{12.902}$$

est continuement différentiable par rapport à a. Nous pouvons donc utiliser la formule (12.819) pour calculer la différentielle de (12.902) :

$$\begin{aligned}(d^{k+1}f)_a &= \sum_l \frac{\partial(d^k f)}{\partial x_l}(a) \times_1 \omega_l && (12.903a)\\ &= \sum_l \sum_I \big[(\partial_l\partial_I f)(a) \times_k \phi_k(\omega_I)\big] \times_1 \omega_l && (12.903b)\\ &= \sum_{l,I} (\partial_{l,I} f)(a) \times_{k+1} \phi_{k+1}(\omega_{l,I}) && (12.903c)\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le lemme 12.337 pour obtenir (12.903c). □

Proposition 12.339.
Soit une application $f\colon V \to E$ telle que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_n}}$ existent et sont continues sur un ouvert $\mathcal{U}$. Alors f est de classe C^n sur $\mathcal{U}$.

Démonstration. Pour $n = 1$, cette proposition est déjà contenue dans le théorème 12.306. Nous pouvons donc directement passer au pas de récurrence. Nous définissons les objets

$$T_k(a) = \sum_I (\partial_I f)(a) \times_k \phi_k(\omega_I) \tag{12.904}$$

où la somme porte sur tous les k-multiindices. Ces applications T_k existent et sont continues par hypothèse.

Le théorème 12.306 nous indique que $T_1(a) = df_a$. Nous supposons maintenant que $(d^k f)_a = T_k(a)$ et nous allons prouver que T_{k+1} est la différentielle de $d^k f$. Pour cela nous devons prouver que

$$\lim_{h\to 0} \frac{T_k(a+h) - T_k(a) - T_{k+1}(a)h}{\|h\|} = 0. \tag{12.905}$$

En utilisant le lemme 12.337 nous pouvons dégrossir le terme $T_{k+1}(a)h$:

$$\begin{aligned}
T_{k+1}(a)h &= \sum_{l,I} \big[(\partial_{l,I} f)(a) \times_{k+1} \phi_{k+1}(\omega_{l,I})\big] h && (12.906a)\\
&= \sum_{l,I} \big[(\partial_{l,I} f)(a) \times_k \phi_k(\omega_I)\big] \times_1 \omega_l(h) && (12.906b)\\
&= \sum_{l,I} h_l (\partial_{l,I} f)(a) \times_k \phi_k(\Omega_I) && (12.906c)\\
&= \sum_l h_l \big[\partial_l \sum_I (\partial_I f)(a)\big] \times_k \phi_k(\omega_I). && (12.906d)
\end{aligned}$$

Vu que $\partial_I f$ est une fonction dont les dérivées partielles existent et sont continues, le théorème 12.306 (toujours lui) nous dit qu'elle est différentiable et que

$$d(\partial_I f)_a(h) = \sum_l h_l \partial_l (\partial_I f)(a). \tag{12.907}$$

En mettant la somme sur I tout devant dans (12.906d), nous trouvons

$$T_{k+1}(a)h = \sum_I d(\partial_I f)_a(h) \times_k \phi_k(\omega_I). \tag{12.908}$$

C'est pas beau la vie ? Nous pouvons écrire le numérateur du quotient différentiel (12.905) :

$$\begin{aligned}
T_k(a+h) - T_k(a) - T_{k+1}(a)h &= \sum_I \big[(\partial_I f)(a+h) - (\partial_I f)(a)\big] \times_k \phi_k(\omega_I) && (12.909a)\\
&\quad - \sum_I d(\partial_I f)_a(h) \times_k \phi_k(\omega_I) && (12.909b)\\
&= \sum_I \big[(\partial_I f)(a+h) - (\partial_I f)(a) - d(\partial_I f)(a)h\big] \times_l \phi_k(\omega_I). && (12.909c)
\end{aligned}$$

Nous utilisons le fait que l'application $w \mapsto w \times_k \phi_k(\omega_I)$ est linéaire et commute avec la limite, c'est-à-dire que

$$\lim_{h\to 0} \big(w(h) \times_k \phi_k(\omega_I)\big) = \big(\lim_{h\to 0} w(h)\big) \times_k \phi_k(\omega_I). \tag{12.910}$$

Et bien sûr, la somme sur les multiindices I commute également avec la limite. Donc

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{T_k(a+h) - T_k(a) - T_{k+1}(a)h}{\|h\|} &= \sum_I \left(\lim_{h\to 0} \frac{(\partial_I f)(a+h) - (\partial_I f)(a) - d(\partial_I f)_a h}{\|h\|} \right) \times_k \phi_k(\omega_I) && (12.911a)\\
&= 0. && (12.911b)
\end{aligned}$$

Cela prouve que T_{k+1} est bien la différentielle de T_k. Par récurrence, la fonction f est bien n fois continuement différentiable. □

Maintenant que nous avons plein de lemmes et de résultats, il est facile de démontrer un très gros résultat en peu de lignes.

Théorème 12.340.
Soit une application $f\colon V \to E$ entre deux espaces vectoriels normés de dimension finies. Nous avons équivalence entre

(1) f est de classe C^n

(2) les dérivées partielles $\partial_i f$ sont de classe C^{n-1}

(3) les dérivées partielles $\partial^n_I f$ existent et sont continues pour tout multiiindice de longueur n.

Démonstration. En plusieurs implications.

(i) **(3) implique (1)** C'est la proposition 12.339.

(ii) **(1) implique (3)** C'est la proposition 12.338.

(iii) **(3) implique (2)** En posant $g_i = \partial_i f$, l'hypothèse est que les $\partial^{n-1}_I g_i$ existent et sont continues pour tout multiindices I de longueur $n-1$. En appliquant « (3) implique (1) » à la fonction g_i, la fonction g_i est de classe C^{n-1}.

(iv) **(2) implique (3)** Les fonctions g_i déjà définies sont de classe C^{n-1}. Nous leur appliquons « (1) implique (3) », nous savons que les fonctions $\partial^{n-1}_I g_i$ sont continues, c'est-à-dire que les $\partial_I \partial_i f$. Vu que tout multiiindice de longueur n peut être écrit sous la forme iI où I est de longueur $n-1$, nous avons prouvé que les $\partial^n_J f$ existent et sont continues pour tout multiindice J de longueur n.

□

12.32.2 Espaces d'applications multilinéaires et identifications

Si V et E sont des espaces vectoriels de dimensions finies, la différentielle de $f\colon V \to E$ est une application $df\colon V \to \mathcal{L}(V,E)$. La différentielle seconde est une application $d(df)\colon V \to \mathcal{L}\big(V, \mathcal{L}(V,E)\big)$ et ainsi de suite.

Une grande difficulté de la manipulation des différentielles d'ordre supérieurs provient de cet emboîtement d'espaces d'applications linéaires. Nous nous attaquons à présent à la description de ces espaces emboîtés[119].

Pour la suite, nous considérerons des espaces vectoriels normés V et E de dimension finie. Nous notons $\mathcal{L}^n(V,E)$ l'espace des applications multilinéaires $V^n \to E$.

Nous introduisons le produit suivant[1] :

$$
\begin{aligned}
\cdot\ : W \times \mathcal{L}\big(V, \mathcal{L}(V,\mathbb{R})\big) &\to \mathcal{L}\big(V, \mathcal{L}(V,W)\big)\\
\big((w \cdot \psi)(u)\big)v &= \big(\psi(u)v\big)w.
\end{aligned}
\tag{12.912}
$$

Dans la suite, pour économiser des parenthèses et des maux de tête, nous allons noter $\psi(u,v)$ le nombre $\psi(u)v$. Il n'est cependant pas question de dire que ψ est une application bilinéaire. En effet, identifier $\mathcal{L}\big(V, \mathcal{L}(V,W)\big)$ à l'espace des applications bilinéaires $V \times V \to W$ ne sert pas à grand chose pour l'instant parce qu'une telle identification a le prix de devoir prouver que toutes les propriétés des différentielles passent à travers l'identification, tâche qui est à priori (conservation de la difficulté) de la même nature que celle à laquelle nous nous attachons à présent.

Lemme 12.341 ([1]).
Soient deux espaces vectoriels normés V et E ainsi que $\psi \in \mathcal{L}\big(V, \mathcal{L}(V,\mathbb{R})\big)$. Pour tout $a \in E$ nous avons

$$
\|a \cdot \psi\|_{\mathcal{L}\left(V,\mathcal{L}(V,E)\right)} = \|\psi\|_{\mathcal{L}\left(V,\mathcal{L}(V,\mathbb{R})\right)} \|a\|_E.
\tag{12.913}
$$

119. Toutes les constructions, tous les énoncés et les preuves qui suivent sont de l'invention personnelle de l'auteur de ces lignes. Je n'ai trouvé nulle part une source qui s'attaque réellement à le récurrence.

Démonstration. Il s'agit seulement d'un calcul :

$$
\begin{aligned}
\|a\cdot\psi\| &= \sup_{\|v\|=1}\|(a\cdot\psi)(v)\|_{\mathcal{L}(V,E)} && (12.914a)\\
&= \sup_{\|v\|=1}\sup_{\|w\|=1}\|(a\cdot\psi)(v)w\|_E && (12.914b)\\
&= \sup_{\|v\|=1}\sup_{\|w\|=1}\|\big(\psi(v)w\big)a\|_E && (12.914c)\\
&= \sup_{\|v\|=1}\sup_{\|w\|=1}|\psi(v)w|\,\|a\|_E && (12.914d)\\
&= \sup_{\|v\|=1}\|\psi(v)\|\,\|a\| && (12.914e)\\
&= \|\psi\|\|a\|. && (12.914f)
\end{aligned}
$$

Notez que dans (12.914c), $|\psi(v)w|$ est un simple réel ; c'est pourquoi nous le retrouvons hors de la norme $\|.\|_E$ dans (12.914d), muni d'une simple valeur absolue. □

Lemme 12.342 ([1]).
Soient $\psi\in\mathcal{L}\big(V,\mathcal{L}(V,\mathbb{R})\big)$ et une fonction continue $f\colon V\to E$. Alors la fonction

$$
\begin{aligned}
g\colon V&\to\mathcal{L}\big(V,\mathcal{L}(V,E)\big)\\
x&\mapsto f(x)\cdot\psi
\end{aligned}
\tag{12.915}
$$

est continue.

Démonstration. Pour des raisons de notations, nous allons écrire g_x pour $g(x)$. Cela étant dit nous considérons $a\in E$, une suite $x_k\xrightarrow{E}a$ et nous calculons :

$$
\begin{aligned}
\|g_a-g_{x_k}\| &= \sup_{\|u\|=1}\|g_a(u)-g_{x_k}(u)\|_{\mathcal{L}(V,E)} && (12.916a)\\
&= \sup_{\|u\|=1}\sup_{\|v\|=1}\|g_a(u)v-g_{x_k}(u)v\|_E && (12.916b)\\
&= \sup_{\|u\|=1}\sup_{\|v\|=1}\|f(a)\psi(u)v-f(x_k)\psi(u)v\| && (12.916c)\\
&= \sup_{\|u\|=1}\sup_{\|v\|=1}\|f(a)-f(x_k)\|\big|\psi(u)v\big| && (12.916d)\\
&= \big|f(a)-f(x_k)\big|\sup_{u,v}|\psi(u)v| && (12.916e)\\
&= \|f(a)-f(x_k)\|\,\|\psi\|. && (12.916f)
\end{aligned}
$$

En prenant la limite $k\to\infty$, et en considérant que f est continue en a, nous obtenons

$$
\lim_{k\to\infty}\|g_a-g_{x_k}\|=0.
\tag{12.917}
$$

□

Lemme 12.343 ([1]).
Soient une application différentiable $f\colon V\to E$ ainsi que $\psi\in\mathcal{L}\big(V,\mathcal{L}(V,\mathbb{R})\big)$. Soit

$$
\begin{aligned}
g\colon V&\to\mathcal{L}\big(V,\mathcal{L}(V,E)\big)\\
x&\mapsto f(x)\cdot\psi.
\end{aligned}
\tag{12.918}
$$

Alors g est différentiable et pour tout $a\in V$ nous avons

$$
dg_a(h)=df_a(h)\cdot\psi.
\tag{12.919}
$$

Notons que nous n'avons pas $dg_a=df_a\cdot\psi$. En effet, $df_a\in\mathcal{L}(V,W)$, de telle sorte que $df_a\cdot\psi\in\mathcal{L}\Big(V,\mathcal{L}\big(V,\mathcal{L}(V,W)\big)\Big)$. Les espaces ne s'emboîtent pas dans le bon ordre.

Démonstration. Il s'agit de vérifier que $h \mapsto df_a(h) \cdot \psi$ vérifie la condition de la définition 11.169. En utilisant le fait que $(a+b)\cdot\psi = a\cdot\psi + b\cdot\psi$ ainsi que le lemme 12.341 nous écrivons

$$\frac{\|f(a+h)\cdot\psi - f(a)\cdot\psi - df_a(h)\cdot\psi\|}{\|h\|} = \|\frac{f(a+h)-f(a)-df_a(h)}{h}\cdot\psi\| \tag{12.920a}$$

$$= \|\frac{f(a+h)-f(a)-df_a(h)}{h}\|\|\psi\|. \tag{12.920b}$$

Vu que f est différentiable en a et que df_a est la différentielle, nous avons bien

$$\lim_{h\to 0}\|\frac{f(a+h)-f(a)-df_a(h)}{h}\|\|\psi\| = 0. \tag{12.921}$$

□

Démonstration. Nous faisons (1) par récurrence. D'abord $\dim(E_0) = \dim(E)$ et ensuite

$$\dim(E_{k+1}) = \dim\mathcal{L}(V, E_k) = \dim(V)\dim(E_k) = \dim(V)^{n+1}\dim(E). \tag{12.922}$$

Pour (2), si $\{e_i\}$ est une base de V, un élément $\omega \in \mathcal{L}^n(V,E)$ est déterminé par les valeurs de $\omega(e_{i_1},\ldots,e_{i_n})$ qui peuvent être n'importe quel vecteur de E. Donc la dimension est $\dim(V)^n\dim(E)$. □

Lemme 12.344 ([1]).
Soit $n\in\mathbb{N}$ nous définissons par récurrence

$$\begin{aligned}\psi_{n,0}\colon E_n &\to E_n\\ \alpha &\mapsto \alpha.\end{aligned} \tag{12.923}$$

et

$$\begin{aligned}\psi_{n,k}\colon E_n &\to \mathcal{L}^k(V, E_{n-k})\\ \psi_{n,k}(\alpha)(v_1,\ldots,v_k) &= \big(\psi_{n,k-1}(\alpha)(v_1,\ldots,v_{k-1})\big)v_k.\end{aligned} \tag{12.924}$$

L'application

$$\psi_{n,n}\colon E_n \to \mathcal{L}^n(V,E) \tag{12.925}$$

est un isomorphisme isométrique.

Démonstration. Nous allons démontrer par récurrence sur k que tous les $\psi_{n,k}$ sont des isomorphismes isométriques. Pour $k=1$ c'est évident parce que $\psi_{n,1}$ est l'identité.

(i) **Injective** Soient $\alpha\in E_n$ tels que $\psi_{n,k+1}(\alpha) = O$. Cela signifie que pour tout $v_1,\ldots,v_{k+1}$ nous avons

$$\psi_{n,k}(\alpha)(v_1,\ldots,v_k)v_{k+1} = 0. \tag{12.926}$$

c'est-à-dire $\psi_{n,k}(\alpha)(v_1,\ldots,v_k = 0)$. Vu que $\psi_{n,k}$ est injective (hypothèse de récurrence), nous avons $\alpha = 0$.

(ii) **Surjective** Soit $\omega\in\mathcal{L}^{k+1}(V, E_{n-k})$; nous cherchons $\alpha\in E_n$ tel que $\psi_{n,k+1}(\alpha) = \omega$. Cette condition s'exprime

$$\psi_{n,k+1}(\alpha)(v_1,\ldots,v_{k+1}) = \psi_{n,k}(\alpha)(v_1,\ldots,v_k)v_{k+1} \stackrel{!}{=} \omega(v_1,\ldots,v_{k+1}). \tag{12.927}$$

Notez que

$$\psi_{n,k}(\alpha)\in\mathcal{L}^k(V, E_{n-k}) = \mathcal{L}^k\big(V,\mathcal{L}(V, E_{n-k-1})\big). \tag{12.928}$$

En considérant $\sigma\in\mathcal{L}^k\big(V,\mathcal{L}(V,E_{n-k-1})\big)$ donné par

$$\sigma(v_1,\ldots,v_k)v_{k+1} = \omega(v_1,\ldots,v_{k+1}), \tag{12.929}$$

il existe (hypothèse de récurrence sur k) un $\alpha\in E_n$ tel que $\psi_{n,k}(\alpha) = \sigma$.
Pour ce α, la condition (12.927) est satisfaite.

(iii) **Isométrique** Encore une fois par récurrence. Soit $\alpha \in E_n$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\|\psi_{n,k}(\alpha)\|_{\mathcal{L}^k(V,E_{n-k})} &= \sup_{\|v_i\|=1} \|\psi_{n,k}(\alpha)(v_1,\ldots,v_k)\|_{E_{n-k}} && (12.930a)\\
&= \sup_{\|v_i\|=1} \|\psi_{n,k-1}(\alpha)(v_1,\ldots,v_{k-1})v_k\|_{E_{n-k}} && (12.930b)\\
&= \sup_{\substack{\|v_i\|=1\\ i=1,\ldots,k-1}} \|\psi_{n,k-1}(v_1,\ldots,v_{k-1})\|_{\mathcal{L}(V,E_{n-k-1})} && (12.930c)\\
&= \|\psi_{n,k-1}(\alpha)\| && (12.930d)\\
&= \|\alpha\|. && (12.930e)
\end{aligned}$$

La dernière égalité est l'hypothèse de récurrence. Notez la subtile utilisation du lemme 7.127 qui permet de donner un sens aux supremums, grace au fait que $\{v \in V \text{ tel que } \|v\| = 1\}$ est compact.

□

L'application $\psi_{n,n}$ est l'application inverse de l'isomorphisme ϕ_n donné dans le lemme 12.336.

Lemme 12.345.
Nous avons $\psi_{n,n} = \phi_n^{-1}$.

Démonstration. Pour nous échauffer nous posons $\omega \in \mathcal{L}^n(V,\mathbb{R})$, et nous calculons

$$\begin{aligned}
\psi_{n,2}\big(\phi_n(\omega)\big)(v_1,v_2) &= \Big(\psi_{n,1}\big(\phi_n(\omega)\big)v_1\Big)v_2 && (12.931a)\\
&= \big(\phi_n(\omega)v_1\big)v_2 && (12.931b)\\
&= \phi_{n-1}\big(\texttt{proj}_{v_1}(\omega)\big) && (12.931c)\\
&= \phi_{n-2}\big(\texttt{proj}_{v_2}\texttt{proj}_{v_1}(\omega)\big). && (12.931d)
\end{aligned}$$

Cela étant dit, nous allons prouver ceci par récurrence :

$$\psi_{n,k}\big(\phi_n(\omega)\big)(v_1,\ldots,v_k) = \phi_{n-k}\Big(\prod_{i=1}^{k}\texttt{proj}_{v_i}(\omega)\Big). \tag{12.932}$$

Notez l'ordre du produit des projections. En ce qui concerne cet ordre, pour fixer les idées voici un exemple :

$$\texttt{proj}_{v_2}\texttt{proj}_{v_1}(\omega) = \big(\texttt{proj}_{v_1}(\omega)\big)(v_2) = \omega(v_1,v_2). \tag{12.933}$$

Faisons maintenant la récurrence.

(i) **Pour $k = 2$** C'est le calcul (12.931).

(ii) **Pour $k + 1$** C'est encore un calcul, en faisant attention à l'ordre dans lequel viennent les projections :

$$\begin{aligned}
\psi_{n,k+1}\big(\phi_n(\omega)\big)(v_1,\ldots,v_{k+1}) &= \Big(\psi_{n,k}\big(\phi_n(\omega)\big)(v_1,\ldots,v_k)\Big)v_{k+1} && (12.934a)\\
&= \Big(\phi_{n-k}\big(\prod_{i=1}^{k}\texttt{proj}_{v_i}(\omega)\big)\Big)v_{k+1} && (12.934b)\\
&= \phi_{n-k-1}\big(\texttt{proj}_{v_{k+1}}\prod_{i=1}^{k}\texttt{proj}_{v_i}(\omega)\big) && (12.934c)\\
&= \phi_{n-(k+1)}\big(\prod_{i=1}^{k+1}\texttt{proj}_{v_i}(\omega)\big). && (12.934d)
\end{aligned}$$

Il ne reste qu'à écrire la formule démontrée avec $k = n$:

$$\psi_{n,n}\big(\phi_n(\omega)\big)(v_1, \ldots, v_n) = \phi_{n-n}\big(\prod_{i=1}^{n} \texttt{proj}_{v_i(\omega)}\big) = \omega(v_1, \ldots, v_n). \tag{12.935}$$

Donc nous avons bien que $\psi_{n,n}\big(\phi_n(\omega)\big) = \omega$. □

Lemme 12.346.
Soient deux espaces vectoriels normés V et E. Nous considérons une application linéaire $A\colon V \to E$, une forme $\omega \in \mathcal{L}^n(V, \mathbb{R})$ ainsi que la forme

$$\begin{aligned} \alpha\colon V &\to E_n \\ u &\mapsto A(u)\psi^{-1}(\omega). \end{aligned} \tag{12.936}$$

Alors

$$\psi_{n+1,n+1}(\alpha)(v_1, \ldots, v_{n+1}) = A(v_1)\omega(v_2, \ldots, v_{n+1}). \tag{12.937}$$

Démonstration. Nous prouvons la formule suivante par récurrence :

$$\psi_{n+1,k}(\omega)(v_1, \ldots, v_k) = A(v_1)\phi_{n-k+1}\big(\prod_{i=2}^{k} \texttt{proj}_{v_i}(\omega)\big). \tag{12.938}$$

Nous commençons la récurrence avec $k = 2$, en tenant compte que $\psi^{-1} = \phi_n$ (lemme 12.345) :

$$\psi_{n+1,2}(\alpha)(v_1, v_2) = \big(\psi_{n+1,1}(\alpha)v_1\big)v_2 \tag{12.939a}$$
$$= \alpha(v_1)v_2 \tag{12.939b}$$
$$= A(v_1)\big(\psi^{-1}(\omega)v_2\big) \tag{12.939c}$$
$$= A(v_1)\big(\phi_n(\omega)v_2\big) \tag{12.939d}$$
$$= A(v_1)\phi_{n-1}\big(\texttt{proj}_{v_2}(\omega)\big). \tag{12.939e}$$

C'est bon pour $k = 2$. Nous passons à la récurrence :

$$\psi_{n+1,k+1}(\omega)(v_1, \ldots, v_{k+1}) = \big(\phi_{n+1,k}(\omega)(v_1, \ldots, v_k)\big)v_{k+1} \tag{12.940a}$$
$$= A(v_1)\Big(\phi_{n-k+1}\big(\prod_{i=2}^{k} \texttt{proj}_{v_i}\,\omega\big)\Big)v_{k+1} \tag{12.940b}$$
$$= A(v_1)\phi_{n-k}\big(\texttt{proj}_{v_{k+1}} \prod_{i=2}^{k} \texttt{proj}_{v_i}\,\omega\big) \tag{12.940c}$$
$$= A(v_1)\phi_{n-(k+1)}\big(\prod_{i=2}^{k+1} \texttt{proj}_{v_i}\,\omega\big). \tag{12.940d}$$

La récurrence est terminée. Nous écrivons la formule pour $k = n + 1$ en tenant compte de $\phi_0 = \mathrm{Id}$ pour terminer la preuve de ce lemme :

$$\psi_{n+1,n+1}(\omega)(v_1, \ldots, v_{n+1}) = A(v_1)\phi_0\big(\prod_{i=2}^{n+1} \texttt{proj}_{v_i}\,\omega\big) = A(v_1)\omega(v_2, \ldots, v_{n+1}). \tag{12.941}$$

□

12.32.3 Fonctions différentiables plusieurs fois

Définition 12.347.
*Un C^k-**difféomorphisme** est une application inversible de classe C^k dont l'inverse est également de classe C^k.*

Exemple 12.348.
Soit $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une application bilinéaire. On définit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ par $f(x) = B(x, x)$. Le lemme 12.283 nous dit que B est différentiable. Cela implique la différentiabilité de f. Pour trouver la différentielle de la fonction f, nous écrivons $f = B \circ s$ où $s\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ est l'application $s(x) = (x, x)$. En utilisant la règle de différentiation de fonctions composées,

$$df(a) = dB\big(s(a)\big) \circ ds(a). \tag{12.942}$$

Mais $ds(a).u = (u, u)$ parce que $s(a + h) - s(a) - (h, h) = 0$. Par conséquent,

$$df(a).u = dB\big(s(a)\big)(u, u) = B(u, a) + B(a, u) \tag{12.943}$$

où nous avons utilisé la formule du lemme 12.283. La formule (12.943) peut être écrite sous la forme compacte

$$df(a) = B(\,\cdot\,, a) + B(a,\,\cdot\,) \tag{12.944}$$

La fonction $df(a)$ ainsi écrite est linéaire par rapport à a, donc différentiable. En outre elle coïncide avec sa différentielle, comme on a vu dans le lemme 11.176, au sens que la différentielle de df au point a sera l'application que à chaque x dans $\mathbb{R}^m$ associe l'application linéaire $B(x,\,\cdot\,)+B(\,\cdot\,, x)$. On voit bien que d^2f au point a est une application de $\mathbb{R}^m$ vers l'espace des applications linéaires $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. On peut utiliser d'autre part l'isomorphisme des espaces $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$ et $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ et dire que, une fois que a est fixé, l'application $d^2f(a)$ est une application bilinéaire sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. On écrit alors $d^2f(a)(x, y) = B(x, y) + B(y, x)$. △

12.32.4 Différentielle seconde, fonction de classe C^2

La différentielle seconde dans l'exemple 12.348 est symétrique, c'est-à-dire que $d^2f(a)(x_1, x_2) = d^2f(a)(x_2, x_1)$. En fait toute différentielle seconde est symétrique.

Théorème 12.349 (Schwarz)**.**
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Alors, pour tout couple i, j d'indices dans $\{1, \ldots, m\}$ et pour tout point a dans U, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Démonstration. Pour simplifier nous nous limitons ici au cas $m = 2$. Soit (h, g) un vecteur fixé dans $\mathbb{R}^2$. Pour tout $v = (x, y)$ dans $\mathbb{R}^2$ on note

$$\begin{aligned} \Delta_h f(v) &= f(v + he_1) - f(v) = f(x + h, y) - f(x, y),\\ \Delta_g f(v) &= f(v + ge_2) - f(v) = f(x, y + g) - f(x, y), \end{aligned} \tag{12.945}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \Delta_g\Delta_h f(v) &= (f(x + h, y + g) - f(x, y + g)) - (f(x + h, y) - f(x, y))\,,\\ \Delta_h\Delta_g f(v) &= (f(x + h, y + g) - f(x + h, y)) - (f(x, y + g) - f(x, y))\,, \end{aligned} \tag{12.946}$$

donc,

$$\frac{1}{g}\Delta_g\left(\frac{1}{h}\Delta_h f(v)\right) = \frac{1}{h}\Delta_h\left(\frac{1}{g}\Delta_g f(v)\right). \tag{12.947}$$

On utilise alors le théorème des accroissements finis 12.192

$$\frac{1}{h}\Delta_h f(v) = \frac{1}{h}\big(f(x + h, y) - f(x, y)\big) = \frac{1}{h}\partial_1 f(x + t_1h, y)h = \partial_1 f(x + t_1h, y), \tag{12.948}$$

pour un certain t_1 dans $]0, 1[$. De même on obtient

$$\frac{1}{g}\Delta_g f(v) = \partial_2 f(x, y + t_2g),$$

pour un certain t_2 dans $]0,1[$. Alors

$$\frac{1}{g}\Delta_g\big(\partial_1 f(x+t_1h,y)\big)=\frac{1}{h}\Delta_h\big(\partial_2 f(x,y+t_2g)\big). \tag{12.949}$$

En appliquant encore une fois le théorème des accroissements finis on a

$$\partial_2\partial_1 f(x+t_1h,y+s_1g)=\partial_1\partial_2 f(x+s_2h,y+t_2g). \tag{12.950}$$

Il suffit maintenant de passer à la limite pour $(h,g)\to(0,0)$ et de se souvenir du fait que f est $\mathcal{C}^2$ seulement si ses dérivées partielles secondes sont continues [120] pour avoir $\partial_2\partial_1 f(v)=\partial_1\partial_2 f(v)$. □

Si f est deux fois différentiable $d^2f(a)$ est l'application bilinéaire associée avec la matrice symétrique

$$H_f(a)=\begin{pmatrix}\partial_1^2 f(a) & \ldots & \partial_1\partial_m f(a)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \partial_1\partial_m f(a) & \ldots & \partial_1^2 f(a),\end{pmatrix} \tag{12.951}$$

Cette matrice est dite la matrice **hessienne** de f.

Exemple 12.350.
Montrons qu'il n'existe pas de fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ telles que

$$\begin{cases}\partial_x f(x,y)=5\sin x & (12.952a)\\ \partial_y(x,y)=6x+y. & (12.952b)\end{cases}$$

Ceci est vite fait en appliquant le théorème de Schwarz, 12.349 ; ce que nous trouvons est

$$\partial_y(\partial_x f)=0$$

alors que

$$\partial_x(\partial_y f)=6. \tag{12.953}$$

Vu que $\partial_x(\partial_y f)\neq\partial_y(\partial_x f)$, le théorème 12.349 dit que f ne peut pas être de classe C^2. △

Soit une fonction de classe C^2 $f\colon V\to\mathbb{R}$ où V est un espace vectoriel de dimension $n<\infty$. Nous avons

$$f\colon V\to\mathbb{R} \tag{12.954a}$$
$$df\colon V\to\mathcal{L}(V,\mathbb{R}) \tag{12.954b}$$
$$d^2f\colon V\to\mathcal{L}\Big(V,\mathcal{L}(V,\mathbb{R})\Big), \tag{12.954c}$$

avec, en suivant les différentes formules du lemme 12.265,

$$df_a(u)=\frac{d}{dt}\Big[f(v+tu)\Big]_{t=0} \tag{12.955}$$

et

$$(d^2f)_a(u)=\frac{d}{dt}\Big[df_{v+tu}\Big]_{t=0} \tag{12.956}$$

pour tout $a,u\in V$. Notons que dans le deuxième cas, il s'agit d'une limite dans $\mathcal{L}(V,\mathbb{R})$. Si $\dim(V)=n$, alors $\dim\mathcal{L}(V,\mathbb{R})=n$ et avec un choix de base, nous pouvons trouver une matrice $n\times n$ pour $(d^2f)_a$.

Soit une base $\{e_i\}$ de V et la base duale $\{e_i^*\}$ de $\mathcal{L}(V,\mathbb{R})$. Nous allons chercher la matrice de $(d^2f)_a$ pour ces bases. L'élément de matrice

$$\big[(d^2f)_a\big]_{ij} \tag{12.957}$$

120. Théorème 12.340.

est la composante e_j^* de $(d^2f)_a$ appliqué à e_i. Trouver cette composante e_j^* revient à appliquer l'élément $(d^2f)_a e_i$ de $\mathcal{L}(V,\mathbb{R})$ à e_j. Le calcul est donc :

$$\begin{aligned}
\big[(d^2f)_a\big]_{ij} &= \big((d^2f)_a e_i\big)(e_j) && (12.958a)\\
&= \frac{d}{dt}\Big[df_{a+te_i}(e_j)\Big]_{t=0} && (12.958b)\\
&= \frac{d}{dt}\Big[\frac{d}{ds}\Big[f(a+te_i+se_j)\Big]_{s=0}\Big]_{t=0} && (12.958c)\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a). && (12.958d)
\end{aligned}$$

Attention : le passage à (12.958b) n'est pas une trivialité. Le fait est que si $t\mapsto A(t)$ est une application continue $\mathbb{R}\to\mathcal{L}(V,\mathbb{R})$ alors

$$\lim_{t\to 0}\big(A(t)v\big) = \big(\lim_{t\to 0} A(t)\big)v. \tag{12.959}$$

Donc la matrice de d^2f est la matrice des dérivées secondes. Il s'agit d'une matrice symétrique par le théorème de Schwarz 12.349.

12.351.
Si $a\in v$, nous pouvons aussi voir $(d^2f)_a$ comme une forme bilinéaire sur V grâce à la proposition 11.76. Si $u,v\in V$ nous notons

$$(d^2f)_a(u,v) = (d^2f)_a(u)v. \tag{12.960}$$

À droite, il s'agit de la définition réelle de d^2f sans abus de notations, et à gauche, il s'agit d'une notation. Cette application bilinéaire $(d^2f)_a\in\mathcal{L}^{(2)}(V,\mathbb{R})$ a pour matrice symétrique la matrice des dérivées secondes calculées en a.

Exemple 12.352.
Voyons comment la différentielle seconde fonctionne entre deux espaces vectoriels. Soient deux espaces vectoriels de dimension finie V et W. Pour que les choses soient claires, nous avons :

$$\begin{aligned}
f&\colon V\to W && (12.961a)\\
df&\colon V\to \mathcal{L}(V,W) && (12.961b)\\
d^2f&\colon V\to \mathcal{L}\Big(V,\mathcal{L}(V,W)\Big). && (12.961c)
\end{aligned}$$

Si $a\in V$, alors $(d^2f)_a$ est une application $V\to\mathcal{L}(V,W)$. Il faut donc l'appliquer à $u\in V$ et ensuite à $v\in V$ pour obtenir un élément de W :

$$\begin{aligned}
(d^2f)_a(u)v &= \frac{d}{dt}\Big[df_{a+tu}\Big]_{t=0}v && (12.962a)\\
&= \frac{d}{dt}\Big[df_{a+tu}(v)\Big]_{t=0} && (12.962b)\\
&= \frac{d}{dt}\Big[\frac{d}{ds}\Big[f(a+tu+sv)\Big]_{s=0}\Big]_{t=0} && (12.962c)\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}(a). && (12.962d)
\end{aligned}$$

Par conséquent nous voyons

$$\begin{aligned}
d^2f&\colon V\to\mathcal{L}^{(2)}(V,W)\\
d^2f_a(u,v) &= \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}(a).
\end{aligned} \tag{12.963}$$

Dans le cas d'une fonction $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, nous avons une seule direction et par linéarité de (12.963) par rapport à u et v, nous avons

$$d^2f_a(u,v) = f''(a)uv \tag{12.964}$$

où les produits sont des produits usuels dans $\mathbb{R}$ et f'' est la dérivée seconde usuelle. △

Tout ceci est un peu résumé dans la proposition suivante.

Proposition 12.353.
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Alors en désignant par H_af sa matrice hessienne au point a nous avons

$$(d^2f)_a(u,v) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(a) = \langle (H_af)u, v\rangle \tag{12.965}$$

pour tout $u, v \in \mathbb{R}^n$.

Démonstration. La première égalité est l'équation (12.964) déjà faite. Pour la seconde, il faut se rappeler du lien entre dérivée partielle et dérivée directionnelle, donné en le lemme 12.265. En particulier ici nous avons

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \sum_{kl} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(a) u_k v_l = \langle (H_af)u, v\rangle. \tag{12.966}$$

□

En particulier, la matrice hessienne H_af est symétrique et donc diagonalisable (théorème spectral 9.212). Si e_i est un vecteur propre unitaire pour la valeur propre λ_i nous avons

$$(d^2f)_a(e_i,e_i) = \langle (H_af)e_i, e_i\rangle = \lambda_i \langle e_i, e_i\rangle = \lambda. \tag{12.967}$$

Enfin pour celles qui aiment les notations matricielles de tout poil, il y a cette façon-ci d'écrire :

$$(d^2f)_a(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial^2_x f(a) & \partial^2_{xy} f(a) \\ \partial^2_{xy} f(a) & \partial^2_y f(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \tag{12.968}$$

12.32.5 Ordre supérieur

Intuitivement, une fonction est de classe C^p si elle est p fois continûment différentiable. Cela est la définition 11.170.

Ce qui est terrible avec les différentielles d'ordre supérieurs, c'est l'emboîtement des espaces. Pour une fonction $f\colon E \to F$, nous allons souvent poser

$$V_0 = F \tag{12.969a}$$
$$V_{k+1} = \mathcal{L}(E, V_k), \tag{12.969b}$$

de telle sorte à avoir

$$df\colon E \to \mathcal{L}(E,F) = V_1 \tag{12.970}$$

et

$$d^2f\colon E \to \mathcal{L}(E, V_1) = V_2, \tag{12.971}$$

ce qui donne en général

$$d^kf\colon E \to \mathcal{L}(E, v_{k-1}) = V_k. \tag{12.972}$$

La proposition suivante lie une bonne fois pour toute dérivée et différentielle dans le cadre de fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Proposition 12.354 ([1])**.**
Une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^p si et seulement si elle est p fois continûment dérivable.

Démonstration. Nous commençons par poser un certain nombre de notations. Comme souvent nous posons $V_0 = \mathbb{R}$ et

$$V_{k+1} = \mathcal{L}(\mathbb{R}, V_k). \tag{12.973}$$

De plus nous considérons $M_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ donnée par $M_1(t) = t$. Et par récurrence

$$M_{k+1}(t) = tM_k. \tag{12.974}$$

Nous avons $M_1 \in V_1$ et $M_k \colon \mathbb{R} \to V_{k-1}$, c'est-à-dire $M_k \in V_k$.

Les formules que nous allons prouver sont que d'une part,

$$df_a = f'(a)M_1. \tag{12.975}$$

et que d'autre part, plus généralement,

$$(d^k f)_a = f^{(k)}(a)M_k. \tag{12.976}$$

En plusieurs parties et par récurrence.

(i) **Si f est continûment dérivable, alors f est C^1** Nous montrons que l'application T donnée par $T(h) = hf'(a)$ vérifie la condition pour être la différentielle de f en a :

$$\frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{\|h\|} = \frac{f(a+h) - f(a)}{\|h\|} - 1'_h f(a). \tag{12.977}$$

où nous avons noté 1_h le vecteur unité dans la direction de h, c'est-à-dire $1_h = h/\|h\|$. Vu que $h \in \mathbb{R}$, c'est simplement

$$1_h = \begin{cases} 1 & \text{si } h > 0 \\ -1 & \text{si } h < 0 \end{cases} \tag{12.978}$$

et nous ne définissons pas 1_h si $h = 0$.

C'est le moment de prendre la limite de (12.977) pour $h \to 0^+$ et $h \to 0^-$ séparément. Lorsque $h \to 0^+$, nous avons $\|h\| = h$ et $1_h = h$. Vu que f est supposée dérivable, la limite du quotient existe et vaut $f'(a)$. Donc le tout a une limite nulle :

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{\|h\|} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} -' f(a) = 0. \tag{12.979}$$

En ce qui concerne la limite $h \to 0^-$, nous avons $\|h\| = -h$ et $1_h = -1$, et à nouveau une limite nulle. La proposition 12.42 nous permet alors de conclure que la limite existe et est nulle. Les limites à gauche et à droite étant nulles, la limite existe et est nulle par la proposition 12.42.

(ii) **Si $f^{(p)}$ est continue alors $d^p f$ aussi** Nous passons à la récurrence de notre preuve. Sous l'hypothèse que $f^{(p)}$ existe et est continue, nous allons montrer que $d^p f$ existe, est continue et vaut

$$(d^p f)_a = f^{(p)}(a)M_p. \tag{12.980}$$

Soit $k < p$ tel que ce soit bon (pour $k = 1$ c'est déjà fait). Nous avons $(d^k f)_a = f^{(k)}(a)M_k$, et pour prouver que $(d^{k+1} f)_a = f^{(k+1)}(a)M_{k+1}$ nous l'y mettons dans la définition de la différentielle. Nous avons :

$$\frac{(d^k f)_{a+h} - (d^k f)_a - f^{(k+1)}(a)M_{k+1}(h)}{\|h\|} = \frac{f^{(k)}(a+h)M_k - f^{(k)}(a)M_k - hf^{(k+1)}(a)M_k}{\|h\|}. \tag{12.981}$$

La limite $h \to 0$ est une limite dans V_k, et elle se traite comme précédemment. Elle vaut zéro parce que $f^{(k+1)}$ est la dérivée de $f^{(k)}$. Cela justifie les faits que $d^k f$ est différentiable en a et que la différentielle est donné par la formule voulue.

Par hypothèse, $k + 1 \leqslant p$, donc $f^{(k+1)}$ est continue. Par conséquent l'application $a \mapsto f^{(k+1)}(a)M_{k+1}$ est continue.

(iii) **Si f est de classe C^1 alors f' existe et est continue** Dire que f est de classe C^1 revient à dire que la différentielle $df \colon \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ existe et est continue. Soyons conscient que $df_a(\epsilon) = \epsilon df_a(1)$ et calculons

$$\frac{f(a+\epsilon) - f(a) - df_a(\epsilon)}{\epsilon} = \frac{f(a+\epsilon) - f(a)}{\epsilon} - df_a(1). \tag{12.982}$$

La définition de la différentielle est que la limite de cela pour $\epsilon \to 0$ soit nulle. Cela implique que la limite suivante existe et vaut

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(a+\epsilon) - f(a)}{\epsilon} = df_a(1). \tag{12.983}$$

Nous avons prouvé que $f'(a) = df_a(1)$.
La fonction $a \mapsto df_a$ est continue. Pouvons-nous en déduire que f' est continue ? Nous avons

$$f' = ev_1 \circ df \tag{12.984}$$

où ev_1 est l'application d'évaluation dont le lemme 11.59 a déjà donné la continuité. Donc f' est continue comme composée d'applications continues.

(iv) <u>f **est** C^p**. Récurrence**</u> Nous supposons que f est de classe C^p, et nous allons montrer par récurrence que $f^{(k)}$ existe et est continue pour tout $k \leqslant p$. Posons exactement l'énoncé de notre récurrence.
Pour $k = 1$ c'est fait. Nous supposons que la formule soit correcte pour un certain $k \leqslant p$ et nous y allons pour $k+1$. Nous avons

$$\frac{(d^k f)(a+h) - (d^k f)(a) - f^{(k+1)}(a) M_{k+1}(h)}{\|h\|} = \frac{\big[f^{(k)}(a+h) - f^k(a) - hf^{(k+1)}(a)\big] M_k}{\|h\|} \tag{12.985a}$$

$$= \Big[\frac{f^{(k)}(a+h) - f^{(k)}(a)}{\|h\|} - 1_h f^{(k+1)}(a)\Big] M_k. \tag{12.985b}$$

où nous avons aussi tenu compte que $M_{k+1}(h) = hM_k$.
C'est le moment de calculer séparément les limites $h \to 0^+$ et $h \to 0^-$. Cela fonctionne comme toutes les autres fois.

□

Soit une fonction $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable l fois. L'application

$$d^l f \colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}\Big(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}\big(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\ldots)\big)\Big) \tag{12.986}$$

au point x appliquée à $v^{(1)}$ appliquée au point $v^{(2)}$, ..., appliquée à $v^{(l)}$ est notée

$$(d^l f)_x(v^{(1)}, \ldots, v^{(l)}) \in \mathbb{R}. \tag{12.987}$$

Proposition 12.355.
Soit une fonction $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable l fois. Avec la notation (12.987) nous avons

$$(d^l f)_x(v^{(1)}, \ldots v^{(l)}) = \sum_{k_1, \ldots, k_l} v^{(1)}_{k_1} \ldots v^{(l)}_{k_l} \frac{\partial^l f}{\partial x_{k_1} \ldots \partial x_{k_l}}(x). \tag{12.988}$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur l, en sachant que la formule est déjà vraie pour $l = 1$ et $l = 2$. Si la formule est valable pour l, nous avons

$$(d^{l+1} f)_x(v^{(1)}, \ldots, v^{(l+1)}) = \frac{d}{dt}\Big[(d^l)_{x+tv^{(l+1)}}(v^{(1)}, \ldots, v^{(l)})\Big]_{t=0} \tag{12.989a}$$

$$= \sum_{k_1 \ldots k_l} v^{(1)}_{k_1} \ldots v^{(l)}_{k_l} \frac{d}{dt}\Big[\frac{\partial^l f}{\partial x_1 \ldots \partial x_l}(x + tv^{l+1})\Big]_{t=0} \tag{12.989b}$$

$$= \sum_{k_1 \ldots k_l} v^{(1)}_{k_1} \ldots v^{(l)}_{k_l} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^l f}{\partial x_{k_1} \ldots \partial x_k}(x). \tag{12.989c}$$

Cela donne le résultat attendu. □

12.356.
La formule de la proposition 12.355 nous permet d'écrire de jolies formules comme

$$(d^3f)_x(h,h,h) = \sum_{ijk} h_i h_j h_k (\partial^3_{ijk} f)(x). \tag{12.990}$$

Proposition 12.357 ([1]).
Soient des espaces vectoriels E, V et W de dimension fine, et une fonction $f\colon E \to V$ de classe C^p. Si $\varphi\colon V \to W$ est linéaire, alors

$$\varphi \circ f\colon E \to W \tag{12.991}$$

est de classe C^p.

Démonstration. En utilisant le théorème de différentiation de fonctions composées 11.183,

$$f(\varphi \circ f)_a(u) = d\varphi_{f(a)} df_a(u), \tag{12.992}$$

et donc, parce que φ est linéaire,

$$d(\varphi \circ f)_a = \varphi \circ df_a. \tag{12.993}$$

Nous pouvons exprimer cela de façon un peu différente en posant $\varphi_1\colon \mathcal{L}(E,V) \to \mathcal{L}(E,W)$,

$$\varphi_1(\alpha)(a) = (\varphi \circ \alpha)(a). \tag{12.994}$$

Cela nous permet d'écrire $\varphi \circ df_a = (\varphi_1 \circ df)(a)$ et donc

$$d(\varphi \circ f) = \varphi_1 \circ df \tag{12.995}$$

où φ_1 est encore une application linéaire. Une récurrence semble possible. Nous posons $V_0 = V$ et $W_0 = W$ puis

$$V_{k+1} = \mathcal{L}(E, V_k) \tag{12.996a}$$
$$W_{k+1} = \mathcal{L}(E, W_k) \tag{12.996b}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_k\colon \mathcal{L}(E, V_{k-1}) &\to \mathcal{L}(E, W_{k-1}) \\ g &\mapsto \varphi_{k-1} \circ g. \end{aligned} \tag{12.997}$$

Avec tout cela, nous prétendons que $d^k(\varphi \circ f) = \varphi_k \circ d^k f$ avec φ_k linéaire.

(i) **φ_k est linéaire** Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{L}(E, V_{k-1})$, ainsi que $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Nous avons, en utilisant la linéarité de φ_{k-1} :

$$\begin{aligned} \varphi_k(\lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2)(a) &= \varphi_{k-1}\big((\lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2)(a)\big) && (12.998a)\\ &= \varphi_{k-1}\big(\lambda\alpha_1(a)\big) + \mu\varphi_{k-1}\big(\alpha_2(a)\big) && (12.998b)\\ &= \lambda\varphi_k(\alpha_1)a + \mu\varphi_k(\alpha_2)(a). && (12.998c) \end{aligned}$$

Donc φ_k est linéaire pour tout k.

(ii) **La relation** La relation

$$d^k(\varphi \circ f) = \varphi_k \circ d^k f \tag{12.999}$$

se démontre par récurrence, chaque pas étant justifié de la même manière que (12.995).

□

12.33 Suites et séries : généralités

12.33.1 Norme suprémum

Définition 12.358 (norme suprémum)**.**
[[272]] Soient un ensemble Ω, une partie A de Ω et un espace normé V. Lorsque g est une fonction $g\colon \Omega \to V$, nous notons

$$\|g\|_A = \sup_{x\in A} \|g(x)\| \tag{12.1000}$$

*C'est la **norme suprémum** limitée à la partie A.*

*Nous disons qu'une suite de fonctions (f_n) définies sur un ensemble A **converge uniformément sur** A vers la fonction f si*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_A = 0. \tag{12.1001}$$

Lemme 12.359.
Soient un espace compact K et une fonction continue $f\colon K \to \mathbb{C}$ qui se décompose en partie réelle et complexe comme $f(x) = u(x) + iv(x)$. Alors

(1) Les fonctions u et v sont continues sur K.

(2) $\|u\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$,

(3) $\|v\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$,

12.33.2 Convergence uniforme

12.33.2.1 Critère de Cauchy uniforme

Proposition 12.360 (Critère de Cauchy uniforme[340])**.**
Soit X un espace topologique et (Y, d) un espace topologique complet. La suite de fonctions $f_n\colon X \to Y$ converge uniformément sur A si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $k, l > N$ alors

$$d\big(f_k(x), f_l(x)\big) \leqslant \epsilon \tag{12.1002}$$

pour tout $x \in X$.

Grosso modo, cela dit que si qu'une suite de Cauchy pour la norme uniforme est une suite uniformément convergente. Le fait que la suite converge fait partie du résultat et n'est pas une hypothèse. Ce critère sera utilisé pour montrer que $\big(C(K), \|.\|_\infty\big)$ est complet, proposition 12.363.

Démonstration. Si $f_n \xrightarrow{unif} f$ alors le critère est satisfait ; c'est dans l'autre sens que la preuve est intéressante.

Soit donc une suite de fonctions satisfaisant au critère et montrons qu'elle converge uniformément. Pour tout $x \in X$ la suite $n \mapsto f_n(x)$ est de Cauchy dans l'espace complet Y ; nous avons donc convergence ponctuelle $f_n \to f$. Nous devons prouver que cette convergence est uniforme. Soit $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que si $k, l > N$ alors

$$d\big(f_k(x), f_l(x)\big) \leqslant \epsilon \tag{12.1003}$$

pour tout $x \in X$. Si nous nous fixons un tel k et un $x \in A$ nous considérons l'inégalité

$$d\big(f_k(x), f_l(x)\big) \leqslant \epsilon \tag{12.1004}$$

qui est vraie pour tout l. En passant à la limite $l \to \infty$ (limite qui commute avec la fonction distance par définition de la topologie) nous avons

$$d\big(f_k(x), f(x)\big) \leqslant \epsilon. \tag{12.1005}$$

Cette inégalité étant valable pour tout $x \in X$, cela signifie que $f_n \xrightarrow{unif} f$. □

Théorème 12.361 (Limite uniforme de fonctions continues)**.**
Soit A, un ensemble mesuré et $f_n\colon A \to \mathbb{R}^n$, une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers f. Si les fonctions f_n sont toutes continues en $x_0 \in A$, alors f est continue en x_0.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Si $x \in A$ nous avons, pour tout n, la majoration

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(x_0)\| &\leqslant \|f(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f_n(x_0)\| + \|f_n(x_0) - f(x_0)\| && (12.1006a)\\ &\leqslant \|f_n(x) - f_n(x_0)\| + 2\|f_n - f\|_\infty. && (12.1006b)\end{aligned}$$

Grâce à l'uniforme convergence, nous considérons $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_n - f\| \leqslant \epsilon$ pour tout $n \geqslant N$. Pour de tels n, nous avons

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leqslant 2\epsilon + \|f_n(x) - f_n(x_0)\|. \tag{12.1007}$$

La continuité de f_n nous fournit un $\delta > 0$ tel que $\|f_n(x_0) - f_n(x)\| < \epsilon$ dès que $\|x - x_0\| < \delta$. Pour ce δ, nous avons alors $\|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$.

Donc lorsque $\|x - x_0\| < \delta$ et $n \geqslant N$ nous avons

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leqslant 3\epsilon, \tag{12.1008}$$

où vous remarquerez qu'il n'y a plus de dépendance en n. Cela prouve la continuité de f en x_0. □

12.33.2.2 Complétude avec la norme uniforme

Proposition 12.362 (Limite uniforme de fonctions continues)**.**
Soit X un espace topologique et (Y, d) un espace métrique. Si une suite de fonctions $f_n\colon X \to Y$ continues converge uniformément, alors la limite est séquentiellement continue[121].

Démonstration. Soit $a \in X$ et prouvons que f est séquentiellement continue en a. Pour cela nous considérons une suite $x_n \to a$ dans X. Nous savons que $f(x_n) \xrightarrow{Y} f(x)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$ nous avons la majoration

$$\begin{aligned} \big\|f(x_n) - f(x)\big\| &\leqslant \big\|f(x_n) - f_k(x_n)\big\| + \big\|f_k(x_n) - f_k(x)\big\| + \big\|f_k(x) - f(x)\big\| && (12.1009a)\\ &\leqslant 2\|f - f_k\|_\infty + \big\|f_k(x_n) - f_k(x)\big\|. && (12.1009b)\end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$. Si nous choisissons k suffisamment grand la premier terme est plus petit que ϵ. Et par continuité de f_k, en prenant n assez grand, le dernier terme est également plus petit que ϵ. □

Proposition 12.363.
Soit X un espace topologique métrique (Y, d) un espace métrique complet. Alors les espaces

(1) $\big(C^0_b(X, Y), \|.\|_\infty\big)$ des fonctions continues et bornées $X \to Y$,

(2) $\big(C^0_0(X, Y), \|.\|_\infty\big)$ des fonctions continues et s'annulant à l'infini

(3) $\big(C^k_0(X, Y), \|.\|_\infty\big)$ des fonctions de classe C^k et s'annulant à l'infini

sont complets.

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $C(X, Y)$, c'est-à-dire que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $k, l > N$ nous avons $\|f_k - f_l\|_\infty \leqslant \epsilon$. Cette suite vérifie le critère de Cauchy uniforme 12.360 et donc converge uniformément vers une fonction $f\colon X \to Y$. La continuité (ou l'aspect C^k) de la fonction f découle de la convergence uniforme et de la proposition 12.362 (c'est pour avoir l'équivalence entre la continuité séquentielle et la continuité normale que nous avons pris l'hypothèse d'espace métrique).

Si les fonctions f_k sont bornées ou s'annulent à l'infini, la convergence uniforme implique que la limite le sera également. □

121. Si X est métrique, alors c'est la continuité usuelle par la proposition 7.117.

Notons que si X est compact, les fonctions continues sont bornées par le théorème 7.186 et nous pouvons simplement dire que $C^0(X,Y)$ est complet, sans préciser que nous parlons des fonctions bornées.

Lemme 12.364.
Soient un espace topologique compact A et un espace complet B. L'ensemble des fonctions continues de A vers B muni de la norme uniforme est complet.

Dit de façon courte : $\big(C(A,B),\|.\|_\infty\big)$ est complet.

Démonstration. Soit (f_k) une suite de Cauchy de fonctions dans $C(A,B)$. Pour chaque $x\in A$ nous avons

$$\|f_k(x)-f_l(x)\|_B\leqslant\|f_k-f_l\|_\infty, \tag{12.1010}$$

de telle sorte que la suite $(f_k(x))$ est de Cauchy dans B et converge donc vers un élément de B. La suite de Cauchy (f_k) converge donc ponctuellement vers une fonction $f\colon A\to B$. Nous devons encore voir que cette fonction est continue ; ce sera l'uniformité de la norme qui donnera la continuité. En effet soit $x_n\to x$ une suite dans A qui converge vers $x\in A$. Pour chaque $k\in\mathbb{N}$ nous avons

$$\|f(x_n)-f(x)\|\leqslant\|f(x_n)-f_k(x_n)\|+\|f_k(x_n)-f_k(x)\|+\|f_k(x)-f(x)\|. \tag{12.1011}$$

En prenant k et n assez grands, cette expression peut être rendue aussi petite que l'on veut ; le premier et le troisième terme par convergence ponctuelle $f_k\to f$, le second terme par continuité de f_k. La suite $f(x_n)$ est donc convergente vers $f(x)$ et la fonction f est continue. □

¡¡ Avertissement/question à la lectrice !! 12.365
Il serait sans doute bon de revoir cette preuve à la lumière du critère de Cauchy uniforme 12.360.

12.366 ([341]).
Le théorème de Stone-Weierstrass indique que les polynômes sont denses pour la topologie uniforme dans les fonctions continues. Donc il existe des limites uniformes de fonctions C^∞ qui ne sont même pas dérivables. Les espaces de type C^p munis de $\|.\|_\infty$ ne sont donc pas complets sans quelques hypothèses. Voir la proposition 12.363 et le thème 35.

Théorème 12.367 (Théorème de Dini[342]).
Soient un espace métrique complet D et une suite de fonctions $f_n\in C(D,\mathbb{R})$ telle que

(1) $f_n\to g$ ponctuellement,
(2) $g\in C(D,\mathbb{R})$,
(3) la suite (f_n) est croissante, c'est-à-dire que pour tout $x\in D$ et pour tout $n\geqslant 0$ nous avons $f_{n+1}(x)\geqslant f_n(x)$.

Alors la convergence est uniforme.

Démonstration. Soit $x\in D$ et $\epsilon>0$. Il existe $N(x)\in\mathbb{N}$ tel que

$$g(x)-\epsilon\leqslant f_{N(x)}\leqslant g(x). \tag{12.1012}$$

De plus g et $f_{N(x)}$ sont des fonctions continues, donc il existe $\eta(x)$ tel que si $y\in B\big(x,\eta(x)\big)$ alors

$$g(y)\in B\big(g(x),\epsilon\big) \tag{12.1013a}$$
$$f_{N(x)}(y)\in B\big(f_{N(x)}(x),\epsilon\big). \tag{12.1013b}$$

Si $n\geqslant N(x)$ et si $y\in B(x,\eta(x))$ alors nous avons les majorations

$$g(y)\geqslant f_n(y)\geqslant f_{N(x)}(y)\geqslant f_{N(x)}(x)-\epsilon\geqslant g(x)-2\epsilon\geqslant g(y)-3\epsilon. \tag{12.1014}$$

Justifications :

(1) Les deux premières inégalités sont la croissance de la suite.

(2) La suivante est (12.1013b).

(3) Ensuite il y a le choix de $N(x)$.

(4) Et enfin il y a (12.1013a).

Nous retenons que si $x \in D$ et si $n \geqslant N(x)$ alors

$$g(y) \geqslant f_n(y) \geqslant g(y) - 3\epsilon \tag{12.1015}$$

pour tout $y \in B(x, \eta(x))$.

Nous utilisons maintenant la compacité de D. Pour chaque $x \in D$ nous pouvons considérer la boule ouverte $B\big(x, \eta(x)\big)$; ces boules recouvrent D. Nous en extrayons un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire un ensemble fini d'éléments $x_1, \ldots, x_K$ tels que

$$D = \bigcup_{k=1}^{K} B\big(x_k, \eta(x_k)\big). \tag{12.1016}$$

Si à ce moment vous ne comprenez pas pourquoi c'est une égalité au lieu d'une inclusion, il faut lire l'exemple 7.38. Considérons

$$n \geqslant N = \max\{N(x_1), \ldots, N(x_K)\}. \tag{12.1017}$$

Pour tout $y \in D$ il existe $k \in \{1, \ldots, K\}$ tel que $y \in B\big(x_k, \eta(x_k)\big)$, et vu que $n \geqslant N(x_k)$ nous reprenons la majoration (12.1015) :

$$g(y) \geqslant f_n(y) \geqslant g(y) - 3\epsilon. \tag{12.1018}$$

Pour le n choisi nous avons ces inégalités pour tout $y \in D$, c'est-à-dire que nous avons $\|f_n - g\| \leqslant 3\epsilon$ et donc la convergence uniforme. □

Proposition 12.368 ([1])**.**
Soient une suite de fonctions continues $u_i \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une fonction continue u telle que $u_i \to u$ simplement. Alors la convergence est uniforme sur tout compact.

Démonstration. Soit un compact K ; nous notons $\|.\|$ la norme uniforme sur K. Supposons que la limite ne soit pas uniforme, c'est-à-dire qu'il existe un $\epsilon > 0$ tel que

$$\|u_i - u\| > 2\epsilon \tag{12.1019}$$

pour tout i. Cela permet de considérer pour tout i un élément $x_i \in K$ tel que[122]

$$\|u_i(x_i) - u(x_i)\| > \epsilon. \tag{12.1020}$$

Pour cela, il faut noter que K est compact et que la fonction $x \mapsto \|u_i(x) - u(x)\|$ est continue sur K. Elle est donc bornée et atteint son maximum (c'est le théorème de Weierstrass 7.126).

La suite $i \mapsto x_i$ est une suite dans un compact, et quitte à prendre une sous-suite, nous supposons qu'elle converge vers $a \in K$ (ça, c'est Bolzano-Weierstrass 7.123).

La convergence ponctuelle $u_i \to u$, prise en a, dit qu'il existe un N tel que $|u_i(a) - u(a)| < \epsilon$ pour tout $i \geqslant N$. Pour un tel i, nous avons aussi

$$|u_i(x) - u(x)| < \epsilon \tag{12.1021}$$

sur un voisinage de a, parce que $u_i - u$ est continue. Mais tout voisinage de a contient un élément x_j pour lequel

$$|u_i(x_j) - u(x_j)| > \epsilon. \tag{12.1022}$$

Contradiction. □

122. Notez l'inégalité stricte, obetenue en considérant 2ϵ plus haut.

12.33.3 Série de fonctions

Les séries de fonctions sont des cas particuliers de suites.

Définition 12.369.
Si (f_n) est une suite de fonctions, nous définissons la somme des f_n de la façon suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n. \tag{12.1023}$$

Le membre de droite est une définition de la notation introduite dans le membre de gauche.

Avant de vous lancer, relisez une bonne fois les définitions de convergence absolue (définition 11.80) et de convergence uniforme (équation 11.209).

Lemme 12.370.
Soient des fonctions $u_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$. Si il existe une suite réelle positive $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

(1) pour tout $z \in \Omega$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons $|u_n(z)| \leqslant a_n$ (c'est-à-dire $a_n \geqslant \|u_n\|_\infty$),

(2) la somme $\sum_n a_n$ converge,

alors la série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge normalement[123].

Démonstration. Découle du lemme de comparaison 11.112. □

Théorème 12.371.
Soit $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$, une série de fonctions complexes où $g_k(x) = \varphi_k(x)\psi_k(x)$. Supposons que

(1) $\varphi_k\colon A \to \mathbb{C}$ et $|\sum_{k=1}^{K} \varphi_k(x)| \leqslant M$ où M est indépendant de x et K,

(2) $\psi_k\colon A \to \mathbb{R}$ avec $\psi_k(x) \geqslant 0$ et pour tout x dans A, $\psi_{k+1}(x) \leqslant \psi_k(x)$, et enfin supposons que $\psi_k(x)$ converge uniformément vers 0.

Alors $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ est uniformément convergente.

Théorème 12.372.
Si la série de puissances (réelle) converge en $x = x_0 + R$, alors elle converge uniformément sur $[x_0 - R + \epsilon, x_0 + R]$ ($\epsilon > 0$) vers une fonction continue.

Proposition 12.373.
Soit (u_n) une suite de fonctions continues $u_n\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Si la série $\sum_n u_n$ converge normalement alors la somme est continue.

Démonstration. Nous posons $u(z) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n(z)$, et nous vérifions que la fonction ainsi définie sur Ω est continue. Soit $z \in \Omega$. Prouvons la continuité de u au point z. Pour tout z' dans un voisinage de z nous avons

$$\begin{aligned} \big|u(z) - u(z')\big| &= \left|\sum_{n=0}^{N} u_n(z) - \sum_{n=0}^{N} u_n(z') + \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n(z) - \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n(z')\right| && (12.1024a)\\ &\leqslant \left|\sum_{n=0}^{N} u_n(z) - \sum_{n=0}^{N} u_n(z')\right| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n(z)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n(z')|. && (12.1024b) \end{aligned}$$

Étant donné que les sommes partielles sont continues, en prenant N suffisamment grand, le premier terme peut être rendu arbitrairement petit. Si N est suffisamment grand, le second terme est également petit. Par contre, cet argument ne tient pas pour le troisième terme parce que nous souhaitons une majoration pour tout z' dans une boule autour de z. Nous devons donc écrire

$$\sum_{n=N}^{\infty} |u_n(z)| \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \|u_n\|_\infty. \tag{12.1025}$$

123. Définition 11.81.

Ce dernier est arbitrairement petit lorsque N est grand. Notons que nous avons utilisé l'hypothèse de convergence normale. □

La même propriété, avec la même démonstration, tient dans le cas d'espaces vectoriels normés.

Proposition 12.374.
Soient E et F, deux espaces vectoriels normés, Ω une partie ouverte de E et une suite de fonctions $u_n\colon \Omega \to F$ convergeant normalement sur Ω, c'est-à-dire que $\sum_n \|u_n\|_\infty$ converge, la norme $\|.\|_\infty$ devant être comprise comme la norme supremum sur Ω. Alors la fonction $u = \sum_n u_n$ est continue sur Ω.

Démonstration. Soit $x, x' \in \Omega$ en supposant que $\|x - x'\|$ est petit. Soit encore $\epsilon > 0$. Nous allons montrer la continuité en x. Pour cela nous savons que pour tout N l'inégalité suivante est correcte :

$$\|u(x) - u(x')\| \leqslant \left\| \sum_{n=0}^{N} u_n(x) - \sum_{n=0}^{N} u_n(x') \right\| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \|u_n(x)\| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \|u_n(x')\|. \tag{12.1026}$$

Les deux derniers termes sont majorés par $\sum_{n=N+1}^{\infty} \|u_n\|_\infty$ qui, par hypothèse, peut être rendu aussi petit que souhaité en choisissant N assez grand. Nous choisissons donc un N tel que ces deux termes soient plus petits que ϵ. Ce N étant fixé, la fonction $\sum_{n=0}^{N} u_n$ est continue et nous pouvons choisir x' assez proche de x pour que le premier terme soit majoré par ϵ. □

Théorème 12.375 (Série uniforme de fonctions continues[1])**.**
Soit un espace topologique X ainsi qu'un espace vectoriel normé V. Soient des fonctions continues $f_n\colon X \to V$. Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformément[124], alors la fonction somme est séquentiellement continue.

Si X est métrisable, alors la somme est continue.

Démonstration. Nous notons f la somme (qui existe par hypothèse) et par (s_N) la suite des sommes partielles. En tant que somme finie de fonctions continues, chacune des fonctions s_N est continue. Ce que dit la définition 11.82, c'est que la convergence des sommes partielles est uniforme :

$$s_N \xrightarrow{unif} f. \tag{12.1027}$$

La proposition 12.362 dit alors que f est séquentiellement continue.

Nous en déduisons la continuité de f dans le cas d'un espace métrisable avec la proposition 7.220. □

Le corolaire suivant permet de considérer des séries de fonctions indexées par exemple par $\mathbb{Z}$ plutôt que par $\mathbb{N}$.

Corolaire 12.376.
Une famille dénombrable de fonctions continues convergeant normalement converge vers une fonction continue.

Démonstration. Soit I dénombrable. Considérons une famille de fonctions continues $(f_n)_{n\in I}$ telles que la famille $(\|f_i\|_\infty)_{i\in I}$ soit sommable. Le proposition 11.110 nous permet d'utiliser une bijection entre I et $\mathbb{N}$. Le théorème 12.373 s'applique alors. □

Théorème 12.377 (Critère de Weierstrass)**.**
Soit une suite de fonctions $f_k\colon A \to \mathbb{C}$ telles que $|f_k(x)| \leqslant M_k \in \mathbb{R}$, $\forall x \in A$. Si $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ converge, alors $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge absolument et uniformément.

Démonstration. La convergence normale est facile : l'hypothèse dit que $\|f_k\|_\infty \leqslant M_k$, et donc que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_\infty \leqslant \sum_k M_k < \infty. \tag{12.1028}$$

124. Définition 11.82.

La convergence uniforme est à peine plus subtile. Nous nommons F la fonction somme. Pour tout x et pour tout N, nous avons

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=1}^{N} f_n(x) - F(x)\right\| &= \| \sum_{n=N}^{\infty} f_n(x)\| && \text{(12.1029a)}\\ &\leqslant \sum_{n=N}^{\infty} \|f_k(x)\| && \text{(12.1029b)}\\ &\leqslant \sum_{n=N}^{\infty} \|f_n\|_{\infty}. && \text{(12.1029c)}\end{aligned}$$

La convergence normale étant assurée, la série $\sum_{n_1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty}$ est finie, ce qui implique que la queue de somme $\sum_{n=N}^{\infty} \|f_n\|_{\infty}$ tend vers zéro lorsque $N \to \infty$. Pour tout ϵ, il existe donc un N (non dépendant de x) tel que

$$\| \sum_{n=1}^{N} f_n(x) - F(x)\| \leqslant \epsilon. \tag{12.1030}$$

En prenant le supremum sur $x \in A$ nous trouvons la convergence uniforme. □

Remarque 12.378.
Il n'y a pas de critère correspondant pour les suites. Il n'est pas vrai que si $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|$ existe, alors $\lim_{n\to\infty} f_n$ existe, comme le montre l'exemple

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \text{ et } n \text{ est pair}\\ 1 & \text{si } x \in [1,2] \text{ et } n \text{ est impair}\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases} \tag{12.1031}$$

12.34 Permuter limite et dérivée

Une version avec intégrales de la démonstration qui suit est dans 14.254. Le même pour les dérivées partielles sera le théorème 12.382.

Théorème 12.379 ([272, 296, 1], thème 60)**.**
Soient une suite de fonctions $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

(1) f_i est de classe C^1 pour tout i,

(2) $f_i \to f$ simplement,

(3) $f_i' \to g$ uniformément sur tout compact.

Alors

(1) $f_i \to f$ uniformément sur tout compact.

(2) $f' = g$,

(3) f est de classe C^1,

Démonstration. Un point à la fois.

(i) **Pour (1)** Soit un compact $K \subset \mathbb{R}$. Dans cette partie, toutes les fonctions en jeu sont restreintes à K. En particulier, lorsque nous parlerons du module de continuité [125] ω_g pour g ou ω_i pour f_i', nous parlerons en réalité des fonctions $g|_K$ et $f_i'|_K$.
Ceci dit, nous allons montrer que (f_i) est une suite de Cauchy pour la norme uniforme [126].

125. Définition 11.212.
126. Et si vous avez bien suivi l'avertissement, c'est bien de la norme uniforme sur K que nous parlons.

Soit $\epsilon > 0$. On note ω_i le module de continuité de f_i'. Soient $y \in K$, $n \in \mathbb{N}$ et posons $\alpha_n = \frac{y-x}{n+1}$. Pour tout $i \geqslant 0$, nous avons la somme télescopique

$$f_i(y) = f_i(x) + \sum_{k=0}^{n} \Big[f_i(x + (k+1)\alpha_n) - f_i(x + k\alpha_n) \Big]. \tag{12.1032}$$

Par le théorème des accroissements finis 12.192, il existe pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$ un réel $u_{n,i,k} \in [k\alpha_n, (k+1)\alpha_n]$ tel que

$$f_i(x + (k+1)\alpha_n) - f_i(x + k\alpha_n) = |\alpha_n| f_i'(x + u_{n,i,k}), \tag{12.1033}$$

de sorte que

$$f_i(y) = f_i(x) + |\alpha_n| \sum_{k=0}^{n} f_i'(x + u_{n,i,k}). \tag{12.1034}$$

Et pour tout $i, j \geqslant 0$, on obtient

$$|f_i(y) - f_j(y)| \leqslant |f_i(x) - f_j(x)| + |\alpha_n| \sum_{k=0}^{n} \big| f_i'(x + u_{n,i,k}) - f_j'(x + u_{n,j,k}) \big| \tag{12.1035a}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant |f_i(x) - f_j(x)| && (12.1035b)\\
&\qquad + |\alpha_n| \sum_{k=0}^{n} \big| f_i'(x + u_{n,i,k}) - f_i'(x + u_{n,j,k}) \big| \\
&\qquad + |\alpha_n| \sum_{k=0}^{n} \big| f_i'(x + u_{n,j,k}) - f_j'(x + u_{n,j,k}) \big| \\
&\leqslant |f_i(x) - f_j(x)| && (12.1035c)\\
&\qquad + |\alpha_n| \sum_{k=0}^{n} \big| f_i'(x + u_{n,i,k}) - f_i'(x + u_{n,j,k}) \big| \\
&\qquad + |\alpha_n| \sum_{k=0}^{n} \| f_i' - f_j' \| \\
&\leqslant |f_i(x) - f_j(x)| + |\alpha_n| \sum_{k=0}^{n} \omega_i(|\alpha_n|) + |\alpha_n| \sum_{k=0}^{n} \| f_i' - f_j' \| && (12.1035d)\\
&\leqslant |f_i(x) - f_j(x)| + |x - y| \big(\omega_i(|\alpha_n|) + \| f_i' - f_j' \|_K \big) && (12.1035e)\\
&\leqslant |f_i(x) - f_j(x)| + M \Big(\omega_i\big(\frac{M}{n+1}\big) + \| f_i' - f_j' \|_K \Big) && (12.1035f)
\end{aligned}$$

Justifications :

— Pour (12.1035c) La norme supremum est forcément plus grande que la valeur en un point.

— Pour (12.1035d) Remarquer que $\|x + u_{n,i,k} - (x + u_{n,j,k})\| = \|u_{n,i,k} - u_{n,j,k}\| \leqslant |\alpha_n|$. Cela est donc une bonne occasion de prendre la définition (11.637) du module de continuité :

$$\big| f_i'(x + u_{n,i,k}) - f_i'(x + u_{n,j,k}) \big| \leqslant \omega_i(\alpha_n). \tag{12.1036}$$

— Pour (12.1035e), il y a $n+1$ termes dans les sommes et $\alpha_n = (y-x)/(n+1)$.

— Pour (12.1035f), nous travaillons uniquement sur le compact K. En particulier $x, y \in K$ et il existe un nombre M ne dépendant que de K tel que $|y - x| < M$. De plus ω_i est décroissante. Donc en remplaçant $|y - x|$ par M nous majorons.

Recopions notre dernière inéquation :

$$|f_i(y) - f_j(y)| \leqslant |f_i(x) - f_j(x)| + M \Big(\omega_i\big(\frac{M}{n+1}\big) + \| f_i' - f_j' \|_K \Big) \tag{12.1037}$$

Vu que f_i est de classe C^1, la fonction f_i' est continue. Et vu que nous travaillons sur le compact K, elle est même uniformément continue (proposition 12.78). Le lemme 11.214 dit qu'une fonction uniformément continue a un module de continuité continu en zéro : $\lim_{\delta\to 0}\omega_i(\delta) = 0$. Nous pouvons donc prendre la limite $n \to 0$ pour nous supprimer le module de continuité :

$$|f_i(y) - f_j(y)| \leqslant |f_i(x) - f_j(x)| + M\|f_i' - f_j'\|_K. \tag{12.1038}$$

Nous prenons maintenant le supremum par rapport à y :

$$\|f_i - f_j\|_K \leqslant |f_i(x) - f_j(x)| + M\|f_i' + f_j'\|_K. \tag{12.1039}$$

Par hypothèse nous avons la convergence simple $f_i \to f$, c'est-à-dire la convergence $f_i(x) \xrightarrow{\mathbb{R}} f_i(x)$ pour tout x. Pour le x que nous nous sommes fixés, la suite $i \mapsto f_i(x)$ est donc une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tels que si $i, j > N$ nous avons $|f_i(x) - f_j(x)| < \epsilon$. De même la convergence uniforme $f_i' \xrightarrow{\|.\|_K} g$ implique que f_k' est également de Cauchy pour la norme uniforme. Donc pour un $i, j > N$ (éventuellement un autre N, mais on prend le maximum entre les deux), nous avons $\|f_i' - f_j'\| < \epsilon$.

Donc si $i, j > N$ nous avons

$$\|f_i - f_j\|_K \leqslant \epsilon + M\epsilon = (M+1)\epsilon. \tag{12.1040}$$

Nous avons donc prouvé que (f_i) est une suite de Cauchy pour la norme $\|.\|_K$. Cela implique que (f_i) a une limite uniforme sur K. Vu que nous avons déjà $f_i \to f$, nous en déduisons que sur K, cette limite est uniforme :

$$f_i \xrightarrow{\|.\|_K} f. \tag{12.1041}$$

Voilà qui prouve la convergence uniforme sur tout compact.

(ii) **Pour (2)** Nous ne savons encore rien de la fonction limite f. Nous montrons qu'elle est dérivable et que $f' = g$.

Soient $y \in \mathbb{R}$ et un voisinage compact $K = \overline{B(y,\delta)}$ de y avec $\delta > 0$. Pour tout $i > 0$ nous avons :

$$\Big|\frac{f(y+\delta) - f(y)}{\delta} - g(y)\Big| \tag{12.1042a}$$
$$\leqslant \frac{|f(y) - f_i(y)|}{\delta} + \frac{|f(y+\delta) - f_i(y+\delta)|}{\delta} + \Big|\frac{f_i(y+\delta) - f_i(y)}{\delta} - g(y)\Big| \tag{12.1042b}$$
$$\leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i - f\|_K + \Big|\frac{f_i(y+\delta) - f_i(y)}{\delta} - g(y)\Big| \tag{12.1042c}$$
$$\leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i - f\|_K + |f_i'(u) - g(y)| \tag{12.1042d}$$
$$\leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i - f\|_K + |f_i'(u) - f_i'(y)| + |f_i'(y) - g(y)| \tag{12.1042e}$$
$$\leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i - f\|_K + |f_i'(u) - f_i'(y)| + \|f_i' - g\|_K \tag{12.1042f}$$
$$\leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i - f\|_K + \omega_i(|u - y|) + \|f_i' - g\|_K \tag{12.1042g}$$
$$\leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i - f\|_K + \|f_i' - g\|_K + \omega_i(2\delta) \tag{12.1042h}$$
$$\leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i - f\|_K + \|f_i' - g\|_K + \omega_g(2\delta) \tag{12.1042i}$$
$$\leqslant \tag{12.1042j}$$

Justifications :

— Pour 12.1042d. Nous avons utilisé le théorème des accroissements finis 12.192, qui assure l'existence de $u \in B(y, \delta)$ tel que

$$\frac{f_i(y+\delta) - f_i(y)}{\delta} = f_i'(u). \tag{12.1043}$$

— Pour 12.1042f. Nous faisons un supremum sur le $y \in K$ dans le dernier terme.

— Pour 12.1042h. Nous majorons $|u-y|$ par le diamètre 2δ du compact $K = \overline{B(y, \delta)}$.

— Pour 12.1042i. Le lemme 11.215 et le fait que $f_i' \xrightarrow{\|.\|_K} g$.

Recopions la dernière inégalité :

$$\left|\frac{f(y+\delta) - f(y)}{\delta} - g(y)\right| \leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i - f\|_K + \|f_i' - g\|_K + \omega_g(2\delta). \tag{12.1044}$$

Nous prenons la limite $i \to \infty$. Par le point (1) nous savons que $\|f_i - f\|_K \to 0$. Par hypothèse nous savons aussi que $\|f_i' - g\|_K \to 0$. Nous restons donc avec

$$\left|\frac{f(y+\delta) - f(y)}{\delta} - g(y)\right| \leqslant \omega_g(2\delta). \tag{12.1045}$$

Or, par uniforme continuité de g, nous avons $\lim_{\delta\to 0} \omega_g(\delta) = 0$, donc la limite dans le membre de gauche se passe bien et

$$\lim_{\delta\to\delta} \frac{f(y+\delta) - f(y)}{\delta} = g(y), \tag{12.1046}$$

ce qui signifie que f est dérivable en y et que la dérivée est $g(y)$.

□

¡¡ Avertissement/question à la lectrice !! 12.380
Aussi incroyable que cela puisse paraitre, je n'ai pas trouvé d'énoncés du théorème 12.382. Donc soyez prudente. C'est donc une adaptation personnelle du cas sur $\mathbb{R}$. Écrivez-moi si vous avez un problème ou un doute.

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 12.381
De plus, l'énoncé de 12.382 demande la convergence uniforme des dérivées directionnelles dans toutes les directions. Je ne serais pas étonné que la convergence uniforme seulement des dérivées partielles dans les directions « de base » suffise.

Théorème 12.382 ([272, 296, 1], thème 60)**.**
Soient des espaces vectoriels normés V et W. Soient un ouvert U de V et des fonctions $f_k \colon U \to W$, une autre fonction $f \colon U \to W$ ainsi que, pout toute direction[127] $\alpha \in V$, des fonctions $g_\alpha \colon U \to W$. Nous supposons que

(1) Les f_k sont de classe C^1.

(2) $f_k \to f$ simplement.

(3) $\partial_\alpha f_k \to g_\alpha$ uniformément sur tout compact.

Alors

(1) Nous avons la convergence $f_i \to f$ uniformément sur tout compact.

(2) Pour toute direction α, nous avons $\partial_\alpha f = g_\alpha$.

(3) La fonction f est de classe C^1 sur U.

Démonstration. En plusieurs parties.

127. Ici le mot « direction » n'a pas de sens particulier ; c'est juste un élément quelconque. Si nous faisions de la géométrie différentielle hard-core, ce serait un vecteur tangent.

(i) **Uniforme convergence sur les boules fermées** Soit $a \in U$. Nous considérons $r > 0$ tel que $\overline{B(a,r)} \subset U$ (ça existe parce que U est ouvert ; il suffit de prenre r plus petit qu'un qui fait que $B(a,r) \subset U$), et nous posons $K = \overline{B(a,r)}$. Nous allons prouver l'uniforme convergence $f_i \xrightarrow{\|.\|_{\overline{B(a,r)}}} f$, et nous verrons plus tard comment faire pour l'uniforme convergence sur un compact général dans U.
Nous restreignons toutes les fonctions à K. Nous notons $\omega_{\alpha,i}$ le module de continuité[128] de $\partial_\alpha f_i$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ nous définissons encore

$$\begin{aligned} \alpha_n \colon V &\to V \\ x &\mapsto \frac{a-x}{n+1}. \end{aligned} \tag{12.1047}$$

Soit $x \in \overline{B(a,r)}$. Nous écrivons la somme télescopique

$$f_i(x) = f_i(a) + \sum_{k=0}^{n} \big[f_i\big(a + (k+1)\alpha_n(x)\big) - f_i\big(a + k\alpha_n(x)\big) \big] \tag{12.1048}$$

Notez que les points auxquels sont évalués f_i sont dans $\overline{B(a,r)}$ parce que, si $l \in [0, n+1]$, nous avons

$$\|a + l\alpha_n(x) - a\| = \|l\alpha_n(x)\| = l\frac{\|a-x\|}{n+1} \leqslant \|a-x\| \leqslant r. \tag{12.1049}$$

Ce point est important parce que rien ne nous dit que U est convexe ; pour la suite nous avons besoin que tous les points sur les segments entre a et les différents points que nous allons considérer restent dans $\overline{B(a,r)}$. C'est d'ailleurs pour cette convexité de la boule que nous commençons notre preuve par le cas où K est une boule. Bref.
Le théorème des accroissements finis 12.246 nous assure l'existences d'éléments

$$y_{k,i} \in \big[a + (k+1)\alpha_n(x), a + k\alpha_x(x) \big] \tag{12.1050}$$

tels que

$$f_i\big(a + (k+1)\alpha_n(x)\big) - f_i\big(a + k\alpha_n(x)\big) = (\partial_\beta f)\big(y_{k,i}(x)\big)\alpha_n(x). \tag{12.1051}$$

Notez que les $y_{j,i}(x)$ sont dans $\overline{B(a,r)}$.
Soit $\epsilon > 0$. Nous allons calculer $\|f_i(x) - f_j(x)\|$ en substituant les valeurs de $f_i(x)$ et $f_j(x)$ données par (12.1048). Nous avons :

$$\clubsuit = \|f_i(x) - f_j(x)\| \leqslant \|f_i(a) - f_j(a)\| + \sum_{k=0}^{n} \|\alpha_n(x)\| \|(\partial_\beta f_i)\big(y_{k,i}(x)\big) - (\partial_\beta f_j)\big(y_{k,j}(x)\big)\| \tag{12.1052a}$$

$$\leqslant \epsilon + \frac{r}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \|(\partial_\beta f_i)\big(y_{k,i}(x)\big) - (\partial_\beta f_j)\big(y_{k,j}(x)\big)\| \tag{12.1052b}$$

$$\begin{aligned} \leqslant \epsilon &+ \frac{r}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \|(\partial_\beta f_i)\big(y_{k,i}(x)\big) - (\partial_\beta f_i)\big(y_{k,j}(x)\big)\| \\ &+ \frac{r}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \|(\partial_\beta f_i)\big(y_{k,j}(x)\big) - (\partial_\beta f_j)\big(y_{k,j}(x)\big)\| \end{aligned} \tag{12.1052c}$$

$$\begin{aligned} \leqslant \epsilon &+ \frac{r}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \|\omega_{\beta,i}\big(\|y_{k,i}(x) - y_{k,j}(x)\|\big)\| \\ &+ \frac{r}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \|\partial_\beta f_i - \partial_\beta f_j\| \end{aligned} \tag{12.1052d}$$

$$\leqslant \epsilon + \frac{r}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \|\omega_{\beta,i}\big(\|y_{k,i}(x) - y_{k,j}(x)\|\big)\| + \frac{r}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\epsilon \tag{12.1052e}$$

Justifications :

128. Définition 11.212.

— Pour (12.1052c). Majoration $\|\alpha_n(x)\| \leqslant \frac{r}{n+1}$. De plus nous considérons des i et j assez grands pour que $\|f_i(a)-f_j(a)\|_K \leqslant \epsilon$. Cela est possible parce que (f_i) est une suite de Cauchy pour la norme uniforme sur K.

— Pour (12.1052d). Utilisation du module de continuité, définition 11.212.

— Pour (12.1052e). Nous avons la convergence uniforme $\partial_\beta f_i \xrightarrow{\overline{B(a,r)}} g_\beta$, de sorte que $i \mapsto \partial_\beta f_i$ est une suite de Cauchy. Si i et j sont assez grands, nous pouvons majorer $\|\partial_\beta f_i - \partial_\beta f_j\| \leqslant \epsilon$.

Étudions deux minutes ce qui est dans le module de continuité de (12.1052e). Nous avons $y_{k,i}(x) \in \big[a+(k+1)\alpha_n(x), a+k\alpha_n(x)\big]$, donc la différence $\|y_{k,i}(x)-y_{k,j}(x)\|$ se majore par la taille de cet intervalle :

$$\|y_{k,i}(x)-y_{k,j}(x)\| \leqslant \|a-k\alpha_n(x)-\big(a+(k+1)\alpha_n(x)\big)\| = \|\alpha_n(x)\|. \tag{12.1053}$$

Vu que le module de continuité est une fonction croissante,

$$\omega_{\beta,i}\big(\|y_{k,i}(x)-y_{k,j}(x)\|\big) \leqslant \omega_{\beta,i}\big(\|\alpha_n(x)\|\big) \leqslant \omega_{\beta,i}\left(\frac{\|a-x\|}{n+1}\right) \leqslant \omega_{\beta,i}\left(\frac{r}{n+1}\right). \tag{12.1054}$$

En substituant tout ça dans (12.1052e), nous continuons :

$$\clubsuit \leqslant \epsilon + \frac{r}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\omega_{\beta,i}\big(\frac{r}{n+1}\big) + r\epsilon \leqslant \epsilon + r\omega_{\beta,i}\left(\frac{r}{n+1}\right) + r\epsilon \tag{12.1055}$$

Résumons. Pour tout $x \in \overline{B(a,r)}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si i et j sont assez grands, nous avons la majoration

$$\|f_i(x)-f_j(x)\| \leqslant \epsilon + r\omega_{\beta,i}\big(\frac{r}{n+1}\big) + r\epsilon. \tag{12.1056}$$

Nous pouvons prendre la limite $n \to \infty$ de deux côtés. Vu que $\partial_\beta f_i$ est uniformément continue[129], le module de continuité tend vers zéro (lemme 11.214).

Si i et j sont assez grands, nous avons donc

$$\|f_i(x)-f_j(x)\| \leqslant \epsilon(1+r), \tag{12.1057}$$

et donc aussi

$$\|f_i-f_j\|_{\overline{B(a,r)}} \leqslant \|f_i(x)-f_j(x)\| \leqslant \epsilon(1+r). \tag{12.1058}$$

Cela prouve que (f_i) est une suite de Cauchy pour $\|.\|_K$. Donc f_i converge uniformément vers une certaine fonction. Vu qu'elle converge simplement vers f, elle converge uniformément vers f.

Nous avons donc prouvé que

$$f_i \xrightarrow{\|\cdot\|_{\overline{B(a,r)}}} f, \tag{12.1059}$$

c'est-à-dire la convergence uniforme sur toute boule compacte.

(ii) **Convergence uniforme sur tout compact** Soient un compact K de U, et $\epsilon > 0$. L'ensemble $\{B(x,r)\}_{x\in K, r>0}$ est un recouvrement de K par des ouverts. On en extrait un sous-recouvrent fini, et on ferme les boules sans changer le fait que ce soit un recouvrement :

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n}\overline{B(a_i,r_i)}. \tag{12.1060}$$

Vue la convergence uniforme sur toute boule fermée, pour chaque i, il existe N_i tel que $n > N_i$ implique

$$\|f_n - f\|_{\overline{B(a_i,r_i)}} < \epsilon. \tag{12.1061}$$

En prenant $N > \max\{N_i\}$, nous avons

$$\|f_n - f\|_K < \epsilon \tag{12.1062}$$

pour tout $n > N$.

129. Elle est continue sur un compact, proposition 12.78.

(iii) **Pour (2)** Soit $a \in U$ et un voisibage compact $K = \overline{B(a,\delta)}$ de a. Nous considérons une direction u avec $\|u\| = 1$. Nous calculons un peu :

$$\heartsuit = \|\frac{f(a+\delta u)-f(a)}{\delta} - g_u(a)\| \leqslant \|\frac{f(a+\delta u)-f_i(a+\delta u)}{\delta}\| \tag{12.1063a}$$
$$+ \|\frac{f_i(a+\delta u)-f_i(a)}{\delta} - g_u(a)\|$$
$$+ \|\frac{f_i(a)-f(a)}{\delta}\|$$
$$\leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i - f\| + \|\frac{f_i(a+\delta u)-f_i(a)}{\delta} - g(a)\| \tag{12.1063b}$$

Ici, la norme $\|f_i - f\|$ est une norme supremum sur K (vous devriez l'avoir deviné du contexte). C'est le moment d'utiliser le théorème des accroissements finis 12.246 : il existe $y \in [a+\delta u, a]$ tel que

$$\frac{f_i(a+\delta u)-f_i(a)}{\delta} = (\partial_i f_i)(y) \tag{12.1064}$$

Nous continuons :

$$\heartsuit \leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i - f\| + \|(\partial_u f_i)(y) - g(a)\| \tag{12.1065a}$$
$$\leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i - f\| + \|(\partial_u f_i)(y) - (\partial_u f_i)(a)\| + \|(\partial_u f_i)(a) - g(a)\| \tag{12.1065b}$$

Nous introduisons le module de continuité[130] $\omega_{i,u}$ de $(\partial_u f_i)$ pour traiter le premier terme :

$$\|(\partial_u f_i)(y) - (\partial_u f_i)(a)\| \leqslant \omega_{i,u}\big(\|y-a\|\big) \leqslant \omega_{i,u}(\delta). \tag{12.1066}$$

Nous utilisons aussi la convergence uniforme sur tout compact (point (1)) $\partial_u f_i \xrightarrow{\|.\|_K} g_u$ pour majorer le second terme de (12.1065b) par ϵ lorsque i est grand.

Nous continuons. Pour tout i assez grand, nous avons

$$\|\frac{f(a+\delta u)-f(a)}{\delta} - g_u(a)\| \leqslant \frac{2}{\delta}\|f_i - f\| + \epsilon + \omega_{i,u}(\delta). \tag{12.1067}$$

Nous prenons la limite $i \to \infty$ en tenant compte du lemme 11.215 : $\lim_{i\to\infty} \omega_{i,u}(\delta) = \omega_g(\delta)$:

$$\|\frac{f(a+\delta u)-f(a)}{\delta} - g_u(a)\| \leqslant \epsilon + \omega_g(\delta). \tag{12.1068}$$

Et enfin en prenant la limite $\delta \to 0$ nous trouvons que pour tout ϵ,

$$\lim_{\delta\to 0} \|\frac{f(a+\delta u)-f(a)}{\delta} - g_u(a)\| \leqslant \epsilon, \tag{12.1069}$$

et donc nous avons prouvé que

$$\lim_{\delta\to 0} \|\frac{f(a+\delta u)-f(a)}{\delta} - g_u(a)\| = 0. \tag{12.1070}$$

Cela prouve que $(\partial_u f)(a)$ existe et vaut $g_u(a)$.

Vu que les g_u sont de classe C^1, la fonction f est également de classe C^1 par le théorème 12.306. □

130. Définition 11.212.

12.35 La fonction puissance

Si x et y sont des réels, définir x^y n'est pas une mince affaire. Pour l'instant nous savons déjà définir x^n lorsque $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Voir la définition 1.222 et le thème 50.

Pour la suite nous notons

$$\begin{cases} f_\alpha(x) = x^\alpha & (12.1071a) \\ g_a(x) = a^x & (12.1071b) \end{cases}$$

pour autant que ces fonctions sont définies[131].

12.35.1 Sur les naturels

Définition 12.383.
La fonction puissance définie sur $\mathbb{N}$ s'étend à $\mathbb{Z}$ de la façon suivante :

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \tag{12.1072}$$

pour $n \geqslant 0$. Cela donne donne donc x^n pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$ a l'exception de $x = 0$ lorsque $n < 0$.

Nous étudions quelques propriétés de cette fonction pour $n > 0$ fixé.

12.384.
La limite

$$\lim_{x\to\infty} x^n = \infty \tag{12.1073}$$

demande la topologie sur la droite réelle achevée. C'est le lemme 12.32.

Proposition 12.385.
Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$; nous posons $f_n(x) = x^n$.

Si n est pair,

$$f_n \colon [0,\infty[\to [0,\infty[\tag{12.1074}$$

est bijective.

Si n est impair,

$$f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{12.1075}$$

est bijective.

Toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. En plusieurs morceaux, pas spécialement dans l'ordre auquel on s'attend.

(i) **Continuité** Soit $x \in \mathbb{R}$. En vertu de 12.54 nous allons prouver que $\lim_{\epsilon\to 0} f_n(x+\epsilon) = f_n(x)$. Pour cela nous utilisons la formule du binôme 3.40 avec $x, h > 0$:

$$f_n(x+h) = (x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k. \tag{12.1076}$$

Nous fixons $x_0 \in \mathbb{R}$. Calcul :

$$\begin{aligned} |f_n(x_0+h) - f_n(x)| &= |\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^k| & (12.1077a) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} |x_0|^{n-k} |h|^k & (12.1077b) \\ &= h \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} |x_0|^{n-k} |h|^{k-1} & (12.1077c) \\ &\leqslant h \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} |x_0|^{n-k}. & (12.1077d) \end{aligned}$$

131. L'objet des pages suivantes est de déterminer pour quelles valeurs de a, α et x nous pouvons trouver des définitions raisonnables pour ces fonctions.

Justifications :

- Le terme $k = 0$ est égal à $x^n = f_n(x)$ parce que $\binom{n}{0} = 1$.
- Dans la somme nous avons majoré $|h|$ par 1, opération justifiée par le fait que nous ayons dans l'idée de faire $h \to 0$.

Nous avons donc

$$\lim_{h\to 0} |f_n(x_0 + h) - f_n(x)| \leqslant \lim_{h\to 0} h \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} |x_0|^{n-k} = 0. \tag{12.1078}$$

D'où la continuité de f_n en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$.

(ii) **Pour n pair ou impair, bijection sur les positifs** Ceci sera déjà le résultat complet pour les n pairs, et a moitié du résultat pour les n impairs.

(i) **Stricte croissance** Soit $n \neq 0$ dans $\mathbb{N}$. Nous commençons par prouver que f_n est strictement croissante sur $[0, \infty[$. Nous repartons de la formule du binôme, mais cette fois, nous séparons les termes $k = 0$ et $k = n$ des autres (si $n = 1$, il y a un peu de réécriture) en tenant compte de $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$:

$$f_n(x + h) = x^n + h^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k > x^n = f_n(x). \tag{12.1079}$$

Vous noterez que l'inégalité est stricte même si $n = 1$.

Vu que nous avons stricte monotonie, le théorème 12.52(2) nous dit que

$$f_n \colon [0, \infty[\to f_n\big([0, \infty[\big) \tag{12.1080}$$

est une bijection.

(ii) **Bijection** Nous prouvons que $f_n\big([0, \infty[\big) = [0, \infty[$. Si $x > 0$ alors $f_n(x) > 0$, cela prouve une inclusion.

Pour l'autre inclusion nous savons que $\lim_{x\to\infty} f_n(x) = \infty$ par le lemme 12.32. Si $y \in [0, \infty[$, alors il existe x_0 tel que $f_n(x_0) > y$. Étant donné que $f_n(0) = 0$ et que nous avons déjà prouvé que f_n était continue (proposition 12.385), le théorème des valeurs intermédiaires 10.82 nous indique l'existence de $x_1 \in [0, x_0[$ tel que $f_n(x_1) = y$.

Nous avons prouvé que pour tout n, la fonction

$$f_n \colon [0, \infty[\to [0, \infty[\tag{12.1081}$$

est une bijection.

(iii) **Pour n impair** Nous montrons à présent que si n est impair, alors

$$f_n \colon]-\infty, 0] \to]-\infty, 0] \tag{12.1082}$$

est une bijection.

Tout se base sur le fait que si $x > 0$ alors $f_n(-x) = -f_n(x)$. Le fait que (12.1081) soit injective et surjective montre alors tout de suite le fait que (12.1082) soit également injective et surjective.

□

Vous noterez que la continuité de f_n démontrée dans la proposition 12.385 est indépendant de la proposition 12.61 qui sera invoquée plus tard pour définir a^x lorsque $a > 0$ dans $\mathbb{R}$.

12.35.2 Sur les rationnels, racines

L'existence, pour tout réel $a \geqslant 0$, d'une réel r tel que $r^2 = a$ est déjà faite en la proposition 1.404.

Définition 12.386 (Exposant rationnels)**.**
La proposition 12.385 nous dit entre autres que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$\begin{aligned} f_n \colon [0, \infty[&\to [0, \infty[\\ x &\mapsto x^n \end{aligned} \tag{12.1083}$$

est bijective. Nous définissions alors, pour $a \in [0, \infty[$,

$$a^{1/n} = f_n^{-1}(a). \tag{12.1084}$$

Autrement dit, le nombre $a^{1/n}$ est l'unique solution positive de

$$x^n = a. \tag{12.1085}$$

12.387.
Nous ne définissons pas $a^{1/n}$ pour $a < 0$, du moins pas encore. Vu que f_3 est bijective sur $\mathbb{R}$, il serait tentant de définir $(-1)^{1/3} = f_3^{-1}(-1) = -1$.

Cela causera un certain nombre de problèmes plus tard vu que nous aurons envie de deux choses en même temps :

- d'une part $\ln(-1) = i\pi$,
- d'autre part, $a^x = e^{x\ln(a)}$.

De cette façon, nous devrions avoir

$$(-1)^{1/3} = e^{i\pi/3}, \tag{12.1086}$$

qui est un nombre complexe non réel. Voici un exemple de ce que ça donne avec Sage :

```
sage: a=(-1)**(1/3)
sage: a.real_part()
1/2
sage: a.imag_part()
1/2*sqrt(3)
```

tex/sage/sageSnip019.sage

Définition 12.388 (Racince)**.**
Pour $n \in \mathbb{N}$ nous définissons $\sqrt[n]{x} = f_n^{-1}(x)$. Lorsque n est pair, la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ n'est définie que sur $\mathbb{R}^+$, et lorsque n est impair, elle est définie sur tout $\mathbb{R}$.

12.389.
Notons que les fonctions $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ et $x \mapsto x^{1/3}$ ne sont pas les mêmes : la première est définie sur tout $\mathbb{R}$ et donne des valeurs réelles tandis que la seconde n'est (pour l'instant) définie que sur les positifs, et donnera (quand on l'aura définie par l'exponentielle) des nombres complexes sur les négatifs.

En suivant cette convention, c'est-à-dire en réservant la notation $\sqrt{\ }$ pour l'inverse de f_2, nous ne devrions pas écrire des choses comme « $\sqrt{-1} = i$ », mais plutôt « $(-1)^{1/2} = i$ ». En effet, $\sqrt{-1}$ n'est pas défini et ne sera jamais défini alors que $(-1)^{1/2}$ n'est pas encore défini, mais sera défini par

$$(-1)^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\ln(-1)} = e^{i\pi/2} = i. \tag{12.1087}$$

En résumé, nous avons les fonctions suivantes :

(1) $\sqrt[n]{\ }: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si n est impair,
(2) $\sqrt[n]{\ }: [0, \infty[\to [0, \infty[$ si n est pair,
(3) $x^{1/n}: [0, \infty[\to [0, \infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Cependant nous n'hésiterons pas à utiliser la notation $\sqrt{x}$ pour $x^{1/2}$ même lorsque x est négatif, parce c'est une notation très pratique. Il faut garder en tête que cette façon de faire est incohérente parce qu'elle inciterait à penser que $\sqrt[3]{-1} = e^{i\pi/3}$ au lieu de $\sqrt[3]{-1} = -1$.

Pour toute la suite de cette section, nous allons considérer a^x uniquement pour $a > 0$.

Définition 12.390.
Pour $m, n \in \mathbb{N}$ nous définissons

$$a^{m/n} = (a^m)^{1/n}, \tag{12.1088}$$

ce qui définit la fonction puissance sur $\mathbb{Q}^+$. Enfin nous posons

$$a^{-q} = \frac{1}{a^q} \tag{12.1089}$$

lorsque $q \in \mathbb{Q}^+$.

Et avec tout ça, lorsque $a > 0$ nous avons défini a^q pour tout $q \in \mathbb{Q}$.

Nous allons souvent noter la définition (12.1088) sous la forme

$$f_{m/n}(x)^n = x^m. \tag{12.1090}$$

Lemme 12.391 ([1])**.**
Pour $a > 0$ et $p, q \in \mathbb{Z}$ nous avons :

$$a^{p/q} = (a^p)^{1/q} = (a^{1/q})^p. \tag{12.1091}$$

Démonstration. Nous divisons la preuve en fonction de la positivité du numérateur et du dénominateur.

(i) **Numérateur et dénominateurs positifs** Nous commençons avec $p, q \in \mathbb{N}$. La première égalité est la définition 12.386. Pour la seconde, la définition de $(a^p)^{1/q}$ est d'être le $x > 0$ tel que

$$x^q = a^p. \tag{12.1092}$$

La définition de $a^{1/q}$ est d'être le $y > 0$ tel que

$$y^q = a. \tag{12.1093}$$

Ce y vérifie donc aussi $y^{pq} = a^p$ et donc $(y^p)^q = a^p$. Autrement dit, $y^p = x$, c'est-à-dire exactement

$$(a^{1/q})^p = (a^p)^{1/q}. \tag{12.1094}$$

Le lemme est prouvé dans le cas où $p, q \in \mathbb{N}$.

(ii) **Numérateur et dénominateur négatifs** Si p et q sont tous les deux négatifs, nous remarquons que $p/q = (-p)/(-q)$ et nous sommes dans le même cas qu'avant.

(iii) **Numérateur négatif, dénominateur positif** Pour simplifier les notations nous supposons toujours $p, q \in \mathbb{N}$ mais nous considérons $a^{(-p)/q}$. Nous avons d'une part :

$$a^{(-p)/q} = a^{-(p/q)} = \frac{1}{a^{p/q}} = \frac{1}{(a^{1/q})^p} = (a^{1/q})^{-p}. \tag{12.1095}$$

Dans ce calcul, nous avons utilisé au dénominateur le résultat dans le cas positif.

Et d'autre part nous avons :

$$(a^{-p})^{1/q} = \left(\left(\frac{1}{a}\right)^p\right)^{1/q} = \left(\left(\frac{1}{a}\right)^{1/q}\right)^p = \left(\frac{1}{a^{1/q}}\right)^p = \frac{1}{(a^{1/q})^p} = (a^{1/q})^{-p} \tag{12.1096}$$

où nous avons utilisé le résultat avec $1/a$ en guise de a.

(iv) **Numérateur positif, dénominateur négatif** Nous traitons maintenant $a^{p/(-q)}$. Nous avons d'une part

$$a^{p/(-q)} = a^{-(p/q)} = \frac{1}{a^{p/q}} = \frac{1}{(a^p)^{1/q}} = (a^p)^{-(1/q)} = (a^p)^{1/(-q)}. \tag{12.1097}$$

Et d'autre part :

$$a^{p/(-q)} = \frac{1}{a^{p/q}} = \frac{1}{(a^{1/q})^p} = \left(\frac{1}{a^{1/q}}\right)^p = \left(a^{-(1/q)}\right)^p = (a^{1/(-q)})^p. \tag{12.1098}$$

□

Le lemme suivant montre que la définition sur $\mathbb{Q}^-$ est cohérente avec celle sur $\mathbb{Q}^+$, au sens où finalement nous retrouvons que $a^{m/n}$ vérifie $x^n = a^m$ quel que soient les signes de m et n.

Lemme 12.392 ([1]).
Le nombre $y = a^{-m/n}$ vérifie l'équation $y^{-n} = a^m$

Démonstration. Nous posons $x = a^{m/n}$, c'est-à-dire $x^n = a^m$. Nous avons, par définition $y = a^{-m/n} = \frac{1}{x}$. Alors

$$y^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^n} = x^n = a^m, \tag{12.1099}$$

donc c'est bon. □

Lemme 12.393 ([1]).
Pour $a > 0$ et $q, q' \in \mathbb{Q}$ nous avons

$$a^q a^{q'} = a^{q+q'}. \tag{12.1100}$$

Démonstration. Nous mettons q et q' au même dénominateur. Soient $q = s/c$ et $q' = r/c$ avec $s, r \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{N}$. En utilisant les égalités du lemme 12.391 nous trouvons

$$a^{s/c}a^{r/c} = (a^{1/c})^s(a^{1/c})^r = (a^{1/c})^{s+r} = a^{(s+r)/c} = a^{q+q'}. \tag{12.1101}$$

□

Lemme 12.394 ([1]).
La fonction puissance prend les valeurs suivantes.

(1) Si $a = 1$ alors $a^q = 1$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$.

(2) Si $a > 1$ alors
- $a^q > 1$ *si* $q > 0$
- $a^q < 1$ *si* $q < 0$
- $a^0 = 1$.

(3) Si $a < 1$ alors
- $a^q < 1$ *si* $q > 0$
- $a^q > 1$ *si* $q < 0$
- $a^0 = 1$.

Démonstration. Si $a = 1$ alors $a^k = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ensuite, pour $m, n \in \mathbb{N}$, $a^{n/m}$ est solution de $x^m = a^n = 1$, donc $x = 1$. En ce qui concerne les puissances négatives, $1/1 = 1$.

Si $a > 1$ alors $a^k > 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. De plus pour $q > 0$ nous avons $q = m/n$ avec $m, n \in \mathbb{N}$. Alors $a^{m/n}$ est solution de $x^m = a^n > 1$. Or pour $x \leqslant 1$ nous avons $x^m \leqslant 1$, donc la solution à $x^m = a^n$ vérifie forcément $x > 1$.

Toujours avec $a > 1$, si $q < 0$ nous posons $q = -q'$ avec $q' > 0$. Alors

$$a^q = q^{-q'} = \frac{1}{a^{q'}}. \tag{12.1102}$$

Mais $a^{q'} > 1$, donc l'inverse est inférieur à 1.

En ce qui concerne les cas $a < 1$, ils sont obtenus en posant $b = 1/a$ et en calculant

$$a^q = \left(\frac{1}{b}\right)^q = \frac{1}{b^q} = b^{-q}. \tag{12.1103}$$

□

Proposition 12.395 ([1]).
Soit $a > 1$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \infty. \tag{12.1104}$$

Démonstration. Soient $a > 1$ et $M > 0$. Nous devons prouver qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n > M$. Nous posons $a = 1 + h$. Alors en utilisant la formule du binôme,

$$a^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{n-k}. \tag{12.1105}$$

Tous les termes de la somme sont strictement positifs. Prenons le terme $k = n - 1$. Il vaut

$$\binom{n}{n-1} h = nh. \tag{12.1106}$$

Donc $a^n \geqslant nh$, donc oui, cela peut être rendu arbitrairement grand avec n sans toucher à a parce que $\mathbb{N}$ est archimédien par la proposition 1.80. □

Proposition 12.396 ([1]).
Pour $a > 0$ nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} g_a \colon \mathbb{Q} &\to \mathbb{R} \\ q &\mapsto a^q. \end{aligned} \tag{12.1107}$$

(1) Si $a \in \left]0,1\right[$ alors g_a est décroissante et

$$\lim_{q\to\infty} g_a(q) = 0, \qquad \lim_{q\to-\infty} g_a(q) = \infty. \tag{12.1108a}$$

(2) Si $a > 1$ alors g_a est croissante et

$$\lim_{q\to\infty} g_a(q) = \infty, \qquad \lim_{q\to-\infty} g_a(q) = 0. \tag{12.1109a}$$

Démonstration. Nous prouvons le cas $a > 1$. L'autre cas s'en déduit en posant $b = 1/a$. Pour la croissance, soient $q \in \mathbb{Q}$ et $r > 0$ dans $\mathbb{Q}$. En utilisant le lemme 12.393, nous avons

$$a^{q+r} = a^q a^r > a^q \tag{12.1110}$$

parce que $a^r > 1$ par le lemme 12.394.

En ce qui concerne la limite $q \to \infty$, la fonction g_a est croissante et non bornée par la proposition 12.395. Donc sa limite est ∞.

Pour la limite $q \to -\infty$, nous avons

$$\lim_{q\to-\infty} a^q = \lim_{q\to\infty} a^{-q} = \lim_{q\to\infty} \frac{1}{a^q} = 0. \tag{12.1111}$$

□

Proposition 12.397 ([1]).
Soit $a > 0$. Nous avons

$$\lim_{q\to 0} a^q = 1. \tag{12.1112}$$

Notons que cette limite est une limite dans $\mathbb{Q}$ parce que nous n'avons même pas encore défini a^x lorsque x est irrationnel.

Démonstration. Nous notons, comme à l'accoutumée, $g_a(x) = a^x$. Soit une suite $x_k \to 0$ (avec $x_k \neq 0$ pour tout k). En définissant y_k par $x_k = 1/y_k$ nous savons que a^{1/y_k} est la solution de $x^{y_k} = a$.

Nous posons $t_k = a^{x_k}$ et notre but est de prouver que $t_k \to 1$. Pour tout k nous avons la relation

$$t_k^{y_k} = a. \tag{12.1113}$$

Soit $s > 1$. Il existe un $M > 0$ tel que $y_k > M$ implique $s^{y_k} > a$ (proposition 12.395). Donc dès que $y_k > M$ nous avons $t_k < s$.

De la même manière, si $r < 1$, il existe un $R > 0$ tel que $y_k > R$ implique $r^{y_k} < a$. Donc dès que $y_k > R$ nous avons $t_k > r$.

Soit donc un voisinage $]r, s[$ de 1 (avec $r < 1$ et $s > 1$). Nous avons les nombres M et R correspondant et nous posons $L = \max\{M, R\}$. Soit K tel que $k > K$ implique $y_k > L$. Alors pour $k > K$ nous avons aussi $t_k < s$ et $t_k > r$, c'est-à-dire $t_k \in]r, s[$.

Cela prouve que $t_k \to 1$.

Donc pour toute suite $x_k \to 0$ nous avons $g_a(x_k) \to 1$. Par le critère séquentiel de la limite (proposition 7.214) nous avons $\lim_{x\to 0} g_a(x) = 1$. □

Lemme 12.398.
Soit $a > 0$. La fonction

$$\begin{aligned} g_a \colon \mathbb{Q} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto a^x \end{aligned} \tag{12.1114}$$

est continue.

Démonstration. Soient $x \in \mathbb{Q}$ et une suite $x_k \to 0$ (toujours dans $\mathbb{Q}$) et utilisons le lemme 12.393 :

$$a^{x+x_k} = a^x a^{x_k}. \tag{12.1115}$$

Cela est, dans $\mathbb{R}$, le produit entre une constante (a^x) et une suite. La limite est donc le produit de cette constante et la limite de la suite (si elle existe). Par la proposition 12.397 nous avons la limite $a^{x_k} \to 1$, et donc

$$\lim_{k\to\infty} a^{x+x_k} = a^x, \tag{12.1116}$$

ce qui prouve la continuité (caractérisation séquentielle, proposition 7.117) de g_a. □

Proposition 12.399.
Soit $a > 0$ dans $\mathbb{R}$. La fonction

$$\begin{aligned} g_a \colon \mathbb{Q} &\to \mathbb{R} \\ q &\mapsto a^q \end{aligned} \tag{12.1117}$$

est Cauchy-continue.

Démonstration. En quelque étapes.

(i) **Pour $a > 1$** Avant de nous lancer dans la preuve directe, nous prouvons une petite formule. Soit $\epsilon > 0$. Vu que, par la proposition 12.397, $\lim_{q\to 0} g_a(q) = 1$, il existe $\delta > 0$ tel que $0 < q < \delta$ implique $|1 - g_a(q)| < \epsilon$.

Soient maintenant $p, q \in \mathbb{Q}$ tels que $|p - q| < \delta$. En utilisant de plus la définition (12.1089) et la formule du lemme 12.393,

$$|g_a(q) - g_a(p)| = |g_a(q)| \left| 1 - \frac{g_a(p)}{g_a(q)} \right| = |g_a(p)||1 - g_a(p - q)| \leqslant |g_a(q)|\epsilon. \tag{12.1118a}$$

Nous y allons pour la preuve directe. Soit une suite de Cauchy (q_n) dans $\mathbb{Q}$. Nous devons prouver que la suite $n \mapsto g_a(q_n)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Soit $\epsilon > 0$.

La suite (q_n) étant de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, elle l'est également dans $\mathbb{R}$, elle est bornée parce que convergente vu que $\mathbb{R}$ est complet[132]. Vu que g_a est croissante[133] et que (q_n) est bornée, il existe M tel que $|g_a(q_n)| \leqslant M$ pour tout n.

Nous considérons δ tel que $0 < q < \delta$ implique $|1 - g_a(q)| \leqslant \epsilon$, ainsi que N tel que $i, j > N$ implique $|q_i - q_j| \leqslant \delta$ (là nous utilisons le fait que (q_n) est de Cauchy). Pour de tels N, i, j nous avons

$$|g_a(q_i) - g_a(q_j)| \leqslant M\epsilon. \tag{12.1119}$$

Donc la suite $g_a(g_n)$ est de Cauchy.

(ii) **Pour $a = 1$** La fonction g_a est constante.

(iii) **Pour $0 \leqslant a < 1$** J'imagine que ça se fait comme $a > 1$, mais en renversant quelque inégalités[134].

□

12.400.
L'ingrédient magique qui fait fonctionner la proposition 12.399 est le fait que $g_a(x+y) = g_a(x)g_a(y)$ couplé au fait que $\lim_{q\to 0} g_a(q) = 1$. C'est cela qui débloque la situation pour étendre la fonction puissance de $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{R}$ en utilisant le lemme 12.61.

Le chemin suivit par [343] pour étendre la fonction puissance de $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{R}$ est un peu différent : il définit $a^x = \sup\{a^q \text{ tel que } q < x, q \in \mathbb{Q}\}$. La preuve que cette définition donne $x \mapsto a^x$ continue sur $\mathbb{R}$ repose, elle aussi, essentiellement sur le fait que $\lim_{q\to 0} a^q = 1$.

Il y a donc une certaine justice.

Proposition-Définition 12.401 (Fonction puissance[1])**.**
Si $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, la fonction

$$\begin{aligned} g_a \colon \mathbb{Q} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto a^x. \end{aligned} \tag{12.1120}$$

est Cauchy-continue par la proposition 12.399. Si $x \in \mathbb{R}$ nous définissons

$$a^x = \tilde{g}_a(x) \tag{12.1121}$$

où $\tilde{g}_a$ est l'extension de g_a donnée par le lemme 12.61.

Nous allons la noter g_a également, et écrire a^x la valeur de g_a même lorsque x n'est pas un rationnel.

Proposition 12.402 ([1])**.**
Quelques propriétés de la fonction puissance.

(1) Pour $a > 0$, la fonction $g_a \colon x \mapsto a^x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(2) Pour $a > 1$, la fonction $g_a \colon x \mapsto a^x$ est croissante.

(3) Pour $a > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$ nous avons

$$a^x a^y = a^{x+y}. \tag{12.1122}$$

En particulier,

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}. \tag{12.1123}$$

Démonstration. La continuité de $x \mapsto a^x$ est par construction. Le point (1) est fait.

Pour le point (2), lorsque $a > 1$, la fonction $f_a \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ est croissante (proposition 12.396). Donc par la proposition 12.63, la fonction $x \mapsto a^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

132. Théorème 7.247.
133. Proposition 12.396(2).
134. Je n'ai pas essayé. Faites-le et écrivez-moin pour me dire si ça marche.

Et enfin pour le point (3), il faut faire un peu plus attention. Soient des suites $x_i \to x$ et $y_i \to y$ dans $\mathbb{Q}$. Calculons :

$$
\begin{aligned}
a^x a^y &= (\lim_i a^{x_i}) a^y && (12.1124a)\\
&= \lim_i \big(a^{x_i} a^y\big) && (12.1124b)\\
&= \lim_i \big(\lim_k a^{x_i} a^{y_k}\big) && (12.1124c)\\
&= \lim_i \big(\lim_k a^{x_i + y_k}\big) && (12.1124d)\\
&= \lim_i a^{x_i + y} && (12.1124e)\\
&= a^{x+y}. && (12.1124f)
\end{aligned}
$$

Justifications :

- Pour 12.1124a. Définition de a^x lorsque $x \in \mathbb{R}$.
- Pour 12.1124b. Nous entrons le nombre a^y dans la limite. Entrer un facteur dans une limite convergente dans $\mathbb{R}$ est un acte anodin.
- Pour 12.1124c. Définition de a^y, et renter le nombre réel a^{x_i} dans la limite sur k.
- Pour 12.1124d. Utilisation du lemme 12.393, valable pour $x_i, y_k \in \mathbb{Q}$.
- Pour 12.1124e. Pour i fixé, la suite $k \mapsto x_i + x_k$ est une suite de rationnels qui converge vers le réel $x_i + y$. Par définition 12.401 de la fonction puissance nous avons alors $\lim_k a^{x_i + y_k} = a^{x_i + y}$.
- Pour 12.1124f. La suite de réels $i \mapsto x_i + y$ converge dans $\mathbb{R}$ vers le réel $x + y$. Par la continuité de $t \mapsto a^t$ (ça fait partie du lemme 12.61 définissant la fonction puissance sur $\mathbb{R}$) nous avons $\lim_i a^{x_i + y} = a^{x+y}$.

Vous remarquerez que les limites sur k et sur i ne s'enlèvent pas tout à fait avec la même justification. Nous aurions pu invoquer la continuité sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto a^t$ pour les deux limites. Mais cette continuité, dans le cas d'une suite purement constituée de rationnels, est la définition de la prolongation vers $\mathbb{R}$. □

Lemme 12.403.
Soient $a, b > 0$. Si $1 < x < y$ alors

$$
a - b < ay - bx. \tag{12.1125}
$$

Démonstration. Nous posons $y = x + s$ avec $s > 0$. Alors

$$
ay - bx = a(x+s) - bx = (a-b)x + as > (a-b)x > a - b \tag{12.1126}
$$

parce que $as > 0$ et $x > 1$. □

Proposition 12.404 ([1])**.**
Pour $q > 0$ dans $\mathbb{Q}$, la fonction

$$
\begin{aligned}
f_q \colon \mathbb{Q}^+ &\to \mathbb{R}\\
x &\mapsto x^q
\end{aligned} \tag{12.1127}
$$

est strictement croissante.

Démonstration. Division selon la généralité de q.

(i) **Si q est entier positif** Soit $q = n \in \mathbb{N}$. Si $s > 0$ alors l'inégalité $(x+s)^n > x^n$ découle du binôme de Newton de la proposition 3.40.

(ii) **Si q est rationnel** Soient un rationnel $q = m/n$ et un nombre strictement positif s. Nous avons, par la définition 12.386 sous la forme (12.1090) :

$$
f_{m/n}(x+s)^n = (x+s)^m > x^m = f_{m/n}(x)^n. \tag{12.1128}
$$

Nous avons utilisé la stricte croissance de $x \mapsto x^m$. Cela donne

$$
f_{m/n}(x+s)^n > f_{m/n}(x)^n. \tag{12.1129}
$$

En utilisant encore la stricte croissance de $x \mapsto x^n$, nous avons le résultat.

□

Corolaire 12.405.
Soient $1 < b < a$ dans $\mathbb{R}$ et des rationnels strictement positifs $p < q$. Alors

$$a^p - b^p < a^q - b^q \tag{12.1130}$$

Démonstration. Nous notons $q = p + r$ avec $r > 0$ dans $\mathbb{Q}$. Par la proposition 12.404,

$$a^r > b^r. \tag{12.1131}$$

Cela nous permet d'utilise le lemme 12.403 pour écrire

$$a^p - b^p < a^p a^r - b^p b^r = a^q - b^q. \tag{12.1132}$$

□

Proposition 12.406 ([1])**.**
Soient $a, b > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Nous avons :

$$a^\alpha b^\alpha = (ab)^\alpha. \tag{12.1133}$$

Démonstration. Nous supposons que c'est bon pour $\alpha \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{Z}$. Pour les autres, nous donnons plus de détails.

(i) $\underline{\mathbb{Q}^+}$ Soit $q = m/n$ avec $m, n \in \mathbb{N}$. Si $a^{m/n} = x$ et $b^{m/n} = y$, alors

$$x^n = a^m \tag{12.1134a}$$
$$y^n = b^m \tag{12.1134b}$$

par (12.1090). Nous multiplions (12.1134a) par y^n à gauche et par b^m à droite : $x^n y^n = a^m b^m$. En tenant compte du résultat pour $\mathbb{N}$, nous avons

$$(xy)^n = (ab)^m, \tag{12.1135}$$

ce qui signifie que le nombre xy est $(ab)^{m/n}$.

(ii) **Pour** $\underline{\mathbb{Q}^-}$ Soit $q \in \mathbb{Q}^+$, nous avons le calcul

$$a^{-q} b^{-q} = \frac{1}{a^q b^q} = \frac{1}{(ab)^q} = (ab)^{-q}. \tag{12.1136}$$

(iii) **Pour** $\underline{\mathbb{R}}$ Soit une suite de rationnels $\alpha_i \to \alpha$. Nous avons

$$a^\alpha b^\alpha = \big(\lim_i a^{\alpha_i}\big)\big(\lim_j b^{\alpha_j}\big) = \lim_i \big(a^{\alpha_i} b^{\alpha_i}\big) = \lim_i (ab)^{\alpha_i} = (ab)^\alpha. \tag{12.1137}$$

Justifications :

— la proposition 10.25 pour le produit des limites,

— le résultat dans $\mathbb{Q}$ que nous venons de prouver,

— la définition de $(ab)^\alpha$ comme limite de $(ab)^{\alpha_i}$.

□

Pour rappel, la proposition suivantes, dans le cas de $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ est la proposition 12.404.

Proposition 12.407 ([1]).
Pour $\alpha > 0$, la fonction

$$\begin{aligned} f_\alpha \colon]0, \infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^\alpha \end{aligned} \tag{12.1138}$$

est strictement croissante.

Aussi, la fonction

$$\begin{aligned} f_\alpha \colon]-\infty, 0[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^\alpha \end{aligned} \tag{12.1139}$$

est strictement décroissante.

Démonstration. Nous rappellons que le cas $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ est déjà traité par la proposition 12.404. Soient $x \in]0, \infty[$ et $s > 0$. Nous allons montrer que $f_\alpha(x+s) - f_\alpha(x) > 0$. Pour cela nous décomposons en plusieurs cas.

(i) $\underline{x > 1}$ Par la proposition 1.388, nous considérons une suite strictement croissante de rationnels strictement positifs $\alpha_i \to \alpha$. Pour tout i nous avons $\alpha_i > \alpha_0$.

En utilisant la stricte croissance de f_{α_0} et le lemme 12.394(2), nous avons les inégalités $1 < x^{\alpha_0} < (x+s)^{\alpha_0}$, et en particulier

$$0 < (x+s)^{\alpha_0} - x^{\alpha_0}. \tag{12.1140}$$

De plus nous avons $1 < x < x+s$ et $\alpha_0 < \alpha_i$ pour tout i. Donc le corolaire 12.405 s'applique et nous avons, pour tout i :

$$0 < (x+s)^{\alpha_0} - x^{\alpha_0} < (x+s)^{\alpha_i} - x^{\alpha_i}. \tag{12.1141}$$

C'est le moment de passer à la limite $i \to \infty$. La seconde inégalité devient non stricte, mais la première reste :

$$0 < (x+s)^{\alpha_0} - x^{\alpha_0} \leqslant (x+s)^{\alpha} - x^{\alpha}. \tag{12.1142}$$

Nous avons donc bien la stricte croissance de f_α sur $]1, \infty[$.

(ii) $\underline{x \leqslant 1}$ Nous choisissons encore $\alpha_i \to \alpha$ strictement croissante dans $\mathbb{Q}$. Pour chaque i, nous avons encore

$$(x+s)^{\alpha_i} - x^{\alpha_i} > 0. \tag{12.1143}$$

Le passage à la limite change l'inégalité stricte en inégalité large, et ne permet donc pas de conclure immédiatement. Nous devons donc ruser. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k(x+s) > 1$ et $kx > 1$ (existence parce que $\mathbb{R}$ est archimédien, proposition 1.374). Nous avons :

$$\big(k(x+s)\big)^\alpha - (kx)^\alpha > 0 \tag{12.1144}$$

par la partie « $x > 1$ » que nous venons de prouver. Grâce à la proposition 12.406 nous pouvons factoriser k^α :

$$0 < \big(k(x+s)\big)^\alpha - (kx)^\alpha = k^\alpha\big((x+s)^\alpha - x^\alpha\big). \tag{12.1145}$$

Vu que $k^\alpha > 0$, cela implique $(x+s)^\alpha - x^\alpha > 0$, ce qu'il fallait.

Nous avons fini de prouver que la fonction f_α était strictement croissante sur $]0, \infty[$. En ce qui concerne la fonction f_α sur $]-\infty, 0[$, nous avons, pour $x > 0$ que

$$f_\alpha(-x) = \frac{1}{f_\alpha(x)}, \tag{12.1146}$$

et donc stricte décroissance. □

Lemme 12.408.
Si $p \geqslant 1$ et si $x \in [0, 1]$ alors $x^p \leqslant x$.

Démonstration. Vu que $p \geqslant 1$, nous avons $p = 1 + \alpha$ avec $\alpha \geqslant 0$. Nous pouvons donc écrire[135]

$$x^p = x^{1+\alpha} = xx^\alpha = xf_\alpha(x). \tag{12.1147}$$

Vu que f_α est croissante (proposition 12.407), que $f_\alpha(0) = 1$ et que $f_\alpha(1) = 1$, nous avons $f_\alpha(x) \in [0, 1]$ dès lors que $x \in [0, 1]$. Donc

$$xf_\alpha(x) \leqslant x. \tag{12.1148}$$

□

Nous prouvons à présent que f_α est localement injective ; nous en avons besoin pour prouver la continuité. Or cette continuité est nécessaire à prouver que f_α est localement bijective. Donc nous ne pouvons pas énoncer la bijectivité ici. Ce sera la proposition 12.414.

Proposition 12.409.
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Il existe un voisinage V de x sur lequel

$$f_\alpha \colon V \to f_\alpha(V) \tag{12.1149}$$

est injective.

Démonstration. Soit $x > 0$; nous considérons un voisinage V de x inclu à $]0, \infty[$. Soit $y \in V$; pour fixer les idées nous supposons $y < x$. Par la stricte croissance de f_α sur $]0, \infty[$ (proposition 12.407), nous avons $f_\alpha(y) < f_\alpha(x)$ et en particulier $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$.

Le cas $x < 0$ se traite de façon analogue, avec la stricte décroissance de f_α sur $]-\infty, 0[$. □

Notons que les voisinages sur lesquels f_α est injective sont assez grands. Ils peuvent être toute une demi-droite, si l'on veut.

Lemme 12.410.
Soient $\alpha > 0$, une suite de rationnels strictement décroissante $\alpha_i \to \alpha$ ainsi que les fonctions

$$\begin{aligned} f_{\alpha_i} \colon]1, \infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^{\alpha_i}. \end{aligned} \tag{12.1150}$$

La famille $\{f_{\alpha_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ est équicontinue[136].

Démonstration. Soient $x > 1$, et $\alpha > 0$. Nous allons montrer que $\{f_{\alpha_i}\}$ est équicontinue en x. Soit s tel que $1 < x < x + s$; le corolaire 12.405 nous enseigne que

$$(x + s)^p - x^p < (x + s)^q - x^q \tag{12.1151}$$

dès que $p < q$. En particulier, f_p étant croissante par la proposition 12.407,

$$0 < (x + s)^{\alpha_i} - x^{\alpha_i} < (x + s)^{\alpha_0} - x^{\alpha_0}. \tag{12.1152}$$

Soit $\epsilon > 0$ et δ tel que $s < \delta$ implique $|(x + s)^{\alpha_0} - x^{\alpha_0}| < \epsilon$. Alors nous avons aussi, pour de tels σ et s :

$$|(x + s)^{\alpha_i} - x^{\alpha_i}| < |(x + s)^{\alpha_0} - x^{\alpha_0}| < \epsilon. \tag{12.1153}$$

En procédant de même pour $s < 0$, nous trouvons bien que

$$|y^{\alpha_i} - x^{\alpha_i}| \leqslant \epsilon \tag{12.1154}$$

pour tout $y \in B(x, \delta)$.

Cela signifie que $\{f_i\}$ est équicontinue. □

135. En utilisant la proposition 12.402(3).
136. Définition 7.278.

Proposition 12.411 ([1]).
Soit $\alpha > 0$ dans $\mathbb{R}$. La fonction

$$\begin{aligned} f_\alpha \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^\alpha \end{aligned} \tag{12.1155}$$

est continue (sauf pour $x = 0$ si $\alpha < 0$).

Démonstration. Nous allons subdiviser quelque cas.

(i) **Pour $\alpha \in \mathbb{N}$** Nous supposons que ce cas va bien.

(ii) **Pour $\alpha \in \mathbb{Q}^+$** Soit $q = m/n$ avec $m, n \in \mathbb{N}$. Soit aussi $\epsilon > 0$. Nous avons :

$$f_{m/n}(x)^n = x^m \tag{12.1156a}$$
$$f_{m/n}(x+\epsilon)^n = (x+\epsilon)^m. \tag{12.1156b}$$

L'équation (12.1156b) s'écrit aussi bien sous la forme

$$f_n\big(f_{m/n}(x+\epsilon)\big) = (x+\epsilon)^m. \tag{12.1157}$$

En prenant la limite,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\big[f_n\big(f_{m/n}(x+\epsilon)\big)\big] = x^m = f_{m/n}(x)^n. \tag{12.1158}$$

Vu que f_n est continue, nous pouvons la permuter avec la limite dans le membre de gauche tout en écrivant $f_{m/n}(x)^n = f_n\big(f_{m/n}(x)\big)$ dans le membre de droite :

$$f_n\big[\lim_{\epsilon\to 0} f_{m/n}(x+\epsilon)\big] = f_n\big(f_{m/n}(x)\big). \tag{12.1159}$$

La fonction f_n étant injective dans un voisinage autour de x (proposition 12.409),

$$\lim_{\epsilon\to 0} f_{m/n}(x+\epsilon) = f_{m/n}(x), \tag{12.1160}$$

ce qui est la continuité de $f_{m/n}$ en x.

(iii) **Pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$** Nous prouvons séparément le cas $x < 1$ et le cas $x \geqslant 1$. Commençons par $x \in \,]1, \infty[$.

Soit une suite $\alpha_i \to \alpha$ strictement décroissante dans $\mathbb{Q}^+$. Le lemme 12.410 nous dit que l'ensemble de fonctions $\{f_{\alpha_i} \colon]1,\infty[\to \mathbb{R}\}_{i\in\mathbb{N}}$ est équicontinu. La convergence simple $f_{\alpha_i} \to f_\alpha$ étant par définition, la proposition 7.281 nous dit que la fonction $f_\alpha \colon]1,\infty[\to \mathbb{R}$ est continue.

Soit maintenant $x \in \,]0,1]$. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $kx > 1$, $k(x/2) > 1$ et $k^\alpha > 1$ (si vous pensez bien, seule la première condition est utile).

Nous considérons ϵ tel que $x + \epsilon > x/2$; de toutes façons nous comptions faire $\epsilon \to 0$. Nous avons :

$$\big|(x+\epsilon)^\alpha - x^\alpha\big| \leqslant k^\alpha\big|(x+\epsilon)^\alpha - x^\alpha\big| = \big|[k(x+\epsilon)]^\alpha - (kx)^\alpha\big|. \tag{12.1161}$$

Nous prenons le δ qui correspond à ϵ en kx dans la continuité de f_α déjà démontée pour $kx > 1$. Alors si $\epsilon < \delta$ nous avons

$$\big|(x+\epsilon)^\alpha - x^\alpha\big| \leqslant \epsilon. \tag{12.1162}$$

(iv) **Pour $\alpha \in \mathbb{R}^-$** Si $\alpha > 0$, la fonction $f_{-\alpha}$ est donnée par

$$f_{-\alpha}(x) = \frac{1}{f_\alpha(x)} \tag{12.1163}$$

et est donc continue (sauf en $x = 0$ où elle n'existe pas).

□

Proposition 12.412 ([1]).
Soient $a > 0$ ainsi que $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

$$(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}. \tag{12.1164}$$

Démonstration. Nous découpons en fonction de la nature de x et y.

(i) <u>x **rationnel,** y **naturel**</u> Si $q \in \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N}$ alors la formule

$$(a^q)^n = a^{nq} \tag{12.1165}$$

découle seulement d'une récurrence sur la formule 12.1122.

(ii) <u>$x, y \in \mathbb{Q}$</u> Soient $y = m/n$ avec $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{Q}$. Nous avons, en utilisant la partie déjà démontrée et le lemme 12.391,

$$(a^q)^p = (a)^{m/n} = \big((a^q)^m\big)^{1/n} = (a^{mq})^{1/n} = a^{mq/n} = a^{pq}. \tag{12.1166}$$

(iii) <u>x, y **irrationnels**</u> Soient des suites des rationnels $x_i \to x$ et $y_i \to y$. En utilisant les définitions,

$$(a^x)^y = \lim_i (a^x)^{y_i} = \lim_i \big(\lim_j a^{x_j}\big)^{y_i}. \tag{12.1167}$$

Fixons un i pour commencer. Nous avons, par la continuité de f_{y_i} (proposition 12.411)

$$\big(\lim_j a^{x_j}\big)^{y_i} = f_{y_i}\big(\lim_j a^{x_j}\big) = \lim_j \big(f_{y_i}(a^{x_j})\big) = \lim_j a^{x_j y_i}. \tag{12.1168}$$

Nous avons utilisé le résultat déjà démontré dans le cas des rationnels. La suite $j \mapsto x_j y_i$ est une suite dans $\mathbb{Q}$ qui converge vers le réel xy_i, donc la limite sur j redonne la fonction puissance :

$$\big(\lim_j a^{x_j}\big)^{y_i} = \lim_j a^{x_j y_i} = a^{xy_i}. \tag{12.1169}$$

Le résultat découle maintenant de la prise de limite dans (12.1167) qui revient à prendre la limite $i \to \infty$ de l'expression dans (12.1169) :

$$(a^x)^y = \lim_i \big(\lim_j a^{x_j}\big)^{y_i} = \lim_i a^{xy_i} = a^{xy}. \tag{12.1170}$$

□

Proposition 12.413.
Soit $\alpha > 0$ dans $\mathbb{R}$. Nous avons

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha = \infty. \tag{12.1171}$$

Démonstration. Nous séparons la preuve en fonction de la nature de α.

(i) <u>**Si** $\alpha \in \mathbb{N}$</u> C'est le lemme 12.32.

(ii) <u>**Si** $\alpha = 1/n$</u> Soit $n \neq 0$ dans $\mathbb{N}$, et prouvons que $\lim_{x\to\infty} x^{1/n} = \infty$. La proposition 12.402 nous indique que $x \mapsto x^{1/n} = f_n^{-1}(u)$ est croissante et continue. Elle possède donc une limite ℓ éventuellement infinie par la proposition 12.39. Posons

$$\lim_{x\to\infty} f_n^{-1}(x) = \ell. \tag{12.1172}$$

Nous voulons appliquer f_n des deux côtés et profiter de la continuité de f_n pour permuter avec la limite. Si vous avez peu du cas $\ell = +\infty$, supposez $\ell \neq +\infty$ et considérez ce qui suit comme une preuve par l'absurde que $\ell = +\infty$. Nous avons :

$$f_n\big(\lim_{x\to\infty} f_n^{-1}(x)\big) = \lim_{x\to\infty} f_n\big(f_n^{-1}(x)\big) = \lim_{x\to\infty} x = \infty. \tag{12.1173}$$

donc $f_n(\ell) = \infty$, et nous concluons que $\ell = \infty$.

(iii) **Si $\alpha \in \mathbb{Q}$** Nous posons $\alpha = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$. Alors

$$x^\alpha = (x^{1/q})^p \tag{12.1174}$$

par la proposition 12.412. Autrement dit,

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha = \lim_{x\to\infty} (f_p \circ f_{1/q})(x) = \infty \tag{12.1175}$$

parce que tant f_p que $f_{1/q}$ ont une limite $+\infty$.

(iv) **Le cas général** Nous considérons enfin $\alpha > 0$ dans $\mathbb{R}$. Le lemme 1.375 nous permet de considérer $q \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < q < \alpha$. La proposition 12.402(2) nous dit que, pour chaque x, $x^q < x^\alpha$. Donc

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha \geqslant \lim_{x\to\infty} x^q = \infty \tag{12.1176}$$

en utilisant le point précédent.

□

Proposition 12.414.
Soit $\alpha > 0$. La fonction

$$\begin{aligned} f_\alpha \colon [0, \infty[&\to [0, \infty[\\ x &\mapsto x^\alpha \end{aligned} \tag{12.1177}$$

est bijective.

Démonstration. La proposition 12.407 nous dit que $f_\alpha \colon]0, \infty[\to \mathbb{R}$ est strictement croissante. Vu que $f_\alpha(0) = 0$, nous savons que $f_\alpha([0, \infty[) \subset [0, \infty[$. La stricte croissance nous dit également que f_α est injective.

Il reste à voir que f_α est surjective. Rappelons quelque faits.

— D'abord une facile : $f_\alpha(0) = 0$.

— Nous avons $\lim_{x\to\infty} x^\alpha = \infty$ par la proposition 12.413.

— La fonction f_α est continue par la proposition 12.411.

Le théorème des valeurs intermédiaires[137] conclu que f_α est surjective sur $[0, \infty[$. □

Le lemme suivant montre en gros que x^y croît plus rapidement en y qu'en x.

Lemme 12.415.
Pour tout $\alpha > 0$ et $a < 1$ nous avons la limite

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha a^n = 0 \tag{12.1178}$$

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$ plus grand que α. Soit la suite numérique $s_n = n^k a^n$. Tous ses termes sont positifs et

$$\frac{s_n}{s_{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^k \frac{1}{a}. \tag{12.1179}$$

Étant donné que $n/n + 1 \to 1$ et que $a < 1$, il existe un certain rang à partir duquel la suite (s_n) est décroissante. Deux conclusions :

— Elle est majorée par une constante M.

— Elle est convergente par le lemme 10.31.

137. Voir 10.83.

Soit l tel que $ka^l < 1$ et $n > l$ alors

$$s_{n+l} = (n+l)^k a^{n+l} \leqslant kn^k a^n a^l = ka^l s_n \leqslant ka^l M. \tag{12.1180}$$

La majoration est due au fait que dans $(n+l)^k$ nous avons k termes tous plus petits que n^k. De la même façon,

$$s_{2n+2l} \leqslant ka^{2l} s_{2n} \leqslant ka^{2l} M. \tag{12.1181}$$

En posant $\varphi(i) = in + il$ nous avons

$$s_{\varphi(i)} \leqslant ka^i M, \tag{12.1182}$$

qui est une sous-suite convergente vers 0. Or si une suite est convergente (ce qui est le cas de (s_n)), toutes les sous-suites convergent vers la même limite. Nous en concluons que $s_n \to 0$. □

12.416.

Une conséquence est que si vous voulez choisir un mot de passe fort, la longueur du mot est plus importante que la taille de l'alphabet choisit : il est plus efficace de choisir une combinaison longue qu'une combinaisons mélangeant des lettres, chiffres et symboles spéciaux.

Exemple : si vous choisissez un mot de passe contenant majuscules, minuscules, chiffres et symboles spéciaux complètement mélangés (ne mentez pas, vous ne le faites pas), mais que vous ne le choisissez que de taille 6, vous avez 72^6 possibilités (en supposant un jeu de 10 symboles spéciaux).

Eh bien, en seulement 8 lettres minuscules, vous avez plus de possibilités : $26^8 > 72^6$.

De nombreux sites font l'erreur de considérer que

— « ggzxzheaiynshunxuydajkwyohgqxz » est un mot de passe faible,

— « azerty.2019A » est un mot de passe fort.

Il n'en est rien. Le premier est considérablement meilleur que le second, même si le second, très superficiellement, mélange les lettres majuscules, minuscules, chiffres et symboles spéciaux.

Voilà voilà. La prochaine fois qu'un site vous refusera un mot de passe de 30 lettres minuscules mélangées, vous saurez pourquoi il n'y a rien qui marche en informatique, et en particulier pourquoi la sécurité générale de nos systèmes d'information est désastreuse.

Théorème 12.417.

Soit une matrice $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$. La suite $(A^n x)$ tend vers zéro pour tout x si et seulement si $\rho(A) < 1$ où $\rho(A)$ est le rayon spectral de A

Démonstration. Dans le sens direct, il suffit de prendre comme x, un vecteur propre de A. Dans ce cas nous avons $A^n x = \lambda^n x$. Mais $\lambda^k x$ ne tend vers zéro que si $\lambda < 1$. Donc toutes les valeurs propres de A doivent être plus petites que 1 et $\rho(A) < 1$.

Pour l'autre sens nous utilisons la décomposition de Dunford (théorème 9.245) : il existe une matrice inversible P telle que

$$A = P^{-1}(D+N)P \tag{12.1183}$$

où D est diagonale, N est nilpotente et $[D, N] = 0$. Étant donné que $D + N$ est triangulaire, son polynôme caractéristique est

$$\chi_{D+N}(X) = \prod_i (D_{ii} - X). \tag{12.1184}$$

Par similitude, c'est le même polynôme caractéristique que celui de A et nous savons alors que la diagonale de D contient les valeurs propres de A.

Vu que $A^n = P^{-1}(D+N)^n P$, nous allons montrer que $\|(D+N)^n\| \to 0$, et ce sera suffisant. Notons r l'ordre de nilpotence de N (c'est à dire $N^r = 0$), et prenons $n > r$. En utilisant le fait que D et N commutent, pour tout $n \geqslant r$ nous avons :

$$\|(D+N)^n\| \leqslant \| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \| \tag{12.1185a}$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \|D\|^{n-k} \|N^k\| \tag{12.1185b}$$
$$= \sum_{k=0}^{r-1} \binom{k}{n} \rho(D)^{n-k} \|N\|^k \tag{12.1185c}$$
$$\leqslant c \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k} \rho(D)^n \tag{12.1185d}$$
$$= c\rho(D)^n \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k} \tag{12.1185e}$$
$$\leqslant c\rho(D)^n \sum_{k=0}^{r-1} \frac{n^{k-1}}{k!} \tag{12.1185f}$$
$$\leqslant c\rho(D)^n \sum_{k=0}^{r-1} n^{r-2} \tag{12.1185g}$$
$$= cr\rho(D)^n n^{r-2}. \tag{12.1185h}$$

Justifications.

- Pour (12.1185d). Nous avons posé $c = \max_{k=1,\ldots,r-1} \|N\|^k \rho(D)^{-k}$.
- Pour (12.1185f). Lemme 3.41.
- Pour (12.1185g). On oublie le $k!$ et on remplace k par $r-1$.

Récapitulons ces inéquations :

$$\|(D+N)^n\| \leqslant c'\rho(D)^n n^{r-2} \tag{12.1186}$$

où c' est une nouvelle constante. Du coup si $\rho(D) < 1$ alors $\|(D+N)^k\| \to 0$ par lemme 12.415. □

12.36 Densité des polynômes

12.36.1 Théorème de Stone-Weierstrass

Voir le thème 32.

Note : le lemme 12.418 est utilisé dans la démonstration du théorème 12.422 ; c'est pour cela que nous l'avons isolé.

Lemme 12.418.
Il existe une suite de polynômes sur $[0,1]$ *convergeant uniformément vers la fonction racine carrée.*

Démonstration. Nous donnons cette suite par récurrence :

$$P_0(t) = 0 \tag{12.1187a}$$
$$P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}\big(t - P_n(t)^2\big). \tag{12.1187b}$$

Nous commençons par montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $P_n(t) \in [0, \sqrt{t}]$. Pour P_0, c'est évident.

Ensuite nous avons

$$P_{n+1}(t)-\sqrt{t}=P_n(t)-\sqrt{t}+\frac{1}{2}(t-P_n(t)^2) \tag{12.1188a}$$
$$=\big(P_n(t)-\sqrt{t}\big)\left(1-\frac{1}{2}\frac{t-P_n(t)^2}{P_n(t)-\sqrt{t}}\right) \tag{12.1188b}$$
$$=\big(P_n(t)-\sqrt{t}\big)\left(1-\frac{\sqrt{t}+P_n(t)}{2}\right) \tag{12.1188c}$$
$$\leqslant 0 \tag{12.1188d}$$

parce que $\sqrt{t}\leqslant 1$ et $P_n(t)\leqslant 1$ par hypothèse de récurrence.

Nous savons au passage que $P_n(t)$ est une suite réelle croissante parce que $t-P_n(t)^2\geqslant t-(\sqrt{t})^2=0$. La suite $P_n(t)$ est donc croissante et majorée par $\sqrt{t}$; elle converge donc. Les candidats limites sont déterminés par l'équation

$$\ell=\ell+\frac{1}{2}(t-\ell^2), \tag{12.1189}$$

dont les solutions sont $\ell=\pm\sqrt{t}$. La suite étant positive, nous avons une convergence ponctuelle de P_n vers la racine carrée. Cette suite étant une suite croissante de fonctions continues sur un compact, convergeant ponctuellement vers une fonction continue, la convergence est uniforme par le théorème de Dini 12.367. □

Lemme 12.419.
Soit K, un compact de $\mathbb{R}$ et f_n une suite de fonctions sur K convergeant uniformément vers f. Soit $g\colon X\to K$ une fonction depuis un espace topologique K. Alors $f_n\circ g$ converge uniformément vers $f\circ g$.

Démonstration. En effet, pour tout $x\in X$ nous avons

$$\|(f_n\circ g)-(f\circ g)\|_\infty=\sup_{x\in X}\|f_n\big(g(x)\big)-f\big(g(x)\big)\|\leqslant\|f_n-f\|_\infty. \tag{12.1190}$$

Par conséquent, si $\epsilon 0$ est donné, il suffit de choisir n de telle sorte à avoir $\|f_n-f\|_\infty<\epsilon$ et nous avons $\|(f_n\circ g)-(f\circ g)\|_\infty\leqslant\epsilon$. □

Définition 12.420.
*Nous disons qu'une algèbre A de fonctions sur un espace X **sépare les points** de X si pour tout $x_1\neq x_2$ il existe $g\in A$ telle que $g(x_1)\neq g(x_2)$.*

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer une forme nettement plus générale du théorème de Stone-Weierstrass. Le théorème 12.422 le donne pour $C(X,\mathbb{C})$ et le théorème 12.421 le donne pour $C(X,\mathbb{R})$.

Théorème 12.421 (Stone-Weierstrass[344])**.**
Soient X, un espace compact et Hausdorff. Soit A, une sous-algèbre de $C(X,\mathbb{R})$ contenant une fonction constante non nulle. Alors A est dense dans $\big(C(X,\mathbb{R}),\|.\|_\infty\big)$ si et seulement si A sépare les points de X.

Démonstration. Nous allons écrire la démonstration en plusieurs étapes (dont la première est le lemme 12.418). Nous commençons par la première partie, sur les réels.

Première étape Pour tout $x\neq y\in X$ et pour tout $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, il existe une fonction $f\in A$ telle que $f(x)=\alpha$ et $f(y)=\beta$.

En effet, vu que A sépare les points nous pouvons considérer une fonction $g\in A$ telle que $g(x)\neq g(y)$ et ensuite poser

$$f(z)=\alpha+\frac{\alpha-\beta}{g(y)-g(x)}\big(g(z)-g(x)\big). \tag{12.1191}$$

Les constantes faisant partie de A, cette fonction f est encore dans A.

Seconde étape Pour tout n-uples de fonctions $f_1,\ldots,f_n$ dans $\bar{A}$, les fonctions $\min(f_1,\ldots,f_n)$ et $\max(f_1,\ldots,f_n)$ sont dans $\bar{A}$.

Nous le démontrons pour $n=2$; le reste allant évidemment par récurrence. Soient $f,g\in\bar{A}$. Étant donné que

$$\max(f,g)=\frac{f+g}{2}+\frac{|f-g|}{2} \tag{12.1192a}$$
$$\min(f,g)=\frac{f+g}{2}-\frac{|f-g|}{2}, \tag{12.1192b}$$

if suffit de montrer que si $f\in\bar{A}$ alors $|f|\in\bar{A}$. Si f est nulle, c'est évident ; supposons que $f\neq 0$ et posons $M=\|f\|_\infty\neq 0$. Pour tout $x\in X$ nous avons

$$\frac{f(x)^2}{M^2}\in[0,1]. \tag{12.1193}$$

Nous considérons alors la suite

$$h_n=P_n\circ\frac{f^2}{M^2} \tag{12.1194}$$

où P_n est une suite de polynômes convergent uniformément vers la racine carrée (voir lemme 12.418). Le lemme 12.419 nous assure que h_n converge uniformément vers $\frac{|f|}{M}$ dans $C(X,\mathbb{R})$. Étant donné que $\bar{A}$ est également une algèbre, h_n est dans $\bar{A}$ pour tout n et la limite s'y trouve également (pour rappel, la fermeture $\bar{A}$ est celle de la topologie de la convergence uniforme).

Troisième étape Soit $\epsilon>0$, $f\in C(X,\mathbb{R})$ et $x\in X$. Il existe une fonction $g_x\in\bar{A}$ telle que

$$\begin{cases} g_x(x)=f(x) & (12.1195a)\\ g_x(y)\leqslant f(y)+\epsilon & (12.1195b)\end{cases}$$

pour tout $y\in X$.

Soit $z\in X\backslash\{x\}$ et une fonction h_z telle que $h_z(x)=f(x)$ et $h_z(z)=f(z)$. Une telle fonction existe par une des étapes précédentes. Étant donné que f et h_z sont continues, il existe un voisinage ouvert V_z de z sur lequel

$$h_z(y)\leqslant f(y)+\epsilon \tag{12.1196}$$

pour tout $y\in V_z$. Nous pouvons sélectionner un nombre fini de points $z_1,\ldots,z_n$ tels que les ouverts $V_{z_1},\ldots,V_{z_n}$ recouvrent X (parce que X est compact, de tout recouvrement par des ouverts, nous extrayons un sous recouvrement fini.). Nous posons

$$g_x=\min(h_{z_1},\ldots,h_{z_n})\in\bar{A}. \tag{12.1197}$$

Si $y\in X$, nous sélectionnons le i tel que $h_{z_i}(y)\leqslant f(y)+\epsilon$ et nous avons

$$g_x(y)\leqslant h_{z_i}(y)\leqslant f(y)+\epsilon. \tag{12.1198}$$

Étape finale Soit $\epsilon>0$ et $f\in C(X,\mathbb{R})$. Pour chaque $x\in X$ nous considérons une fonction $g_x\in\bar{A}$ telle que

$$\begin{cases} g_x(x)=f(x) & (12.1199a)\\ g_x(y)\leqslant f(y)+\epsilon & (12.1199b)\end{cases}$$

pour tout $y\in X$. Les fonctions f et g_x sont continues, donc il existe un voisinage ouvert W_x de x sur lequel

$$g_x(y)\geqslant f(y)-\epsilon. \tag{12.1200}$$

De ces W_x nous extrayons un sous recouvrement fini de X : $W_{x_1},\ldots,W_{x_m}$ et nous posons

$$\varphi=\max(g_{x_1},\ldots,g_{x_n})\in\bar{A}. \tag{12.1201}$$

Si $y \in X$, il existe un i tel que

$$\varphi(y) \geqslant g_{x_i}(y) \geqslant f(y) - \epsilon. \tag{12.1202}$$

La première inégalité est le fait que φ est le maximum des g_{x_k}, et la seconde est le choix de i. Donc pour tout $y \in X$ nous avons

$$f(y) - \epsilon \leqslant \varphi(y) \leqslant f(y) + \epsilon. \tag{12.1203}$$

La première inégalité est ce que l'on vient de faire. La seconde est le fait que pour tout i nous ayons $g_{x_i}(y) \leqslant f(y) + \epsilon$; le fait que φ soit le maximum sur les i ne change pas l'inégalité.

Le fait que les inégalités (12.1203) soient vraies pour tout $y \in X$ signifie que $\|\varphi - f\|_\infty \leqslant \epsilon$, et donc que $f \in \mathrm{Adh}\big(\mathrm{Adh}(A)\big) = \mathrm{Adh}(A)$.

Tout cela prouve que $C(X, \mathbb{R}) \subset \mathrm{Adh}(A)$. L'inclusion inverse est le fait que $C(X, \mathbb{R})$ est fermé pour la norme $\|.\|_\infty$, étant donné qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue.

Nous pouvons maintenant nous tourner vers l'énoncé concernant $C(X, \mathbb{C})$. □

Théorème 12.422 (Stone-Weierstrass[1]).

Soit X, un espace compact et Hausdorff. Soit une sous-algèbre[138] A stable par conjugaison[139] A de $C(X, \mathbb{C})$ contenant une fonction constante non nulle. Alors A est dense dans $\big(C(X, \mathbb{C}), \|.\|_\infty\big)$ si et seulement si A sépare les points de X.

Entendons-nous bien : ici A et $C(X, \mathbb{C})$ sont des algèbres à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. La preuve de cette version dans $C(X, \mathbb{C})$ va bien entendu fortement reposer sur le cas dans $C(X, \mathbb{R})$ que nous venons de prouver. Soit donc A, une sous-algèbre vérifiant les hypothèses.

(i) $\underline{\mathrm{Re}(A) \subset A}$ Nous prouvons que si $f \in A$, alors $\mathrm{Re}(f) \in A$. En effet, vu que A est stable par conjugaison, si $f \in A$, alors $\bar{f} \in A$ et $f + \bar{f} = 2\,\mathrm{Re}(f) \in A$.

Nous posons

$$A_1 = \{\mathrm{Re}(g) \text{ tel que } g \in A\}. \tag{12.1204}$$

(i) **$\underline{A_1 \text{ est une sous-algèbre de } A}$** Le fait que les élément de A_1 soient dans A est déjà fait. Pour le produit, si $g_1, h_1 \in A_1$, alors il existe $h, h \in A$ tels que $g_1 = \mathrm{Re}(g)$ et $h_1 = \mathrm{Re}(h)$. Nous avons

$$(g_1 + ig_2)(h_1 + ih_2) = g_1h_2 - g_2h_2 + i(g_1h_2 + g_2h_1) \in A. \tag{12.1205}$$

La partie réelle de cela est dans A_1, donc

$$g_1h_2 - g_2h_1 \in A_1. \tag{12.1206}$$

Mais comme $g_1 + ig_2 \in A$, nous avons aussi $g_1 - ig_2 \in A$ et donc

$$(g_1 - ig_2)(h_1 + ih_2) = g_1h_1 + g_2h_2 + i(g_1h_2 - g_2h_1) \in A. \tag{12.1207}$$

La partie réelle de cela est dans A_1. Donc

$$g_1h_2 + g_2h_1 \in A_1. \tag{12.1208}$$

En comparant avec (12.1206), nous avons $g_1h_1 \in A_1$.

(ii) **$\underline{A_1 \text{ sépare les points de } X}$** Soient $x, y \in X$ ainsi que $f \in A$ séparant les points x et y, c'est-à-dire

$$f(x) \neq f(y). \tag{12.1209}$$

Supposons $f_1(x) = f_2(y)$. Vu que f sépare, si ce ne sont pas les parties réelles, ce sont les parties imaginaires. C'est-à-dire que $f_2(x) \neq f_2(y)$. Mais d'autre part, $if = f_2 + if_1 \in A$, donc en réalité $f_2 \in A_1$ également.

138. Algèbre, définition 1.291.
139. Pour tout $g \in A$, nous avons $\bar{g} \in A$.

Le partie A_1 dans $C(X,\mathbb{R})$ vérifie les hypothèses de Stone-Weierstrass réel 12.421, donc A_1 est dense dans $C(X,\mathbb{R})$. Le même raisonnement montre que A_2 est également dense dans $C(X,\mathbb{R})$ [140]

Soit maintenant le vif de la preuve : $f \in C(X,\mathbb{C})$ avec $f = u+iv$, les fonctions u et v étant dans $C(X,\mathbb{R})$. Nous avons des suites $u_k \xrightarrow{unif} u$ et $v_k \xrightarrow{unif} v$ pour des suites (u_k) et (v_k) dans $C(X,\mathbb{R})$.

Par le même genre de raisonnements que nous avons déjà fait, nous nous convainquons que $u_k + iv_k \in A$ pour chaque k. Nous avons

$$\|u_k + iv_k - u - iv\|_\infty \leqslant \|u_k - u\|_\infty + \|v_k - v\|_\infty \tag{12.1210}$$

En prenant k assez grand, les deux termes peuvent être rendus plus petit que ϵ. □

Corolaire 12.423 ([1]).
Soit B, la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^n$. La partie $C^\infty(B,\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\big(C(B,B), \|.\|_\infty\big)$.

Démonstration. Soit $f \in C(B,B)$ et $\epsilon > 0$. La fonction donnant la composante i est une fonction $f_i \in C(B,\mathbb{R})$ et il existe donc, par le théorème de Stone-Weierstrass 12.422, une fonction $g_i \in C^\infty(B,\mathbb{R})$ telle que $\|g_i - f_i\|_\infty \leqslant \epsilon$.

La fonction g dont les composantes sont les g_i ainsi construits vérifie $\|g - f\|_\infty \leqslant n\epsilon$. □

Attention toutefois que rien n'assure que les fonctions construites par le corolaire 12.423 prennent leurs valeurs dans B.

Le théorème suivant est un des énoncés les plus classiques de Stone-Weierstrass. Il découle évidemment du théorème général 12.422 (encore qu'il faut alors bien comprendre qu'il faut traiter la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ séparément). Il en existe cependant une preuve indépendante via les polynômes de Bernstein, dans le théorème 36.145. Par contre, n'allez pas croire que c'est plus simple.

Théorème 12.424.
Soit f, une fonction continue de l'intervalle compact $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que $\|P - f\|_\infty < \epsilon$.

Autrement dit, les polynômes sont denses dans $\big(C[a,b], \|.\|_\infty\big)$.

Démonstration. Nous allons prouver que les polynômes sur $[a,b]$ satisfont les hypothèses du théorème de Stone-Weierstrass 12.422.

(i) **Partie de $C([a,b],\mathbb{C})$** Les polynômes sont des fonctions continues par la proposition 12.411.

(ii) **Sous-algèbre** Les produits et sommes de polynômes restent des polynômes.

(iii) **Stable par conjugaison** Le conjugué complexe d'un polynôme est encore un polynôme. Notez que nous considérons ici les polynômes à coefficients complexes.

(iv) **Contient une fonction constante non nulle** Les fonctions constantes sont des polynômes.

(v) **Sépare les points de $[a,b]$** Le polynôme $P(x) = x$ sépare tous les points que vous voulez.

□

12.37 Primitive de fonction continue

Proposition 12.425 ([345]).
Soit un intervalle compact K de $\mathbb{R}$ et une suite (f_n) de fonctions continues sur K telles que $f_n \xrightarrow{unif} f$. Si chacune des fonctions f_n a une primitive sur K alors f également.

140. Il me semble même que $A_1 = A_2$ et qu'il y a un raccourci possible dans cette preuve en exploitant ce fait. Écrivez-moi pour dire ce que vous en pensez.

Démonstration. Soit $x_0 \in K$ et les primitives F_n choisies[141] pour avoir $F_n' f_n$ et $F_n(x_0) = 0$. Nous allons voir que (F_n) est une suite de Cauchy dans $\big(K, \|.\|_\infty\big)$. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ et $x \in K$. Nous avons

$$
\begin{aligned}
\|F_n - F_m\|_\infty &\leqslant \|F_n(x) - F_m(x)\| && (12.1211a)\\
&= \|(F_n - F_m)(x)\| && (12.1211b)\\
&\leqslant \|F_n' - F_m'\|_{[x,x_0]} \|x - x_0\| && (12.1211c)
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé le théorème des accroissements finis 11.194. Vu que $x \in K$ et que K est borné, $\|x - x_0\|$ est majoré par $\operatorname{diam}(K)$ et

$$
\|F_n - F_m\|_K \leqslant \|f_n - f_m\|_K \operatorname{diam}(K). \tag{12.1212a}
$$

Vu que (f_n) est de Cauchy, si n et m sont assez grands, cela tend vers zéro. La suite (F_n) converge donc vers une certaine fonction F.

Le théorème 12.379 nous permet de permuter la limite et la dérivée pour conclure que $F' = f$ et donc que f a une primitive sur K. □

Proposition 12.426 ([345]).
Soit un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ qui admet une primitive sur tout compact de I. Alors f a une primitive sur I.

Démonstration. Nous considérons une suite exhaustive[142] de compacts K_n pour I et $x_0 \in K_0$. Nous considérons aussi F_n la primitive de f sur K_n telle que $F_n(x_0) = 0$ (possible parce que $x_0 \in K_n$ pour tout n). Les fonctions F_n sont des restrictions les unes des autres, et nous pouvons définir

$$
\begin{aligned}
F\colon I &\to \mathbb{R}\\
x &\mapsto F_n(x) \text{ si } x \in K_n.
\end{aligned} \tag{12.1213}
$$

Nous avons évidemment $F(x_0) = 0$ et nous allons prouver que F est une primitive de f sur I. Soit $x \in I$ vu que I est ouvert, nous pouvons choisir n_0 tel que $x \in \operatorname{Int}(K_{n_0})$. Les fonctions F et F_{n_0} sont égales sur K_n et donc sur un ouvert autour de x. Par conséquent F est dérivable en x et $F'(x) = F_{n_0}'(x) = f(x)$. □

Théorème 12.427.
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Une fonction continue sur I admet une primitive[143] *sur I.*

Démonstration. Sur chaque compact de I, la fonction f est limite uniforme de polynômes[144] (théorème de Stone-Weierstrass 12.424). Donc f est primitivable sur tout compact de I (proposition 12.425) et donc sur I par la proposition 12.426. □

12.37.1 Dérivation de la fonction puissance (première)

Nous n'allons pas complètement résoudre la question de la dérivation de la fonction $x \mapsto a^x$; il faudrait des logarithmes, et nous ne les avons pas encore défini. Le logarithme sera introduit comme fonction inverse de l'exponentielle en 15.78.

Proposition 12.428 ([343]).
Soit la fonction puissance

$$
\begin{aligned}
g_a\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\
x &\mapsto a^x.
\end{aligned} \tag{12.1214}
$$

141. Les fonctions F_n étant dérivables sont continues.
142. Voir le lemme 7.267.
143. Définition 12.198.
144. Si tu veux te passer de Stone-Weierstrass, tu peux prouver que toute fonction continue sur un compact est limite uniforme de fonctions affines par morceaux, par exemple. Voir [345].

(1) La fonction g_a est dérivable.

(2) La dérivée vérifie l'équation

$$g_a'(x) = g_a'(0)g_a(x). \tag{12.1215}$$

Démonstration. La fonction g_a est continue par 12.402(1). La proposition 12.427 nous dit donc que la fonction g_a admet une primitive sur $\mathbb{R}$. Nous notons F une telle primitive.

Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $F_x(t) = F(x+t)$, nous avons une primitive de $t \mapsto a^x a^t$. En effet

$$F_x'(t) = F'(x+t)\frac{d}{dt}\Big[x+t\Big]_{t=0} = a^{a+t} = a^x a^t. \tag{12.1216}$$

Par ailleurs la fonction $t \mapsto a^x F(t)$ est également une primitive de $t \mapsto a^x a^t$. Donc il existe un nombre $C(x)$ tel que

$$F_x(t) = F(x+t) = a^x F(t) + C(x). \tag{12.1217}$$

Le nombre $F(1) - F(0)$ est un nombre sans histoires. Nous avons :

$$\begin{aligned} g_a(x)\big(F(1)-F(0)\big) &= g_a(x)F(1) - g_a(x)F(0) && (12.1218a)\\ &= F_x(1) - C(x) - F_x(0) + C(x) && (12.1218b)\\ &= F_x(1) - F_x(0) && (12.1218c)\\ &= F(1+x) - F(x). && (12.1218d) \end{aligned}$$

La fonction F étant dérivable, nous en déduisons que g_a est dérivable.

Vu que nous n'avons aucune idée de la forme de F, nous ne pouvons pas tirer beaucoup d'informations d'une dérivation des membres de gauche et de droite de (12.1218).

En ce qui concerne la formule, nous écrivons la fameuse équation fonctionnelle [145]

$$g_a(x+y) = g_a(x)g_a(y) \tag{12.1219}$$

Nous fixons x et dérivons par rapport à y en $y = y_0$:

$$g_a'(x+y_0) = g_a(x)g_a'(y_0). \tag{12.1220}$$

En posant $y_0 = 0$ nous trouvons le résultat demandé. □

12.429.

La démonstration donnée dans [343] s'assure d'abord de l'existence d'une intégrale (lemme 14.234), pose ensuite $A = \int_0^1 g_a(t)dt$ et fait le calcul suivant :

$$Ag_a(x) = \int_0^1 g_a(x)g_a(t)dt = \int_0^1 g_a(x+t)dt = \int_x^{x+1} g_a(t)dt. \tag{12.1221}$$

Vu que le membre de droite est une fonction dérivable de x, nous concluons que g_a est dérivable. Cela demande donc toute la théorie de l'intégration pour prouver la *dérivabilité* d'une fonction.

La démonstration donnée ici est à peine mieux. Elle utilise l'existence d'une primitive et donc tout le théorème de Stone-Weierstrass 12.424.

Dans les deux cas, je trouve que la situation n'est pas fameuse. Si vous êtes capable de montrer l'existence de la limite

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{a^\epsilon - 1}{\epsilon} \tag{12.1222}$$

sans recourir à autre chose que des astuces sur les limites, je suis preneur. Ou, au contraire, si vous avez un argument pour dire que c'est impossible, dites-le moi également. Écrivez-moi.

Nous posons une définition

145. Pour rappel, proposition 12.402(3).

Définition 12.430.
*Soit $a > 0$. Nous nommons l'**équation fonctionnelle** l'équation*

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)f(y) & (12.1223a)\\ f(1) = a & (12.1223b)\end{cases}$$

pour la fonction inconnue $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Note : une équation du même type, avec $f(x+y) = f(x) + f(y)$ sera dans le lemme 17.140.

Définition 12.431.
*Soit $a > 0$. Nous nommons l'**équation exponentielle** l'équation*

$$\begin{cases} y' = y & (12.1224a)\\ y(1) = a & (12.1224b)\end{cases}$$

pour la fonction inconnue $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Proposition 12.432 (Unicité de l'exponentielle)**.**
Si elle existe, la solution au problème

$$\begin{cases} y' = y & (12.1225a)\\ y(0) = 1 & (12.1225b)\end{cases}$$

est unique.

Démonstration. Soient y et g deux solutions et considérions la fonction $h(x) = g(x)y(-x)$. Un calcul immédiat donne

$$h'(x) = 0 \tag{12.1226}$$

et donc h est constante. Vu que $h(0) = 1$ nous avons $g(x)y(-x) = 1$ pour tout x, c'est-à-dire

$$g(x) = \frac{1}{y(-x)} = y(x). \tag{12.1227}$$

□

12.433.
Nous savons qu'il existe une unique solution de l'équation exponentielle avec $a = 1$. Avec la relation

$$g_a'(x) = g_a(x)g_a'(0), \tag{12.1228}$$

de la proposition 12.428, nous n'en sommes pas loin. Il faut encore savoir si il existe un $a > 0$ tel que $g_a'(0) = 1$. Notre culture générale nous dit qu'un tel réel existe et est la fameuse constante e.

Nous nous attelons maintenant à la tâche de montrer l'existence de la chose.

12.37.2 Équation fonctionnelle

Il n'est un secret pour personne (proposition 12.402(3)) que la fonction

$$\begin{aligned} g_a\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto a^x \end{aligned} \tag{12.1229}$$

vérifie l'équation fonctionnelle (12.1223). Nous pouvons nous demander à quel point cette propriété caractérise la fonction puissance.

Proposition 12.434 ([343])**.**
Encore plusieurs résultats sur la fonction g_a avec $a > 0$.

1. *La fonction g_a vérifie l'équation fonctionnelle.*

(2) La dérivée vérifie $g_a'(0) \neq 0$.

(3) Pour tout a, en posant $\alpha = 1/g_a'(0)$ nous avons

$$g_{a^\alpha}'(0) = 1. \tag{12.1230}$$

(4) Il existe un unique $e > 0$ tel que

$$g_e' = g_e. \tag{12.1231}$$

(5) Pour la valeur de e donnée en (4), la fonction g_e vérifie l'équation exponentielle (12.1224)

$$\begin{cases} g_e' = g_e & (12.1232a)\\ g_e(1) = e. & (12.1232b)\end{cases}$$

Démonstration. Un point à la fois.

(i) **Pour (1)** Le fait que g_a vérifie l'équation fonctionnelle est la proposition 12.402(3).

(ii) **Pour (2)** La formule (12.1215) de la proposition 12.428 nous assure que

$$g_a'(x) = g_a(x)g_a'(0). \tag{12.1233}$$

Donc $g_a'(0) = 0$ impliquerait que $g_a = 0$, ce qui n'est pas le cas.

(iii) **Pour (3)** Par ailleurs la proposition 12.412 nous permet d'écrire

$$g_a(\alpha x) = g_{a^\alpha}(x). \tag{12.1234}$$

En dérivant des deux côtés,

$$\alpha g_a'(\alpha x) = g_{a^\alpha}'(x). \tag{12.1235}$$

En posant donc $\alpha = g_a'(0)$ et en évaluant (12.1235) en $x = 0$ nous trouvons le résultat.

(iv) **Pour (4), existence** Pour les valeurs de α données par le point (3), nous avons $g_{a^\alpha}'(0) = 1$, et l'équation (12.1233) nous donne alors

$$g_{a^\alpha}(x) = g_{a^\alpha}(x). \tag{12.1236}$$

Comme de plus $g_{a^\alpha}(0) = 1$, cette fonction vérifie bien l'équation exponentielle.

(v) **Pour (4), unicité** Si a et b font en sorte que $g_a' = g_a$ et $g_b' = g_b$, alors nous avons aussi $g_a'(0) = g_b'(0) = 1$ à cause de (12.1233). Donc g_a et g_b vérifient l'équation de la proposition 12.432 dont la solution est unique. Donc $g_a = g_b$.

Pour tout x nous avons $g_a(x) = g_b(x)$. En particulier pour $x = 1$ nous avons $a = b$.

$\square$

Proposition 12.435 ([343]).
Soit $a > 0$. Nous considérons l'équation fonctionnelle 12.430 et l'équation exponentielle 12.431 pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(1) Si f vérifie l'équation fonctionnelle, alors

$$f(q) = a^q \tag{12.1237}$$

pour tout $q \in \mathbb{Q}$.

(2) Si f vérifie l'équation fonctionnelle et est monotone, alors $f = g_a$.

(3) Si f vérifie l'équation fonctionnelle et est continue, alors $f = g_a$.

Démonstration. En beaucoup de parties. Nous commençons par prouver (1). Nous supposons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction vérifiant l'équation fonctionnelle[146].

146. Bien que ce ne soit pas strictement nécessaire ici, nous rappelons qu'une telle fonction existe par la proposition 12.434.

(i) $f(x) \geqslant 0$ Quel que soit $x \in \mathbb{R}$ nous avons

$$f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2})^2 \geqslant 0. \tag{12.1238}$$

Vous noterez que cet argument ne fonctionne pas si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$ au lieu de $\mathbb{R}$.

(ii) **Pour $n \in \mathbb{N}$** Soit $n \in \mathbb{N}$. Je vous laisse rédiger la récurrence correctement, mais l'idée est que $f(1) = a$ et ensuite que

$$f(n+1) = f(n)f(1) = f(1)^n f(1) = f(1)^{n+1}. \tag{12.1239}$$

(iii) **Pour $m \in \mathbb{Z}$** Nous avons d'une part que $f(-m+m) = f(0) = 1$, mais d'autre part que $f(-m+m) = f(-m)f(m)$. Donc $1 = f(-m)f(m)$; et nous concluons que

$$f(-m) = \frac{1}{f(m)}. \tag{12.1240}$$

(iv) **Pour $q = 1/n$** Nous savons que $f(1) = a$, mais $1 = \frac{1}{n} + \ldots \frac{1}{n}$ (avec n termes), donc

$$a = f(\frac{1}{n} + \ldots \frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n})^n. \tag{12.1241}$$

Cela implique que $f(\frac{1}{n})^n = a$. La proposition 12.385 indique qu'il existe un unique $x > 0$ tel que $x^n = a$. Vu que nous savons déjà que f est partout positive[147], cette contrainte fixe $f(1/n)$ et la définition 12.386 nous permet d'écrire

$$f(\frac{1}{n}) = a^{1/n}. \tag{12.1242}$$

(v) **Pour $q \in \mathbb{Q}$** Nous posons $q = m/n$. Le nombre q peut être écrit sous la forme $\frac{m}{n} = \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}$ avec m termes. Donc

$$f(\frac{m}{n}) = f(\frac{1}{n} + \ldots \frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n})^m = (a^{1/n})^m = a^{m/n} \tag{12.1243}$$

où nous avons utilisé le lemme 12.391.

La preuve de (1) est terminée.

(i) **Démonstration de (2)** Nous faisons maintenant la preuve de (2). Nous supposons que f vérifie l'équation fonctionnelle et qu'elle est monotone. Pour fixer les idées, nous supposons qu'elle est monotone croissante[148].

Nous considérons les parties[149]

$$A = \{q \in \mathbb{Q} \text{ tel que } q < x\} \tag{12.1244a}$$
$$B = \{q \in \mathbb{Q} \text{ tel que } q > x\}. \tag{12.1244b}$$

Vu que f est croissante, nous avons $f(x) \geqslant f(q)$ pour tout $q \in A$ et $f(x) \leqslant f(q)$ pour tout $q \in B$. En passant au supremum et à l'infimum,

$$\sup_{q \in A} f(q) \leqslant f(x) \leqslant \inf_{q \in B} f(q). \tag{12.1245}$$

147. C'est ici que l'hypothèse de fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ est cruciale. Pour $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ceci ne fonctionne pas, et de loin.

148. Si f est monotone décroissante, soit vous adaptez la preuve, soit vous essayez de voir si on ne peut pas recycler le cas croissant en l'appliquant à $-f$.

149. Il du meilleur gout de citer le lemme 1.375 pour dire qu'ils sont non vides.

Mais il existe dans A une suite strictement croissante convergente q_i vers x (parce que $x = \sup(A)$), donc

$$a^x = \lim_i a^{q_i} \tag{12.1246}$$

par la définition 12.401. Et de même, il existe une suite r_i décroissante dans B telle que $x = \lim r_i$. Cette suite donne aussi

$$a^x = \lim_i a^{r_i}. \tag{12.1247}$$

Nous avons donc l'encadrement

$$a^x \leqslant f(x) \leqslant a^x, \tag{12.1248}$$

qui implique que $f(x) = a^x$.

(ii) **Démonstration de (3)** Nous ne supposons plus que f est monotone. Au lieu de cela nous supposons qu'elle est continue. Nous avons déjà vu en (1) que $f = g_a$ sur $\mathbb{Q}$. Mais par hypothèse f est continue et par la proposition 12.402, g_a est continue. La proposition 12.62 conclu que $f = g_a$ sur $\mathbb{R}$.

□

Proposition 12.436 ([343]).
Si y vérifie l'équation exponentielle, alors elle est continue, monotone et vérifie l'équation fonctionnelle.

12.37.3 Dérivation de la fonction puissance (seconde)

La proposition suivante donne la dérivée de $x \mapsto x^q$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$. La formule donnée est encore valable pour $x \mapsto x^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, mais elle demandera plus de théorie pour être démontrée, voir la proposition 14.255.

Proposition 12.437 ([1]).
Pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, si $f_\alpha(x) = x^\alpha$ alors

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}. \tag{12.1249}$$

En particulier, f_α est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Démonstration. Petit à petit.

(i) **Naturel** Nous prouvons que $(x^n)' = nx^{n-1}$ par récurrence en utilisant la règle de Leibnitz de la propositon 12.170(3).

D'abord pour $n = 1$ nous avons $f_1(x) = x$ et donc

$$f'_1(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{(x+\epsilon) - x}{\epsilon} = 1. \tag{12.1250}$$

Supposons que $f'_k(x) = kx^{k-1}$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Nous prouvons que $f'_{k+1}(x) = (k+1)x^k$. Nous avons

$$x^{k+1} = xx^k. \tag{12.1251}$$

En utilisant la règle de Leibnitz et l'hypothèse de récurrence,

$$\big(x^{k+1}\big)' = (x)'x^k + x\big(x^k\big)' = x^k + x\big(kx^{k-1}\big) = x^k + kx^k = (k+1)x^k, \tag{12.1252}$$

ce qu'il fallait démontrer.

(ii) **Rationnel positif** Soit donc $\alpha = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$. Le lemme 12.391 nous permet d'écrire $f_{p/q}(x) = x^{p/q} = (x^p)^{1/q}$. Cela donne

$$f_{p/q}(x)^q = x^p. \tag{12.1253}$$

Nous dérivons cette relation par rapport à x en utilisant à la fois la règle pour les entiers et la règle des fonctions composées[150] :

$$qf'_{p/q}(x)^{q-1}f'_{p/q}(x) = px^{p-1}. \tag{12.1254}$$

En isolant $f'_{p/q}(x)$ dans cette expression et en utilisant le fait que $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$, nous trouvons le résultat.

(iii) **Rationnels négatifs** Soit $\alpha = -p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$. Nous avons $x^{-p/q} = \frac{1}{f_{p/q}(x)}$. En utilisant la proposition 12.170(5) et le point déjà prouvé sur les rationnels positifs,

$$f'_{p/q} = -\frac{f'_{-p/q}}{f^2_{p/q}} = -\frac{(-p/q)x^{-p/q-1}}{x^{-2p/q}} = (p/q)x^{p/q-1}. \tag{12.1255}$$

Notez l'utilisation de la proposition 12.412 au dénominateur.

(iv) **Irrationnel** Ah ah ! On vous a bien eu. Les irrationnels, c'est pour la proposition 14.255.

En ce qui concerne le fait que la fonction f_α est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, c'est simplement une récurrence. Attention : si le rationnel α est négatif, $f_\alpha(0)$ n'est pas défini. Mais, lorsque α est positif non entier, à partir d'un certain ordre, les dérivées font intervenir x^β avec $\beta < 0$. D'où la restriction à $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ du domaine sur lequel f_α est de classe C^∞.

Si α est positif entier, alors f_α est de classe C^∞ sur tout $\mathbb{R}$ parce que toutes les dérivées sont nulles à partir d'un certain ordre. □

12.37.4 Vers les complexes

Nous avons déjà vu la proposition 12.434 qui dit essentiellement que si une fonction continue $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie $f(x+y) = f(x)f(y)$, alors $f(x) = a^x$. Comme indiqué durant la preuve, cette proposition (et en particulier sa preuve) ne fonctionne pas pour les fonctions à valeurs complexes. L'endroit où cela coinçait est que la contrainte

$$f(\frac{1}{n})^n = a \tag{12.1256}$$

n'implique pas grand chose lorsque f est à valeurs complexes.

Nous allons maintenant attaquer ce problème.

Lemme 12.438.
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Si elle existe, la solution au problème

$$\begin{cases} y' = \alpha y & (12.1257a)\\ y(0) = 1 & (12.1257b) \end{cases}$$

pour $y \colon \mathbb{R} \to S^1$ est unique.

Démonstration. Soient deux solutions y_1 et y_2. Nous posons $h(x) = y_1(x)y_2(-x)$. Une dérivation donne

$$h'(x) = y_1'(x)y_2(-x) - y_1(x)y_2'(-x). \tag{12.1258}$$

En y substituant $y_1'(x) = \alpha y_1(x)$ et $y_2'(-x) = \alpha y_2(x)$ nous trouvons $h'(x) = 0$. Donc h est constante et nous avons

$$y_1(x)y_2(-x) = 1 \tag{12.1259}$$

pour tout x. Notons que cette identité est encore valable avec $y_1 = y_2$. Nous avons en particulier les égalités $y_1(x)y_1(-x) = 1$ et $y_2(x)y_2(-x) = 1$, et nous notons au passage que $y_1(x)$ et $y_2(x)$ ne s'annulent pas.

150. Proposition 12.170(4).

En substituant dans (12.1259) la valeur $y_2(-x) = \frac{1}{y_2(x)}$ nous trouvons

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = 1, \tag{12.1260}$$

ce qui signifie $y_1(x) = y_2(x)$. □

Dans la proposition suivante, S^1 désigne l'ensemble des nombres complexes de norme 1, dont un paramétrage est donnée dans la proposition 18.57 :

$$S^1 = \{e^{ix} \text{ tel que } x \in \mathbb{R}\} = \{e^{ix} \text{ tel que } x \in [0, 2\pi[\}. \tag{12.1261}$$

Proposition 12.439 ([1]).
Soit une fonction continue $f\colon \mathbb{R} \to S^1$ vérifiant

$$f(x + y) = f(x)f(y). \tag{12.1262}$$

Alors

(1) f est dérivable,

(2) f satisfait au système

$$\begin{cases} f'(x) = f'(0)f(x) & (12.1263a)\\ f(0) = 1, & (12.1263b)\end{cases}$$

(3) il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = e^{imx}$.

Démonstration. Pour chaque $m \in \mathbb{R}$, la fonction

$$g_m(x) = e^{imx} \tag{12.1264}$$

vérifie évidemment toutes les conditions. Le but de cette démonstration est de montrer que les conditions imposées à f la déterminent de façon univoque (à part ce m).

La condition (12.1262) nous dit que $f(0) = 1$. Soit une primitive F de f. Il existe $s > 0$ tel que $F(s) > F(0)$ parce que $F' = f$ et $f(0) = 1$.

Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction G_a donnée par $G_a(x) = F(x + a)$ est une primitive de $x \mapsto f(x)f(a)$. Donc $G_a(x) = f(a)F(x)$. Cela dit nous avons

$$f(x)\big(F(s) - F(0)\big) = f(x)F(s) - f(x)F(0) = G_1(x) - G_0(x). \tag{12.1265}$$

Le membre de droite est évidemment dérivable, et $F(s) - F(0) \neq 0$. Donc f est dérivable.

Nous dérivons maintenant la relation $f(x+y) = f(x)f(y)$ par rapport à y en $y = 0$. Cela donne

$$f'(x) = f'(0)f(x). \tag{12.1266}$$

Donc il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $f'(x) = \alpha f(x)$.

Jusqu'ici nous avons prouvé qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que

$$\begin{cases} f'(x) = \alpha f(x) & (12.1267a)\\ f(0) = 1. & (12.1267b)\end{cases}$$

Or le lemme 12.438 donne l'unicité de la solution à ce système, et il ne faut pas chercher loin : la solution est

$$f(x) = e^{\alpha x}. \tag{12.1268}$$

Pour avoir $f(x) \in S^1$, nous devons de plus imposer que α soit imaginaire pur. Donc, en posant $\alpha = im$, nous avons $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = e^{imx}$. □

12.38 Polynômes de Taylor

Définition 12.440.
*Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est **$\mathbb{C}$-analytique** sur Ω si pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe une suite complexe (c_n) et $r > 0$ tels que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{12.1269}$$

pour tout $z \in B(z_0, r)$.

Définition 12.441.
*Soit une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si il existe, nous définissons le n^e **polynôme de Taylor** de f au point $a \in \mathbb{R}$ par*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{12.1270}$$

*Et la **série de Taylor** de f est la limite :*

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{12.1271}$$

dans la mesure où la somme converge.

Tant que f est n fois dérivable, le polynôme P_n existe et vérifie $P_n(a) = f(a)$. Nous ne pouvons rien en dire de plus pour l'instant. En particulier, si f est de classe C^∞ il ne faudrait pas croire que

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x) \tag{12.1272}$$

pour tout x dans un voisinage de a. Autrement dit, même si toutes les dérivées de f existent, la série entière T n'est pas garantie de

— un rayon de convergence [151] plus grand que zéro,

— et même avec un grand rayon de convergence, que la limite soit les valeurs de f.

12.442.
Il n'est pas très compliqué de construire une fonction f telles que $f(0) = 0$ et telle que $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout k, sans pour autant que f soit nulle partout (voir les fonctions plateaux 15.14.1). Les polynômes de Taylor d'une telle fonction sont tous identiquement nuls.

Ceci pour dire qu'en posant

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \tag{12.1273}$$

nous n'avons aucune garantie de $T = f$, même pas sur le rayon de convergence de la série entière définissant P. Et nous n'avons pas de garanties d'avoir un rayon de convergence plus grand que 0.

Notons toutefois que les polynômes étant denses pour la norme supremum parmi les fonctions continues [152], pour tout compact, il existe une suite de polynômes qui converge uniformément uniformément f. Mais ces polynômes ne sont pas spécialement ceux de Taylor.

12.443.
Ce que nous venons de dire en 12.442 n'est pas vrai pour les fonctions analytiques [153]. Une fonction analytique $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ s'écrit, autour de 0, sous la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{12.1274}$$

151. Définition 15.11.
152. Théorème 12.424.
153. Définition 12.440 qu'il faut écrire pour $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{C}$

Demander $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout k implique $a_n = 0$ pour tout n, et donc $f = 0$ sur un voisinage de 0.

La condition d'analycité est donc très rigide.

Le théorème de Taylor que nous démontrons à présent n'est pas un résultat que va dans le sens de $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$. C'est un résultat qui dit juste que $\lim_{x\to a} P_n(x) = f(a)$, et que la limite va d'autant plus vite que n est grand.

Le théorème de Taylor généralise le développement limité au premier ordre de la proposition 12.168.

12.444.
Lorsque le contexte n'est pas ambigu, nous notons simplement P_n le polynôme d'ordre n de f au point a. De même nous notons le reste

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x). \tag{12.1275}$$

Proposition 12.445 ([346]).
Soit une fonction f qui est n fois dérivable sur l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ contenant a. Alors

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-a)^n} = 0 \tag{12.1276}$$

où P_n est le n^e polynôme de Taylor de f autour de $x = a$.

Démonstration. Pour tout $k = 0,\ldots,n$ nous avons $f^{(k)}(a) = P_n^{(k)}(a)$ et donc

$$R_n^{(k)}(a) = 0 \tag{12.1277}$$

pour $k = 0,\ldots,n$. En posant d'autre part $s(x) = (x-a)^n$ nous avons $s^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k = 0,\ldots,n-1$. Par conséquent la règle de l'Hospital de la proposition 12.194 s'applique au quotient $R_n(x)/s(x)^n$. En l'utilisant n fois,

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{s(x)} = \lim_{x\to a} \frac{R^{(k)}(x)}{k!(x-a)^0} = \frac{0}{k!} = 0. \tag{12.1278}$$

□

Nous démontrons à présent que le polynôme de Taylor est le seul à avoir la propriété de la proposition 12.445.

Proposition 12.446 ([346]).
Soit f, une fonction n fois dérivable sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant 0. Soit un polynôme Q de degré n (ou moins) tel que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - Q(x)}{(x-a)^n} = 0. \tag{12.1279}$$

Alors Q est le polynôme de Taylor de degré n pour f en a ci-après simplement noté P_n.

Démonstration. D'après la proposition 12.445, la fonction $f - P_n$ vérifie la même limite que $f - Q$. DOnc $P_n - Q$ vérifie également la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{(P_n - Q)(x)}{x^n} = 0. \tag{12.1280}$$

Nous notons $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ et $Q(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$. La relation (12.1280) donne en particulier

$$\lim_{x\to 0} (P_n - Q)(x) = 0 \tag{12.1281}$$

qui donne $a_0 - b_0 = 0$. Nous continuons par récurrence en supposant que $a_i = b_i$ pour $i = 0,\ldots,k$. Alors

$$0 = \lim_{x\to 0} \frac{(P_n - Q)(x)}{x^{k+1}} = \lim_{x\to 0} \sum_{l=k+1}^{n} (a_l - b_l) x^{l-(k+1)}. \tag{12.1282}$$

Le seul terme non nul à droite est celui vérifiant $l-(k+1)=0$. Et ce terme donne l'équation

$$a_{k+1}-b_{k+1}=0, \tag{12.1283}$$

c'est-à-dire $a_{k+1}=b_{k+1}$. La récurrence continue ainsi jusqu'à $k=n$, et nous pouvons conclure que $Q=P_n$. □

L'intérêt de cette proposition est que si l'on trouve, par n'importe quel moyen, un polynôme Q vérifiant la condition (12.1279), alors nous savons que c'est le polynôme de Taylor.

Théorème 12.447 (Théorème de Taylor[272, 347])**.**
Soit $I\subset$ un intervalle non vide et non réduit à un point de $\mathbb{R}$ ainsi que $a\in I$. Soit une fonction $f\colon I\to\mathbb{R}$ telle que $f^{(n)}(a)$ existe. Alors il existe une fonction α définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\alpha(x)(x-a)^n, \tag{12.1284a}$$

$$\lim_{t\to a}\alpha(t)=0 \tag{12.1284b}$$

pour tout $x\in I$. Ici $f^{(k)}$ dénote la k-ième dérivée de f (en particulier, $f^{(0)}=f$, $f^{(1)}=f'$).

Démonstration. Si $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$, il suffit de poser

$$\alpha(x)=R_n(x)(x-a)^n \tag{12.1285}$$

et d'utiliser la proposition 12.445. □

Remarque 12.448.
Quelque remarques.

(1) La formule (12.1284b) est une égalité, et non une approximation. Ce qui serait une approximation serait de récrire la formule dans le terme contenant α.

(2) Nous avons l'égalité (12.1284b) uniquement sur I. Pour les x hors de I, le polynôme existe évidemment, mais nous n'avons pas spécialement de fonction α, et d'ailleurs la fonction f n'est pas spécialement définie.

12.449.
Les conditions (12.1284) sont souvent aussi énoncées sous la forme qu'il existe une fonction α telle que

$$\begin{cases}\lim_{t\to 0}\dfrac{\alpha(t)}{t^n}=0 & (12.1286a)\\ f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\dfrac{h^2}{2}f''(a)+\cdots+\dfrac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+\alpha(h). & (12.1286b)\end{cases}$$

Le théorème suivant donne une expression pas tout à fait explicite, mais pas mal quand même pour le reste de Taylor.

Théorème 12.450.
Soient un intervalle ouvert $I\subset\mathbb{R}$ ainsi que $a\in I$. Soit encore une fonction de classe C^{k+1} sur I.

(1) Pour tout $x\in I$, il existe un $c\in\,]a,x[$ tel que l'égalité

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{12.1287}$$

soit vérifiée.

(2) Soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $\overline{B(a,h)} \subset I$. Il existe $\theta \in [0,1]$ tel que

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}. \tag{12.1288}$$

Démonstration. Pour les besoins de la preuve, nous allons démontrer la formule (12.1287) pour un $b \in I$ au lieu de x. C'est juste que nous allons écrire b au lieu de x parce que nous aurons besoin de la notation x dans le courant de la preuve.

Nous posons

$$R(x) = f(x) - P_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{12.1289}$$

Cela vérifie $R(a) = f(a) - f(a) = 0$ et même

$$R^{(j)}(a) = 0 \tag{12.1290}$$

pour tout $j = 1, \ldots, n$. Nous posons encore

$$F(x) = R(x) - \frac{R(b)}{(b-a)^{n+1}}(x-a)^{n+1}. \tag{12.1291}$$

Nous avons $F^{(j)}(a) = 0$ pour tout $j = 0, \ldots, n$ ainsi que

$$F(b) = R(b) - \frac{R(b)}{(b-a)^{n+1}}(b-a)^{n+1} = 0. \tag{12.1292}$$

et aussi

$$F(a) = R(a) - 0 = 0. \tag{12.1293}$$

Bref, la fonction F vérifie les conditions de la généralisation 12.191 du lemme de Rolle. Il existe donc $c \in \,]a,b[$ tel que $F^{(n+1)}(c) = 0$. Mais vu que $P_n^{(n+1)}(x) = 0$, nous avons $R^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$, de telle sorte que

$$f^{(n+1)}(c) = \frac{R(b)(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}. \tag{12.1294}$$

En injectant cela dans la définition de F

$$F(x) = R(x) - \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{12.1295}$$

En évaluant en $x = b$, et en nous souvenant que $F(b) = 0$, nous trouvons

$$0 = R(b) - \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \tag{12.1296}$$

qui est ce que nous voulions prouver. □

Voici un énoncé pour les fonctions à plusieurs variables.

Théorème 12.451 ([348]).
Si $f\colon E \to \mathbb{R}$ est une application n fois différentiable en $a \in E$ alors il existe une fonction $\epsilon\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \frac{1}{2}(d^2f)_a(h,h) + \ldots + & \text{(12.1297a)} \\ \qquad + \ldots + \frac{1}{n!}(d^nf)_a(h,\ldots,h) + \|h\|^n\epsilon(\|h\|) & \text{(12.1297b)} \\ \lim_{t\to 0}\epsilon(t) = 0. & \text{(12.1297c)} \end{cases}$$

12.38.1 Fonctions « petit o »

Nous voulons formaliser l'idée d'une fonction qui tend vers zéro « plus vite » qu'une autre. Nous disons que $f \in o\big(\varphi(x)\big)$ si

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0. \tag{12.1298}$$

En particulier, nous disons que $f \in o(x)$ lorsque $\lim_{x\to 0} f(x)/x = 0$.

En termes de notations, nous définissons l'ensemble $o(x)$ l'ensemble des fonctions f telles que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0. \tag{12.1299}$$

Plus généralement si g est une fonction telle que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, nous disons $f \in o(g)$ si

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \tag{12.1300}$$

De façon intuitive, l'ensemble $o(g)$ est l'ensemble des fonctions qui tendent vers zéro « plus vite » que g.

Nous pouvons donner un énoncé alternatif au théorème 12.447 en définissant $h(x) = \epsilon(x+a)x^n$. Cette fonction est définie exprès pour avoir

$$h(x-a) = \epsilon(x)(x-a)^n, \tag{12.1301}$$

et donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \epsilon(x-a) = \lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0. \tag{12.1302}$$

Donc $h \in o(x^n)$.

Le théorème dit donc qu'il existe une fonction $\alpha \in o(x^n)$ telle que

$$f(x) = T^a_{f,n}(x) + \alpha(x-a). \tag{12.1303}$$

pour tout $x \in I$.

Remarque 12.452.
À titre personnel, l'auteur de ces lignes déconseille d'utiliser cette notation qui est un peu casse-figure pour qui ne la maîtrise pas bien.

Exemple 12.453.
Le développement en série du cosinus sera traité dans la proposition 18.70. △

Proposition 12.454 (Ordre deux sur $\mathbb{R}^n$[1])**.**
Soit un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \Omega$ ainsi qu'une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Alors il existe une fonction $\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \frac{1}{2}(d^2 f)_a(h,h) + \|h\|^2\alpha(h) & (12.1304a)\\ \lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0. & (12.1304b) \end{cases}$$

Ici, la notation $(d^2 f)_a(h,h)$ réfère à ce qui est expliqué en 12.351.

Démonstration. Dans la suite nous considérons t et h tels que toutes les expressions suivantes aient un sens, c'est-à-dire que tous les trucs comme $a + th$ restent dans Ω. Pour $h \in \mathbb{R}^n$ nous nommons e_h le vecteur unitaire dans la direction de h, c'est-à-dire $e_h = h/\|h\|$ et nous posons

$$k_h(t) = f(a + te_h). \tag{12.1305}$$

et nous lui appliquons Taylor 12.447 à l'ordre deux : il existe une fonction β_h telle que

$$k_h(x) = k_h(0) + xk_h'(0) + \frac{x^2}{2}k_h''(0) + x^2\beta_h(x). \tag{12.1306}$$

avec $\lim_{x\to 0}\beta_h(x)=0$.

En ce qui concerne les dérivées de k_h nous avons

$$k_h'(0)=df_a(e_h) \tag{12.1307}$$

et

$$k_h''(0)=(d^2f)_a(e_h,e_h). \tag{12.1308}$$

Il est maintenant temps d'écrire $f(a+h)=k(\|h\|)$ et de substituer les dérivées de k par les différentielles de f dans (12.1306) :

$$f(a+h)=k(\|h\|)=f(a)+df_a(h)+\frac{1}{2}(d^2f)_a(h,h)+\|h^2\|\beta_h(\|h\|). \tag{12.1309}$$

Il reste à voir que la fonction $\alpha\colon h\mapsto \beta_h(\|h\|)$ tend vers zéro pour $h\to 0$. En prenant la limite $h\to 0$ dans (12.1309), il est manifeste que la limite du membre de gauche existe et vaut $f(a)$. Donc la limite du membre de droite doit exister et valoir également $f(a)$. Nous en déduisons que la limite de

$$df_a(h)+\frac{1}{2}(d^2f)_a(h,h)+\|h\|^2\beta_h(\|h\|) \tag{12.1310}$$

existe et vaut zéro. La limite des deux premiers termes existe et vaut zéro, donc la limite du troisième existe et vaut zéro :

$$\lim_{h\to 0}\|h\|^2\beta_h(\|h\|)=0. \tag{12.1311}$$

□

Proposition 12.455.
Soit un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et une fonction $f\colon\Omega\to\mathbb{R}$ de classe C^1 et deux fois différentiable sur $]x,x+h[$. Alors il existe $\theta\in\,]0,1[$ tel que

$$f(x+h)=f(x)+df_x(h)+\frac{1}{2}(d^2f)_{x+\theta h}(h,h). \tag{12.1312}$$

12.38.2 Autres formulations

Exemple 12.456.
Une des façons les plus courantes d'utiliser les formules (12.1284) est de développer $f(a+t)$ pour des petits t en posant $x=a+t$ dans la formule :

$$f(a+t)=f(a)+f'(a)t+f''(a)\frac{t^2}{2}+\epsilon(a+t)t^2 \tag{12.1313}$$

avec $\lim_{t\to 0}\epsilon(a+t)=0$. Ici, la fonction T dont on parle dans le théorème est $T^a_{f,2}(a+t)=f(a)+f'(a)t+f''(a)\frac{t^2}{2}$.

Lorsque x et y sont deux nombres « proches[154] », nous pouvons développer $f(y)$ autour de $f(x)$:

$$f(y)=f(x)+f'(x)(y-x)+f''(x)\frac{(y-x)^2}{2}+\epsilon(y-x)(y-x)^2, \tag{12.1314}$$

et donc écrire

$$f(x)-f(y)=-f'(x)(y-x)-f''(x)\frac{(y-x)^2}{2}-\epsilon(y-x)(y-x)^2. \tag{12.1315}$$

De cette manière nous obtenons une formule qui ne contient plus que y dans la différence $y-x$. △

154. par exemple dans une limite $(x,y)\to(h,h)$.

12.38.3 Formule et reste

Proposition 12.457.
Soient $f\colon I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *et* $a\in\operatorname{Int}(I)$*. Soit un entier* $k\geqslant 1$*. Si* f *est* k *fois dérivable en* a*, alors il existe un et un seul polynôme* P *de degré* $\leqslant k$ *tel que*

$$f(x)-P(x-a)\in o\big(|x-a|^k\big) \tag{12.1316}$$

lorsque $x\to a$, $x\neq a$*. Ce polynôme est donné par*

$$P(h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k. \tag{12.1317}$$

Notons encore deux façons alternatives d'écrire le résultat. Si $f\in C^k$ *il existe une fonction* α *telle que* $\lim_{t\to 0}\alpha(t)=0$ *et*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{k}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+(x-a)^n\alpha(x-a). \tag{12.1318}$$

Si $f\in C^{k+1}$ *alors*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{k}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+(x-a)^{n+1}\xi(x-a) \tag{12.1319}$$

où ξ *est une fonction telle que* $\xi(t)$ *tend vers une constante lorsque* $t\to 0$.

La proposition suivant donne une intéressante façon de trouver le reste d'un développement de Taylor.

Proposition 12.458.
Soient I*, un intervalle dans* $\mathbb{R}$ *et* $f\colon I\to\mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^k *sur* I *telle que* $f^{(k+1)}$ *existe sur* I*. Soient* $a\in\operatorname{Int}(I)$ *et* $x\in I$*. Alors il existe* $c\in\,]x,a[$ *tel que*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{12.1320}$$

12.38.4 Reste intégral

Comme son nom l'indique, le « reste intégral » demande de savoir les intégrales. La formule du reste intégral sera donc pour après la définition des intégrales, proposition 20.151.

12.39 Développement limité autour de zéro

Dans cette sections nous supposons toujours que les fonctions sont définies sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, I, contenant 0.

12.39.1 Généralités

Définition 12.459.
Soit $f\colon I\to 0$ *une fonction définie sur un ouvert* I *autour de zéro. Nous disons que* f *admet un* ***développement limité*** *autour de* 0 *à l'ordre* n *si il existe une fonction* $\alpha\colon I\to\mathbb{R}$ *telle que*

$$\begin{cases} f(x)=P_n(x)+x^n\alpha(x) & (12.1321a)\\ \lim_{x\to 0}\alpha(x)=0 & (12.1321b)\end{cases}$$

où $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ *est une polynôme de degré* n*. Le polynôme* P_n *est appelé la* ***partie régulière*** *du développement.*

La fonction α est appelé le **reste** du développement et sera parfois noté α_f. Lorsque P est la partie régulière d'un développement limité de f nous notons parfois $f \sim P$.

Proposition 12.460 (Troncature)**.**
Si f admet un développement limité d'ordre n alors il admet également un développement limité d'ordre n' pour tout $n' < n$. Ce dernier s'obtient en tronquant le polynôme d'ordre n à l'ordre n'.

Proposition 12.461 (Unicité)**.**
Si f admet une développement limité alors ce dernier est unique : il existe un unique polynôme P_n d'ordre n et une unique fonction α vérifiant simultanément les deux conditions

$$\begin{cases} f(x) = P_n(x) + x^n\alpha(x), & (12.1322a) \\ \lim_{x\to 0} \alpha(x) = 0. & (12.1322b) \end{cases}$$

Exemple 12.462.
En ce qui concerne les séries géométriques de raison x nous savons les formules

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \tag{12.1323}$$

et

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1 - x} \tag{12.1324}$$

pour tout $x \in \left]-\infty, 1\right[$. Comparant les deux, il est naturel d'essayer de prendre $1+x+x^2+\cdots+x^n$ comme développement limité de la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Pour voir si cela fonctionne, il faut vérifier si « le reste » est bien de la forme $x^n\alpha(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \alpha(x) = 0$.

Le reste en question est donné par

$$\frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2 - \ldots - x^n = \frac{1}{1-x} - \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x} = x^n \frac{x}{1-x}. \tag{12.1325}$$

En posant $\alpha(x) = \frac{x}{1-x}$ nous avons donc bien

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\frac{x}{1-x} \tag{12.1326}$$

et $\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-x} = 0$. Cela est le développement limité de f à l'ordre n autour de 0. △

La formule des accroissements finis est un cas particulier de développement fini. Supposons que f soit dérivable en 0. En effet nous pouvons facilement trouver la fonction α qui convient. Sachant que $f(0) + xf'(0)$ donne l'approximation affine de f autour de 0, nous cherchons α en écrivant

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x\alpha(x). \tag{12.1327}$$

Cela nous pousse à définir

$$\alpha(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0). \tag{12.1328}$$

Notons que cette fonction n'est pas définie en $x = 0$, mais cela n'a pas d'importance : seule la limite $\lim_{x\to 0} \alpha(x)$ nous intéresse. Par définition de la dérivée,

$$\lim_{x\to 0} \alpha(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0) = 0. \tag{12.1329}$$

En conclusion si f est dérivable, son développement limité à l'ordre 1 est donné par

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x\alpha(x) \tag{12.1330}$$

où $\alpha(x)$ est donnée par la formule (12.1328).

12.39.2 Formule de Taylor-Young

Plus généralement nous avons la proposition suivante qui donne le développement limité de toute fonction dérivable n fois.

Proposition 12.463 (Formule de Taylor-Young)**.**
Soit f une fonction n fois dérivable sur un intervalle I contenant 0. Alors il existe une fonction $\alpha\colon I \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\alpha(x) \tag{12.1331}$$

et

$$\lim_{x\to 0} \alpha(x) = 0. \tag{12.1332}$$

Cette proposition nous permet de calculer facilement des développements limités tant que nous sommes capables de calculer les dérivées successives de la fonction à développer. Dans l'exemple 12.462 nous avons dû utiliser des astuces et des formules pour déterminer le développement limité de $\frac{1}{1-x}$. Au contraire la formule (12.1331) nous permet de trouver le polynôme en appliquant mécaniquement une formule simple.

Exemple 12.464.
Utilisation de la formule (12.1331) pour déterminer le développement limité de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1-x}. \tag{12.1333}$$

Il faut calculer les dérivées successives de f :

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \tag{12.1334a}$$
$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \tag{12.1334b}$$
$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} \tag{12.1334c}$$

Avec ces résultats, nous devinons que

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}. \tag{12.1335}$$

Pour en être sûr nous le prouvons par récurrence. La dérivée de $\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ est donnée par

$$\frac{n!(n+1)(1-x)^n}{(1-x)^{2n+2}} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}. \tag{12.1336}$$

Évaluées en $x = 0$, les dérivées successives de f sont $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$,…,$f^{(n)}(0) = n!$. Utilisant la formule (12.1331) nous avons

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\alpha(x), \tag{12.1337}$$

conformément à ce que nous avions déjà trouvé. △

Exemple 12.465.
Soient $r \in \mathbb{Q}$ et la fonction donnée par

$$f(x) = (1+x)^r. \tag{12.1338}$$

Nous notons I le domaine de cette fonction : c'est $\mathbb{R}$ si $r > 0$ ou $[-1,\infty]$ si $r < 0$. Si par contre $r = 0$, la fonction est constante et le domaine est $I = \mathbb{R}$.

En ce qui concerne les dérivées[155] : $f'(x) = r(1+x)^{r-1}$ et plus généralement

$$f^{(k)}(x) = r(r-1)\ldots(r-k+1)(1+x)^{r-k} \tag{12.1339}$$

si $k > 0$. Pour $k = 0$ nous avons $f^{(k)}(0) = 1$. Le développement de Taylor-Young est alors

$$(1+x)^r = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{k!} x^k + x^n\alpha(x). \tag{12.1340}$$

Notons que que si r est un entier, pour $k = r$, le produit au numérateur s'annule et le développement s'arrête.

Dans le développement de $(1+x)^r$, nous reconnaissons la formule de $\binom{k}{r}$, sauf que nous ne pouvons pas l'écrire avec cette notation lorsque r n'est pas entier. $\triangle$

Cet exemple fonctionnera encore avec $r \in \mathbb{R}$ au lieu de $r \in \mathbb{Q}$, mais il faudra la proposition 15.90 pour la dérivée

Remarque 12.466.
Pour alléger la notation et ne pas écrire $\ldots + x^n\alpha(x)$ nous pouvons aussi écrire

$$f(x) \sim 1 + x + x^2 + \cdots + x^n, \tag{12.1341}$$

mais il est interdit d'écrire

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \tag{12.1342}$$

en mettant un signe d'égalité entre une fonction et son développement limité[156].

Notons cependant que la proposition 12.463 ne donne pas de moyen simple de trouver la fonction α. Si la fonction f est très régulière dans l'intervalle I on a le résultat suivant.

Proposition 12.467 (Reste dans la forme de Lagrange)**.**
Si la fonction f est dérivable $n+1$ fois dans I alors il existe $\bar{x}$ dans l'intervalle $[0, x]$ tel que

$$f(x) = P_n(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{n+1}(\bar{x}) x^{n+1}. \tag{12.1343}$$

12.39.3 Règles de calcul

Les règles suivantes permettent de calculer les développements limités des fonctions qu'on peut écrire comme combinaison de fonctions dont nous savons déjà le développement.

Il est toujours possible de calculer le développement limité d'une fonction par la formule de Taylor-Young (proposition 12.463). Les règles suivantes peuvent nous economiser de l'effort et du temps.

12.39.3.1 Linéarité des développements limités

L'opération qui consiste à prendre le développement limité d'une fonction est une opération linéaire : connaissant les développements limités de f et de g, il suffit de les sommer pour obtenir celui de $f+g$. De même, si λ est une constante, le développement limité de λf est le développement limité de f fois λ.

Proposition 12.468.
Soient λ et μ dans $\mathbb{R}$. Si f et g sont deux fonctions acceptant des développements limités d'ordre n

$$f(x) = P(x) + x^n\alpha_f(x) \tag{12.1344a}$$
$$g(x) = Q(x) + x^n\beta(x) \tag{12.1344b}$$

155. Nous utilisons la proposition 12.437.
156. Il faut cependant être très prudents avec la notation abrégée. Elle pourrait nous faire oublier des informations importantes, voir les développements des fonctions trigonométriques pour un exemple.

avec $\lim_{x\to 0}\alpha(x) = \lim_{x\to 0}\beta(x) = 0$*, alors la fonction* $\lambda f + \mu g$ *admet le développement limité*

$$(f+g)(x) = (\lambda P + \mu Q)(x) + (\lambda\alpha + \mu\beta)(x). \tag{12.1345}$$

Remarque 12.469.
La forme explicite du reste ne nous interesse pas. Dans la pratique on écrira toujours $(f+g)(x) = (P+Q)(x) + \alpha(x)$, où on appelle α une fonction apportune telle que $\lim_{x\to 0}\alpha(x) = 0$.

Démonstration. Vu les définitions (12.1344) des polynômes P, Q et des restes α et β, l'égalité (12.1345) est une conséquence de la linéarité de la dérivation et de la proposition 12.463

De plus $P+Q$ est un polynôme de degré n dès que P et Q sont des polynômes de degré n, et

$$\lim_{x\to 0}(\lambda\alpha + \mu\beta)(x) = \lim_{x\to 0}\lambda\alpha(x) + \lim_{x\to 0}\mu\beta(x) = 0. \tag{12.1346}$$

Par conséquent $\lambda\alpha + \mu\beta$ est la fonction de reste de $\lambda f + \mu g$. □

Exemple 12.470.
Calculer le développement de la fonction

$$f(x) = 3\sqrt[3]{1+x} + e^{-2x}. \tag{12.1347}$$

Le développement de $\sqrt[3]{1+x}$ est donné par la formule de l'exemple 12.465 avec $\alpha = \frac{1}{3}$. Nous avons donc dans un premier temps

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1+x} &= 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{6}x^3 + x^3\alpha(x) && (12.1348a)\\ &= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + x^3\alpha(x). && (12.1348b)\end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}3\sqrt[3]{1+x} + e^{-2x} &= 3\Big[1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + x^3\alpha(x)\Big] + 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + x^3\beta(x) && (12.1349a)\\ &= 4 - x + \frac{5}{3}x^2 - \frac{31}{27}x^3 + x^3\big(\alpha(x) + \beta(x)\big). && (12.1349b)\end{aligned}$$

△

La condition $\lim_{x\to 0}\alpha(x) = 0$ signifie que l'approximation qui consiste à remplacer $f(x)$ par le polynôme n'est pas une trop mauvaise approximation lorsque x est petit. Cela ne signifie rien de plus. En particulier si x est grand, l'approximation polynomiale peut-être (et est souvent) très mauvaise.

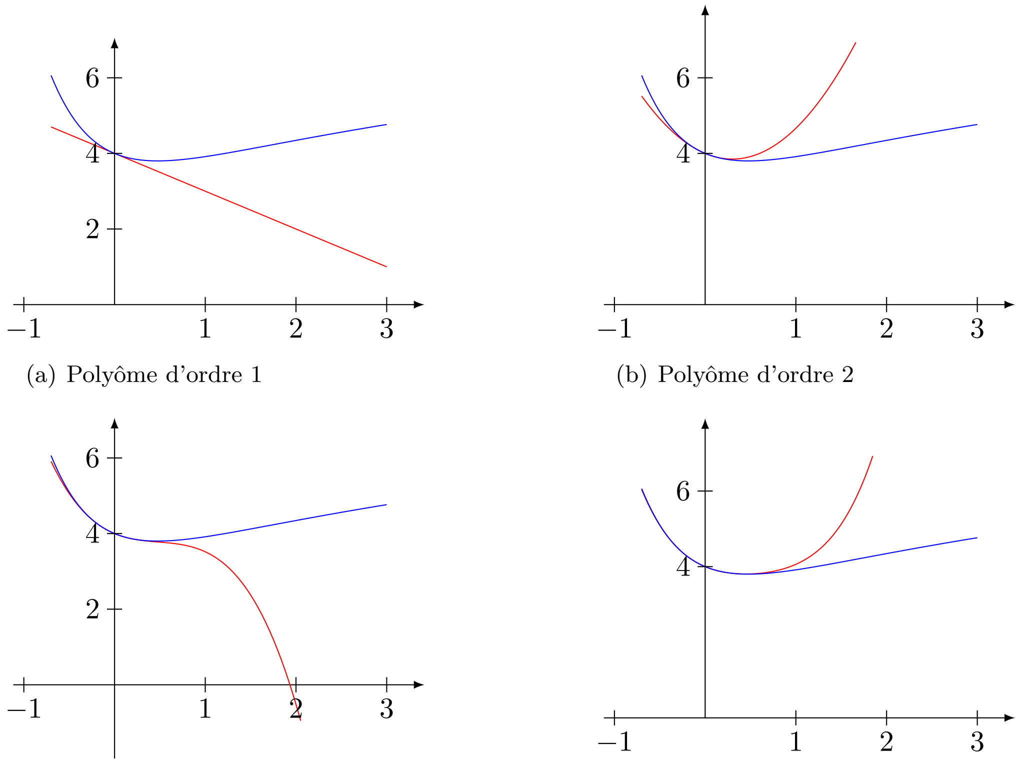
À ce propos, notez qu'un polynôme tend toujours vers $\pm\infty$ lorsque x est grand. Une approximation polynomiale d'une fonction bornée est donc toujours (très) mauvaise pour les grandes valeurs de x.

À titre d'exemple nous avons tracé sur la figure 12.12 la fonction

$$f(x) = 3\sqrt[3]{x+1} + e^{-2x} \tag{12.1350}$$

et ses développements limités d'ordre 1 à 3. Il est particulièrement visible que l'approximation est assez bonne pour la partie gauche du graphe sur laquelle la fonction est bien croissante, alors qu'elle est franchement mauvaise sur la droite où le graphe ressemble plutôt à une constante [157].

157. Pouvez-vous cependant dire que vaut $\lim_{x\to\infty} f(x)$?



(a) Polyôme d'ordre 1

(b) Polyôme d'ordre 2

(c) Polyôme d'ordre 3

(d) Polyôme d'ordre 4

FIGURE 12.12 – Les développements limités d'ordre de plus en plus grand de la fonction de l'exemple 12.470. La fonction est en bleu et les « approximations » sont en rouge.

12.39.3.2 Développement limité d'un quotient

Proposition 12.471.
Si P_f est le polynôme du développement limité de f à l'ordre n et P_g celui de g, alors nous obtenons le développement limité de f/g à l'ordre n en effectuant la division selon les puissances croissantes de P_f par P_g.

Attention : il s'agit bien de faire une division selon les puissances croissantes, et non une divisions euclidienne. La division euclidienne de A par B consiste à écrire $A = BQ + R$ avec le reste R de degré le plus *petit* possible. Ici nous voulons avoir un reste de degré le plus *grand* possible.

12.39.3.3 Développement limité d'une fonction composée

Proposition 12.472.
Soient f et g des fonctions admettant des développements limités d'ordre n au voisinage de 0. Nous supposons que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Alors la composée $f\big(g(x)\big)$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 qui s'obtient en substituant le développement de g à chaque «x» du développement de f, et en supprimant tous les termes de degré plus élevé que n.

12.40 Développement ailleurs qu'à l'origine

Il est intéressant de développer une fonction au voisinage de zéro lorsque nous nous intéressons à son comportement pour les x pas très grands. Il est toutefois souvent souhaitable de savoir le comportement d'une fonction au voisinage d'autres valeurs que zéro.

Pour développer la fonction f autour de x_0, nous considérons la fonction $h \mapsto f(x_0 + h)$ que nous développons autour de zéro (pour h). L'objectif est de trouver une polynôme P et une fonction

α tels que

$$\begin{cases} f(x) = P(x) + (x-x_0)^n\alpha(x) & (12.1351a)\\ \lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0. & (12.1351b)\end{cases}$$

En pratique, le développement limité à l'ordre n d'une fonction autour d'un point x_0 quelconque à l'intérieur de son domaine prend la forme suivante, qui généralise la formule de Taylor-Young vue dans la proposition 12.463

Proposition 12.473 (Formule de Taylor-Young, cas général)**.**
Soit f une fonction n fois dérivable sur un intervalle I contenant x_0. Alors il existe une fonction $\alpha\colon I\to\mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0)+&f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\\ &+\frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+(x-x_0)^n\alpha(x-x_0) \end{aligned} \tag{12.1352}$$

et

$$\lim_{t\to 0}\alpha(t) = 0. \tag{12.1353}$$

12.41 Développement au voisinage de l'infini

Il est souvent utile de connaitre le comportement d'une fonction pour les grandes valeurs de x et de déterminer ses asymptotes éventuelles. La technique que nous allons utiliser consiste à poser $x=\frac{1}{h}$ et de développer la fonction "auxiliaire" $g(h)=f(1/h)$ autour de $h=0$. La limite avec $h\to 0^+$ donnera le comportement pour $x\to\infty$ et la limite $h\to 0^-$ donnera le comportement pour $x\to-\infty$.

Dans le cas d'une développement autour de $\pm\infty$ nous ne parlons plus de développement *limité* mais de **développement asymptotique**.

12.41.1 La fonction puissance : remarques pour la suite

Il y a encore de nombreuses choses à dire sur la fonction puissance. Pour savoir lesquelles, voir le thème 50.

12.42 Fonctions réelles de deux variables réelles

Une **fonction réelle de 2 variables réelles** est une fonction $f : A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} : (x,y)\mapsto z = f(x,y)$.

Le **graphe de** f, noté $\operatorname{Gr} f$, est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$:

$$\operatorname{Gr} f = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in A \text{ et } z = f(x,y)\}$$

Les **courbes de niveau** de la fonction f sont obtenues en posant $f(x,y)=\lambda$.

12.42.1 Limites de fonctions à deux variables

Ici nous n'allons pas entrer dans tous les détails, mais simplement mentionner les quelques techniques les plus courantes.

Théorème 12.474.
Soient deux fonctions $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ et $g\colon\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$. Si a est un point adhérent au domaine de $g\circ f$ et si

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= b\\ \lim_{y\to b} g(y) &= c,\end{aligned} \tag{12.1354}$$

alors

$$\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = c. \tag{12.1355}$$

Les techniques usuelles sont

(1) La règle de l'étau. Cette technique demande un peu plus d'imagination parce qu'il faut penser à un « truc » différent pour chaque exercice. En revanche, la justification est facile : il y a un théorème qui dit que ça marche.

(2) Lorsqu'on applique la règle de l'étau, penser à

$$|x| = \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x^2+y^2}. \tag{12.1356}$$

Cela permet de majorer le numérateur. Attention : ce genre de majoration fonctionne seulement au numérateur : agrandir le dénominateur ferait diminuer la fraction.

(3) Il n'est pas vrai que

$$|x| = \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x^4} \leqslant \sqrt{x^4+2y^4}. \tag{12.1357}$$

En effet, si x est petit, alors $x^2 > x^4$, et non le contraire.

Une technique très efficace pour les limites $(x,y)\to(0,0)$ est le passage aux coordonnées polaires. Il s'agit de poser

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) & (12.1358a)\\ y = r\sin(\theta) & (12.1358b)\end{cases}$$

et puis de faire la limite $r\to 0$.

Si la limite obtenue **ne dépend pas de** θ, alors c'est la limite cherchée. Voici quelque exemples.

Exemple 12.475.
Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$

(2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(xy)^2}{(x+y)^2+(x-y)^2}$

(3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^2}$

(4) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin(y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Tentez de les faire par vous-même avant de regarder la solution qui suit.

(1) Ici la méthode des chemins pour est particulièrement éclairante. Regardons d'abord la fonction sur la droite $x=y$. Nous avons

$$f(x,y) = \frac{x-x}{2x} = 0. \tag{12.1359}$$

Donc la fonction est nulle sur toute la ligne.

Si nous regardons maintenant la ligne verticale $x=0$, nous avons

$$f(0,y) = \frac{-y}{y} = -1, \tag{12.1360}$$

donc la fonction vaut -1 sur toute la ligne verticale.

(2)

(3) Regardons la technique des coordonnées polaires. Nous remplaçons x par $r\cos(\theta)$ et y par $r\sin(\theta)$:

$$f(r,\theta) = \frac{r^4\cos(\theta)\sin^3(\theta)}{r^2} = r^2\cos(\theta)\sin^3(\theta). \tag{12.1361}$$

Cette fonction tend vers zéro quand $r\to 0$. Nous avons donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0. \tag{12.1362}$$

Pour cet exercice nous pouvons aussi utiliser la règle de l'étau en écrivant d'abord

$$0 \leqslant |f(x,y)| \leqslant \frac{|x||y^3|}{|x^2+y^2|}. \tag{12.1363}$$

Mais on a $|x| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$, $|y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$ et $|x^2+y^2| = \big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^2$, donc

$$0 \leqslant |f(x,y)| \leqslant \frac{\sqrt{x^2+y^2}\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^3}{\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^2} = \big(\sqrt{x^2+y^2}\big)^2 \to 0. \tag{12.1364}$$

(4) En passant aux polaires, nous avons

$$f(r,\theta) = \frac{r\cos\theta\sin\big(r\sin\theta\big)}{r} = \cos(\theta)\sin\big(r\sin\theta\big). \tag{12.1365}$$

La limite de cette dernière fonction lorsque $r \to 0$ vaut zéro.

Une autre façon de procéder consiste à multiplier et diviser par y de telle façon à faire apparaitre $\sin(y)/y$ dont nous connaissons la limite :

$$f(x,y) = \frac{\sin(y)}{y} \cdot \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{12.1366}$$

La limite du premier facteur est 1, tandis que le second peut être traité de façon classique en prenant la valeur absolue et en majorant $|x|$ par $\sqrt{x^2+y^2}$.

△

12.42.2 Dérivées partielles

La **dérivée partielle** par rapport à x au point (x,y) est notée

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \tag{12.1367}$$

et se calcule en dérivant f par rapport à x en considérant que y est constante.

De la même manière, la dérivée partielle par rapport à y au point (x,y) est notée

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \tag{12.1368}$$

et se calcule en dérivant f par rapport à y en considérant que x est constante.

Pour les dérivées partielles secondes,

— $f''_{xx}(x,y) = (f'_x)'_x = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})$.

— $f''_{yy}(x,y) = (f'_y)'_y = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})$.

— $f''_{xy}(x,y) = (f'_x)'_y = (f'_y)'_x = f''_{yx}(x,y)$ ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$.

12.42.3 Différentielle et accroissement

La **différentielle totale** de f au point (a,b) est donnée, quand elle existe (!), par la formule

$$df(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)dy. \tag{12.1369}$$

De la même façon que la formule des accroissements finis disait que $f(x+a) \simeq f(x) + af'(x)$, en deux dimensions nous avons que l'**accroissement** approximatif de f au point (a,b) pour des accroissements Δx et Δy est

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + \Delta x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \Delta y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y). \tag{12.1370}$$

Le **plan tangent** au graphe de f au point $\big(a,b,f(a,b)\big)$ est

$$T_{(a,b)}(x,y)=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \tag{12.1371}$$

essayez d'écrire l'équation de la droite tangente au graphe de $f(x)$ au point $x=a$ en termes de la dérivée de f, et comparez votre résultat à cette formule.

Un des principaux théorèmes pour tester la différentiabilité d'une fonction est le suivant.

Théorème 12.476.
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$. Si les dérivées partielles existent dans un voisinage de a et donc continues en a, alors f est différentiable en a.

Le plus souvent, nous prouvons qu'une fonction est différentiable en calculant les dérivées partielles et en montrant qu'elles sont continues.

Dérivation implicite : Soit $F(x,f(x))=0$ la représentation implicite d'une fonction $y=f(x)$ alors

$$y'=f'(x)=-\frac{F'_x}{F'_y}.$$

12.43 Les fonctions à valeurs vectorielles

Jusqu'à présent nous avons vu des fonctions de plusieurs variables qui prenaient leurs valeurs dans $\mathbb{R}$. Nous allons maintenant voir ce qu'il se passe lorsque les fonctions prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

Une fonction d'une variable est dite **à valeurs vectorielles** lorsque

$$\begin{aligned} f\colon I\subset\mathbb{R}&\to\mathbb{R}^3\\ f(x)&=\begin{pmatrix} f_1(x)\\ f_2(x)\\ f_3(x)\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{12.1372}$$

Les fonctions $f_i\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sont les **composantes** de f. Ce que nous avons raconté à propos des dérivées passe facilement :

$$\frac{f(a+\epsilon)-f(a)}{\epsilon}=\begin{pmatrix} \frac{f_1(a+\epsilon)-f_1(a)}{\epsilon}\\ \frac{f_2(a+\epsilon)-f_2(a)}{\epsilon}\\ \frac{f_3(a+\epsilon)-f_3(a)}{\epsilon}\end{pmatrix}. \tag{12.1373}$$

En particulier dès que les fonctions f_i sont dérivables, nous avons

$$f'(a)=\begin{pmatrix} f_1'(a)\\ f_2'(a)\\ f_3'(a)\end{pmatrix} \tag{12.1374}$$

comme dérivée de la fonction. Cette dérivée est un vecteur.

Exemple 12.477.
Si

$$f\colon x\in\mathbb{R}\mapsto\begin{pmatrix} x^2e^x\\ \cos(x^2)\\ x^3+x\end{pmatrix}, \tag{12.1375}$$

alors

$$f'(x)=\begin{pmatrix} 2xe^x+x^2e^x\\ -2x\sin(x^2)\\ 3x^2+1\end{pmatrix}. \tag{12.1376}$$

$\triangle$

12.44 Fonctions vectorielles de plusieurs variables

Ce sont les fonctions de la forme

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{12.1377}$$

En ce qui concerne les dérivées, tout se passe comme avant. Si les dérivées partielles des composantes f_i existent au point $a \in \mathbb{R}^3$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \begin{pmatrix} \partial_x f_1(a) \\ \partial_x f_2(a) \\ \partial_x f_3(a) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) = \begin{pmatrix} \partial_y f_1(a) \\ \partial_y f_2(a) \\ \partial_y f_3(a) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(a) = \begin{pmatrix} \partial_z f_1(a) \\ \partial_z f_2(a) \\ \partial_z f_3(a) \end{pmatrix}. \tag{12.1378}$$

12.45 Limites à plusieurs variables

Proposition 12.478.
Soit $f\colon D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Nous avons

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \tag{12.1379}$$

si et seulement si

$$\lim_{x\to a} f_i(x) = \ell_i \tag{12.1380}$$

pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$ où $f_i(x)$ dénote la i-ème composante de $f(x)$ et ℓ_i la i-ème composante de $\ell \in \mathbb{R}^n$.

Cette proposition revient à dire que la convergence d'une fonction est équivalente à la convergence de chacune de ses composantes.

Démonstration. L'élément clef de la preuve est le fait que pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^p$, nous ayons l'inégalité

$$|u_i| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{p} |u_k|^2} = \|u\|. \tag{12.1381}$$

La norme (dans $\mathbb{R}^p$) d'un vecteur est plus grande ou égale à la valeur absolue de chacune de ses composantes.

Supposons que nous ayons une fonction dont chacune des composantes a une limite en a : $\lim_{x\to a} f_i(x) = \ell_i$. Montrons que dans ce cas la fonction f tend vers ℓ. Si nous considérons $\varepsilon > 0$, par définition de la limite de chacune des fonctions f_i, il existent des δ_i tels que

$$\|x-a\|_{\mathbb{R}^m} < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - \ell_i| < \varepsilon. \tag{12.1382}$$

Notez que la norme à gauche est une norme dans $\mathbb{R}^m$ et que celle à droite est une simple valeur absolue dans $\mathbb{R}$. Considérons $\delta = \min\{\delta_i\}_{i=1,\ldots n}$. Si $\|x-a\| < \delta$, alors

$$\|f(x) - \ell\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f_i(x) - \ell_i|^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon^2} = \sqrt{n\varepsilon^2} = \sqrt{n}\varepsilon. \tag{12.1383}$$

Nous voyons qu'en choisissant les δ_i tels que $|f_i(x) - \ell_i| < \varepsilon$, nous trouvons $\|f(x) - \ell\| < \sqrt{n}\varepsilon$. Afin d'obtenir $\|f(x) - \ell\| < \varepsilon$, nous choisissons donc les δ_i de telle manière a avoir $|f_i(x) - \ell_i| < \varepsilon/\sqrt{n}$.

Nous avons donc prouvé que la limite composante par composante impliquait la limite de la fonction. Nous devons encore prouver le sens inverse.

Supposons donc que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$, et prouvons que nous ayons $\lim_{x\to a} f_i(x) = \ell_i$ pour chaque i. Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tel que $\|x-a\| < \delta$ implique $\|f(x) - \ell\| < \varepsilon$. Avec ces choix, nous avons

$$|f_i(x) - \ell_i| \leqslant \|f(x) - \ell\| < \varepsilon \tag{12.1384}$$

où nous avons utilisé la majoration (12.1381) avec $f(x) - \ell$ en guise de u. □

De même, pour la continuité nous avons la proposition suivante :

Proposition 12.479.
Soit une fonction $f\colon D\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ et $a\in D$. La fonction f est continue en a si et seulement si chacune de ses composantes l'est, c'est-à-dire si et seulement si chacune des fonctions $f_i\colon D\to\mathbb{R}$ est continue en a.

Essayez de prouver cette proposition directement par la définition de la continuité, en suivant pas à pas la démonstration de la proposition 12.478.

Proposition 12.480.
Soit $f\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ et a, un point du domaine de f telle que $f(a)>0$. Alors il existe un rayon r tel que $f(x)>0$ pour tout x dans $B(a,r)$.

Cette proposition signifie que si la fonction est strictement positive en un point, alors elle restera strictement positive en tous les points « pas trop loin ».

Démonstration. Prenons $\varepsilon=f(a)/2$ dans la définition de la continuité. Il existe donc un rayon δ tel que pour tout x dans $B(a,\delta)$,

$$|f(x)-f(a)|\leqslant\frac{f(a)}{2},\tag{12.1385}$$

en d'autres termes, $f(x)\in B\big(f(a),\frac{f(a)}{2}\big)$. évidemment aucun nombre négatif ne fait partie de cette dernière boule lorsque $f(a)$ est strictement positif. □

Corolaire 12.481.
Si $f\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ est une fonction continue, alors l'ensemble

$$A=\{x\in\mathbb{R}^m\text{ tels que }f(x)\neq 0\}\tag{12.1386}$$

est ouvert.

Démonstration. Soit $x\in A$. Si $x>0$ (le cas $x<0$ est laissé en exercice), alors il existe une boule autour de x sur laquelle f reste strictement positive (proposition 12.480). Cette boule est donc contenue dans A. Étant donné qu'autour de chaque point de A nous pouvons trouver une boule contenue dans A, ce dernier est ouvert. □

Exemple 12.482.
Soit $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n\times n$ inversibles. Nous allons montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n^2}$. L'identification entre les vecteurs et les matrices consiste simplement à « déplier » la matrice pour en faire un vecteur. Par exemple, en dimension deux,

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4.\tag{12.1387}$$

En dimension 3,

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^9.\tag{12.1388}$$

Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Or le déterminant est un polynôme en les composantes de la matrice. En dimension deux, nous avons

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc, \tag{12.1389}$$

mais en écriture « dépliée », nous pouvons aussi bien écrire

$$\det\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = ad - bc. \tag{12.1390}$$

En dimension 3, le déterminant est donc un polynôme des 9 variables qui apparaissent dans le vecteur « déplié ». En général, dans $\mathbb{R}^{n^2}$, nous considérons donc le polynôme $\det\colon \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ qui à un vecteur $X \in \mathbb{R}^{n^2}$ fait correspondre le déterminant de la matrice obtenue en « repliant » le vecteur X.

Donc dans $\mathbb{R}^{n^2}$, l'ensemble des matrices inversibles est donné par l'ensemble des vecteurs sur lesquels le polynôme det ne s'annule pas, c'est-à-dire

$$\{X \in \mathbb{R}^{n^2} \text{ tels que } \det(X) \neq 0\}. \tag{12.1391}$$

Mais le déterminant est un polynôme, et donc une fonction continue. Cet ensemble est par conséquence ouvert par le corolaire 12.481. △

La proposition suivante montre que la limite peut « passer à travers » les fonctions continues.

Proposition 12.483 (limite de fonction composée)**.**
Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ et $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ telles que

$$\lim_{x\to a} g(x) = p \tag{12.1392a}$$

$$\lim_{y\to p} f(y) = q \tag{12.1392b}$$

Alors nous avons $\lim_{x\to a}(f\circ g)(x) = q$.

Démonstration. Comme presque toute preuve à propos de limite ou de continuité, nous commençons par choisir $\varepsilon > 0$. Nous devons montrer qu'il existe un δ tel que $\|x-a\| \leqslant \delta$ implique $\|f\big(g(x)\big) - q\| \leqslant \varepsilon$.

La limite (12.1392b) impose l'existence d'un $\tilde\delta$ tel que $\|y-p\| \leqslant \tilde\delta$ implique $\|f(y)-q\| \leqslant \varepsilon$, tandis que la limite (12.1392a) donne un δ tel que $\|x-a\| \leqslant \delta$ implique $\|g(x)-p\| \leqslant \tilde\delta$ (nous avons pris $\tilde\delta$ en guise de ε dans la définition de la limite pour g).

Avec ces choix, si $\|x-a\| \leqslant \delta$, alors $\|g(x)-p\| \leqslant \tilde\delta$, et par conséquent,

$$\|f\big(g(x)\big) - q\| \leqslant \varepsilon, \tag{12.1393}$$

ce que nous voulions. □

De façon pragmatique, la proposition 12.483 nous fournit une formule pour les limites de fonctions composée :

$$\lim_{x\to a}(f\circ g)(x) = \lim_{y\to \lim_{x\to a} g(x)} f(y) \tag{12.1394}$$

lorsque f est continue.

Remarque 12.484.
La formule (12.1394) ne peut pas être utilisée à l'envers. Il existe des cas où $\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = q$, et $\lim_{x\to a} f(x) = p$ sans pour autant avoir $\lim_{y\to q} g(y) = q$. Par exemple

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \tag{12.1395a}$$

$$f(x) = |x|. \tag{12.1395b}$$

Nous avons $(g \circ f)(x) = 2$ pour tout x, ainsi que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, mais la limite $\lim_{y\to 0} g(y)$ n'existe pas.

En général, lorsqu'un ensemble est donné par des inégalités, prendre la fermeture consiste à transformer les inégalités strictes en inégalités non strictes ; prendre l'intérieur consiste à rendre stricte toutes les inégalités ; la frontière consiste *en gros* à transformer toutes les inégalités en égalités (nous allons voir que pour la frontière, c'est un peu plus de travail). Comprenez bien que cela n'est vrai que « en général ». Il faut toujours bien regarder sur chaque exemple si il n'y a pas l'un ou l'autre point problématique.

La proposition 12.480 sera une des clefs pour dire que si une inégalité stricte est satisfaite en un point, alors elle sera satisfaite en tout point dans un voisinage. Voir aussi l'exemple 12.485.

Exemple 12.485.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que le sous-ensemble A de $\mathbb{R}^2$ défini par $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y > f(x)\}$ est ouvert.

Prouver que l'ensemble $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $y \geqslant f(x)\}$ est fermé.

Nous considérons la fonction $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $g(x,y) = f(x) - y$. Cela est une fonction continue parce que c'est une différence de fonctions continues. Par définition,

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } g(x,y) > 0\}. \tag{12.1396}$$

Par la proposition 12.480, autour de chaque point (x,y) tel que $g(x,y) > 0$ (c'est-à-dire autour de chaque point de A), il existe une boule sur laquelle g reste strictement positive. L'ensemble A est donc ouvert.

Pour prouver que l'ensemble B est fermé, prouver que le complémentaire est ouvert, c'est-à-dire que les points tels que $y - f(x) < 0$ forment un ouvert. Cela revient au même que ce que nous avons fait pour A.

△

12.46 Champs de vecteurs

Un champ de vecteur est une fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Géométriquement, il s'agit simplement de mettre un vecteur en chaque point de l'espace. Cela arrive très souvent en physique.

Exemple 12.486.
Si un fluide (eau, gaz) coule dans un tube, en tout point le point a une vitesse, qui sera un vecteur généralement dirigé le long du tube. △

Exemple 12.487.
La force d'attraction de la Terre sur une masse m située au point $r = (x,y,z)$ est donnée par

$$F(r) = -G\frac{Mmr}{\|r\|^3}. \tag{12.1397}$$

Dans cette expression, tant r que $F(r)$ sont des vecteurs. Nous l'avons représenté sur la figure 12.13.

L'application

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ r &\mapsto F(r) \end{aligned} \tag{12.1398}$$

est le champ gravitationnel de la Terre.

△

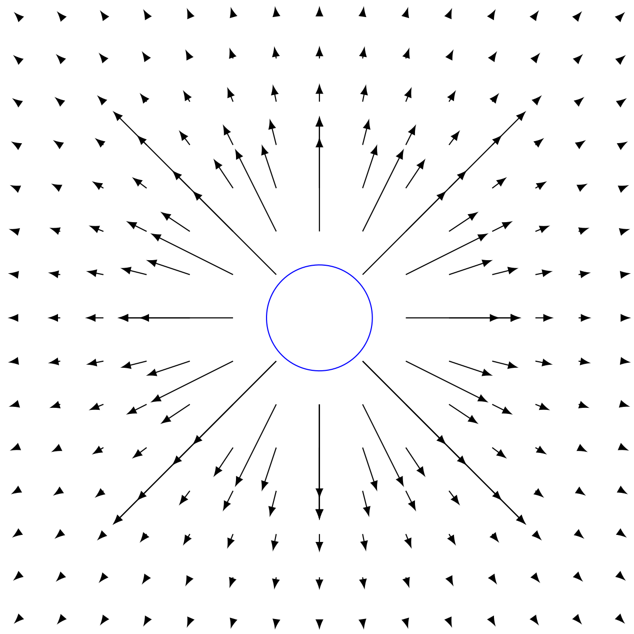


FIGURE 12.13 – Le champ de gravitation de la Terre.

12.46.1 Matrice jacobienne

La **matrice jacobienne** de la fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ au point $a \in \mathbb{R}^3$ est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(a)$, c'est-à-dire

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(a) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(a) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(a) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(a) \end{pmatrix}. \tag{12.1399}$$

Exemple 12.488.
Si

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} xye^z \\ x^2 + \cos(yz) \\ xyz \end{pmatrix}, \tag{12.1400}$$

alors

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} ye^z & xe^z & xye^z \\ 2x & -z\sin(yz) & -y\sin(yz) \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}. \tag{12.1401}$$

△

12.47 Divergence, rotationnel et l'opérateur nabla

Nous avons déjà vu le gradient d'une fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y,z) \\ \partial_y f(x,y,z) \\ \partial_z f(x,y,z) \end{pmatrix} \tag{12.1402}$$

Afin de définir la divergence et le rotationnel, nous introduisons ∇ sous une forme un peu plus abstraite comme le « vecteur »

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}. \tag{12.1403}$$

Vue comme ça, la formule (12.1402) est claire.

Si F est un champ de vecteurs, nous introduisons la **divergence** de F par

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \tag{12.1404}$$

Cela est une fonction. Et nous introduisons le rotationnel du champ de vecteur F par

$$\begin{aligned}\nabla \times F &= \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}\\ &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) e_x - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right) e_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) e_z.\end{aligned} \tag{12.1405}$$

Cela est un champ de vecteur. En utilisant le symbole complètement antisymétrique ϵ_{ijk}, le rotationnel d'un champ de vecteur peut s'écrire

$$\nabla \times F = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \partial_i F_j e_k. \tag{12.1406}$$

Le gradient, la divergence et le rotationnel consistent à appliquer simplement à ∇ est trois produits qu'on peut effectuer sur un vecteur :

(1) Le produit d'un vecteur par un scalaire multiplie chacune des composantes :

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix}. \tag{12.1407}$$

(2) Le produit scalaire d'un vecteur avec un autre vecteur donne lieu à la divergence :

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \tag{12.1408}$$

(3) Le produit vectoriel de deux vecteurs :

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \tag{12.1409}$$

Ces trois opérations joueront un rôle central en électromagnétisme dans les équations de Maxwell.

Exemple 12.489.
Soit $F(x, y, z) = xe_x + xye_y + e_z$, c'est-à-dire

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ xy \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{12.1410}$$

Son rotationnel est donné par

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x & xy & 1 \end{vmatrix} = (0-0)e_x - (0-0)e_y + (y-0)e_z = ye_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix}. \tag{12.1411}$$

△

Afin d'étudier comment se comporte la composition de ces opérateurs, nous aurons besoin de ce lemme que nous n'énoncerons pas précisément.

Lemme 12.490.
Si $f\colon \mathbb{R}^3\to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2, alors on peut permuter l'ordre des dérivées :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)&=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\\
\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)
\end{aligned}
\tag{12.1412}
$$

La fonction

$$
(x,y,z)\mapsto \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y,z) \tag{12.1413}
$$

sera notée

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}. \tag{12.1414}
$$

Il y a deux propriétés importantes :

Théorème 12.491.
Soit $f\colon \mathbb{R}^3\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Alors

$$
\nabla\times(\nabla f)=0. \tag{12.1415}
$$

Si $F\colon \mathbb{R}^3\to \mathbb{R}^3$ est un champ de vecteurs de classe C^2, alors

$$
\nabla\cdot(\nabla\times F)=0. \tag{12.1416}
$$

Démonstration. Ce sont seulement deux calculs qui manipulent les définitions. Pour le premier, la divergence de f est le champ de vecteurs

$$
\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}e_x+\frac{\partial f}{\partial y}e_y+\frac{\partial f}{\partial z}e_z. \tag{12.1417}
$$

En mettant ce champ dans la définition du rotationnel,

$$
\begin{aligned}
\nabla\times(\nabla f)=\begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\end{vmatrix}&=\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]e_x\\
&\quad-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]e_y\\
&\quad+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]e_z.
\end{aligned}
\tag{12.1418}
$$

En utilisant le lemme 12.490, chacun des termes fait zéro.

La seconde propriété se démontre en utilisant le même type de calcul. □

Remarque 12.492.
Il n'y a pas de propriétés du même style pour la combinaison $\nabla\times(\nabla\cdot F)$ pour le rotationnel de la divergence. En effet la divergence d'un champ de vecteur est une fonction, et il n'y a pas de rotationnel pour une fonction.

12.48 Interprétation géométrique et physique de la divergence

En physique, on dit qu'un champ de vecteurs à divergence nulle est **incompressible**. Nous allons essayer de comprendre pourquoi. Lorsqu'un fluide incompressible se déplace, il faut qu'en chaque point il y ait autant de fluide qui rentre que de fluide qui sort. Nous allons voir sur quelques exemples que la divergence d'un champ de vecteurs est le « bilan de masse » d'un fluide qui se déplace selon le champ de vecteurs.

Si en un point la divergence est positive, cela signifie qu'il y a une perte de masse et si la divergence est négative, cela signifie qu'il y a une accumulation de masse.

Prenons par exemple un fluide qui se déplace selon le champ de vitesse montré à figure 12.14.

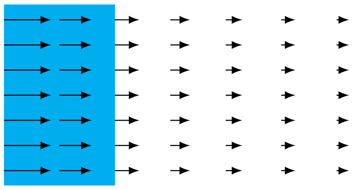


FIGURE 12.14 – Le champ de vecteurs $F(x,y) = \frac{1}{x}(1,0)$.

Étant donné que la vitesse diminue lorsque x avance, il y a une accumulation de fluide. Regardez en effet la quantité de fluide qui rentre dans le rectangle par rapport à la quantité de fluide qui en sort. Ce champ de vecteurs a pour équation :

$$F(x,y) = \frac{1}{x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/x \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{12.1419}$$

Sa divergence vaut donc

$$(\nabla \cdot F)(x,y) = \frac{\partial F_x}{\partial x}(x,y) + \underbrace{\frac{\partial F_y}{\partial y}(x,y)}_{=0} = -\frac{1}{x^2}. \tag{12.1420}$$

Cette divergence étant négative, il y a bien accumulation de fluide en tout point, et d'autant plus que x est petit.

Exemple 12.493.
Prenons le champ de vecteurs tournant

$$F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \tag{12.1421}$$

représenté à la figure 12.15. Cela est un vecteur qui est constamment perpendiculaire au rayon.

Un fluide dont la vitesse serait donné par ce champ de vecteur se contente de tourner. Intuitivement il ne devrait pas y avoir de divergence parce qu'il n'y a aucune accumulation de fluide. En effet,

$$\nabla \cdot F(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0. \tag{12.1422}$$

△

Exemple 12.494.
Prenons le cas du champ de force de gravitation :

$$F(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{12.1423}$$

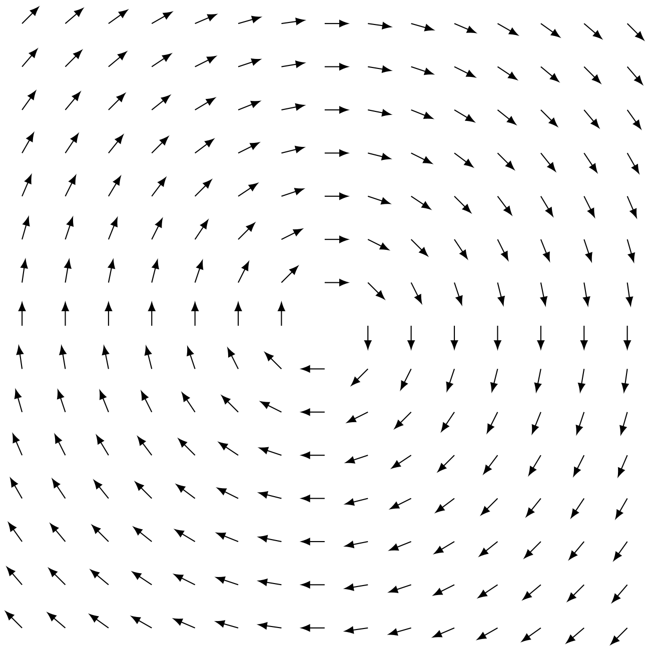


FIGURE 12.15 – Le champ de vecteurs $F(x, y) = (y, -x)$.

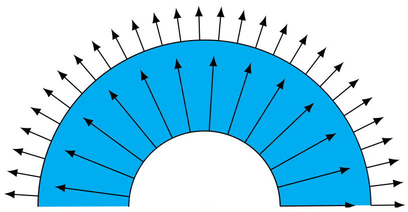


FIGURE 12.16 – Le champ de vecteur de la gravité. Nous avons tracé, sur les deux cercles la même densité de vecteurs, c'est-à-dire le même nombre de vecteurs par unité de surface.

Nous pouvons rapidement remarquer que $\nabla \cdot F = 0$. Est-ce que cela peut se comprendre sur le dessin de la figure 12.16 ?

Essayons de voir combien de fluide entre dans la zone bleue et combien en sort. D'abord, il est certain que les vecteurs qui sortent sont plus courts que ceux qui rentrent, ce qui voudrait dire qu'il y a plus de fluide qui rentre. Mais on voit également que le *nombre* de vecteurs qui sortent est plus grand parce que la seconde sphère est plus grande et qu'il y a un vecteur en chaque point de la sphère.

Intuitivement nous pouvons dire que la quantité qui rentre dans la sphère de rayon r_1 donnée par la taille des vecteurs entrants multiplié par la surface de la sphère, c'est-à-dire

$$4\pi r_1^2 \|F(x, y, z)\|, \tag{12.1424}$$

mais $\|F(x, y, z)\| = \frac{1}{r_1^2}$, donc la quantité de fluide entrant est 4π. La quantité de fluide sortant sera la même.

Cela explique deux choses

(1) Pourquoi les forces de gravitation et électromagnétiques sont en $1/r^2$; c'est parce que nous vivons dans un monde avec trois dimensions d'espace. En étudiant très précisément le champ de gravitation, certains physiciens espèrent trouver des déviations expérimentales par rapport à la règle du $1/r^2$; cela *pourrait* être un signe que l'espace contient des dimensions supplémentaires.

(2) Pourquoi il y a un 4π comme coefficient dans beaucoup d'équations en électromagnétisme ; en particulier dans certaines anciennes unités de flux.

$\triangle$

Remarque 12.495.
Nous allons voir plus loin comment s'assurer que l'équation (12.1424) représente bien la « quantité de fluide » qui rentre dans la zone délimitée

12.49 Quelques formules de Leibnitz

La divergence étant une combinaison de dérivées, il n'est pas tellement étonnant que la divergence de produits donne lieux à des formules en deux termes. Si f est une fonction et si F et G sont des champs de vecteurs, nous avons la proposition suivante.

Proposition 12.496.
Si F et G sont des champs de vecteurs dont toutes les dérivées partielles existent, alors

(1) $\nabla\cdot(fF)f\nabla\cdot F+F\cdot\nabla f$

(2) $\nabla\cdot(F\times G)=G\cdot\nabla\times F-F\cdot\nabla\times G$

(3) $\nabla\times(fF)=f\nabla\times F+\nabla f\times F.$

Chapitre 13

Analyse sur des groupes

13.1 Action de groupe et connexité

Théorème 13.1.
Soit G un groupe topologique localement compact et dénombrable à l'infini[1] *agissant continûment et transitivement sur un espace topologique localement compact*[2] *E. Soit $x \in E$. Alors l'application*

$$\begin{aligned} \varphi\colon G/\operatorname{Stab}(x) &\to E \\ [g] &\mapsto g \cdot x \end{aligned} \tag{13.1}$$

où $\operatorname{Stab}(x)$ est le stabilisateur[3] *de x est un homéomorphisme.*

Lemme 13.2.
Si G et H sont des groupes topologiques tels que G/H et H sont connexes[4]*, alors G est connexe.*

Démonstration. Soit $f\colon G \to \{0,1\}$ une fonction continue. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \tilde f\colon G/H &\to \{0,1\} \\ [g] &\mapsto f(g). \end{aligned} \tag{13.2}$$

D'abord nous montrons qu'elle est bien définie. En effet si $h \in H$ nous aurions $\tilde f([gh]) = f(gh)$, mais étant donné que H est connexe, l'ensemble gH est également connexe ; la fonction continue f est donc constante sur gH. Nous avons donc $f(gh) = f(g)$.

Étant donné que G/H est également connexe, la fonction $\tilde f$ doit être constante. Si g_1 et g_2 sont deux éléments du groupe, nous avons $f(g_1) = \tilde f([g_1]) = \tilde f([g_2]) = f(g_2)$. Nous en déduisons que f est constante et que G est connexe. □

13.3.
La connexité de $\mathrm{SO}(3)$ peut être démontrée en suivant les lignes de [349]. Le corolaire 12.88 permet de dire que les éléments de $\mathrm{SO}(3)$ ont une valeur propre égale à 1.

Théorème 13.4.
Pour tout $n \geqslant 2$, le groupe $\mathrm{SO}(n)$ est connexe, le groupe $\mathrm{O}(n)$ a deux composantes connexes.

Démonstration. La seconde assertion découle de la première parce que les matrices de déterminant 1 et celles de déterminant -1 ne peuvent pas être reliées par un chemin continu tandis que l'application

$$M \mapsto \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} M \tag{13.3}$$

1. Cela signifie qu'il est une réunion dénombrable de compacts
2. Définition 7.72.
3. Définition 2.28.
4. Définition 7.60.

est un homéomorphisme entre les matrices de déterminant 1 et celles de déterminants -1. Montrons donc que $G = \mathrm{SO}(n)$ est connexe par arcs pour $n \geqslant 2$ en procédant par récurrence sur la dimension.

Nous acceptons le résultat pour $G = \mathrm{SO}(2)$. Notons que nous en avons besoin pour prouver que la sphère S^{n-1} est connexe.

Le groupe $\mathrm{SO}(n)$ agit, par définition, de façon transitive sur la sphère S^{n-1}. Soit $a \in S^{n-1}$, nous avons

$$G \cdot a = S^{n-1} \tag{13.4a}$$
$$G_a \simeq \mathrm{SO}(n-1) \tag{13.4b}$$

où G_a est le fixateur de a dans G. Pour montrer le second point, nous considérons $\{e_i\}$, la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $M \in G$ telle que $Ma = e_1$. Le fixateur de e_1 est évidemment isomorphe à $\mathrm{SO}(n-1)$ parce qu'il est constitué des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{11} & \ldots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,1} & \ldots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \tag{13.5}$$

où $(a_{ij}) \in \mathrm{SO}(n-1)$. L'application

$$\begin{aligned} \alpha \colon G_{e_1} &\to G_a \\ A &\mapsto M^{-1}AM \end{aligned} \tag{13.6}$$

est un isomorphisme entre G_a et $\mathrm{SO}(n-1)$. Le théorème 13.1 nous montre alors que, en tant qu'espaces topologiques,

$$G/G_a = S^{n-1}. \tag{13.7}$$

L'hypothèse de récurrence montre que $G_a = \mathrm{SO}(n-1)$ est connexe tandis que nous savons que S^{n-1} est connexe. Le lemme 13.2 conclut que $G = \mathrm{SO}(n)$ est connexe. □

Lemme 13.5.
Une bijection continue entre un espace compact et un espace séparé est un homéomorphisme.

Proposition 13.6.
Les groupes $\mathrm{U}(n)$ *et* $\mathrm{SU}(n)$ *sont connexes.*

Démonstration. Soit $G(n)$ le groupe $\mathrm{SU}(n)$ ou $\mathrm{U}(n)$. Ce groupe opère transitivement sur la sphère complexe

$$S^{n-1}_{\mathbb{C}} = \{z \in \mathbb{C}^n \text{ tel que } \langle z, z\rangle = \sum_k |z_k|^2 = 1\}. \tag{13.8}$$

Cet ensemble est le même que S^{2n-1} parce que $|z_k|^2 = x_k^2 + y_k^2$. Nous avons une bijection continue entre S^{n-1} et $S^{n-1}_{\mathbb{C}}$ et donc un homéomorphisme (lemme 13.5). Soit $a \in S^{n-1}_{\mathbb{C}}$, nous avons

$$G \cdot a = S^{n-1}_{\mathbb{C}} \tag{13.9a}$$
$$G_a \simeq G(n-1). \tag{13.9b}$$

La seconde ligne est un isomorphisme de groupe et un homéomorphisme. Il est donné de la façon suivante. D'abord le fixateur de e_1 dans $G(n)$ est donné par les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{11} & \ldots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,1} & \ldots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \tag{13.10}$$

où $(a_{ij}) \in G(n-1)$. Par ailleurs si M est une matrice de $G(n)$ telle que $Ma = e_1$, nous avons l'homéomorphisme

$$\begin{aligned} \alpha\colon G_{e_1} &\to G_a \\ A &\mapsto M^{-1}AM. \end{aligned} \tag{13.11}$$

Encore une fois, cela est un homéomorphisme par le lemme 13.5. Par composition nous avons $G_a \simeq G(n-1)$ et un homéomorphisme

$$G(n)/G_a = S^{n-1}_{\mathbb{C}}. \tag{13.12}$$

Le groupe G_a et l'ensemble $S^{n-1}_{\mathbb{C}}$ étant connexes, le groupe $G(n)$ est connexe par le lemme 13.2. □

Lemme 13.7 ([312]).
Si G est un sous-groupe connexe de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ alors son groupe dérivé[5] *l'est également.*

Démonstration. Soit S_m l'ensemble des produits de m commutateurs de G :

$$S_m = \{g_1,\ldots,g_m \text{ où les } g_i \text{ sont des commutateurs}\}. \tag{13.13}$$

La partie S_m est l'image de G par l'application continue

$$\begin{aligned} \underbrace{G\times\ldots\times G}_{2m \text{ facteurs}} &\to G \\ (g_1,h_1,g_2,h_2,\ldots,g_m,h_m) &\mapsto [g_1,h_1]\ldots[g_m,h_m] \end{aligned} \tag{13.14}$$

En tant qu'image d'un connexe par une application continue, S_m est connexe par la proposition 7.184. Puisque les S_m ont l'identité en commun, le groupe dérivé

$$D(G) = \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m \tag{13.15}$$

est également connexe. □

13.2 Espaces de matrices

L'ensemble des matrices est un espace vectoriel. Nous identifions $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^{n^2}$; plus précisément, nous identifions une matrice

$$A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant n} \tag{13.16}$$

avec le vecteur $x = (x_1,x_2,\ldots,x_{n^2}) \in \mathbb{R}^{n^2}$, où $a_{i,j} = x_{(n-1)i+j}$.

13.2.1 Dilatations et transvections

Soit un corps commutatif $\mathbb{K}$ et $n \geqslant 2$.

Théorème-Définition 13.8 ([312]).
Soit une application linéaire $u\colon E \to E$ dont les points fixes forment un hyperplan noté H d'équation $H = \ker(f)$ avec $f \in E^*$.

(1) Les affirmations suivantes sont équivalentes :

(1a) $\det(u) \neq 1$

(1b) L'application u est diagonalisable et a une valeur propre qui vaut $\det(u) \neq 1$.

(1c) $\mathrm{Image}(u - \mathrm{Id}) \nsubseteq H$.

(1d) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\mathrm{diag}(1,\ldots,1,\lambda)$ *avec* $\lambda \neq 1$.

5. Définition 2.2.

(2) Les affirmation suivantes sont équivalentes :

(2a) Il existe $a \in H$ tel que pour tout $x \in E$, $u(x) = x + f(x)a$.

(2b) Dans une base adaptée, la matrice de u est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{13.17}$$

(3) Les conditions (1a)-(1d) sont respectées si et seulement si les conditions (2a)-(2b) ne sont pas respectées (elles sont les négations l'une de l'autre.).

*Une **dilatation** est soit l'identité soit un endomorphisme qui respecte les conditions (1).*

*Une **transvection** est soit l'identité soit un endomorphisme qui vérifie les conditions (2).*

Démonstration. Nous allons prouver plein d'implications ...

(i) **(1a) implique (1b)** Le théorème de la base incomplète (voir remarque 4.13) permet de considérer une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E telle que $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ soit une base de H. Dans cette base, la matrice de u est de la forme suivante (les cases non remplies sont nulles et les étoiles correspondent à des valeurs inconnues mais pas spécialement nulles) :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & * \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \tag{13.18}$$

Le fait que le déterminant de u ne soit pas 1 implique que $\lambda \neq 1$. Par conséquent le polynôme caractéristique

$$\chi_u(X) = (1 - X)^{n-1}(\lambda - X) \tag{13.19}$$

possède une racine $\lambda \neq 1$, et donc u possède un vecteur propre v pour cette valeur[6]. Le vecteur v est linéairement indépendant de $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ (parce que vecteur propre de valeur propre différente). Par conséquent l'ensemble $\{e_1, \ldots, e_{n-1}, v\}$ est une base par la proposition 4.17. C'est une base de vecteurs propres et donc une base de diagonalisation[7].

(ii) **(1b) implique (1c)** Nous nommons maintenant $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base de diagonalisation. Nous avons $u(e_n) = \lambda e_n$ avec $\det(u) = \lambda \neq 1$. Nous avons

$$(u - \mathrm{Id})(e_n) = (\lambda - 1)e_n \notin H, \tag{13.20}$$

ce qui prouve que l'image de e_n par $u - \mathrm{Id}$ n'est pas dans H.

(iii) **(1c) implique (1d)** Reprenons une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ donnant la matrice (13.18). Il existe $x \in E$ tel que $u(x) - x$ n'est pas dans H, c'est-à-dire tel que $u\big(u(x) - x\big) \neq u(x) - x$. Nous en déduisons que

$$u^2(x) - 2u(x) + x \neq 0 \tag{13.21}$$

ou encore que

$$(X - 1)^2(u)x \neq 0. \tag{13.22}$$

C'est-à-dire que $(X - 1)^2$ n'est pas un polynôme annulateur de u. Or ce serait le cas si $X - 1$ était le polynôme minimal (proposition 9.95). Le polynôme caractéristique étant $(X - 1)^{n-1}(X - \lambda)$ (et étant annulateur[8]), le polynôme minimal est de la forme

$$\mu_u(X) = \begin{cases} (X - 1)(X - \lambda) & \text{si } \lambda \neq 1 \\ X - 1 & \text{si } \lambda = 1. \end{cases} \tag{13.23}$$

6. Proposition 9.117.

7. Nous pourrions en dire à peine un peu plus et prouver le point (1d), mais cela ne servirait à rien parce que nous voulons prouver les équivalences et qu'il faudra quand même prouver que (1c) implique (1d).

8. Théorème de Cayley-Hamilton 9.114.

Dans notre cas nous venons de voir que ce n'est pas $X-1$ et donc c'est $(X-1)(X-\lambda)$ avec $\lambda \neq 1$.
Nous devons trouver une base de diagonalisation …Supposons

$$u(e_n) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k e_k + \lambda e_n, \tag{13.24}$$

dans lequel nous venons de prouver que $\lambda \neq 1$, et cherchons

$$e'_n = \sum_{j=1}^{n} p_j e_j \tag{13.25}$$

de telle sorte à avoir $u(e'_n) = \lambda e_n$. Nous avons

$$u(e'_n) = \sum_{j=1}^{n-1} p_j u(e_j) + p_n u(e_n) = \sum_{j=1}^{n-1} (p_j + p_n a_j) e_j + p_n \lambda e_n. \tag{13.26}$$

En égalisant à $\lambda \sum_{j=1}^{n} p_j e_j$, il vient

$$p_j + p_n a_j = \lambda p_j \tag{13.27}$$

pour tout $j = 1, \ldots, n-1$ et la condition triviale $p_n \lambda = \lambda p_n$ pour $j = n$. Nous en déduisons que le choix

$$p_j = \frac{p_n a_j}{\lambda - 1} \tag{13.28}$$

fonctionne (parce que $\lambda \neq 1$ comme nous l'avons démontré plus haut). En bref, il suffit de poser

$$e'_n = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{p_n a_j}{\lambda - 1} e_j + p_n e_n \tag{13.29}$$

avec p_n au choix pour avoir une base $\{e_1, \ldots, e_{n-1}, e'_n\}$ de diagonalisation de u avec $\lambda \neq 1$ comme dernière valeur propre.

(iv) **(1d) implique (1a)** Évident …encore faut-il se souvenir d'invoquer l'invariance du déterminant par changement de base.

Nous avons terminé la première série d'équivalences. Nous continuons avec la seconde.

(i) **(2a) implique (2b)** Nous prenons $e_{n-1} = a$ et nous complétons en une base de H. Pour e_n il suffit de prendre n'importe quel vecteur v tel que $f(v) \neq 0$ (qui existe parce que $f = 0$ est seulement un hyperplan), et de le normaliser.
Dans cette base, la matrice de u a la forme désirée parce que $u(e_n) = e_n + f(e_n)a = e_n + e_{n-1}$ du fait que $e_{n-1} = a$ et $f(e_n) = 1$.

(ii) **(2b) implique (2a)** Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ cette base. En prenant $a = e_{n-1}$ et en posant $x = \sum_k x_k e_k$ nous avons

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n-1} x_k e_k + x_n(e_{n-1} + e_n) = x + x_n e_{n-1} = x + x_n a. \tag{13.30}$$

Mais puisque $f(x) = \sum_i f_i x_i$, et que $f(e_i) = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n-1$ nous avons $f(x) = f_n x_n$. Il n'y a cependant pas de raison d'avoir $f_n = 1$. Mais en définissant

$$e'_i = \frac{1}{f_n} e_i \tag{13.31}$$

nous avons bien $u(e'_n) = \frac{1}{f_n}(e_{n-1} + e_n) = e'_{n-1} + e'_n$. Donc dans cette base nous avons encore la matrice de u de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \tag{13.32}$$

mais cette fois avec $f(e'_n) = 1$.

Nous avons terminé avec la seconde série d'équivalences. Il nous reste à prouver que la première est équivalente à la négation de la seconde.

(i) **non (1c) implique (2a)** Considérons $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = 1$ et posons $a = u(x_0) - x_0 \in \operatorname{Image}(u - \mathrm{Id})$. Par la négation de (1c) nous avons $a \in H$. De plus $x_0 \notin H$ (sinon $f(x_0) = 0$) donc $u(x_0) \neq x_0$ et $a \neq 0$.

Nous montrons que ce choix de a fonctionne : $u(x) = x + f(x)a$ pour tout $x \in E$. Nous faisons cela séparément pour $x \in H$ et pour $x = x_0$.

Si $h \in H$ alors $u(h) = h$ et $f(h) = 0$ donc $h + f(h)a = h = u(h)$. Si $x = x_0$ alors $u(x_0) = a + x_0$ (c'est la définition de a) et $x_0 + f(x_0)a = x_0 + a$.

(ii) **(2b) implique non (1a)** Dans une base adaptée nous avons

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \tag{13.33}$$

et donc $\det(u) = 1$, ce qui contredit (1a).

□

13.9.

Dans le cas des dilatations et des transvections, les points fixes forment un hyperplan.

Selon cette terminologie, l'application $x \mapsto \lambda x$ n'est pas une dilatation mais un produit de dilatations.

Remarque 13.10.

Nous notons E_{ij} la matrice qui possède uniquement 1 en position (i, j). C'est-à-dire que $\big(E_{ij}\big)_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$. Soit H l'hyperplan des points fixes de f. Dans une base contenant une base de H, la matrice d'une transvection a pour forme type :

$$T_{ij}(\lambda) = \mathbb{1} + \lambda E_{ij} \tag{13.34}$$

avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, et une dilatation a pour forme type la matrice diagonale

$$D_i(\alpha) = \mathbb{1} + (\alpha - 1)E_{ii} \tag{13.35}$$

avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$.

Bien entendu, en choisissant une base quelconque, les matrices des dilatations et des translations peuvent avoir des formes différentes.

Lemme 13.11.

Quelques manipulations de lignes et de colonnes pour les matrices.

(1) La multiplication à gauche par $T_{ij}(\lambda)$ revient à effectuer le remplacement de ligne

$$L_i \to L_i + \lambda L_j. \tag{13.36}$$

(2) La multiplication à droite par $T_{ij}(\lambda)$ revient à effectuer le remplacement de colonne

$$C_j \to C_j + \lambda C_i. \tag{13.37}$$

(3) La multiplication à gauche par $T_{ij}(1)T_{ji}(-1)T_{ij}(1)$ revient à la substitution de lignes

$$\begin{cases} L_i \to L_j & (13.38a)\\ L_j \to -L_i. & (13.38b)\end{cases}$$

Notons qu'il n'est pas possible d'inverser deux lignes à l'aide de transvections sans changer un signe parce que les transvections sont de déterminant 1 alors que l'inversion de lignes change le signe du déterminant.

Démonstration. Point par point.

(i) **Pour (1)** Nous devons prouver que

$$\big(T_{ij}(\lambda)A\big)_{kl}=\begin{cases}A_{kl} & \text{si } k\neq i\\ A_{il}+\lambda A_{jl} & \text{si } k=i.\end{cases}\tag{13.39}$$

Un peu de calcul matriciel avec utilisation modérée des indices donne :

$$\big(T_{ij}(\lambda)A\big)_{kl}=\sum_s\big(T_{ij}(\lambda)\big)_{ks}A_{sl}\tag{13.40a}$$
$$=\sum_s\delta_{ks}A_{sl}+\lambda\delta_{ik}\delta_{js}A_{sl}\tag{13.40b}$$
$$=A_{kl}+\lambda\delta_{ik}A_{jl}.\tag{13.40c}$$

(ii) **Pour (2)** C'est la même chose.

(iii) **Pour (3)** Si nous appliquons successivement ces trois matrices (de droite à gauche) nous effectuons les substitutions :

$$\begin{cases}L'_i=L_i+L_j\\ L'_j=L_j\end{cases}\quad\text{suivi de}\quad\begin{cases}L''_i=L'_i\\ L''_j=L'_j-L'_i\end{cases}\quad\text{et de}\begin{cases}L'''_i=L''_i+L''_j\\ L'''_j=L''_j.\end{cases}\tag{13.41}$$

En effectuant ces substitutions,

$$L'''_i=L''_i+L''_j=L'_i+(L'_j-L'_i)=L'_j=L_j\tag{13.42}$$

et

$$L'''_j=L''_j=L'_j-L'_i=L_j-(L_i+L_j)=-L_i,\tag{13.43}$$

ce qu'il fallait.

□

Proposition 13.12 ([350]).
Soient $n\geqslant 2$ et $\mathbb{K}$ un corps commutatif.

(1) Si $A\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$, il existe des transvections $U_1,\ldots,U_r$, $V_1,\ldots,V_s$ telles que

$$A=U_1\ldots U_r\,D_n\big(\det(A)\big)\,V_1\ldots V_s.\tag{13.44}$$

(2) L'ensemble des transvections engendre le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$.

(3) L'ensemble des transvections et des dilatations engendre le groupe linéaire $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$.

Démonstration. Nous allons montrer que toutes les matrices de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ peuvent être écrites comme produits de matrices de la forme (13.34). Cela montrera qu'étant donné un endomorphisme f et une base *pas spécialement liée à f*, il est possible d'écrire la matrice de f comme produit de transvections dont les hyperplans invariants sont « contenus » dans cette base. Cela suffit à prouver que les transvections engendrent $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ grâce au lemme 1.267.

Toutes les transvections ont un déterminant égal à 1. Donc le groupe engendré par les transvections est inclus dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{K})$. Soit $A\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$; nous allons utiliser le pivot de Gauss pour la diagonaliser. Étant donné que A est inversible, sa première colonne n'est pas nulle. Si $A_{i1}\neq 0$ alors une multiplication à gauche par $L_{1i}\big((A_{11}-1)/A_{i1}\big)$ effectue la substitution

$$L_1\to L_1-\frac{A_{11}-1}{A_{i1}}L_i\tag{13.45}$$

qui met un 1 en la position $(1,1)$. Notons que si la première colonne est de la forme

$$\begin{pmatrix} s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{13.46}$$

avec $s \neq 0$ alors il faut plutôt faire les substitutions $L_2 \to L_2 + L_1$ et ensuite $L_1 \to L_1 - \frac{1}{s} L_2$ pour obtenir le même résultat. En effectuant le pivot avec A_{11}, une suite d'opérations sur les lignes et les colonnes donnent

$$M_1 \ldots M_p A N_1 \ldots N_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \tag{13.47}$$

où $A_1 \in \mathrm{GL}(n-1, \mathbb{K})$ et $\det(A_1) = \det(A)$. En continuant de la sorte nous arrivons sur une matrice diagonale [9]

$$M_1 \ldots M_{p'} A N_1 \ldots N_{q'} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \alpha \end{pmatrix} \tag{13.48}$$

avec $\alpha = \det(A)$. En d'autres termes nous avons prouvé qu'il existe des transvections $U_1, \ldots, U_r$ et $V_1, \ldots, V_s$ telles que

$$A = U_1 \ldots U_r \, D_n\big(\det(A)\big) \, V_1 \ldots V_s. \tag{13.49}$$

Cela prouve que les transvections et les translations engendrent $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$. Si $A \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ alors $D_n\big(\det(A)\big) = 1$ et l'équation (13.49) est un produit de transvections. □

Proposition 13.13.
Le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ *est engendré par les endomorphismes inversibles diagonalisables.*

Démonstration. Par la proposition 13.12, le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ est engendré par les dilatations et les transvections. Il suffit donc de montrer qu'à leur tour, ces deux types d'endomorphismes sont engendrés par les endomorphismes inversibles et diagonalisables.

Les dilatations sont diagonalisables et inversibles. C'est bon pour elles.

Soit une transvection u, et une base $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$ dans laquelle u est de la forme (13.17). Nous considérons l'endomorphisme $d\colon E \to E$ défini par $d(e_k) = ke_k$. Cet endomorphisme est diagonalisable parce que son polynôme minimal, $\mu_d = \prod_{k=1}^{n}(X-k)$, est scindé à racines simples (voir le théorème 9.204).

Nous avons évidemment $u = d^{-1} \circ (d \circ u)$ où d^{-1} est diagonalisable et inversible. Voyons que $d \circ u$ est également diagonalisable en montrant que μ_d est son polynôme minimal (qui est scindé à racines simples).

Il suffit de montrer que $\mu_d(d \circ u)(e_k) = 0$ pour tout k. Ainsi μ_d sera un polynôme annulateur de $d \circ u$ de degré n, et donc minimal.

(i) **Si** $k \leqslant n-1$ Alors $u(e_k) = e_k$ et $(d \circ u - n)e_k = (k-n)e_k$. Donc :

$$\mu_d(d \circ u)(e_k) = (d \circ u - 1)(d \circ u - 2) \ldots (d \circ u - n)e_k = (k-1)(k-2)\ldots(k-n)e_k = 0 \tag{13.50}$$

parce que dans le produit des $k-i$, il y en a forcément un de nul.

(ii) **Si** $k = n$ Dans un premier temps,

$$(d \circ u - n)e_n = d(e_n + e_{n-1}) - ne_n = ne_n + (n-1)e_{n-1} - ne_n = (n-1)e_{n-1}. \tag{13.51}$$

9. Attention : les opérations sur les lignes et les colonnes ne sont pas des opérations de similitude. Il n'est pas question de prétendre ici que toutes les matrices de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ sont diagonales, voir la définition 4.104.

Ensuite

$$\begin{aligned}
\big(d\circ u-(n-1)\big)e_{n-1} &= d(e_{n-1})-(n-1)e_{n-1} && (13.52a)\\
&= d(e_{n-1})-(n-1)e_{n-1} && (13.52b)\\
&= (n-1)e_{n-1}-(n-1)e_{n-1} && (13.52c)\\
&= 0 && (13.52d)
\end{aligned}$$

Le polynôme μ_d est donc un polynôme scindé à n racines simples annulateur de $d\circ u$, qui est alors diagonalisable et inversible (parce que u et d le sont).

Donc sous la forme $u=d^{-1}(du)$, la transvection u est écrite comme produit de diagonalisables inversibles. □

Proposition 13.14 ([128])**.**
Soient $n\geqslant 3$ et $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2. Alors

(1) le groupe dérivé de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ est $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$;

(2) le groupe dérivé de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ est $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$.

La preuve utilise le fait que les transvections engendrent $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ et que les transvections avec les dilatations engendrent $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$. Voir la proposition 13.12.

13.2.2 Connexité de certains groupes

Lemme 13.15.
Le groupe $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ n'est pas connexe.

Démonstration. La non connexité par arcs est facile parce que les éléments de déterminant 1 ne peuvent pas être reliés aux éléments de déterminant -1 par un chemin continu restant dans $\mathrm{O}(n)$ à cause du théorème des valeurs intermédiaires 10.82.

En ce qui concerne la connexité, il faut en dire un peu plus.

Les éléments de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ ont des déterminants égaux à 1 ou à -1. Ces deux parties sont des ouverts (pour la topologie induite de $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$). En effet soit $A\in\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ (la partie contenant les déterminants 1 ; ce que l'on va dire tient pour l'autre partie). Alors, parce que le déterminant est une fonction continue sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$, il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de A dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ dans lequel le déterminant reste entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$ (c'est la définition de la continuité avec $\epsilon=1/2$). L'ensemble $\mathcal{O}\cap\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ est par définition un ouvert de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ et ne contient que des éléments de déterminant 1.

La partie $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ de $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ est donc non-connexe selon la définition 7.60. □

Lemme 13.16.
Les groupes $\mathrm{U}(n)$ et $\mathrm{SU}(n)$ sont connexes par arcs.

Démonstration. Soient A une matrice unitaire, et Q une matrice unitaire qui diagonalise A. Étant donné que les valeurs propres arrivent par paires complexes conjuguées,

$$QAQ^{-1}=\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} &&&&\\ & e^{-i\theta_1} &&&\\ && \ddots &&\\ &&& e^{i\theta_r} &\\ &&&& e^{-i\theta_r}\end{pmatrix}. \tag{13.53}$$

Le chemin $U(t)$ obtenu en remplaçant θ_i par $t\theta_i$ avec $t\in[0,1]$ joint QAQ^{-1} à l'identité. Par conséquent $Q^{-1}U(t)Q$ joint A à l'unité. □

Théorème 13.17.
Les matrices normales[10] forment un espace connexe par arc.

10. Définition 12.97.

Démonstration. Soient A une matrice normale et U une matrice unitaire qui diagonalise A. Nous considérons $U(t)$, un chemin qui joint $\mathbb{1}$ à U dans $\mathrm{U}(n)$. Pour chaque t, la matrice

$$A(t) = U(t)^{-1}AU(t) \tag{13.54}$$

est normale. Nous avons donc trouvé un chemin dans les matrices normales qui joint A à une matrice diagonale. Il est à présent facile de la joindre à l'identité.

Toutes les matrices normales étant connexes à l'identité, l'ensemble des matrices normales est connexe. □

Proposition 13.18.
Le groupe $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ *est connexe par arcs.*

Démonstration. Soit $A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$; par la proposition 13.12(2) nous pouvons écrire

$$A = \prod_{c\in X} T_c(\lambda_c) \tag{13.55}$$

où X est une partie de l'ensemble des couples (i,j) dans $\{1,\ldots,n\}$. En posant

$$\begin{aligned} \varphi\colon [0,1] &\to \mathrm{SL}(n,\mathbb{K}) \\ t &\mapsto \prod_{c\in X} T_c(t\lambda_c) \end{aligned} \tag{13.56}$$

nous avons une application continue de A vers $\mathbb{1}$, qui, à tout t fait correspondre la matrice $\varphi(t)$, inversible de déterminant 1.

Donc tous les éléments de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ peuvent être reliés à $\mathbb{1}$. Par conséquent, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$ est connexe par arcs. □

Proposition 13.19 ([351])**.**
Le groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ *est connexe par arcs.*

Démonstration. Soient $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ et sa décomposition (13.44). Comme montré précédemment, chacune des transvections peut être reliée à $\mathbb{1}$ par un chemin continu dans $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$. En ce qui concerne le facteur de translation, nous ne pouvons pas simplement prendre le chemin donné par $t \mapsto D_n\big(t\det(A)\big)$ parce que le résultat n'est pas inversible en $t = 0$.

Puisque $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs il existe une application continue $\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{C}^*$ telle que $\alpha(0) = \det(A) \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha(1) = 1$. Il suffit alors de prendre $D_n\big(\alpha(t)\big)$ et nous avons un chemin continu de A vers $\mathbb{1}$ restant dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. □

Proposition 13.20.
Le groupe $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ *a exactement deux composantes connexes par arcs.*

Démonstration. Nous notons $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}^-(n,\mathbb{R})$ les parties de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ formées des applications de déterminant ± 1 respectivement. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (théorème 10.82), il n'existe pas d'application continue dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ reliant $\mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ à $\mathrm{GL}^-(n,\mathbb{R})$ tout en restant dans les applications de déterminant non nul [11].

Montrons que $\mathrm{GL}^\pm(n,\mathbb{R})$ sont connexes par arcs. Si $A \in \mathrm{GL}^+(n,\mathbb{R})$ alors grâce à la décomposition (13.44), il existe un chemin continu de A vers $D_n\big(\det(A)\big)$. Puisque $\mathbb{R}^\pm$ sont connexes par arcs, il est possible de relier $D_n\big(\det(A)\big)$ à $D_n(\pm 1)$ par un chemin continu. □

11. Si $\varphi\colon [0,1] \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ est le chemin, la fonction à mettre dans le théorème des valeurs intermédiaires est la fonction $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ $t \mapsto \det\big(\varphi(t)\big)$.

13.2.3 Densité

Proposition 13.21.
Les matrices diagonalisables sont denses dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{C})$.

Démonstration. D'après le lemme de Schur 12.96, une matrice de $\mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ est de la forme

$$A = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} Q^{-1}. \tag{13.57}$$

Les valeurs propres sont sur la diagonale. La matrice est diagonalisable si les éléments de la diagonales sont tous différents. Il suffit maintenant de considérer n suites $(\epsilon_k^{(r)})_{k\in\mathbb{N}}$ convergentes vers zéro telles que pour chaque k les nombres $\lambda_r + \epsilon_k^{(r)}$ soient tous différents. La suite de matrices

$$A_k = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 + \epsilon_k^{(1)} & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n + \epsilon_k^{(n)} \end{pmatrix} Q^{-1}. \tag{13.58}$$

est alors diagonalisable pour tout k et nous avons $\lim_{k\to\infty} A_k = A$. □

Proposition 13.22.
Les matrices inversibles sont denses dans l'ensemble des matrices. C'est-à-dire que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ *est dense dans* $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$; le lemme de Schur réel 9.211 nous permet d'écrire

$$A = Q^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} Q \tag{13.59}$$

avec Q orthogonale.

Pour définir A_k nous remplaçons λ_i par $\lambda_i + \epsilon^{(i)_k}$ de façon à avoir $\epsilon_k^{(i)} \to 0$ et $\lambda_i + \epsilon_k^{(i)} \neq 0$. En ce qui concerne les blocs, ceux dont le déterminant est non nul, nous n'y touchons pas, et ceux dont le déterminant est nul, nous remplaçons a par $a + \epsilon_k$.

Avec cela, $Q^{-1} A_k Q$ est une suite dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ qui converge vers A. □

Proposition 13.23.
Si $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ *alors*

$$e^{\mathrm{Tr}(A)} = \det(e^A). \tag{13.60}$$

Démonstration. Ici, e^A est l'exponentielle, soit d'endomorphisme, soit de matrice définie par la proposition 11.203.

Le résultat est un simple calcul pour les matrices diagonalisables. Si A n'est pas diagonalisable, nous considérons une suite de matrices diagonalisables A_k dont la limite est A (proposition 13.21). La suite

$$a_k = e^{\mathrm{Tr}(A_k)} \tag{13.61}$$

converge vers $e^{\mathrm{Tr}(A)}$ tandis que la suite

$$b_k = \det(e^{A_k}) \tag{13.62}$$

converge vers $\det(e^A)$. Mais nous avons $a_k = b_k$ pour tout k ; les limites sont donc égales. □

Corolaire 13.24.
Si $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ alors

$$\frac{d}{dt}\Big[\det(e^{tX})\Big]_{t=0} = \operatorname{Tr}(X). \tag{13.63}$$

Démonstration. Nous écrivons la proposition 13.23 pour tX au lieu de X ; pour chaque t nous avons

$$\det\left(e^{tA}\right) = e^{\operatorname{Tr}(tA)} = e^{t\operatorname{Tr}(A)}. \tag{13.64}$$

La dérivation par rapport à t en $t = 0$ donne le résultat attendu. □

Théorème 13.25 (Cayley-Hamilton[352, 353])**.**
Tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif quelconque annule son propre polynôme caractéristique

Une autre démonstration est donnée par le théorème 9.114.

Démonstration. La preuve est divisée en plusieurs étapes.

(i) **Endomorphisme diagonalisable** Soit u un endomorphisme sur un espace vectoriel V de dimension n sur un corps $\mathbb{K}$ et χ_u sont polynôme caractéristique. Nous savons que si λ est une valeur propre de u alors $\chi_u(\lambda) = 0$ par le théorème 9.110(2). En combinant avec le lemme 9.88, si x est vecteur propre pour la valeur propre λ de u nous avons

$$\chi_u(u)x = \chi_u(\lambda)x = 0. \tag{13.65}$$

Donc tant que u possède une base de vecteurs propres nous avons $\chi_u(u) = 0$.

(ii) **Le cas complexe** Nous nous restreignons à présent (et provisoirement) au cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ce qui nous donne $u \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$. Les matrices diagonalisables sont denses dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ par la proposition 13.21. Si $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ nous considérons une suite de matrices diagonalisables $A_k \xrightarrow{\mathbb{M}(n,\mathbb{C})} A$. Pour chaque k nous avons par le point précédent

$$\chi_{u_k}(u_k) = 0. \tag{13.66}$$

Chacune des composantes de $\chi_{u_k}(u_k)$ est un polynôme en les composantes de u_k, ce qui légitime le passage à la limite :

$$\chi_u(u) = 0. \tag{13.67}$$

Le théorème est établi pour toutes les matrices de $\mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ et donc aussi pour tous les sous-corps de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$.

(iii) **La cas général** Par définition, $\chi_u(X) = \det(u - X\mathbb{1})$; les coefficients de X sont des polynômes à coefficients entiers en les composantes de u. En substituant u à X nous obtenons une matrice dont chacune des entrées est un polynôme à coefficients entiers en les coefficients de u. Pour chaque i et j entre 1 et n il existe donc un polynôme $P_{ij} \in \mathbb{Z}(X_1, \ldots, X_{n^2})$ tel que

$$\chi_u(u)_{ij} = P(u_{11}, \ldots, u_{nn}). \tag{13.68}$$

Ces polynômes ne dépendent pas de u ni du corps sur lequel on travaille. Notre but est maintenant de prouver que $P_{ij} = 0$.

Étant donné que le cas complexe (et a fortiori entier) est déjà prouvé nous savons que pour tout $u \in \mathbb{M}(n, \mathbb{Z})$ nous avons $P(u_{11}, \ldots, u_{nn}) = 0$. La proposition 6.173 nous donne effectivement $P = 0$, en conséquence de quoi l'endomorphisme $\chi_u(u)$ est nul.

□

Exemple 13.26.
Pour montrer que chaque composante $\chi_u(u)$ est bien un polynôme à coefficients entiers en les coefficients de u, voyons l'exemple 2×2 : $u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. D'abord

$$\chi_u(X) = \det \begin{pmatrix} a - X & b \\ c & d - X \end{pmatrix} = X^2 - (a + d)X + ad - cb. \tag{13.69}$$

Le coefficient de X^2 est 1, celui de X est $-a - d$ et le terme indépendant est $ad - cb$; tout trois sont des polynômes à coefficients entiers en a, b, c, d. Après substitution de X par u,

$$\chi_u(u)_{ij} = (u^2)_{ij} - (a + d)u_{ij} + ad - cb. \tag{13.70}$$

C'est bien un polynôme à coefficients entiers en les entrées de la matrice u. △

13.2.4 Racine carrée d'une matrice hermitienne positive

Proposition-Définition 13.27.
Si $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ est une matrice hermitienne[12] *positive, alors il existe une unique matrice hermitienne positive R telle que $A = R^2$. De plus R est un polynôme (de $\mathbb{R}[X]$) en A.*

La matrice R ainsi définie est la ***racine carrée*** *de A, et est notée $\sqrt{A}$.*

Démonstration. (i) **Existence** Étant donné que A est hermitienne, elle est diagonalisable par une matrice unitaire (proposition 12.98), et ses valeurs propres sont réelles et positives (parce que A est positive). Soit donc P une matrice unitaire telle que

$$P^* A P = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{13.71}$$

avec $\alpha_i > 0$. Si on pose

$$R = P \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix} P^*, \tag{13.72}$$

alors $R^2 = A$ parce que $P^* P = \mathbb{1}$.

(ii) **Hermitienne positive** La matrice R est hermitienne parce que, avec un peu de notation raccourcie, $R = P^* \sqrt{\alpha} P$ et $R^* = P^* \sqrt{\alpha} P$. D'autre part, elle est positive parce que ses valeurs propres sont les $\sqrt{\alpha_i}$ qui sont positives.

(iii) **Polynôme** Nous montrons maintenant que la matrice R est un polynôme en A. Pour cela nous considérons un polynôme Q tel que $A(\alpha_i) = \sqrt{\alpha_i}$ pour tout i. Soit $\{e_i\}$ une base de diagonalisation de A : $Ae_i = \alpha_i e_i$. Alors c'est encore une base de diagonalisation de $Q(A)$. En effet si $Q = \sum_k a_k X^k$, alors

$$Q(A)e_i = (\sum_k a_k A^k)e_i = (\sum_k a_k \alpha_i^k)e_i = Q(\alpha_i)e_i = \sqrt{\alpha_i} e_i. \tag{13.73}$$

Les valeurs propres de $Q(A)$ sont donc $\sqrt{\alpha_i}$. Nous savons maintenant que $Q(A)$ a la même base de diagonalisation de A (et donc la même matrice unitaire P qui diagonalise), c'est-à-dire que

$$Q(A) = P^* \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\alpha_n} \end{pmatrix} = R. \tag{13.74}$$

Donc oui, R est un polynôme en A.

Notons que ce Q n'est pas du tout unique ; il existe une infinité de polynômes envoyant n nombres donnés sur n nombres donnés.

12. Définition 9.166.

(iv) **Unicité** Soit S une matrice hermitienne positive telle que $R^2 = S^2 = A$. D'abord S commute avec A parce que

$$SA = S^3 = S^2 S = AS. \tag{13.75}$$

Donc S commute aussi avec $Q(A) = R$. Étant donné que S et R commutent et sont diagonalisables, ils sont simultanément diagonalisables par le corolaire 9.205. Soient $D_R = PRP^*$ et $D_S = PSP^*$ les formes diagonales de R et S dans une base de simultanée diagonalisation. Les carrés des valeurs propres de R et S étant identiques (ce sont les valeurs propres de A) et les valeurs propres de R et S étant positives, nous déduisons que $D_R = D_S$ et donc que $R = P^* D_R P = P^* D_S P = S$.

□

Une des applications usuelles de cette proposition est la décomposition polaire.

13.2.5 Racine carrée d'une matrice symétrique positive

Lemme 13.28 ([354]).
Le groupe orthogonal $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ *est compact.*

Démonstration. Nous avons $O(n) = f^{-1}\big(\{\mathbb{1}_n\}\big)$ où f est l'application continue $A \mapsto A^t A$. En tant qu'image inverse d'un fermé par une application continue, le groupe $O(n)$ est fermé.

De plus il est borné parce que tous les coefficients d'une matrice orthogonale sont $\leqslant 1$, donc $\|A\|_\infty$ pour tout $A \in O(n)$. □

Proposition 13.29.
Une matrice symétrique définie ou semi définie positive, admet une unique racine carrée symétrique. Le spectre de la racine carrée est la racine carrée du spectre de la matrice de départ.

Démonstration. Propriétés de la racine carrée d'une matrice symétrique

(i) **Existence** Soit T une matrice symétrique et Q une matrice orthogonale qui diagonalise[13] $T : QTQ^{-1} = D$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)$ et $\lambda_i \geqslant 0$. En posant $R = Q^{-1}\sqrt{D}Q$, il est vite vérifié que $R^2 = T$ et que R est symétrique. En ce qui concerne le spectre, R a pour valeurs propres les $\sqrt{\lambda_i}$.

(ii) **Unicité** Soit R une matrice symétrique de T : $R^2 = T$. Du coup R et T commutent : $RT = R^3 = TR$. Par conséquent les espaces propres de T sont stables sous R. Soit E_λ l'un d'eux de dimension d, et T_F, R_F les restrictions de T et R à E_λ. L'application T_F est une homothétie et $R_F^2 = T_F = \lambda\mathbb{1}$. Mais R_F est encore une matrice symétrique définie positive, donc nous pouvons considérer une base $\{e_1, \ldots, e_d\}$ de E_λ qui diagonalise R_F avec les valeurs propres μ_i ; nous avons donc en même temps

$$R_f^2(e_i) = \mu_i^2 e_i \tag{13.76a}$$
$$T_F(e_i) = \lambda e_i, \tag{13.76b}$$

de telle sorte que $\mu_i^2 = \lambda$. Mais les valeurs propres de R_F sont positives, sont $\mu_i = \sqrt{\lambda}$ pour tout i. En conclusion R_F est univoquement déterminé par la donnée de T. Vu que cela est valable pour tous les espaces propres de T et que ces espaces propres engendrent tout E, l'opérateur R est déterminé de façon univoque par T.

□

Notons que nous n'avons démontré l'unicité qu'au sein des matrices symétriques.

13. Théorème 9.212.

13.2.6 Décomposition polaires : cas réel

Nous rappelons que $S^{++}(n,\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques strictement définies positives, d'après le paragraphe 9.216.

Lemme 13.30.
La partie $S^{+}(n,\mathbb{R})$ est fermée dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$.

Démonstration. En effet si S_k est une suite de matrices symétriques convergeant dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ vers la matrice A, les suites $(S_k)_{ij}$ et $(S_k)_{ji}$ des composantes ij et ji sont des suites égales, et donc leurs limites sont égales [14]. Donc la limite est symétrique.

En ce qui concerne le spectre, le théorème 9.212 nous permet de diagonaliser : $S_k = Q_k D_k Q_k^{-1}$ où les D_k sont des matrices diagonales remplies de nombres positifs ou nuls. Comme $O(n)$ est compact [15], nous avons une sous-suite $Q_{\varphi(k)}$ convergente : $Q_{\varphi(k)} \to Q$. Pour chaque k, nous avons

$$S_{\varphi(k)} = Q_{\varphi(k)} D_{\varphi(k)} Q_{\varphi(k)}^{-1}, \tag{13.77}$$

dont la limite existe et vaut A. Puisque pour tout k, $D_{\varphi(k)} = Q_{\varphi(k)}^{-1} S_{\varphi(k)} Q_{\varphi(k)}$ et que le produit matriciel est continu, la suite $k \mapsto D_{\varphi(k)}$ est une suite convergente dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$. Nous notons D sa limite qui est encore une matrice diagonale contenant des nombres positifs ou nuls sur la diagonale.

$$A = \lim_{k\to\infty} S_{\varphi(k)} = QDQ^{-1}, \tag{13.78}$$

et donc le spectre de A est la limite de ceux des matrices $D_{\varphi(k)}$. Chacun étant positif, la limite est positive. Donc $A \in S^{+}(n,\mathbb{R})$. □

Lemme 13.31.
La fermeture de l'ensemble des matrices symétriques strictement définies positives est l'ensemble des matrices définies positives : $\mathrm{Adh}(S^{++}(n,\mathbb{R})) = S^{+}(n,\mathbb{R})$.

Démonstration. Le lemme 13.30 nous a à peine dit que $S^{+}(n,\mathbb{R})$ était fermé. Nous devons prouver que pour tout élément de $S^{+}(n,\mathbb{R})$, il existe une suite (S_k) dans $S^{++}(n,\mathbb{R})$ convergeant vers S.

Si $S \in S^{+}(n,\mathbb{R})$ alors nous avons la diagonalisation

$$S = QDQ^{-1} = Q\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} Q^{-1} \tag{13.79}$$

où $\lambda_i \geqslant 0$ pour tout i. Nous définissons

$$D_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \epsilon_k^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n + \epsilon_k^{(n)} \end{pmatrix} \tag{13.80}$$

où ϵ_k^i est une suite convergent vers 0 telle que $\lambda_i + \epsilon_n^{(i)} > 0$ pour tout n. Typiquement si $\lambda_i > 0$ alors $\epsilon_k^{(i)} = 0$ et sinon $\epsilon_k^{(i)} = 1/k$.

Pour tout k nous avons $QD_kQ^{-1} \in S^{++}(n,\mathbb{R})$ et de plus $QD_kQ^{-1} \to QDQ = S$. □

Théorème 13.32 (Décomposition polaire de matrices symétriques définies positives[354, 355, 356])**.**
En ce qui concerne les matrices inversibles :

$$\begin{aligned} f\colon O(n,\mathbb{R}) \times S^{++}(n,\mathbb{R}) &\to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \\ (Q,S) &\mapsto SQ \end{aligned} \tag{13.81}$$

14. Ici nous utilisons le critère de convergence composante par composante et le fait que nous ne sommes pas trop inquiétés par la norme que nous choisissons parce que toutes les normes sont équivalentes par le théorème 11.45.
15. Lemme 13.28.

est un homéomorphisme[16].

En ce qui concerne les matrices en général :

$$\begin{aligned} g\colon O(n,\mathbb{R})\times S^+(n,\mathbb{R}) &\to \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \\ (Q,S) &\mapsto SQ \end{aligned} \tag{13.82}$$

est une surjection mais pas une injection.

De plus les mêmes conclusions tiennent si nous prenons $(Q,S)\mapsto QS$ au lieu de SQ.

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 13.33

Je crois qu que les éléments de la décomposition polaire sont des polynômes en M. Écrivez moi si vous pouvez confirmer ou infirmer.

Démonstration. Nous commençons par prouver les résultats concernant les matrices inversibles.

(i) **Existence et unicité** Si $M = SQ$, alors $MM^t = SQQ^tS^t = S^2$, donc S doit être une racine carrée symétrique de la matrice définie positive MM^t. La proposition 13.29 nous dit que ça existe et que c'est unique. Donc S est univoquement déterminé par M. Maintenant avoir $Q = MS^{-1}$ est obligatoire (unicité) et fonctionne :

$$Q^tQ = (S^{-1})^tM^tMS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = \mathbb{1}, \tag{13.83}$$

donc Q ainsi défini est orthogonale.

Notons que ceci ne fonctionne pas lorsque M n'est pas inversible parce qu'alors S n'est pas inversible.

(ii) **Homéomorphisme** Le fait que f soit continue n'est pas un problème : c'est un produit de matrices. Nous devons vérifier que f^{-1} est continue. Soit une suite convergente $M_k\to M$ dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Si nous nommons (Q_k,S_k) la décomposition polaire de M_k et (Q,S) celle de M, nous devons prouver que $Q_k\to Q$ et $S_k\to S$. En effet dans ce cas nous aurions

$$\lim_{k\to\infty} f^{-1}(M_k) = \lim_{k\to\infty}(Q_k,S_k) = (Q,S) = f^{-1}(M). \tag{13.84}$$

Étant donné que $O(n)$ est compact (lemme 13.28), la suite (Q_k) admet une sous-suite convergente (Bolzano-Weierstrass, théorème 7.124) que nous nommons

$$Q_{\varphi(k)}\to F\in O(n). \tag{13.85}$$

Vu que la suite (M_k) converge, sa sous-suite converge vers la même limite : $M_{\varphi(k)}\to M$ et vu que pour tout k nous avons $S_k = M_kQ_k^{-1}$,

$$S_{\varphi(k)}\to G = MF^{-1}. \tag{13.86}$$

Vu que chacune des matrices $S_{\varphi(k)}$ est symétrique définie positive, la limite est symétrique et semi-définie positive[17]. Donc $G\in S^+(n,\mathbb{R})\cap\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ parce que de plus M et F étant inversibles, G est inversible. En ce qui concerne la sous-suite nous avons

$$M_{\varphi(k)} = S_{\varphi(k)}Q_{\varphi(k)}\to GF = M \tag{13.87}$$

où $F\in O(n)$ et $G\in S^+(n,\mathbb{R})$. Par unicité de la décomposition polaire de M (partie déjà démontrée), nous avons $G = S$ et $F = Q$.

Nous avons prouvé que toute sous-suite convergente de Q_k a Q pour limite. Donc la suite elle-même converge[18] vers Q. Donc $Q_k\to Q$. Du coup vu que $S_k = M_kQ_k^{-1}$ est un produit de suites convergentes, S_k converge également, vers S : $S_k\to S$.

Au final l'application f^{-1} est bien continue parce que les égalités (13.84) ont bien lieu.

16. Cela est en réalité en difféomorphisme, voir la remarque 13.34.
17. Lemme 13.31
18. Proposition 7.266, pas difficile.

Nous passons maintenant à la preuve dans le cas des matrices en général.

Soit $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$; par densité (lemme 13.22), il existe une suite (A_k) dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ telle que $A_k \to A$. Pour chacun des k nous appliquons la décomposition polaire déjà prouvée : $A_k = Q_k S_k$. D'abord (Q_k) est une suite dans le compact [19] $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ et accepte donc une sous-suite convergente. Quitte à redéfinir la suite de départ, nous supposons pour alléger les notations que $Q_k \to Q \in \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$. Vu que Q_k est inversible,

$$S_k = Q_k^{-1} A_k \tag{13.88}$$

Le produit matriciel étant continu nous avons $S_k \to S$ dans $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$. Mais $S^+(n, \mathbb{R})$ étant fermé (lemme 13.30) nous avons aussi $S \in S^+(n, \mathbb{R})$. □

Remarque 13.34.
Pour démontrer que f est différentiable, nous devons utiliser le théorème d'inversion locale 17.50 ; cela est fait dans la proposition 17.60.

Corolaire 13.35.
Toute matrice peut être écrite sous la forme $Q_1 D Q_2$ où Q_1 et Q_2 sont orthogonales et D est diagonale.

Démonstration. Si $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ alors la décomposition polaire 13.32 nous donne $A = SQ$ où S est symétrique définie positive et Q est orthogonale. La matrice S peut ensuite être diagonalisée par le théorème 9.212 : $S = RDR^{-1}$ où D est diagonale et R est orthogonale. Avec ces deux décompositions en main, $A = SQ = RDR^{-1}Q$. La matrice $R^{-1}Q$ est orthogonale. □

13.2.7 Enveloppe convexe

Définition 13.36.
*Un point a d'un ensemble convexe C est un **point extémal** si $C \backslash \{a\}$ est convexe.*

Théorème 13.37 ([89])**.**
Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ et $\mathcal{L}(E)$ l'espace des opérateurs linéaires sur E sur lequel nous considérons la norme subordonnée [20] à celle sur E. L'ensemble des points extrémaux de la boule unité fermée de $\mathcal{L}(E)$ est le groupe orthogonal $O(n, \mathbb{R})$.

Démonstration. Nous notons $\mathcal{B}$ la boule unité fermée de $\mathcal{L}(E)$. Montrons pour commencer que les éléments de $O(n)$ sont extrémaux dans $\mathcal{B}$. D'abord si $A \in O(E)$ alors $\|A\| = 1$ parce que $\|Ax\| = \|x\|$. Supposons maintenant que A n'est pas extrémal, c'est-à-dire qu'il est le milieu d'un segment joignant deux points (distincts) de la boule unité de $\mathcal{L}(E)$. Soient donc $T, U \in \mathcal{B}$ tels que $A = \frac{1}{2}(T + U)$. Pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ nous avons

$$1 = \|x\| = \|Ax\| = \frac{1}{2}\|Tx + Ux\| \leqslant \frac{1}{2}\big(\|Tx\| + \|Ux\|\big) \leqslant \frac{1}{2}\big(\|T\| + |U|\big) \leqslant 1 \tag{13.89}$$

Toutes les inégalités sont en réalité des égalités. En particulier nous avons

$$\|Tx + Ux\| = \|Tx\| + \|Ux\|, \tag{13.90}$$

mais alors nous sommes dans un cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz (théorème 11.1) et donc il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $Tx = \lambda Ux$. Mais de plus les ~~inégalité~~ égalités (13.89) nous donnent

$$\frac{1}{2}\big(\|Tx\| + \|Ux\|\big) = 1 \tag{13.91}$$

alors que nous savons que $\|Tx\|, \|Ux\| \leqslant 1$, donc $\|Tx\| = \|Ux\| = 1$. La seule possibilité est d'avoir $\lambda = 1$. Nous avons prouvé que $Tx = Ux$ pour tout x de norme 1. Nous en déduisons que $T = U$.

Au final A n'est pas le milieu d'un segment dans $\mathcal{B}$.

19. Lemme 13.28.
20. Définition 11.50.

Nous passons donc à l'inclusion inverse : nous prouvons que les points extrémaux de $\mathcal{B}$ sont dans $O(E)$. Pour cela nous prenons $U \in \mathcal{B} \backslash O(E)$ et nous allons montrer que U n'est pas un point extrémal : nous allons l'écrire comme milieu d'un segment dans $\mathcal{B}$.

Par la seconde partie du théorème de décomposition polaire 13.32, il existe $Q \in O(n, \mathbb{R})$ et $S \in S^+(n, \mathbb{R})$ tels que $U = QS$. Nous diagonalisons S à l'aide de la matrice orthogonale P :

$$S = PDP^{-1} \tag{13.92}$$

avec $D = \operatorname{diag}(\lambda_i)$. En termes de normes, nous avons

$$\|U\| = \|S\| = \|S\|. \tag{13.93}$$

En effet vu que Q est orthogonale, $\|Ux\| = \|QSx\| = \|Sx\|$ pour tout x, donc $\|U\| = \|S\|$. De plus pour tout x nous avons

$$\|Sx\| = \|PDP^{-1}x\| = \|DP^{-1}x\|. \tag{13.94}$$

Étant donné que P^{-1} est une bijection, le supremum des $\|Sx\|$ sera le même que celui des $\|Dx\|$ et donc $\|S\| = \|D\|$. Étant donné que par définition $\|U\| \leqslant 1$, nous avons aussi $\|D\| \leqslant 1$ et donc $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$ (pour rappel, les valeurs propres de D sont positives ou nulles parce que S est ainsi).

Comme $U \notin O(E)$, au moins une des valeurs propres n'est pas 1, supposons que ce soit λ_1. Alors nous avons $\alpha, \beta \in [-1, 1]$ avec $-1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$ et $\lambda_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. Nous posons alors

$$D_1 = \operatorname{diag}(\alpha, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \tag{13.95a}$$

$$D_2 = \operatorname{diag}(\beta, \lambda_2, \ldots, \lambda_n). \tag{13.95b}$$

Nous avons bien $D_1 \neq D2$ et $D_1 + D_2 = D$. Par conséquent

$$U = \frac{1}{2}\big(QPD_1P^{-1} + QPD_2P^{-1}\big) \tag{13.96}$$

avec $QPD_1P^{-1} \neq QPD_2^{-1}$. La matrice U est donc le milieu d'un segment. Reste à montrer que ce segment est dans $\mathcal{B}$. Pour ce faire, prenons $x \in E$ et calculons :

$$\|QPD_iP^{-1}x\| = \|D_iP^{-1}x\| \leqslant \|P^{-1}x\| = \|x\| \tag{13.97}$$

parce que $\|D_i\| \leqslant 1$ et P^{-1} est orthogonale. Au final la norme de QPD_iP est plus petite que 1 et donc U est bien le milieu d'un segment dans $\mathcal{B}$, et donc non extrémal. □

Théorème 13.38 ([357]).
L'enveloppe convexe de $O(n)$ dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est la boule unité pour la norme induite de $\|.\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Nous notons $\mathcal{B}$ la boule unité fermée de $\mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}\mathrm{onv}\,\big(O(n, \mathbb{R})\big)$ l'enveloppe convexe de $O(n, \mathbb{R})$. Vu que $\mathcal{B}$ est convexe nous avons $\mathcal{C}\mathrm{onv}\,\big(O(n)\big) \subset \mathcal{B}$.

Maintenant nous devons prouver l'inclusion inverse. Pour ce faire nous supposons avoir un élément $A \in \mathcal{B} \backslash \mathcal{C}\mathrm{onv}\,\big(O(n)\big)$ et nous allons dériver une contradiction.

Remarquons que $O(n)$ est compact par le lemme 13.28 et que par conséquent $\mathcal{C}\mathrm{onv}(O(n))$ est compacte par le corolaire 8.43 et donc fermée. Nous considérons un produit scalaire $(X, Y) \mapsto X \cdot Y$ sur $\mathbb{M}$. Vu que $\mathcal{C}\mathrm{onv}\,\big(O(n)\big)$ est un fermé convexe nous pouvons considérer la projection [21] sur $\mathcal{C}\mathrm{onv}(A)$ relativement au produit scalaire choisi.

Nous notons $P = \mathtt{proj}_{\mathcal{C}\mathrm{onv}\,(O(n))}(A)$. En vertu du théorème de projection, nous avons

$$(A - P) \cdot (M - P) \leqslant 0 \tag{13.98}$$

pour tout $M \in \mathcal{C}\mathrm{onv}\,O(n)$. Notons $B = A - P$ pour alléger les notations. L'équation (13.98) s'écrit

$$B \cdot M \leqslant B \cdot P. \tag{13.99}$$

21. Le théorème de projection : théorème 12.138.

D'autre part vu que $B \neq 0$ nous avons $B \cdot B > 0$, c'est-à-dire $B \cdot (A - P) > 0$ et donc

$$B \cdot A > B \cdot P. \tag{13.100}$$

En combinant avec (13.99),

$$B \cdot M \leqslant B \cdot P < B \cdot A. \tag{13.101}$$

Nous utilisons maintenant la décomposition polaire, théorème 13.32, pour écrire $B = QS$ avec $Q \in O(n)$ et $S \in S^+(n, \mathbb{R})$. Vu que l'inégalité (13.101) tient pour tout $M \in \mathcal{C}\mathrm{onv}(O(n))$, elle tient en particulier pour $Q \in O(n)$. Donc

$$B \cdot Q = B \cdot A. \tag{13.102}$$

Nous nous attachons à présent au produit scalaire $(X, Y) \mapsto \mathrm{Tr}(X^tY)$ de la proposition 12.119. D'abord

$$B \cdot Q = \mathrm{Tr}(B^tQ) = \mathrm{Tr}(S^tQ^tQ) = \mathrm{Tr}(S^t) = \mathrm{Tr}(S), \tag{13.103}$$

et ensuite l'inégalité (13.103) devient

$$\mathrm{Tr}(S) < B \cdot A = \mathrm{Tr}(S^tQ^tA). \tag{13.104}$$

Nous choisissons une basse $\{e_i\}$ diagonalisant S : $Se_i = \lambda_i e_i$ vérifiant automatiquement $\lambda_i \geqslant 0$ parce que S est semi-définie positive [22]. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(S) &< \mathrm{Tr}(S^tQ^tA) && (13.105a)\\
&= \sum_i \langle S^tQ^tAe_i, e_i\rangle && (13.105b)\\
&= \sum_i \langle Ae_i, QSe_i\rangle && (13.105c)\\
&\leqslant \sum_i \|Ae_i\| |\lambda_i| \underbrace{\|Qe_i\|}_{=1} && (13.105d)\\
&\leqslant \sum_i \lambda_i && A \in \mathcal{B} \Rightarrow \|Ae_i\| \leqslant 1 \qquad (13.105e)\\
&= \mathrm{Tr}(S). && (13.105f)
\end{aligned}$$

Il faut noter que la première inégalité est stricte, et donc nous avons une contradiction. □

13.2.8 Décomposition de Bruhat

Théorème 13.39 (Décomposition de Bruhat)**.**
Soit $\mathbb{K}$ un corps ; un élément $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ s'écrit sous la forme

$$M = T_1 P_\sigma T_2 \tag{13.106}$$

où T_1 et T_2 sont des matrices triangulaires supérieures inversibles et où P_σ est une matrice de permutations $\sigma \in S_n$. De plus il y a unicité de σ.

Démonstration. Afin de rendre les choses plus visuelles, nous nous permettons de donner des exemples au fur et à mesure de la preuve. Nous prenons l'exemple de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4\\ 2 & 5 & 6\\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \tag{13.107}$$

22. Définition 9.215.

(i) **Existence** Soit $M \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$; puisqu'elle est inversible, on a un indice i_1 maximum tel que $M_{i_1,1} \neq 0$. Nous changeons toutes les lignes jusque là, c'est-à-dire que nous faisons, pour $1 \leqslant i < i_1$,

$$L_i \to L_i - \frac{M_{i1}}{M_{i_1 1}} L_{i_1}. \tag{13.108}$$

Voir le lemme 13.11(3).

Nous avons donc obtenu une matrice dont la première colonne est nulle sauf la case numéro i_1. L'opération (13.108) revient à considérer la multiplication par la matrice de transvection

$$T_1^{(i)} = T_{ii_1}\left(-\frac{M_{i1}}{M_{i_1 1}}\right) \tag{13.109}$$

pour tout $i < i_1$. Pour rappel nous ne changeons que les lignes *au-dessus* de la i_1. Du coup les matrices $T_1^{(i)}$ sont triangulaires supérieures. Nous avons donc la nouvelle matrice $M_1 = \left(\prod_{i<i_1} T_1^{(i)}\right) M$ pour laquelle toute la première colonne est nulle sauf un élément.

Dans le cas de l'exemple, le « pivot » sera la ligne $(2,5,6)$ et la matrice se transforme à l'aide de la matrice $T_1 = T_{12}(-1/2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \tag{13.110}$$

Maintenant nous faisons de même avec les colonnes (en renommant M la matrice obtenue à l'étape précédente) :

$$C_j \to C_j - \frac{M_{i_1 j}}{M_{i_1 1}} C_1, \tag{13.111}$$

qui revient à multiplier à droite par les matrices $T_{1j}(\frac{M_{i_1 i}}{M_{i_1 1}})$ avec $j > 1$. Encore une fois ce sont des matrices triangulaires supérieures.

Dans l'exemple, pour traiter la seconde colonne, nous multiplions (13.110) à droite par la matrice $T_{12}(-5/2)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -5/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \tag{13.112}$$

Appliquer encore la matrice $T_{13}(-6/2)$ apporte la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}. \tag{13.113}$$

Enfin nous multiplions la matrice obtenue par $\frac{1}{M_{i_1 1}}\mathbb{1}$ pour normaliser à 1 l'élément « pivot » que nous avions choisit. Dans notre exemple nous multiplions par $1/2$ pour trouver

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7/2 & 4 \end{pmatrix}. \tag{13.114}$$

La matrice obtenue jusqu'ici possède une ligne et une colonne de zéros avec un 1 à leur intersection, et elle est de la forme

$$M' = T_1 M T_2 \tag{13.115}$$

où T_1 et T_2 sont triangulaires supérieures et inversibles, produits de matrices de transvection (et d'une matrice scalaire pour la normalisation).

Il reste à recommencer l'opération avec la seconde colonne (qui n'est pas toute nulle parce que le déterminant est encore non nul) puis la suivante, etc. Dans notre exemple de l'équation (13.114), nous éliminerions le $1/4$ et le 4 en utilisant le $7/2$.
Encore une fois tout cela se fait à l'aide de matrices supérieures parce qu'à chaque étape, les colonnes précédent le pivot sont déjà nulles (sauf un 1) et ne doivent donc pas être touchées. À la fin de ce processus, ce qui reste est une matrice TMT' qui ne contient plus qu'un seul 1 sur chaque ligne et chaque colonne, c'est-à-dire une matrice de permutations : $P_\sigma = TMT'$ et donc

$$M = T_\sigma^{-1}(T')^{-1}. \tag{13.116}$$

(ii) **Unicité** Soient $\sigma, \sigma \in S'_n$ tels que $T_1 P_\sigma T_2 = S_1 P_\tau S_2$ avec T_i et S_i triangulaires supérieures et inversibles. En posant $T = T_2 S_2^{-1}$ et $S = T_1^{-1} S_1$, nous avons

$$P_\sigma T = S P_\tau \tag{13.117}$$

où S et T sont des matrices triangulaires supérieures et inversibles. Par les calculs de la preuve du lemme 4.98,

$$\begin{cases} (P_\sigma T)_{kl} = T_{\sigma^{-1}(k)l} & (13.118a)\\ (SP_\tau)_{kl} = S_{k\tau(l)}, & (13.118b) \end{cases}$$

et donc

$$T_{\sigma^{-1}(k)l} = S_{k\tau(l)}. \tag{13.119}$$

En écrivant cette équation avec $k = \sigma(i)$ (nous rappelons que σ est bijective),

$$T_{il} = S_{\sigma(i)\tau(l)}. \tag{13.120}$$

Nous savons que les termes diagonaux de T sont non nuls parce que T est triangulaire supérieure et inversible (donc pas de colonnes entières nulles). Nous avons donc, en prenant $i = l = k$,

$$0 \neq T_{kk} = S_{\sigma(k)\tau(k)}. \tag{13.121}$$

La matrice étant triangulaire supérieure, cela implique

$$\sigma(k) \leqslant \tau(k). \tag{13.122}$$

De la même manière en écrivant (13.119) avec $l = \tau^{-1}(i)$,

$$S_{ki} = T_{\sigma^{-1}(k)\tau^{-1}(i)} \tag{13.123}$$

et donc

$$\sigma^{-1}(k) \leqslant \tau^{-1}(k). \tag{13.124}$$

En écrivant cela avec $k = \sigma(j)$, nous avons $j \leqslant \tau^{-1}\sigma(j)$ et en appliquant enfin τ,

$$\tau(j) \leqslant \sigma(j). \tag{13.125}$$

En comparant avec (13.122), nous avons $\sigma = \tau$.

□

13.3 Sous-groupes du groupe linéaire

Lemme 13.40 ([89]).
Soit V un espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme euclidienne $\|.\|$. Soit K un compact convexe de V et G, un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(V)$ tel que

$$u(K) \subset K \tag{13.126}$$

pour tout $u \in G$. Alors il existe $a \in K$ tel que $u(a) = a$ pour tout $u \in G$.

Démonstration. Avant de nous lancer dans la preuve, nous avons besoin d'un petit résultat.

(i) **Un pré-résultat** Nous commençons par prouver que si $v \in \mathcal{L}(V)$ vérifie $v(K) \subset K$, alors v a un point fixe dans K. Pour cela nous considérons $x_0 \in K$ et la suite

$$x_k = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} v^i(x_0). \tag{13.127}$$

Étant donné que K est convexe et stable par v, la suite (x_k) est contenue dans K et accepte une sous-suite convergente[23] que nous allons noter $x_{\varphi(n)}$ avec $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Soit $a \in K$ la limite :

$$\lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = a. \tag{13.128}$$

Tant que nous y sommes nous pouvons aussi calculer $v(x_k)$:

$$\begin{aligned} v(x_k) &= v\left(\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k} v^i(x_0)\right) && (13.129a)\\ &= \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} v^{i+1}(x_0) && (13.129b)\\ &= x_k + \frac{1}{k+1}\Big(v^{k+1}(x_0) - x_0\Big). && (13.129c) \end{aligned}$$

La norme $\|v^{k+1}(x_0) - x_0\|$ est bornée par le diamètre de K, donc en prenant la limite $k \to \infty$ le second terme de (13.129c) tend vers zéro. En prenant ces égalités en $k = \varphi(n)$ et en prenant $n \to \infty$, nous trouvons

$$v(a) = a, \tag{13.130}$$

c'est-à-dire le résultat que nous voulions dans un premier temps.

(ii) **Une norme sur V** Nous passons maintenant à la preuve du lemme. D'abord nous remarquons que le groupe G agit sur V par $u \cdot x = u(x)$ et de plus, considérant la fonction continue

$$\begin{aligned} \alpha\colon G &\to V\\ u &\mapsto u(x), \end{aligned} \tag{13.131}$$

nous voyons que les orbites de cette action sont compactes en tant qu'image par α du compact G (théorème 7.186). Nous posons

$$\begin{aligned} \nu\colon V &\to \mathbb{R}^+\\ x &\mapsto \max_{u\in G}\|u(x)\|. \end{aligned} \tag{13.132}$$

Cette définition a un sens parce que l'orbite $\{u(x) \text{ tel que } u \in G\}$ est compacte dans V et donc l'ensemble des normes est compact dans $\mathbb{R}$ et admet un maximum. De plus cela donne une norme sur V parce que nous vérifions les conditions de la définition 7.136 :

(1) Pour tout $x, y \in V$ nous avons :

$$\nu(x+y) = \max_{u\in G}\|u(x)+u(y)\| \leqslant \max_{u\in G}\big(\|u(x)\| + \|u(y)\|\big) \leqslant \nu(x)+\nu(y). \tag{13.133}$$

(2) Si $\nu(x) = 0$, alors l'égalité $\max_{u\in G}\|u(x)\| = 0$ nous enseigne que $\|u(x)\| = 0$ pour tout $u \in G$ et donc en particulier avec $u = \mathrm{Id}$ nous trouvons $x = 0$.

(3) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in V$,

$$\nu(\lambda x) = \max_{u\in G}\|u(\lambda x)\| = \max\|\lambda u(x)\| = \max|\lambda|\|u(x)\| = |\lambda|\nu(x). \tag{13.134}$$

23. C'est Bolzano-Weierstrass, théorème 7.124.

De plus la fonction ν est constante sur les orbites de G.

(iii) **Un point fixe** Pour tout $u \in G$ nous posons

$$F_u = \{x \in K \text{ tel que } u(x) = x\}; \tag{13.135}$$

par le pré-résultat, aucun de ces ensembles n'est vide. Ils sont de plus tous fermés par continuité de u (le complémentaire est ouvert). Nous devons prouver que $\bigcap_{u\in G} F_u \neq \emptyset$ parce qu'une intersection serait un point fixe de tous les éléments de G. Supposons donc que $\bigcap_{u\in G} F_u = \emptyset$. Alors les complémentaires des F_u forment un recouvrement ouvert de K et nous pouvons en extraire un sous-recouvrement fini par compacité. Soient $\{u_i\}_{i=1,\ldots,p}$ les éléments qui réalisent ce recouvrement. Alors

$$\bigcap_{i=1}^{p} F_{u_i} = \emptyset. \tag{13.136}$$

Nous considérons l'opérateur

$$v = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} u_i \in \mathcal{L}(V). \tag{13.137}$$

Puisque K est convexe et stable sous chacun des u_i, nous avons aussi $v(K) \subset K$ et donc il existe $a \in K$ tel que $v(a) = a$. Pour ce a, nous avons

$$\begin{aligned}
\nu\big(v(a)\big) &= \nu\left(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} u_i(a)\right) && (13.138a)\\
&\leqslant \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} \nu\left(u_i(a)\right) && (13.138b)\\
&= \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} \nu(a) && (13.138c)\\
&= \nu(a) && (13.138d)
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la constance de ν sur les orbites de G. Par ailleurs nous savons que $v(a) = a$, donc en réalité à gauche dans (13.138a) nous avons $\nu(a)$ et toutes les inégalités sont des égalités. Nous avons en particulier

$$\nu\left(\sum_{i=1}^{p} u_i(a)\right) = \sum_{i=1}^{p} \nu\left(u_i(a)\right). \tag{13.139}$$

Notons $u_0 \in G$ l'élément qui réalise le maximum de la définition de ν pour le vecteur $\sum_i u_i(a)$:

$$\nu\left(\sum_i u_i(a)\right) = \|u_0\left(\sum_i u_i(a)\right)\| \leqslant \sum_i \|u_0 u_i(a)\| \leqslant \sum_i \nu\big(u_i(a)\big). \tag{13.140}$$

Mais nous venons de voir (équation (13.139)) que l'expression de gauche est égale à celle de droite. Donc les inégalités sont des égalités et en particulier la première inégalité devient l'égalité

$$\|\sum_i u_0 u_i(a)\| = \sum_i \|u_0 u_i(a)\|. \tag{13.141}$$

En vertu du lemme 11.13, il existe des nombres positifs λ_i tels que

$$u_0 u_1(a) = \lambda_2 u_0 u_2(a) = \ldots = \lambda_p u_0 u_p(a). \tag{13.142}$$

Du fait que u_0 est inversible nous avons aussi

$$u_1(a) = \lambda_2 u_2(a) = \ldots = \lambda_p u_p(a). \tag{13.143}$$

Mais par constance de ν sur les orbites nous avons $\nu(u_i(a)) = \nu(u_j(a))$ pour tout i et j ; en appliquant ν à la série d'égalités (13.143), nous trouvons que tous les λ_i doivent être égaux à 1. En particulier

$$u_1(a) = u_2(a) = \ldots = u_p(a). \tag{13.144}$$

Nous récrivons maintenant l'équation $v(a) = a$ avec la définition de v :

$$a = v(a) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} u_i(a) = u_j(a) \tag{13.145}$$

pour n'importe quel j. Donc

$$a \in \bigcap_{i=1}^{p} F_{u_i}, \tag{13.146}$$

ce qui contredit notre hypothèse de départ.

□

Proposition 13.41 ([357, 89, 358]).
Soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$*. Alors*

(1) Il existe une forme quadratique définie positive q sur $\mathbb{R}^n$ telle que $G \subset \mathrm{O}(q)$.

(2) Le groupe G est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$*.*

Démonstration. Nous considérons le (pas tout à fait) morphisme de groupe

$$\begin{aligned} \rho\colon G &\to \mathrm{GL}\big(\mathrm{S}(n,\mathbb{R})\big) \\ u &\mapsto \rho_u\colon s \mapsto u^t s u, \end{aligned} \tag{13.147}$$

et tant que nous en sommes à considérer, nous considérons l'ensemble

$$H = \{M^t M \text{ tel que } M \in G\} \subset \mathrm{S}(n,\mathbb{R}). \tag{13.148}$$

Cet ensemble est constitué de matrices définies positives parce que si $\langle M^t Mx, x\rangle = 0$, alors $0 = \langle Mx, Mx\rangle = \|Mx\|$, mais M étant inversible, cela implique que $x = 0$. Qui plus est, cet ensemble est compact dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ en tant qu'image du compact G par l'application continue $M \mapsto M^t M$. L'enveloppe convexe $K = \mathcal{C}\mathrm{onv}(H)$ est alors également compacte par le théorème 8.43. Enfin nous considérons $L = \rho(G)$, qui est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}\big(\mathrm{S}(n,\mathbb{R})\big)$ parce que $\rho_u\rho_v = \rho_{vu} \in \rho(G)$. Nous remarquons que ρ_u étant linéaire, elle préserve les combinaisons convexes et donc pour tout $u \in G$, $\rho_u(K) \subset K$.

Bref, L est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ préservant le compact K de $\mathrm{S}(n,\mathbb{R})$. Par le lemme 13.40, il existe $s \in K$ tel que $\rho_u(s) = s$ pour tout $u \in G$. Ou encore :

$$u^t s u = s \tag{13.149}$$

pour tout $u \in G$. Fort de ce s bien particulier, nous considérons la forme quadratique associée : $q(x) = x^t s x$. Cette forme est définie positive parce que s l'est. Nous avons $G \subset \mathrm{O}(q)$ parce que si $u \in G$ alors

$$q\big(ux\big) = (ux)^t s u x = x^t \underbrace{u^t s u}_{=s} x = q(x). \tag{13.150}$$

Le premier point est prouvé.

La matrice s est symétrique et définie positive. Le théorème 9.212 nous permet donc de la diagonaliser en $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$, et ensuite transformée en la matrice $\mathbb{1}_n$ par la matrice $\mathrm{diag}(1/\sqrt{\lambda_i})$. Nous avons donc une matrice $a \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ telle que $a^t s a = \mathbb{1}_n$. Avec ça, si $u \in G$, nous avons

$$(a^{-1}ua)^t(a^{-1}ua) = (a^{-1}ua)^t \mathbb{1}_n (a^{-1}ua) = a^t u^t (a^t)^{-1} a^t s a a^{-1} u a = a^t u^t s u a = a^t s a = \mathbb{1}, \tag{13.151}$$

ce qui prouve que $a^{-1}ua$ est dans $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$, et donc que $a^{-1}Ga \subset \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$. □

Chapitre 14

Tribus, théorie de la mesure, intégration

14.1 Tribus

Vous pouvez vous reporter au thème 22 pour voir plus vite où sont les définitions associées.

14.1.1 Généralités

Définition 14.1 (Tribu, espace mesurable[359])**.**
Si Ω est un ensemble, un ensemble $\mathcal{A}$ de sous-ensembles de Ω est une ***tribu*** *si*

(1) $\Omega \in \mathcal{A}$ *;*

(2) $A^c \in \mathcal{A}$ *pour tout* $A \in \mathcal{A}$ *;*

(3) si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *est une suite dénombrable d'éléments de* $\mathcal{A}$*, alors* $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ *est alors un* ***espace mesurable****.*

Remarque 14.2.
Nous trouvons parfois la notation

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \sup_{k\geqslant 0} A_k. \tag{14.1}$$

Lemme 14.3.
Opérations ensemblistes sur les tribus.

(1) Une tribu est stable par intersections au plus dénombrables.

(2) Une tribu est stable par différence ensembliste.

Démonstration. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable d'éléments de la tribu $\mathcal{A}$. Nous devons prouver que $\bigcap_{i\in I} A_i$ est également un élément de $\mathcal{A}$. Pour cela nous passons au complémentaire :

$$\complement\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} \complement A_i. \tag{14.2}$$

La définition d'une tribu implique que le membre de droite est un élément de la tribu. Par stabilité d'une tribu par complémentaire, l'ensemble $\bigcap_{i\in I} A_i$ est également un élément de la tribu.

La seconde assertion est immédiate à partir de la première parce que $A\backslash B = A \cap \complement B$. $\square$

Si $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ est un ensemble de tribus (indexé par un ensemble I quelconque) alors

$$\mathcal{A} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i \tag{14.3}$$

est également une tribu.

Définition 14.4.
*Soit $\mathcal{D}$ un ensemble de parties de Ω. La **tribu engendrée** par $\mathcal{D}$ est l'intersection de toutes les tribus de Ω contenant $\mathcal{D}$. C'est la plus petite tribu contenant $\mathcal{D}$. Nous la noterons le plus souvent $\sigma(\mathcal{A})$*

Note : une tribu engendrée par une application fera l'objet de la définition 14.42.

Proposition 14.5 ([360])**.**
Soit S un ensemble et $\mathcal{F}$ une tribu de S. Soit une classe $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(S)$ telle que

(1) Si $A \in \mathcal{N}$ alors il existe $Y \in \mathcal{F} \cap \mathcal{N}$ tel que $A \subset Y$.
(2) Si $A \in \mathcal{N}$ et $B \subset A$ alors $B \in \mathcal{N}$.
(3) La classe $\mathcal{N}$ est stable par union dénombrable.

Alors la classe
$$\mathcal{T} = \{X \cup A \text{ avec } A \in \mathcal{N} \text{ et } X \in \mathcal{F}\} \tag{14.4}$$
est une tribu.

Démonstration. L'ensemble $\mathcal{T}$ est stable par union dénombrable parce que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{N}$ le sont. De plus S et $\emptyset$ sont dans $\mathcal{F}$ et donc dans $\mathcal{T}$. Nous devons voir que $\mathcal{T}$ est stable par complémentarité.

Soit donc $A \in \mathcal{N}$ et $X \in \mathcal{F}$; nous savons que $(A \cup X)^c = A^c \cap X^c$. De plus il existe $Y \in \mathcal{F} \cap \mathcal{N}$ tel que $A \subset Y$ et nous pouvons exprimer A^c en termes de Y : $A^c = Y^c \cup (Y \backslash A)$. Donc
$$(A \cup X)^c = \big(Y^c \cup (Y \backslash A)\big) \cap X^c = \underbrace{(Y^c \cap X^c)}_{\in \mathcal{F}} \cup \underbrace{\big((Y \backslash A) \cap X^c\big)}_{\in \mathcal{N}}. \tag{14.5}$$
Le fait que la seconde partie soit dans $\mathcal{N}$ est due au fait que ce soit une partie de $Y \in \mathcal{N}$. Nous avons donc bien $(A \cup X)^c \in \mathcal{T}$. □

14.1.2 Tribu induite

Proposition-Définition 14.6 (Tribu induite, tribu-trace[361])**.**
Soit un espace mesurable $(S, \mathcal{F})$ et une partie $R \subset S$. L'ensemble
$$\mathcal{F}_R = \{A \cap R \text{ tel que } A \in \mathcal{F}\} \tag{14.6}$$
*est une tribu. Elle est la **tribu induite** de R depuis S. Elle est aussi nommée « tribu trace ».*

Démonstration. D'abord R et $\emptyset$ dont dans $\mathcal{F}_R$. Si $C \in \mathcal{F}_R$ alors $C = A \cap R$ pour un certain $A \in \mathcal{F}$ et nous devons prouver que $R \cap C^c$ est dans $\mathcal{F}_R$ (le complémentaire de C dans R). Nous avons
$$R \cap C^c = R \cap (A \cap R)^c = R \cap A^c \in \mathcal{F}_R \tag{14.7}$$
parce que $A^c \in \mathcal{F}$. Enfin si $C_i \in \mathcal{F}_R$ alors $C_i = R \cap A_i$ pour des A_i dans $\mathcal{F}$. Nous avons
$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (R \cap A_i) = R \cap \big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\big), \tag{14.8}$$
mais $\bigcup_i A_i \in \mathcal{F}$ donc $\bigcup_i C_i \in \mathcal{F}_R$. □

Proposition 14.7.
Si R est mesurable dans $(\Omega, \mathcal{A})$ alors
$$\mathcal{A}_R = \{A \cap R \text{ tel que } A \in \mathcal{F}\} = \{S \in \mathcal{A} \text{ tel que } S \subset R\}, \tag{14.9}$$
où $\mathcal{A}_R$ est la tribu induite de $\mathcal{A}$ sur R.

Démonstration. La première égalité est simplement la définition (14.6) de la tribu induite. Pour le reste, nous notons $\mathcal{F} = \{S \in \mathcal{A} \text{ tel que } S \subset R\}$, et nous prouvons que $\mathcal{A}_R = \mathcal{F}$.

(i) $\underline{\mathcal{F} \subset \mathcal{A}_R}$ Si $S \in \mathcal{F}$, alors $S \in \mathcal{A}$ et $S \subset R$. Donc $S = S \cap R \in \mathcal{A}_R$.
(ii) $\underline{\mathcal{F}_R \subset \mathcal{A}_R}$ Dans l'autre sens, si $S \in \mathcal{A}_R$, alors il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $S = A \cap R$. Donc $S \subset A$ et $S \in \mathcal{A}$ parce que R et A sont des éléments de $\mathcal{A}$ (stable par intersection).

□

14.2 Théorie de la mesure

Définition 14.8 ([362])**.**
*Une **mesure extérieure** sur un ensemble S est une application $m^*: \mathcal{P}(S) \to [0,\infty]$ telle que*

(1) $m^*(\varnothing) = 0$,

(2) *Si $A \subset B$ dans S alors $m^*(A) \leqslant m^*(B)$*

(3) *Si les A_n sont des parties de S alors*

$$m^*\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} m^*(A_n). \tag{14.10}$$

La différence avec une mesure est que nous ne demandons pas que (14.10) soit une égalité lorsque les A_n sont disjoints.

14.2.1 Mesure sur un ensemble de parties

Définition 14.9 (Mesure sur un ensemle de parties[363])**.**
*Soient S un ensemble et $\mathcal{C}$ un ensemble de parties de S contenant $\varnothing$. Une **mesure positive** sur $(S,\mathcal{C})$ est une application $\mu: \mathcal{C} \to [0,\infty]$ telle que*

(1) $\mu(\varnothing) = 0$,

(2) *Si $A_n \in \mathcal{C}$ sont des éléments deux à deux disjoints dans $\mathcal{C}$ et tels que $\bigcup_n A_n \in \mathcal{C}$ alors*

$$\mu\big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n). \tag{14.11}$$

*La mesure est **finie** si $\mu(S) < \infty$ et **σ-finie** si il existe une suite (S_n) dans $\mathcal{C}$ telle que $S = \bigcup_n S_n$ et $\mu(S_n) < \infty$.*

Remarque 14.10.
La condition $\mu(\varnothing) = 0$ est nécessaire. Certes, si $A \in \mathcal{A}$ nous avons

$$\mu(A) = \mu(A \cup \varnothing) = \mu(A) + \mu(\varnothing) \tag{14.12}$$

parce que A et $\varnothing$ sont disjoints. Cela semble indiquer que $\mu(\varnothing) = 0$, mais pas tout à fait : il est encore possible d'avoir $\mu(B) = \infty$ pour tout $B \in \mathcal{A}$, y compris $\mu(\varnothing) = \infty$. À cause de cette exception, la relation (14.12) n'implique pas $\mu(\varnothing) = 0$.

Sans hypothèse sur l'ensemble de parties considéré, nous ne pouvons pas dire grand chose de plus.

14.2.2 Mesure sur une algèbre de parties

Définition 14.11 (Algèbre de parties[362])**.**
*Soit S, un ensemble. Une classe $\mathcal{D}$ de parties de S est une **algèbre de parties** de S si*

(1) *$S \in \mathcal{D}$ et $\varnothing \in \mathcal{D}$,*

(2) *si $A \in \mathcal{D}$ alors $A^c \in \mathcal{D}$,*

(3) *si $A, B \in \mathcal{D}$ alors $A \cup B \in \mathcal{D}$.*

14.12.
En anglais, ce sont des *field of sets*[364].

<++>
Les algèbre de parties ne sont pas des classes si sauvages que ça ; en témoigne le lemme suivant.

Lemme 14.13.
Une algèbre de partie est stable par intersection (finie) et par différence ensembliste.

Démonstration. Il suffit de remarquer que $A \cap B = \big(A^c \cup B^c\big)^c$ et que $A \backslash B = A \cap B^c$. □

Lemme 14.14 ([362])**.**
Si $\mathcal{D}$ est une algèbre de parties de S et si μ est une mesure sur $(S, \mathcal{D})$ alors

(1) si $A, B \in \mathcal{D}$ avec $A \subset B$ alors $\mu(A) \leqslant \mu(B)$

(2) si $A_n \in \mathcal{D}$ et $\bigcup_n A_n \in \mathcal{D}$ alors

$$\mu\big(\bigcup_n A_n\big) \leqslant \sum_n \mu(A_n). \tag{14.13}$$

La propriété (2) est la σ-**sous-additivité**.

Démonstration. Si $A \subset B$ alors $B = A \cup (B \backslash A)$ avec A et $B \backslash A$ disjoints donc

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) \geqslant \mu(A). \tag{14.14}$$

Pour la seconde, on passe par les compléments deux à deux : nous posons

$$\begin{cases} B_0 = \varnothing & (14.15a)\\ B_n = A_n \backslash \bigcup_{k<n} B_k. & (14.15b) \end{cases}$$

Ces ensembles sont deux à deux disjoints et $\bigcup_n B_n = \bigcup_n A_n \in \mathcal{D}$, donc

$$\mu\big(\bigcup_n A_n\big) = \sum_n \mu\big(A_n \backslash \bigcup_{k<n} B_k\big) \leqslant \sum_n \mu(A_n), \tag{14.16}$$

où nous avons utilisé la première partie du lemme. □

Proposition 14.15 (Mesure extérieure à partir d'une algèbre de parties[362])**.**
Soient $\mathcal{D}$ une algèbre de partie sur l'ensemble S et μ une mesure sur $(S, \mathcal{D})$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \mu^* \colon \mathcal{P}(S) &\to [0, +\infty] \\ X &\mapsto \inf\left\{ \sum_n \mu(A_n) \textit{ tel que } A_n \in \mathcal{D}, X \subset \bigcup_n A_n \right\} \end{aligned} \tag{14.17}$$

est une mesure extérieure[1] *sur S et pour tout $A \in \mathcal{D}$ nous avons $\mu^*(A) = \mu(A)$.*

Démonstration. En plusieurs parties.

(i) **La définition est bonne** L'ensemble sur lequel l'infimum est pris n'est pas vide : il suffit de prendre $A_1 = S$ et $A_{n \geqslant 2} = \varnothing$.

(ii) **Le vide** D'abord $\mu^*(\varnothing) = 0$ parce que $\varnothing \in \mathcal{D}$. Prendre ensuite $A_n = \varnothing$.

(iii) **μ^* est croissante** Soit $X \subset Y$ dans $\mathcal{P}(S)$. Si une suite (A_n) dans $\mathcal{D}$ vérifie $Y \subset \bigcup_n A_n$, alors la même suite vérifie $X \subset \bigcup_n A_n$. Par conséquent nous avons l'inclusion

$$\left\{ \sum_n \mu(A_n) \text{ tel que } A_n \in \mathcal{D}, X \subset \bigcup_n A_n \right\} \subset \left\{ \sum_n \mu(A_n) \text{ tel que } A_n \in \mathcal{D}, Y \subset \bigcup_n A_n \right\}, \tag{14.18}$$

et donc l'inégalité $\mu^*(X) \leqslant \mu^*(Y)$.

(iv) **Inégalité par union dénombrable** Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de S. Si il existe n_0 tel que $\mu^*(X_{n_0}) = \infty$ alors nous avons automatiquement $\sum_n \mu^*(X_n) = \infty$ et l'inégalité demandée est évidente parce que n'importe quel nombre est plus petit ou égal à ∞. Nous supposons donc maintenant que $\mu^*(X_n) < \infty$ pour tout n.

1. Définition 14.8.

Soit $\epsilon > 0$. Pour tout $n \geqslant 1$ il existe une suite $(B_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{D}$ telle que $X_n \subset \bigcup_k B_k^{(n)}$ et

$$\mu^*(X_n) + \frac{\epsilon}{2^n} \geqslant \sum_k \mu(B_k^{(n)}). \tag{14.19}$$

Étant donné que

$$\bigcup_n X_n \subset \bigcup_n \Big(\bigcup_k B_k^{(n)}\Big), \tag{14.20}$$

nous avons [2]

$$\mu^*\Big(\bigcup_n X_n\Big) \leqslant \sum_n \sum_k \mu^*(B_k^{(n)}) \leqslant \sum_n \left(\mu^*(X_n) + \frac{\epsilon}{2^n}\right) = \sum_n \mu^*(X_n) + \epsilon. \tag{14.21}$$

Cette inégalité étant valable pour tout ϵ, nous avons bien

$$\mu^*\Big(\bigcup_n X_n\Big) = \sum_n \mu^*(X_n). \tag{14.22}$$

(v) **Restriction** Soit $A \in \mathcal{D}$. Nous avons automatiquement $\mu^*(A) \leqslant \mu(A)$ parce que $\mu(A)$ est dans l'ensemble dont nous prenons l'infimum (prendre $A_1 = A$ et $A_{n\geqslant 2} = \emptyset$).

En ce qui concerne l'inégalité inverse nous considérons une suite A_n dans $\mathcal{D}$ telle que $A \subset \bigcup_n A_n$. Étant donné que $A \in \mathcal{D}$ et que $\mathcal{D}$ est une algèbre de parties nous avons $A \cap A_n \in \mathcal{D}$ et $\bigcup_n (A \cap A_n) = A \in \mathcal{D}$. Par conséquent

$$\mu(A) = \mu\Big(\bigcup_n (A \cap A_n)\Big) \leqslant \sum_n \mu(A \cap A_n) \leqslant \sum_n \mu(A_n). \tag{14.23}$$

Donc tous les éléments de l'ensemble sur lequel nous prenons l'infimum sont plus grands que $\mu(A)$. Nous en déduisons que $\mu^*(A) \geqslant \mu(A)$.

□

14.2.3 Mesure sur une tribu, espace mesuré

La définition suivante est une simple copie de la définition générale 14.9 d'une mesure sur un ensemble de parties. La seule différence est que l'union d'éléments d'une tribu est encore dans la tribu, et la condition (3) ne demande pas de le préciser.

Définition 14.16 (Espace mesuré[363])**.**
*Une **mesure positive** sur l'espace mesurable*[3] $(\Omega, \mathcal{A})$ *est une application* $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ *telle que*

(1) $\mu(\mathcal{A}) \subset [0, \infty]$

(2) $\mu(\emptyset) = 0$,

(3) $\mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i)$ *si les* A_i *sont des éléments de* $\mathcal{A}$ *deux à deux disjoints.*

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *est alors un **espace mesuré**.*

Une mesure est σ***-finie** si il existe un recouvrement dénombrable de* Ω *par des ensembles de mesure finie. Si la mesure est* σ*-finie, nous disons que l'espace* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *est un espace mesuré* σ*-fini.*

La mesure μ *sur* Ω *est **finie** si* $\mu(\Omega) < \infty$.

Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et $(S, \mathcal{F}, \nu)$ sont deux espaces mesurés, alors nous notons

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \subset (S, \mathcal{F}, \nu) \tag{14.24}$$

lorsque $\Omega \subset S$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ et pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = \nu(A)$.

2. Nous utilisons la somme $\sum_{n\in\mathbb{N}} (1/2^n) = 1$, proposition 11.119(2).
3. Les définitions de tribus et d'espaces mesurables sont en 14.1.

Définition 14.17 (Ensemble mesurable)**.**
*Les éléments de $\mathcal{A}$ sont les ensembles **mesurables** pour la mesure μ.*

Si la mesure est σ-finie, nous pouvons choisir le recouvrement croissant pour l'inclusion. En effet si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le recouvrement, il suffit de considérer $F_n = \bigcup_{k\leqslant n} E_k$. Ces ensembles F_n forment tout autant un recouvrement dénombrable, mais ils vont évidemment croissants.

Le lemme suivant complète la propriété 14.16(3) lorsque les ensembles ne sont pas disjoints.

Lemme 14.18 (Unions et différences ensemblistes dans un espace mesurable)**.**
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

(1) Soient $A, B \in \mathcal{F}$ avec $A \subset B$. Alors

$$\mu(B\backslash A) = \mu(B) - \mu(A) \tag{14.25}$$

(2) Si $A, B \in \mathcal{F}$ avec $A \subset B$, alors

$$\mu(A) \leqslant \mu(B). \tag{14.26}$$

(3) Si $A, B \in \mathcal{F}$ avec $A \subset B$, et si $\mu(B) < \infty$, alors $\mu(A) < \infty$.

(4) Si (M_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ pas spécialement disjoints, alors

$$\mu\Big(\bigcup_k M_k\Big) \leqslant \sum_k \mu(M_k). \tag{14.27}$$

Démonstration. Point par point.

(i) **Pour (1)** Nous décomposons $B = A \cup (B\backslash A)$ en remarquant que l'union est disjointe et que $B\backslash A \in \mathcal{F}$ par le lemme 14.3. La propriété (3) de la définition de mesure nous donne alors

$$\mu(B) = \mu\big((B\backslash A) \cup A\big) = \mu(B\backslash A) + \mu(A) \tag{14.28}$$

et donc

$$\mu(B) = \mu(B\backslash A) + \mu(A) \tag{14.29}$$

comme demandé.

(ii) **Pour (2)** Il s'agit de reprendre (14.29) :

$$\mu(A) = \mu(B) - \mu(B\backslash A) \leqslant \mu(B). \tag{14.30}$$

(iii) **Pour (3)** Il s'agit de continuer (14.30) :

$$\mu(A) \leqslant \mu(B) < \infty. \tag{14.31}$$

(iv) **Pour (4)** Nous considérons la suite disjointe

$$\begin{cases} M'_0 = \varnothing & (14.32\text{a})\\ M'_k = M_k \backslash M'_{k-1}. & (14.32\text{b}) \end{cases}$$

Nous avons $\bigcup_k M'_k = \bigcup_k M_k$. Nous avons alors le calcul suivant :

$$\mu\Big(\bigcup_k M_k\Big) = \mu\Big(\bigcup_k M'_k\Big) = \sum_k \mu(M'_k) = \sum_k \mu(M_k\backslash M'_{k-1}) \leqslant \sum_k \mu(M_k). \tag{14.33}$$

La dernière inégalité utilise le point (2).

□

Lemme 14.19 ([1])**.**
Résultats sur les unions croissantes d'ensembles mesurables dans $(S, \mathcal{A}, \mu)$.

(1) Si (A_k) est une suite croissante d'ensembles μ-mesurables dont l'union est mesurable, alors

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_k) = \mu(\bigcup_k A_k). \tag{14.34}$$

(2) Soit K_n, une suite emboîtée d'éléments de $\mathcal{A}$ tels que $K_n \to S$. Si $A \in \mathcal{A}$ alors

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \cap K_n) = \mu(A). \tag{14.35}$$

Démonstration. Pour prouver (1), nous faisons le coup de l'union télescopique, en posant $A_0 = \varnothing$:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \backslash A_{k-1}). \tag{14.36}$$

Les ensembles $A_k \backslash A_{k-1}$ sont deux à deux disjoints, donc la propriété (3) de la définition d'une mesure donne

$$\begin{aligned}
\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k\backslash A_{k-1})\right) && \text{(14.37a)}\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k\backslash A_{k-1}) && \text{(14.37b)}\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \big(\mu(A_k) - \mu(A_{k-1})\big) && \text{(14.37c)}\\
&= \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) - \mu(A_0) && \text{(14.37d)}\\
&= \lim_{k\to\infty} \mu(A_k). && \text{(14.37e)}
\end{aligned}$$

où pour obtenir 14.37c, nous avons utilisé le lemme 14.18.

Le point (2) est une application du point (1). □

Exemple 14.20.
L'intégration « à la Riemann » n'est pas dans la théorie des espaces mesurés. En effet l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{A \subset [0,1] \text{ tel que } \mathbb{1}_A \text{ est intégrable au sens de Riemann}\} \tag{14.38}$$

n'est pas une tribu. Par exemple les singletons en font partie tandis que $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ n'en fait pas partie bien que ce soit une union dénombrable de singletons. △

Définition 14.21.
*Si μ est une mesure nous disons qu'une propriété est vraie μ-**presque partout** si elle est fausse seulement sur un ensemble de mesure nulle.*

Par exemple la fonction de Dirichlet est presque partout égale à la fonction 1 (pour la mesure de Lebesgue).

Définition 14.22 (fonction mesurable)**.**
Une application entre espace mesurés

$$f \colon (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}') \tag{14.39}$$

*est **mesurable** si pour tout $B \in \mathcal{A}'$, l'ensemble $f^{-1}(B)$ est dans $\mathcal{A}$.*

Lemme 14.23.
Une union dénombrable de parties de mesure nulle est de mesure nulle.

Démonstration. C'est une conséquence du lemme 14.18(4) : si les A_i sont de mesure nulle,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = 0 \tag{14.40}$$

□

Définition 14.24.
*Si (A_n) est une suite croissante d'ensembles alors la **limite** est*

$$\lim_n A_n = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i. \tag{14.41}$$

Si la suite est décroissante alors la limite est

$$\lim_n A_n = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i. \tag{14.42}$$

Proposition 14.25 ([365])**.**
Soient μ une mesure sur Ω et (S_n) une suite croissante d'ensembles μ-mesurables de Ω. Nous notons

$$S = \lim_n S_n. \tag{14.43}$$

Alors pour tout ensemble mesurable[4] *$A \subset \Omega$ nous avons*

$$\mu(A \cap S) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap S_n). \tag{14.44}$$

Démonstration. L'inégalité $\lim \mu(A \cap S_n) \leqslant \mu(A \cap S)$ est simple à prouver. En effet pour tout n nous avons $A \cap S_n \subset A \cap S$ et donc par le lemme 14.18 nous avons

$$\mu(A \cap S_n) \leqslant \mu(A \cap S). \tag{14.45}$$

En passant à la limite (qui respecte les inégalités) nous avons l'inégalité.

Nous passons à l'inégalité dans l'autre sens.

(i) **Si ∞** D'abord si $\mu(A \cap S_n) = \infty$ pour un certain n, alors cela vaut encore ∞ pour tous les n suivants, et la limite est ∞ sans problème. Donc nous supposons que $\mu(A \cap S_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(ii) **Une petite hypothèse en plus** Quitte à renommer les indices, nous supposons que $S_0 = \emptyset$.

(iii) **S comme union de différences** Nous montrons à présent que $S = \bigcup_n (S_{n+1} \backslash S_n)$. Soit $x \in S$. Il existe $n \geqslant 0$ tel que $x \in S_n$. Et vu que $S_0 = \emptyset$, il existe même un $n \geqslant 0$ tel que $x \notin S_n$ et $x \in S_{n+1}$. Autrement dit, pour tout $x \in S$, il existe $n \geqslant 0$ tel que $x \in S_{n+1} \backslash S_n$.

Nous avons donc bien

$$S = \bigcup_{n=0}^{\infty} (S_{n+1} \backslash S_n) \tag{14.46}$$

Comme annoncé.

(iv) **Un bon petit calcul** Par conséquent

$$A \cap S = A \cap \bigcup_{n=0}^{\infty} (S_{n+1} \backslash S_n) = \bigcup_{n=0}^{\infty} A \cap (S_{n+1} \backslash S_n) \tag{14.47}$$

4. Définition 14.17

Étant donné que les ensembles $A \cap (S_{n+1} \backslash S_n)$ sont disjoints,

$$\mu(A \cap S) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu\big(A \cap (S_{n+1} \backslash S_n)\big) \tag{14.48a}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mu\Big((A \cap S_{n+1}) \backslash (A \cap S_n)\Big) \tag{14.48b}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \big(\mu(A \cap S_{n+1}) - \mu(A \cap S_n)\big) \tag{14.48c}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap S_{n+1}) - \underbrace{\mu(A \cap S_0)}_{=0} \tag{14.48d}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap S_n). \tag{14.48e}$$

Dans ce calcul nous avons utilisé plusieurs fois le fait que les S_n et A étaient mesurables (et la propriété de tribu qui dit que $A \cap S_n$ est également mesurable) ainsi que le lemme 14.18. Nous avons aussi utilisé la série télescopique dans $\mathbb{R}$ pour obtenir (14.48d).

□

Définition 14.26 (λ-système[366]).
*Soit E un ensemble. Un ensemble $\mathcal{D}$ de parties de E est un **λ-système** lorsqu'il vérifie les conditions suivantes :*

(1) si $A, B \in \mathcal{D}$ avec $A \subset B$ alors $B \backslash A \in \mathcal{D}$,

(2) si $(A_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{D}$ alors $\bigcup_k A_k \in \mathcal{D}$.

Note : une tribu est un λ-système.

Lemme 14.27 ([366]).
Une intersection quelconque de λ-systèmes dans E est un λ-système dans E.

Démonstration. Soient $\{\mathcal{D}_l\}_{l\in L}$ des λ-systèmes indicés par un ensemble L. Si $A, B \in \bigcap_{l\in L} \mathcal{D}_l$ alors $B \backslash A \in \mathcal{D}_l$ pour tout $l \in L$ et donc $A \backslash B \in \bigcap_{l\in L} \mathcal{D}_l$. De la même façon si (A_k) est une suite croissante dans $\bigcap_{l\in L} \mathcal{D}_l$ alors pour tout $l \in L$ nous avons $\bigcup_k A_k \in \mathcal{D}_l$. Donc $\bigcup_k A_k \in \bigcap_l \mathcal{D}_l$. □

Ce lemme est ce qui permet de définir le λ-système **engendré** par une classe $\mathcal{A}$ de parties de E : c'est l'intersection de tous les λ-systèmes de E contenant $\mathcal{A}$.

Lemme 14.28 ([366]).
Soit $\mathcal{C}$ une classe de parties de E (contenant E lui-même) qui soit stable par intersection finie. Alors le λ-système engendré par $\mathcal{C}$ coïncide avec la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.

Démonstration. Nous notons $\mathcal{E}$ le λ-système engendré par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$ la tribu engendrée par $\mathcal{C}$. Étant donné que $\mathcal{F}$ est un λ-système nous avons $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$. Pour montrer l'inclusion inverse nous allons prouver que $\mathcal{E}$ est une tribu.

D'abord pour $C \in \mathcal{C}$ nous posons

$$\mathcal{G}_C = \{A \subset \mathcal{E} \text{ tel que } A \cap C \in \mathcal{E}\}. \tag{14.49}$$

et pour $F \in \mathcal{E}$,

$$\mathcal{H}_F = \{A \in \mathcal{E} \text{ tel que } A \cap F \in \mathcal{E}\}. \tag{14.50}$$

Nous allons montrer que $\mathcal{G}_C$ et $\mathcal{H}_F$ sont des λ-systèmes et que $\mathcal{G}_C = \mathcal{H}_F = \mathcal{E}$.

Nous commençons par $\mathcal{G}_C$. Si $A, B \in \mathcal{G}_C$ avec $A \subset B$ alors

$$(B \backslash A) \cap C = \underbrace{(B \cap C)}_{\in\mathcal{E}} \backslash \underbrace{(A \cap C)}_{\in\mathcal{E}}. \tag{14.51}$$

Puisque $\mathcal{E}$ est un λ-système et que $(A \cap C) \subset (B \cap C)$, nous avons bien $(B \backslash A) \cap C \in \mathcal{E}$ et donc $B \backslash A \in \mathcal{G}_C$. Soit maintenant (A_k) une suite croissante dans $\mathcal{G}_C$. Nous avons

$$\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \cap C = \bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k \cap C) \tag{14.52}$$

qui est une union d'une suite croissante d'éléments de $\mathcal{E}$. Donc $\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k \cap C) \in \mathcal{E}$, ce qui signifie que $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{G}_C$. Cela termine la preuve du fait que $\mathcal{G}_C$ soit un λ-système.

Étant donné que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie, si $K \in \mathcal{C}$ nous avons $C \cap K \in \mathcal{C}$, ce qui signifie que $K \in \mathcal{G}_C$. Nous avons donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}_C$. Donc $\mathcal{G}_C$ est un λ-système vérifiant $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}_C \subset \mathcal{E}$. Mais comme $\mathcal{E}$ est le plus petit λ-système contenant $\mathcal{C}$ nous avons en fait $\mathcal{G}_C = \mathcal{E}$.

Nous montrons à présent que $\mathcal{H}_F$ est un λ-système. Si $A, B \in \mathcal{H}_F$ avec $A \subset B$ alors $(B \backslash A) \cap F = (B \cap F) \backslash (A \cap F)$. Comme $\mathcal{E}$ est un λ-système et que $A \cap F$ et $B \cap F$ sont dans $\mathcal{E}$ avec $A \cap F \subset B \cap F$, nous avons

$$(B \cap F) \backslash (A \cap F) \in \mathcal{H}_F. \tag{14.53}$$

Soit maintenant $(A_k)_{k \geqslant 1}$ une suite croissante dans $\mathcal{H}_F$. Pour tout k nous avons $A_k \cap F \in \mathcal{E}$, ce qui donne

$$\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \cap F = \bigcap_{k=1}^{\infty}(A_k \cap F) \in \mathcal{E}. \tag{14.54}$$

Donc $\mathcal{H}_F$ est un λ-système vérifiant $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}_F \subset \mathcal{E}$. Nous en concluons que pour tout $C \in \mathcal{C}$ et pour tout $F \in \mathcal{E}$,

$$\mathcal{G}_C = \mathcal{H}_F = \mathcal{E}. \tag{14.55}$$

Nous allons maintenant prouver que $\mathcal{E}$ est une tribu [5].

(1) Si $F \in \mathcal{E}$ alors $E \cap F = F \in \mathcal{E}$, ce qui signifie que $E \in \mathcal{H}_F = \mathcal{E}$.

(2) Si $A \in \mathcal{E}$ alors $E \backslash A \in \mathcal{E}$ parce que $\mathcal{E}$ est un λ-système et $E \in \mathcal{E}$. Donc $\complement A \in \mathcal{E}$.

(3) Montrons que $\mathcal{E}$ est stable par union finie en considérant $A, B \in \mathcal{E}$. Comme E est également un élément de $\mathcal{E}$ nous avons

$$E \backslash (A \cup B) = (E \backslash A) \cap (E \backslash B) \in \mathcal{E}. \tag{14.56}$$

Cela prouve que $\complement(A \cup B) \in \mathcal{E}$. Par complémentarité nous avons aussi $A \cup B \in \mathcal{E}$.

Soient $A_k \in \mathcal{E}$, et nommons $B_p = A_1 \cup \ldots \cup A_p$. Les ensembles B_p forment une suite croissante d'éléments de $\mathcal{E}$. L'union est donc dans $\mathcal{E}$ et ce dernier est, au final, stable par union dénombrable.

Maintenant que $\mathcal{E}$ est une tribu nous avons $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ parce que $\mathcal{F}$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$. Nous en déduisons que $\mathcal{E} = \mathcal{F}$, ce qu'il fallait démontrer. □

Le théorème suivant permet de prouver que la mesure de Lebesgue est l'unique mesure possible ayant les bonnes valeurs sur les intervalles (théorème 14.131).

Théorème 14.29 (Unicité des mesures[366]).
Soient μ et ν, deux mesures sur $(E, \mathcal{A})$ et un ensemble $\mathcal{E}$ de parties de E telles que

(1) La tribu engendrée par $\mathcal{E}$ soit $\mathcal{A}$.

(2) si $A, B \in \mathcal{E}$ alors $A \cap B \in \mathcal{E}$

(3) il existe une suite croissante (E_n) dans $\mathcal{E}$ telle que

(3a) $E = \lim E_n$,

(3b) $\mu(E_n)$ et $\nu(E_n)$ sont finis pout tout n.

Alors si les mesures μ et ν coïncident sur $\mathcal{E}$, elles coïncident sur $\mathcal{A}$ en entier.

5. Définition 14.1.

Démonstration. Soit (E_n) une suite croissante dans $\mathcal{E}$ telle que $E = \lim E_n$.

(i) **Des restrictions** Nous considérons μ_n et ν_n, les restrictions de μ et ν à E_n, c'est-à-dire

$$\mu_n(A) = \mu(A \cap E_n) \tag{14.57a}$$
$$\nu_n(A) = \nu(A \cap E_n). \tag{14.57b}$$

Puisque les E_n sont dans $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$, ils sont mesurables au sens de μ et ν. Par la proposition 14.25, pour tout $A \in \mathcal{E}$ nous avons alors

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A) \tag{14.58a}$$
$$\lim_{n\to\infty} \nu_n(A) = \nu(A) \tag{14.58b}$$

(ii) **Ce que nous devons prouver** Nous devons donc seulement montrer que pour tout $A \in \mathcal{A}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n(A) = \nu_n(A)$. Pour cela nous nous fixons un n et nous considérons l'ensemble de parties

$$\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{A} \text{ tel que } \mu_n(A) = \nu_n(A)\}. \tag{14.59}$$

Le but sera de prouver que $\mathcal{D} = \mathcal{A}$.

(iii) **$\nu_n = \mu_n$ sur $\mathcal{E}$** Soit $A \in \mathcal{E}$. Vu que $E_n \in \mathcal{E}$, par hypothèse $A \cap E_n \in \mathcal{E}$ et donc

$$\mu_n(A) = \mu(A \cap E_n) \tag{14.60a}$$
$$= \nu(A \cap E_n) \tag{14.60b}$$
$$= \nu_n(A). \tag{14.60c}$$

Pour (14.60b), nous avons utilisé l'hypothèse comme quoi $\mu = \nu$ sur $\mathcal{E}$.

(iv) **Encore d'autres parties** Nous définissons $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \cup \{E\}$. En particulier $\mathcal{E}' \subset \mathcal{D}$.

(v) **$\mu_n = \nu_n$ sur $\mathcal{E}'$** Nous avons déjà vue l'égalité sur $\mathcal{E}$. Il suffit de vérifier l'égalité sur E. Vu que $E \cap E_n = E_n \in \mathcal{E}$, nous avons

$$\mu_n(E) = \mu(E \cap E_n) = \mu(E_n) = \nu(E_n) = \nu(E_n \cap E) = \nu_n(E). \tag{14.61}$$

(vi) **$\mathcal{D}$ est un λ-système** Montrons que $\mathcal{D}$ est un λ-système. Soient $A, B \in \mathcal{D}$ avec $A \subset B$. Alors, étant donné que les mesures μ_n et ν_n sont finies, le lemme 14.18 nous donne

$$\mu_n(B\backslash A) = \mu_n(B) - \mu_n(A) \tag{14.62a}$$
$$\nu_n(B\backslash A) = \nu_n(B) - \nu_n(A). \tag{14.62b}$$

Donc $\mu_n(B\backslash A) = \nu_n(B\backslash A)$ et $B\backslash A \in \mathcal{D}$.

Soit par ailleurs une suite croissante $(A_k)_{k\geqslant 1}$ d'éléments de $\mathcal{D}$. En posant $B_p = \bigcup_{k=1}^p A_k$, le lemme 14.19(1) nous donne

$$\mu_n(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{p\to\infty} \mu_n(A_p). \tag{14.63}$$

Mais puisque pour chaque p nous avons $\mu_n(A_p) = \nu_n(A_p)$, nous avons aussi

$$\mu_n(\bigcup_{p=1}^{\infty} A_p) = \nu_n(\bigcup_{p=1}^{\infty} A_p). \tag{14.64}$$

Donc $\mathcal{D}$ est bel et bien un λ-système contenant $\mathcal{E}'$.

(vii) **Conclusion** Par le lemme 14.28, le λ-système engendré par $\mathcal{E}'$ est égal à la tribu engendrée par $\mathcal{E}'$, mais par hypothèse la tribu engendrée par $\mathcal{E}$ est $\mathcal{A}$, donc le λ-système engendré par $\mathcal{E}'$ est $\mathcal{A}$. Comme $\mathcal{D}$ est un λ-système contenant $\mathcal{E}'$, nous avons alors $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ et donc $\mathcal{A} = \mathcal{D}$, ce qu'il fallait.

□

Exemple 14.30.
La partie $\mathcal{E}$ des intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme $]a, b[$ engendre les boréliens par la proposition 7.118. Par conséquent pour vérifier que deux mesures sont égales sur les boréliens de $\mathbb{R}$, il suffit de prouver qu'elles sont égales sur les intervalles ouverts. △

14.2.4 Mesure extérieure

Nous avons déjà défini la notion de mesure extérieure en la définition 14.8.

Lemme 14.31 ([362])**.**
Soit $(S, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $X \subset S$. Alors

$$\inf_{\substack{A \in \mathcal{F} \\ X \in A}} \mu(A) = \inf\left\{ \sum_n \mu(A_n) \text{ tel que } A_n \in \mathcal{F}, X \subset \bigcup_k A_k \right\}. \tag{14.65}$$

Démonstration. Pour montrer l'inégalité $\geqslant$, nous remarquons qu'il y a plus d'éléments dans l'ensemble du second membre que dans le premier. En effet si $A \in \mathcal{F}$ avec $X \subset A$ alors dans le membre de gauche nous pouvons prendre $A_1 = A$ et $A_{n\geqslant 1} = \emptyset$.

Pour l'inégalité dans l'autre sens, nous montrons que tout élément de

$$\left\{ \sum_n \mu(A_n) \text{ tel que } A_n \in \mathcal{F}, X \subset \bigcup_k A_k \right\} \tag{14.66}$$

est plus grand qu'un élément de

$$\{\mu(A) \text{ tel que } A \in \mathcal{F}, X \subset A\}. \tag{14.67}$$

En effet si $A_n \in \mathcal{F}$ avec $X \subset \bigcup_k A_k$ alors en posant $A = \bigcup_k A_k$ nous avons $A \in \mathcal{F}$ avec $X \subset A$ ainsi que $\mu(A) \leqslant \sum_n \mu(A_n)$. Cela prouve que l'élément $\sum_n \mu(A_n)$ de (14.66) est plus grand que l'élément $\mu(A)$ de (14.67). □

14.32.
La proposition 14.33 pourrait être vue comme un cas particulier de la proposition 14.15 en utilisant 14.31. Nous en donnons cependant une preuve directe, qui est presque identique à celle de 14.15, mais avec une ou deux simplifications.

Proposition 14.33 ([362])**.**
Soit un espace mesuré $(S, \mathcal{F}, \mu)$ et l'application

$$\begin{aligned} \mu^* \colon \mathcal{P}(S) &\to [0, \infty] \\ X &\mapsto \inf\{\mu(A) \text{ tel que } A \in \mathcal{F}, X \subset A\}. \end{aligned} \tag{14.68}$$

Alors μ^* est une mesure extérieure sur S et sa restriction à $\mathcal{F}$ est égale à μ.

Démonstration. Notons que la définition est bonne parce que l'ensemble sur lequel l'infimum est pris n'est pas vide : considérer $A = S$.

(i) **Le vide** D'abord $\mu^*(\emptyset) = 0$ parce que $\emptyset \in \mathcal{F}$.

(ii) **μ^* est croissante** Soit $X \subset Y$ dans $\mathcal{P}(S)$. Si $Y \subset A$ alors $X \subset A$, donc

$$\inf\{\mu(A) \text{ tel que } A \in \mathcal{F}, X \subset A\} \leqslant \inf\{\mu(A) \text{ tel que } A \in \mathcal{F}, Y \subset A\}, \tag{14.69}$$

ce qui signifie que $\mu^*(X) \leqslant \mu^*(Y)$.

(iii) **Inégalité par union dénombrable** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de S. Si il existe n_0 tel que $\mu^*(X_{n_0}) = \infty$ alors nous avons automatiquement $\sum_n \mu^*(X_n) = \infty$ et l'inégalité demandée est évidente parce que n'importe quel nombre est plus petit ou égal à ∞. Nous supposons donc que $\mu^*(X_n) < \infty$ pour tout n.

Soit $\epsilon >$ et par définition pour chaque n, il existe un $A_n \in \mathcal{F}$ tel que $X_n \subset A_n$ et $\mu(A_n) \leqslant \mu^*(X_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$. Bien entendu nous avons

$$\bigcup_n X_n \subset \bigcup_n A_n \in \mathcal{F}. \tag{14.70}$$

Nous en déduisons que

$$\mu^*\big(\bigcup_n X_n\big) \leqslant \mu\big(\bigcup_n A_n\big). \tag{14.71}$$

Mais $(S, \mathcal{F}, \mu)$ étant un espace mesuré,

$$\mu\big(\bigcup_n A_n\big) \leqslant \sum_n \mu(A_n). \tag{14.72}$$

Au final nous avons les inégalités

$$\begin{aligned}
\mu^*\big(\bigcup_n X_n\big) &\leqslant \mu\big(\bigcup_n A_n\big) && (14.73a)\\
&\leqslant \sum_n \mu(A_n) && (14.73b)\\
&\leqslant \sum_n \mu^*(X_n) + \epsilon \underbrace{\sum_n \frac{1}{2^n}}_{=1} && (14.73c)\\
&= \sum_n \mu^*(X_n) + \epsilon. && (14.73d)
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout ϵ,

$$\mu^*\big(\bigcup_n X_n\big) \leqslant \sum_n \mu^*(X_n), \tag{14.74}$$

ce qui prouve que μ^* est une mesure extérieure.

(iv) **Restriction** Supposons que $X \in \mathcal{F}$. Alors si $X \subset A$ nous avons $\mu(X) \leqslant \mu(A)$; mais en même temps, $\mu(X)$ est dans l'infimum qui définit $\mu^*(X)$ donc

$$\mu^*(X) \leqslant \mu(X) \leqslant \inf\{\mu(A) \text{ tel que } A \in \mathcal{F}, X \subset A\} \leqslant \mu(X) \leqslant \mu^*(X). \tag{14.75}$$

Donc nous avons égalité de tous les éléments de cette chaine d'inégalité.

□

Définition 14.34.
*Soit S un ensemble et m^* une mesure extérieure sur S. Une partie $A \subset X$ est m^***-mesurable** si pour tout $X \subset S$,*

$$m^*(X) = m^*(X \cap A) + m^*(X \cap A^c). \tag{14.76}$$

Remarque 14.35.
L'inégalité

$$m^*(X) \leqslant m^*(X \cap A) + m^*(X \cap A^c) \tag{14.77}$$

étant toujours vraie, pour prouver qu'un ensemble est m^*-mesurable, il est suffisant de prouver l'inégalité inverse :

$$m^*(X) \geqslant m^*(X \cap A) + m^*(X \cap A^c) \tag{14.78}$$

La définition 14.34 est motivée par la proposition suivante.

Proposition 14.36.
Soit un espace mesuré $(S, \mathcal{F}, \mu)$ et μ^* la mesure extérieure qui va avec. Alors tous les éléments de $\mathcal{F}$ sont μ^*-mesurables.

En d'autres termes, pour tout $A \in \mathcal{F}$ et tout $X \subset S$ nous avons

$$\mu^*(X) = \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c). \tag{14.79}$$

Démonstration. Puisque $X = (X \cap A) \cup (X \cap A^c)$, et que μ^* est une mesure extérieure,

$$\mu^*(X) \leqslant \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c). \tag{14.80}$$

Nous devons montrer l'inégalité inverse.

Soit $B \in \mathcal{F}$ tel que $X \subset B$. D'une part nous avons $X \cap A \subset B \cap A \in \mathcal{F}$, donc

$$\mu^*(X \cap A) \leqslant \mu^*(B \cap A) = \mu(B \cap A). \tag{14.81}$$

Et d'autre part, $X \cap A^c \subset B \cap A^c \in \mathcal{F}$, donc

$$\mu^*(X \cap A^c) \leqslant \mu(B \cap A^c). \tag{14.82}$$

En rassemblant,

$$\mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c) \leqslant \mu(B \cap A) + \mu(B \cap A^c) = \mu(B). \tag{14.83}$$

La dernière égalité vient du fait que $B \cap A$ et $B \cap A^c$ sont disjoints et que μ est une mesure. L'inégalité (14.83) étant vraie pour tout $B \in \mathcal{F}$ tel que $X \subset B$, elle est encore vraie pour l'infimum :

$$\mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c) \leqslant \inf\{\mu(B) \text{ tel que } B \in \mathcal{F}, X \subset B\} = \mu^*(X). \tag{14.84}$$

Nous avons donc prouvé que

$$\mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c) \leqslant \mu^*(X). \tag{14.85}$$

□

Remarque 14.37.
Notons la duplicité du vocabulaire. Les ensembles μ-mesurables sont les éléments de $\mathcal{F}$, qui sont à priori les seuls sur lesquels μ est calculable[6], alors que les μ^*-mesurables sont les parties de S qui vérifient une certaine propriété (et μ^* est calculable sur toutes les parties de S).

14.3 Applications mesurables

14.3.1 Propriétés

Définition 14.38 (Fonction mesurable)**.**
*Soient $(E, \mathcal{A})$ et $(F, \mathcal{F})$ deux espaces mesurés. Une fonction $f \colon E \to F$ est **mesurable** si pour tout $\mathcal{O} \in \mathcal{F}$, l'ensemble $f^{-1}(\mathcal{O})$ est dans $\mathcal{A}$.*

Proposition 14.39.
Soient $(S_i, \mathcal{F}_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ des espaces mesurables et des fonctions mesurables $f \colon S_1 \to S_2$ et $g \colon S_2 \to S_3$. Alors la fonction $g \circ f \colon S_1 \to S_3$ est mesurable.

Démonstration. Soit $B \in \mathcal{F}_3$. Alors

$$(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}\big(g^{-1}(B)\big) \in f^{-1}(\mathcal{F}_2) \subset \mathcal{F}_1. \tag{14.86}$$

□

14.3.2 D'une tribu à l'autre

Lemme 14.40 ([367])**.**
Soit une application $f \colon S_1 \to S_2$ et une tribu $\mathcal{F}_2$ sur S_2. Alors $f^{-1}(\mathcal{F}_2)$ est une tribu sur S_1

Démonstration. Il faut prouver les trois propriétés de la définition 14.1 d'une tribu.

(1) D'abord f est définie sur tout S_1, donc $f^{-1}(S_2) = S_1$ alors que $S_2 \in \mathcal{F}_2$.

6. « calculable » au sens où μ y vaut un nombre bien défini ; après, que ce soit facile ou pas à calculer dans la pratique, c'est une autre histoire.

(2) Soit $A \in f^{-1}(\mathcal{F}_2)$, c'est-à-dire $A = f^{-1}(B)$ pour un certain $B \in \mathcal{F}_2$. En ce qui concerne le complémentaire :

$$A^c = f^{-1}(B)^c = S_1 \backslash f^{-1}(B) = f^{-1}(S_2 \backslash B) = f^{-1}(B^c). \tag{14.87}$$

(3) Si $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sont des éléments de $f^{-1}(\mathcal{F}_2)$ avec $A_i = f^{-1}(B_i)$ alors

$$\bigcup_i A_i = \bigcup_i f^{-1}(B_i) = f^{-1}\big(\bigcup_i B_i\big). \tag{14.88}$$

Ce qui est dans la dernière parenthèse est dans $\mathcal{F}_2$ parce que cette dernière est une tribu.

□

Lemme 14.41 ([367])**.**
Soit une application $f\colon S_1 \to S_2$ et $\mathcal{F}$ une tribu de S_1. Alors

(1) L'ensemble

$$\mathcal{F}_f = \{B \subset S_2 \text{ tel que } f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\} \tag{14.89}$$

est une tribu sur S_2.

(2) C'est la plus grande tribu de S_2 pour laquelle f est mesurable.

Démonstration. Encore les trois propriétés à vérifier.

(1) $S_2 \in \mathcal{F}$, sont $S_1 = f^{-1}(S_2) \in \mathcal{F}_f$.

(2) Si $A \in \mathcal{F}_f$ alors $A = f^{-1}(B)$ pour un certain $B \in \mathcal{F}$. Nous avons alors aussi $B^c \in \mathcal{F}$ et donc

$$f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c = A^c. \tag{14.90}$$

Par conséquent A^c est dans $\mathcal{F}_f$.

(3) Si (A_i) sont des éléments de $\mathcal{F}_f$ avec $A_i = f^{-1}(B_i)$ pour $B_i \in \mathcal{F}$ alors $\bigcup_i B_i \in \mathcal{F}$ et

$$f^{-1}\big(\bigcup_i B_i\big) = \bigcup_i f^{-1}(B_i) \in \mathcal{F}_f. \tag{14.91}$$

En ce qui concerne la maximalité, si $R \subset S_2$ n'est pas dans $\mathcal{F}_f$ alors $f^{-1}(R)$ n'est pas dans $\mathcal{F}$ et donc f ne serait pas mesurable. □

Définition 14.42 (Tribu engendrée)**.**
Soit une application $f\colon S_1 \to S_2$ et $\mathcal{F}$ une tribu de S_1. Alors conformément au lemme 14.41 l'ensemble

$$\mathcal{F}_f = \{B \subset S_2 \text{ tel que } f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\} \tag{14.92}$$

*est la **tribu engendrée** par f.*

Le lemme suivant est également nommé « lemme de transfert ».

Lemme 14.43 (Lemme de transport)**.**
Soit $f\colon S_1 \to S_2$ une application et une classe $\mathcal{C}$ de parties de S_2. Alors

$$\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big) = f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{C})\big). \tag{14.93}$$

Démonstration. Puisque $\sigma(\mathcal{C})$ est une tribu dans S_2 alors le lemme 14.41 dit que $f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{C})\big)$ est une tribu qui contient en particulier $f^{-1}(\mathcal{C})$. Nous en déduisons que $\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big) \subset f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{C})\big)$.

Réciproquement. Dans S_1 nous avons la tribu $\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big)$. Nous pouvons alors considérer la tribu

$$\mathcal{F}_f = \{B \subset S_2 \text{ tel que } f^{-1}(B) \in \sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big)\}. \tag{14.94}$$

Montrons que $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}_f$. Lorsque $B \in \mathcal{C}$ nous avons $f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big)$. Du coup $B \in \mathcal{F}_f$. Nous avons alors, en passant aux tribus engendrées :

$$\sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{F}_f) = \mathcal{F}_f. \tag{14.95}$$

Si maintenant $B \in \sigma(\mathcal{C})$, nous avons $f^{-1}(B) \in \sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big)$, ce qui signifie que

$$f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{C})\big) \subset \sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big). \tag{14.96}$$

□

Le théorème suivant est important pour prouver qu'une application est mesurable. En effet, il permet de ne tester si une application n'est mesurable uniquement que sur une partie génératrice de la tribu d'arrivée[7].

Théorème 14.44.
Soient des espaces mesurables $(S_1, \mathcal{F}_1)$ et $(S_2, \mathcal{F}_2)$ ainsi qu'une application $f \colon S_1 \to S_2$. Si il existe un ensemble de parties $\mathcal{C}$ de S_2 tel que

- $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F}_2$
- $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1$ *pour tout* $B \in \mathcal{C}$

alors f est mesurable.

Démonstration. Par hypothèse, $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F}_2$ et $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}_1$ et nous pouvons utiliser le lemme de transfert 14.43 :

$$\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big) = f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{C})\big) \tag{14.97}$$

qui s'écrit ici

$$\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big) = f^{-1}(\mathcal{F}_2). \tag{14.98}$$

Mais comme $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{F}_1$, nous avons aussi $\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big) \subset \mathcal{F}_1$, ce qui signifie que

$$f^{-1}(\mathcal{F}_2) \subset \mathcal{F}_1. \tag{14.99}$$

Cela est exactement le fait que f soit mesurable. □

14.4 Tribu borélienne

14.4.0.1 Définition

Définition 14.45 (Tribu borélienne)**.**
La tribu des ***boréliens****, notée $\mathcal{B}or(\mathbb{R}^d)$ est la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}^d$. Plus généralement si Y est un espace topologique, la tribu des boréliens est la tribu engendrée par les ouverts de Y.*

Proposition 14.46.
La tribu engendrée par une base dénombrable de la topologie est celle des boréliens.

Démonstration. Si une base de topologie est donnée, tout ouvert peut être écrit comme union d'élément de la base, proposition 7.2. Dans le cas d'une base dénombrable, cette union sera forcément dénombrable. Une tribu étant stable par union dénombrable, tout ouvert est dans la tribu engendrée par la base de topologie. Les autres boréliens suivent automatiquement.

Dit avec plus de lettres et moins de phrases, si $\mathcal{D}$ est une base dénombrable de la topologie de X, et si $\mathcal{O}$ est un ouvert de X, nous avons $\mathcal{O} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ avec $A_i \in \mathcal{D}$. Puisqu'une tribu est stable par union dénombrable[8], nous avons $\mathcal{O} \in \sigma(\mathcal{D})$. En conséquence, $\mathcal{B}or(X) \subset \sigma(\mathcal{D})$.

Mais comme $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}or(X)$ l'inclusion inverse est automatique. D'où l'égalité $\mathcal{B}or(X) = \sigma(\mathcal{D})$.

□

7. Typiquement les ouverts pour les boréliens.
8. Définition 14.1(3)

14.4.0.2 Les boréliens de $\mathbb{R}$

Nous rappelons que la topologie de $\mathbb{R}$ est celle des boules donnée par le théorème 7.98. Nous rappelons (voir la proposition 7.118 et sa preuve) que les boules ouvertes de la forme $B(q,r)$ avec $q,r \in \mathbb{Q}$ forment une base dénombrable de la topologique de $\mathbb{R}$.

Lemme 14.47.
Soit $\{q_i\}$ une énumération des rationnels. La tribu engendrée par les ouverts $\sigma_i =]q_i,\infty[$ est la tribu des boréliens.

Démonstration. Si $a < b$ dans $\mathbb{Q}$ alors $\sigma_a \backslash \sigma_b =]a,b]$. Ensuite

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \sigma_a \backslash \sigma_{b-\frac{1}{n}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]a, b-\frac{1}{n}] =]a,b[. \tag{14.100}$$

Par union dénombrable, tous les intervalles $]a,b[$ avec $a,b \in \mathbb{Q}$ sont dans la tribu engendrée par les σ_i.

Ces boules ouvertes forment une base de la topologie de $\mathbb{R}$ par la proposition 7.118 et la proposition 14.46 conclut. □

Exemple 14.48.
Les singletons sont des boréliens de $\mathbb{R}$ parce que

$$\{x\} = \Big(]-\infty,x[\cup]x,+\infty[\Big)^c. \tag{14.101}$$

Puisqu'une tribu est stable par union dénombrable, l'ensemble $\mathbb{Q}$ est un borélien de $\mathbb{R}$. Et comme les tribus sont stables par différence ensembliste (14.3(2)), l'ensemble des irrationnels est un borélien de $\mathbb{R}$. △

14.4.0.3 Diverses expressions

Lemme 14.49.
Soient un espace topologique X et un borélien B de X. Nous considérons sur B la topologie induite[9] *de X et les boréliens $\mathcal{B}or(B)$ correspondants. Nous avons :*

$$\mathcal{B}or(B) = \{A \in \mathcal{B}or(X) \text{ tel que } A \subset B\} = \{B \cap A \text{ tel que } A \in \mathcal{B}or(X)\}. \tag{14.102}$$

En particulier,

$$\mathcal{B}or(B) = \mathcal{B}or(X)_B. \tag{14.103}$$

Démonstration. L'égalité

$$\{A \in \mathcal{B}\text{or}(X) \text{ tel que } A \subset B\} = \{B \cap A \text{ tel que } A \in \mathcal{B}\text{or}(X)\} \tag{14.104}$$

est déjà dans la proposition 14.7.

Nous démontrons maintenant que

$$\mathcal{B}\text{or}(B) = \{A \cap B \text{ tel que } A \in \mathcal{B}\text{or}(X)\}. \tag{14.105}$$

Pour ce faire, nous nous rappelons du lemme de transport 14.43. Soit l'injection canonique $f\colon B \to X$; pour tout $A \subset X$ nous avons $f^{-1}(A) = A \cap B$.

Nous considérons la classe $\mathcal{T}$ des ouverts de X. Par définition de la topologie induite, les ouverts de B sont les éléments de $f^{-1}(\mathcal{T})$. Donc

$$\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{T})\big) = \mathcal{B}\text{or}(B). \tag{14.106}$$

Mais d'autre part,

$$f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{T})\big) = \{A \cap B \text{ tel que } A \in \mathcal{B}\text{or}(X)\}. \tag{14.107}$$

9. Définition 7.33.

Donc le lemme de transport 14.43 nous dit que

$$\mathcal{B}\text{or}(B) = \sigma\big(f^{-1}(\mathcal{T})\big) = f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{T})\big) = \{A \cap B \text{ tel que } A \in \mathcal{B}\text{or}(X)\}. \tag{14.108}$$

Pour finir, l'égalité (14.103) se démontre :

$$\mathcal{B}\text{or}(X)_B = \{B \cap A \text{ tel que } A \in \mathcal{B}\text{or}(X)\} = \mathcal{B}\text{or}(B). \tag{14.109}$$

□

14.4.1 Applications continues et boréliennes

Définition 14.50 (Fonction borélienne)**.**
Une application $f\colon (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^d))$ [10] est ***borélienne*** *si elle est mesurable, c'est-à-dire si pour tout $B \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}^d)$ nous avons $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.*

Si rien n'est précisé, une application entre deux espaces topologiques est borélienne lorsqu'elle est mesurable en considérant la tribu borélienne sur les deux *espaces.*

Si $\mathcal{A}$ est une tribu sur un ensemble E, nous notons $m(\mathcal{A})$ l'ensemble des fonctions qui sont $\mathcal{A}$-mesurables.

Le plus souvent lorsque nous parlerons de fonctions $f\colon X \to Y$ où Y est un espace topologique, nous considérons la tribu borélienne sur Y. Ce sera en particulier le cas dans la théorie de l'intégration.

Le théorème suivant est très important parce qu'en pratique c'est souvent lui, en conjonction avec la proposition 14.115 qui permet de déduire qu'une fonction est borélienne.

Théorème 14.51 ([367])**.**
Soient X et Y deux espaces topologiques. Alors toute application continue $f\colon X \to Y$ est borélienne[11]*.*

Démonstration. Pour vérifier que f est borélienne, nous devons prouver que $f^{-1}(B)$ est borélien pour tout borélien B de Y. Heureusement, le théorème 14.44 nous permet de limiter la vérification aux B appartenant à une classe engendrant les boréliens de Y.

La classe en question est toute trouvée : ce sont les ouverts. Si $\mathcal{O}$ est un ouvert de Y alors $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de X et donc un borélien de X. □

Le théorème suivant donne une importante compatibilité entre l'induction de tribu et l'induction de topologie : la tribu induite à partir des boréliens sur un sous-espace topologique est la tribu des boréliens pour la topologie induite.

Théorème 14.52 ([367])**.**
Soit X, un espace topologique et $Y \subset X$ une partie munie de la topologie induite. Alors

$$\mathcal{B}or(Y) = \mathcal{B}or(X)_Y \tag{14.110}$$

où $\mathcal{B}or(X)_Y$ est la tribu sur Y induite de $\mathcal{B}or(X)$ par la définition 14.6.

Démonstration. Nous notons τ_X et τ_Y les topologies de X et Y.

(i) $\underline{\boldsymbol{\mathcal{B}}\mathbf{or}(Y) \subset \boldsymbol{\mathcal{B}}\mathbf{or}(X)_Y}$ Si $A \in \tau_Y$ alors $A = Y \cap \Omega$ pour un $\Omega \in \tau_X$. Mais puisque Ω est un ouvert de X, il est un borélien de X, ce qui donne que $Y \cap \Omega$ est un élément de $\mathcal{B}\text{or}(X)_Y$. Cela prouve que $\tau_Y \subset \mathcal{B}\text{or}(X)_Y$, c'est-à-dire que $\mathcal{B}\text{or}(X)_Y$ est une tribu sur Y contenant les ouverts de Y. Nous avons donc

$$\mathcal{B}\text{or}(X) \subset \mathcal{B}\text{or}(X)_Y. \tag{14.111}$$

10. Tribu des boréliens, définition 14.45.
11. Définition 14.50.

(ii) **Réciproquement** L'application $\mathrm{Id}\colon (Y,\tau_Y)\to(X,\tau_X)$ est continue parce que si Ω est ouvert de X alors $\mathrm{Id}^{-1}(\Omega)=\Omega\cap Y\in\tau_Y$. Par conséquent l'identité est une application borélienne (théorème 14.51), ce qui signifie que $\mathrm{Id}^{-1}\big(\mathcal{B}\mathrm{or}(X)\big)\subset\mathcal{B}\mathrm{or}(Y)$, ou encore que si $B\in\mathcal{B}\mathrm{or}(X)$, alors $\mathrm{Id}^{-1}(B)=B\cap Y\in\mathcal{B}\mathrm{or}(Y)$. Cela signifie que

$$\mathcal{B}\mathrm{or}(X)_Y\subset\mathcal{B}\mathrm{or}(Y). \tag{14.112}$$

□

Corolaire 14.53.
Si U est un borélien de l'espace topologique X, alors les boréliens de U sont les boréliens de X inclus dans U :

$$\mathcal{B}or(U)=\{B\in\mathcal{B}or(X)\text{ tel que }B\subset U\}. \tag{14.113}$$

Démonstration. Si $B'\in\mathcal{B}\mathrm{or}(U)$, le théorème 14.52 donne un borélien $B\in\mathcal{B}\mathrm{or}(X)$ tel que $B'=B\cap U$. Mais U étant borélien de X, l'intersection $B\cap U$ est encore un borélien de X. □

Ce corolaire s'applique en particulier lorsque U est un ouvert.

La proposition suivante montre comment il est possible de construire un espace mesuré à partir d'une bijection avec un espace mesuré déjà connu. Attention cependant : la mesure construite dans cette proposition n'est pas celle qui est le plus adapté. Voir la proposition 14.267 et l'exemple 14.267.

Proposition 14.54.
Soient un espace mesuré $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$, un ensemble Ω' et une bijection $\varphi\colon\Omega\to\Omega'$. Nous posons

(1) $\mathcal{A}'=\varphi(\mathcal{A})$,

(2) $\mu'(B)=\mu\big(\varphi^{-1}(B)\big)$ pour tout $B\in\mathcal{A}'$.

Alors $(\Omega',\mathcal{A}',\mu')$ est un espace mesuré.

Démonstration. En plusieurs points.

(i) **$\mathcal{A}'$ est une tribu** Il faut vérifier les différents points de la définition 14.1. D'abord, puisque $\Omega\in\mathcal{A}$, nous avons $\Omega'=\varphi(\Omega)\in\mathcal{A}'$. Pour le complémentaire, si $B\in\mathcal{A}'$ alors $B=\varphi(A)$ pour un certain $A\in\mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est une tribu nous avons alors $\Omega\backslash A\in\mathcal{A}$ et donc $\varphi(\Omega\backslash A)\in\mathcal{A}'$. Mais comme φ est bijective,

$$\varphi(\Omega\backslash A)=\Omega'\backslash\varphi(A)=\Omega'\backslash B. \tag{14.114}$$

Le complémentaire de B est donc bien dans $\mathcal{A}'$. Pour la troisième condition, soient $B_i\in\mathcal{A}'$. Pour chaque i, il existe $A_i\in\mathcal{A}$ tel que $B_i=\varphi(A_i)$. Nous avons $\bigcup_i A_i\in\mathcal{A}$, donc

$$\bigcup_i B_i=\bigcup_i\varphi(A_i)=\varphi\big(\bigcup_i A_i\big)\in\mathcal{A}'. \tag{14.115}$$

Nous avons fini de prouver que $(\Omega',\mathcal{A}')$ était un espace mesurable.

(ii) **μ' est une mesure positive** D'abord $\mu'(\varnothing)=\mu\big(\varphi^{-1}(\varnothing)\big)=\mu(\varnothing)=0$. Ensuite si les A_i sont disjoints dans $\mathcal{A}'$ nous avons

$$\mu\big(\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i\big)=\mu\left(\varphi^{-1}\big(\bigcup_{i=0}^{\infty}A_i\big)\right)=\mu\left(\bigcup_i\varphi^{-1}(A_i)\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\mu\big(\varphi^{-1}(A_i)\big)=\sum_i\mu'(A_i). \tag{14.116}$$

□

Proposition 14.55.
Soit une bijection continue d'inverse continue $\varphi\colon\Omega\to\Omega'$. Alors

$$\varphi\big(\mathcal{B}or(\Omega)\big)=\mathcal{B}or(\Omega'). \tag{14.117}$$

Démonstration. Si $A\in\mathcal{B}\mathrm{or}(\Omega')$, alors $A=\varphi\big(\varphi(A)\big)\in\varphi\big(\mathcal{B}\mathrm{or}(\Omega)\big)$ parce que φ est continue et donc borélienne (proposition 14.51). Le même raisonnement fonctionne dans l'autre sens parce que nous avons supposé que φ est continue et d'inverse continu. □

14.4.2 Tribu de Baire

Définition 14.56.
*Une partie d'un espace topologique est **rare** si elle est contenue dans un fermé d'intérieur vide.*
*Une partie est **maigre** si elle est réunion finie ou dénombrable de parties rares.*

Exemple 14.57.
L'ensemble $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est maigre mais n'est pas rare parce que $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. △

Proposition 14.58 ([360])**.**
Soit X un espace topologique. L'ensemble de parties[12]

$$\mathcal{B}a(X) = \{B \cup A \text{ avec } B \text{ borélien et } A \text{ maigre}\} \tag{14.118}$$

*est une tribu. Elle est appelée la **tribu de Baire** de l'espace X.*

Démonstration. Nous allons montrer que les boréliens et les maigres vérifient les conditions de la proposition 14.5.

(1) Si A est maigre, il s'écrit comme $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} R_i$ où les R_i sont rares. Il existe donc des fermés d'intérieur vide F_i tels que $R_i \subset F_i$; en particulier $A \subset \bigcup_i F_i$. En tant que fermés, $F_i \in \mathcal{B}\text{or}(X)$; de plus chaque F_i est rare, donc $\bigcup_i F_i$ est maigre. L'ensemble A est donc bien contenu dans un ensemble maigre et borélien.

(2) Soit A maigre et $B \subset A$. Nous avons, avec les mêmes notations, $A = \bigcup_i R_i$ et $B = \bigcup_i (R_i \cap B)$. Les ensembles $R_i \cap B$ sont encore rares, donc B est une union dénombrable d'ensembles rares. L'ensemble B est donc maigre.

(3) Si les ensembles (A_i) sont maigres, alors ils sont unions dénombrables de rares : $A_i = \bigcup_k R_k^{(i)}$. Nous avons alors

$$\bigcup_i A_i = \bigcup_{(i,k)\in\mathbb{N}^2} R_k^{(i)}, \tag{14.119}$$

et donc $\bigcup_i A_i$ est encore une union dénombrable d'ensembles rares.

□

Proposition 14.59 ([360])**.**
Une partie B de l'espace topologique X est dans la tribu de Baire de X si et seulement si il existe un ouvert U tel que $B\Delta U$ est maigre.

Démonstration. Nous définissons la relation d'équivalence[13] suivante sur $\mathcal{P}(X)$: nous disons que $A \sim B$ si et seulement si $A\Delta B$ est maigre.

(i) **Réflexive** Nous avons $A\Delta A = \emptyset$, donc $A \sim A$.

(ii) **symétrique** Nous avons $A\Delta B = B\Delta A$, donc $\sim$ est symétrique.

(iii) **transitive** Si A, B, C sont des parties de X alors nous avons toujours

$$A\Delta C \subset (A \cup B \cup C)\setminus(A \cap B \cap C) = (A\Delta B) \cup (B\Delta C). \tag{14.120}$$

Donc si $A \sim B$ et $B \sim C$ alors $A\Delta C$ est contenu dans une union de maigres et est donc maigre.

(iv) **Autres propriétés de $\sim$** De plus la relation d'équivalence $\sim$ vérifie $A \sim B$ si et seulement si $A^c \sim B^c$, par le lemme 1.28(1).

Pour compléter les propriétés de $\sim$ mentionnons encore le fait que si F est fermé alors $F \sim \text{Int}(F)$. En effet $F \cup \text{Int}(F) = F$ et $F \cap \text{Int}(F) = \text{Int}(F)$, de telle sorte que $F\Delta\,\text{Int}(F) = F\setminus\text{Int}(F)$. Cet ensemble est un fermé parce que son complémentaire est $F^c \cup \text{Int}(F)$ qui est une union d'ouverts. De plus $F \subset \text{Int}(F)$ est d'intérieur vide, de telle sorte qu'il est rare et donc maigre.

12. Pour rappel, la tribu borélienne est définie en 14.45.
13. Définition 1.29

Pour la suite de la preuve nous posons

$$\mathcal{F} = \{A \subset X \text{ tel que il existe un ouvert } U \text{ avec } U \sim A\}, \tag{14.121}$$

et nous devons prouver que $\mathcal{F} = \mathcal{B}\text{a}(X)$.

(i) $\underline{\mathcal{F} \subset \mathcal{B}\mathbf{a}(X)}$ Soit $A \in \mathcal{F}$ et un ouvert U tel que $U \sim A$. Alors nous posons $M = U\Delta A$ qui est maigre. En vertu du lemme 1.28(2), nous avons

$$A = M\Delta U = (M \cup U)\backslash(M \cap U), \tag{14.122}$$

ce qui prouve que A est dans la tribu engendrée par les ouverts et les maigres, laquelle tribu est contenue dans $\mathcal{B}\text{a}(X)$.

(ii) $\underline{\mathcal{B}\mathbf{a}(X) \subset \mathcal{F}}$ Nous allons montrer que $\mathcal{F}$ est une tribu contenant tous les ouverts et tous les maigres. Alors en particulier $\mathcal{F}$ contiendra $\mathcal{B}\text{a}(X)$. Si U est ouvert, $U \sim U$ et donc $U \in \mathcal{F}$. Si M est maigre, alors $M \sim \emptyset$ et donc $M \in \mathcal{F}$. Il reste à prouver que $\mathcal{F}$ est une tribu.

(i) **Vide et tout l'ensemble** C'est facile : $\emptyset$ et X sont dans $\mathcal{F}$.

(ii) **Comlémentaire** Commençons par nous souvenir que $F \sim \text{Int}(F)$ dès que F est fermé. Si $A \in \mathcal{F}$ alors il existe un ouvert U tel que $A \sim U$ et donc aussi $A^c \sim U^c$. D'autre part U^c est fermé, donc $U^c \sim \text{Int}(U^c)$, donc

$$A^c \sim U^c \sim \text{Int}(U^c), \tag{14.123}$$

ce qui implique que $A^c \in \mathcal{F}$.

(iii) **Union dénombrable** Soit $A_n \in \mathcal{F}$ et $M_n = A_n\Delta U_n$ avec M_n maigre et U_n ouvert. Nous allons prouver que

$$\bigcup_n A_n \sim \bigcup_n U_n. \tag{14.124}$$

Pour cela il faut remarquer que

$$\Big(\bigcup_n A_n\Big)\Delta\Big(\bigcup_n U_n\Big) \subset \bigcup_n (A_n\Delta U_n) = \bigcup_n M_n. \tag{14.125}$$

Le terme le plus à droite est maigre, ce qui signifie que celui le plus à gauche est contenu dans un maigre et donc est maigre lui-même.

□

Proposition 14.60.
Si B est un borélien de X, alors il existe un ouvert U et un maigre M tels que

(1) $B\Delta U$ est maigre,

(2) $M\Delta U = B$,

(3) $D\Delta M$ est ouvert.

Démonstration. Puisque B est borélien, il est aussi dans la tribu de Baire et il existe par la proposition 14.59 un ouvert U tel que $M = B\Delta U$ est maigre. En prenant ce U et ce M, les trois conditions sont vérifiées parce que

$$M\Delta U = (B\Delta U)\Delta U = B \tag{14.126}$$

et

$$B\Delta M = M\Delta B = (U\Delta B)\Delta B = U. \tag{14.127}$$

Tout ceci par le lemme 1.28(2). □

14.5 Espace mesuré complet

14.5.1 Partie négligeable

Définition 14.61.
*Soit un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Une partie N de X est **négligeable** pour μ si il existe $Y \in \mathcal{A}$ tel que $N \subset Y$ et $\mu(Y) = 0$.*

Lemme 14.62.
L'ensemble des parties négligeables est stable par union dénombrable.

Démonstration. Si les ensembles N_i sont négligeables, alors pour chaque i nous avons $Y_i \in \mathcal{A}$ tel que $N_i \subset Y_i$ et $\mu(Y_i) = 0$. Alors bien entendu $\bigcup_i N_i \subset \bigcup_i Y_i$ et en utilisant (14.27),

$$\mu\big(\bigcup_i Y_i\big) \leqslant \sum_i \mu(Y_i) = 0. \tag{14.128}$$

□

Définition 14.63.
*L'espace mesuré $(X, \mathcal{F}, \mu)$ est **complet** si tout ensemble μ-négligeable est dans $\mathcal{F}$.*

Notons que la proposition 14.5 s'applique si $(X, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace mesuré et $\mathcal{N}$ est l'ensemble des parties μ-négligeables. C'est ce qui permet de donner le théorème suivant, que nous redémontrons de façon indépendante de la proposition 14.5.

Théorème 14.64 (Complétion d'espace mesuré[362, 368, 369])**.**
Soit un espace mesuré $(X, \mathcal{F}, \mu)$ et $\mathcal{N}$ l'ensemble des parties μ-négligeables de X.

(1) Les ensembles suivants sont égaux :

$$\mathcal{A} = \{A \subset X \text{ tel que } \exists B, C \in \mathcal{F} \text{ tel que } B \subset A \subset C, \mu(C \setminus B) = 0\} \tag{14.129a}$$
$$\mathcal{B} = \{B \cup N \text{ tel que } B \in \mathcal{F}, N \in \mathcal{N}\} \tag{14.129b}$$
$$\mathcal{C} = \{A \subset X \text{ tel que } \exists B \in \mathcal{F} \text{ tel que } A \Delta B \in \mathcal{N}\}. \tag{14.129c}$$

Ici $A \Delta B$ est la différence symétrique de A et B, définition 1.27.

(2) L'ensemble $\hat{\mathcal{F}} = \mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C}$ est une tribu.

(3) La définition

$$\begin{aligned} \mu' \colon \mathcal{B} &\to [0, \infty] \\ A \cup N &\mapsto \mu(A) \end{aligned} \tag{14.130}$$

est cohérente.

(4) L'application μ' ainsi définie est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.

(5) L'espace $(X, \mathcal{A}, \mu')$ est complet.

(6) La mesure μ' prolonge μ.

(7) La mesure μ' est minimale au sens où toute mesure complète prolongeant μ prolonge μ'.

Démonstration. Commençons par prouver que les trois ensembles $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont égaux.

(i) ***$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.*** Soit $A \in \mathcal{A}$. Alors nous avons des ensembles $B, C \in \mathcal{F}$ tels que $B \subset A \subset V$ avec $\mu(C \setminus B) = 0$. Alors nous avons aussi $A = B \cup (C \setminus B)$, ce qui prouve que $A \in \mathcal{B}$.

(ii) ***$\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$.*** Soit $A \in \mathcal{B}$, c'est-à-dire que $A = B \cup N$ avec $B \in \mathcal{F}$ et $N \in \mathcal{N}$. Nous avons évidemment $A \cup B = A$ et donc

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \setminus (A \cap B) = (B \cup N) \setminus (A \cap B) \subset N. \tag{14.131}$$

Pour comprendre la dernière inclusion, si x appartient à $A = B \cup N$ sans être dans N alors $x \in B$ et donc $x \in A \cap B$. Par conséquent nous avons $A \Delta B \subset N$ et donc $A \Delta B \in \mathcal{N}$.

(iii) $\underline{\mathcal{C} \subset \mathcal{A}}$ Soit donc $A \in \mathcal{C}$; il existe $B \in \mathcal{F}$ tel que $A\Delta B \in \mathcal{N}$ ou encore, il existe $D \in \mathcal{F}$ tel que $A\Delta B \subset D$ avec $\mu(D) = 0$. Si nous posons $B' = B \cap D^c$ et $C' = B \cup D$ alors nous prétendons avoir

$$B' \subset A \subset C'. \tag{14.132}$$

Et nous le prouvons. En effet si $x \in B \cap D^c$ alors en remarquant que B se divise en

$$B = (B \cap A) \cup \big(B \cap (A\Delta B)\big), \tag{14.133}$$

et en nous souvenant que $B \cap (A\Delta B) \subset D$, il vient que $B \cap D^c \subset B \cap A$. Et en particulier $x \in A$. D'autre part

$$A \subset B \cup (A\Delta B) \subset B \cup D. \tag{14.134}$$

Nous avons donc bien $B' \subset A \subset C'$. Par stabilité de la tribu $\mathcal{F}$ sous les intersections et complémentaires, nous avons aussi $B', C' \in \mathcal{F}$. De plus

$$C' \backslash B' = (B \cup D) \backslash (B \cap D^c) \subset D, \tag{14.135}$$

et donc

$$\mu(C' \backslash B') \leqslant \mu(D) = 0. \tag{14.136}$$

Nous avons donc prouvé que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, et donc que $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C}$. Nous pouvons maintenant noter $\mathcal{A}$ indifféremment les trois ensembles.

Nous prouvons à présent que $\mathcal{A}$ est une tribu.

(i) **Tribu : le vide** Pas de problème à $\varnothing \in \mathcal{A}$

(ii) **Tribu : complémentaire** Soit $A \in \mathcal{A}$. Alors il existe $B, C \in \mathcal{F}$ tels que $B \subset A \subset C$ avec $\mu(C \backslash B) = 0$. En passant au complémentaire,

$$C^c \subset A^c \subset B^c. \tag{14.137}$$

Mais $B^c \backslash C^c = C \backslash B$, donc $\mu(B^c \backslash C^c) = 0$.

(iii) **Tribu : union dénombrable** Soit (A_n) des éléments de $\mathcal{A}$. Pour chaque n nous avons des ensembles $B_n, C_n \in \mathcal{F}$ tels que$B_n \subset A_n \subset C_n$ avec $\mu(C_n \backslash B_n) = 0$. En ce qui concerne les unions nous avons

$$\bigcup_n B_n \subset \bigcup_n A_n \subset \bigcup_n C_n, \tag{14.138}$$

et

$$(\bigcup_n C_n) \backslash (\bigcup_n B_n) \subset \bigcup_n (C_n \backslash B_n). \tag{14.139}$$

Par conséquent, en utilisant (14.27),

$$\mu\left((\bigcup_n C_n) \backslash (\bigcup_n B_n) \right) \leqslant \mu\left(\bigcup_n (C_n \backslash B_n) \right) \leqslant \sum_n \mu(C_n \backslash B_n) = 0. \tag{14.140}$$

Cela prouve que $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$, et donc que $\mathcal{A}$ est une tribu.

(iv) **Définition cohérente** Soient $A, A' \in \mathcal{F}$ et $N, N' \in \mathcal{N}$ tels que $A \cup N = A' \cup N'$. Nous considérons $Y, Y' \in \mathcal{F}$ tel que $N \subset Y$, $N' \subset Y'$ et $\mu(Y) = \mu(Y') = 0$. En vertu de (14.27) nous avons

$$\mu(A) \leqslant \mu(A \cup Y) \leqslant \mu(A' \cup Y \cup Y') \leqslant \mu(A') + \mu(Y) + \mu(Y') = \mu(A'). \tag{14.141}$$

En écrivant la même chose en échangeant les primes, nous prouvons également $\mu(A') \leqslant \mu(A)$. Au final $\mu(A) = \mu(A')$, c'est-à-dire

$$\mu'(A \cup N) = \mu'(A' \cup N'). \tag{14.142}$$

La définition de μ' est donc cohérente.

(v) <u>**μ' est une mesure**</u> Le fait que μ' soit positive et que $\mu'(\emptyset)$ soit nul ne pose pas de problème. Il faut voir l'union dénombrable disjointe. Si les ensembles $A_i = B_i \cup N_i$ sont disjoints, alors les B_i et le N_i sont tous disjoints deux à deux. De plus l'ensemble $\bigcup_i N_i$ est négligeable parce que nous avons déjà vu que $\mathcal{N}$ était stable par union dénombrable (14.27). Donc

$$\mu'\left(\bigcup_i B_i \cup N_i\right) = \mu'\Big(\big(\bigcup_i B_i\big) \cup \underbrace{\big(\bigcup_i N_i\big)}_{\in\mathcal{N}}\Big) = \mu\big(\bigcup_i B_i\big) = \sum_u \mu(B_i) = \sum_i \mu'(B_i \cup N_i). \tag{14.143}$$

(vi) <u>**Espace complet**</u> Un ensemble μ'-négligeable est automatiquement μ-négligeable. En effet si H est μ'-négligeable, il existe $B \in \mathcal{F}$ et $N \in \mathcal{N}$ tels que $H \subset B \cup N$ avec $\mu(B) = 0$. Comme N est μ-négligeable, il existe $Y \in \mathcal{F}$ tel que $N \subset Y$ et $\mu(Y) = 0$. Donc $H \subset B \cup N \subset B \cup Y$ avec $\mu(B \cup Y) = 0$.

Tous les ensembles μ-négligeables faisant partie de $\mathcal{B}$, tous les ensembles μ'-négligeables font partie de $\mathcal{A}$.

(vii) <u>**Prolongement**</u> La mesure μ' prolonge μ. En effet si $A \in \mathcal{F}$ alors $A = A \cup \emptyset \in \mathcal{B}$ et A est m'-mesurable. De plus $\mu'(A) = \mu'(A \cup \emptyset) = \mu(A)$.

(viii) <u>**Minimalité**</u> Soit un espace mesuré complet $(X, \mathcal{M}, \nu)$ prolongeant $(X, \mathcal{F}, \mu)$. Pour $A \in \mathcal{A}$ nous devons prouver que $A \in \mathcal{M}$ et que $\mu'(A) = \nu(A)$. Il existe $B \in \mathcal{F}$ et $N \in \mathcal{N}$ tels que $A = B \cup N$. Puisque N est μ-négligeable, il est également ν-négligeable et donc ν-mesurable parce que ν est complète : $A \in \mathcal{M}$. Nous avons le calcul

$$\nu(B) \leqslant \nu(B \cup N) \leqslant \nu(B) + \nu(N) = \nu(B). \tag{14.144}$$

Vu que le premier et dernier termes de ces inégalités sont égaux, toutes les inégalités sont des égalités et nous avons $\nu(B) = \nu(B \cup N)$. Nous pouvons enfin faire le calcul

$$\begin{aligned}
\nu(A) &= \nu(B \cup N) && (14.145a)\\
&= \nu(B) && (14.145b)\\
&= \mu(B) && (14.145c)\\
&= \mu'(B \cup N) && (14.145d)\\
&= \mu'(A). && (14.145e)
\end{aligned}$$

Justifications.

— Pour (14.145c). La mesure ν prolonge μ.

— Pour (14.145d). Définition de μ'.

L'égalité $\mu'(A) = \nu(A)$ est prouvée.

□

Définition 14.65.
*L'espace mesuré complet $(X, \mathcal{A}, \mu')$ défini par le théorème 14.64 est l'**espace mesuré complétée** de $(X, \mathcal{F}, \mu)$.*

Nous noterons le complété de $(S, \mathcal{F}, \mu)$ par $(S, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mu})$

Théorème 14.66 (Carathéodory[362])**.**
Soit S un ensemble et m^* une mesure extérieure sur S. Alors

(1) l'ensemble $\mathcal{M}$ des parties m^*-mesurables est une tribu,

(2) la restriction de m^* est une mesure sur $(S, \mathcal{M})$,

(3) l'espace mesuré $(S, \mathcal{M}, m^*)$ est complet[14].

14. Définition 14.63.

Démonstration. Une grosse partie de la preuve sera de prouver la stabilité de $\mathcal{M}$ par union dénombrable quelconque ; cela sera divisé en plusieurs parties.

(i) **Tribu : le vide** L'ensemble vide est m^*-mesurable.

(ii) **Tribu : complémentaire** Soit $A \in \mathcal{M}$ et $X \in S$. La condition qui dirait $A^c \in \mathcal{M}$ est :

$$m^*(X) = m^*(X \cap A^c) + m^*(X \cap A), \tag{14.146}$$

qui est la même que celle qui dit que A est dans $\mathcal{M}$.

(iii) **Tribu : union finie** Soient $A, B \in \mathcal{M}$ et $X \subset S$. Alors, comme m^* est une mesure extérieure,

$$\begin{aligned} m^*(X) &\leqslant m^*\big(X \cap (A \cup B)\big) + m^*\big(X \cap (A \cup B)^x\big) && (14.147a)\\ &= m^*\big((X \cap A) \cup (X \cap B)\big) + m^*\big(X \cap A^c \cap B^c\big). && (14.147b) \end{aligned}$$

Mais nous pouvons écrire la première union sous forme d'une union disjointe de la façon suivante :

$$(X \cap A) \cup (X \cap B) = (X \cap A) \cup (X \cap B \cap A^c), \tag{14.148}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} m^*(X) &\leqslant m^*(X \cap A) + m^*(X \cap B \cap A^c) + m^*(X \cap A^c \cap B^c) && (14.149a)\\ &= m^*(X \cap A) + m^*(X \cap A^c) && (14.149b)\\ &= m^*(X) && (14.149c) \end{aligned}$$

parce que les deux derniers termes de (14.149a) se somment à $m^*(X \cap A^c)$ parce que $B \in \mathcal{M}$. La dernière ligne est le fait que A soit m^*-mesurable.

(iv) **Union finie disjointe** Soient $\{A_1, \ldots, A_n\}$ des éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{M}$. Nous allons maintenant prouver par récurrence que

$$m^*\Big(X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\big)\Big) = \sum_{k=1}^{n} m^*(X \cap A_k). \tag{14.150}$$

Si $n = 1$ le résultat est évident. Sinon, le fait que A_{n+1} soit m^*-mesurable donne

$$m^*\Big(X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\big)\Big) = m^*\Big(X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\big) \cap A_{n+1}\Big) + m^*\Big(X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\big) \cap A_{n+1}^c\Big). \tag{14.151}$$

Le fait que les A_k soient disjoints implique aussi que

$$X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\big) \cap A_{n+1} = X \cap A_{n+1} \tag{14.152}$$

et

$$X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\big) \cap A_{n+1}^c = X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\big) \tag{14.153}$$

et donc

$$\begin{aligned} m^*\Big(X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\big)\Big) &= m^*(X \cap A_{n+1}) + m^*\Big(X \cap \big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\big)\Big) && (14.154a)\\ &\overset{rec.}{=} m^*(X \cap A_{n+1}) + \sum_{k=1}^{n} m^*(X \cap A_k) && (14.154b)\\ &= \sum_{k=1}^{n+1} m^*(X \cap A_k). && (14.154c) \end{aligned}$$

La relation (14.150) est prouvée.

Notons qu'en particularisant à $X = S$ nous avons

$$m^*\big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\big) = \sum_{k=1}^{n} m^*(A_k) \tag{14.155}$$

dès que les A_k sont des éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{M}$.

(v) **Union dénombrable disjointe** Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints dans $\mathcal{M}$. Nous allons prouver les affirmations suivantes :

— $\bigcup_n A_n \in \mathcal{M}$

— $m^*\big(\bigcup_n A_n\big) = \sum_n m^*(A_n)$

où toutes les sommes et unions sur n sont entre 1 et ∞.

(i) **Première affirmation** Nous posons $A = \bigcup_k A_k$ et $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Nous savons que $B_n \in \mathcal{M}$ pour tout n par le point précédent. Donc si $X \in S$ nous avons

$$\begin{aligned}
m^*(X) &= m^*(X\cap B_n) + m^*(X\cap B_n^c) && (14.156a)\\
&= \sum_{k=1}^{n} m^*(X\cap A_k) + m^*(X\cap B_n^x) && (14.156b)\\
&\geqslant \sum_{k=1}^{n} m^*(X\cap A_k) + m^*(X\cap A^c) && (14.156c)
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la relation (14.150) sur les B_n ainsi que le fait que $A^c\subset B_n^c$ (parce que $B_n\subset A$). L'inégalité (14.156a) étant vraie pour tout n, elle est vraie à la limite :

$$\begin{aligned}
m^*(X) &\geqslant \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A\cap A_k) + m^*(X\cap A^c) && (14.157a)\\
&\geqslant m^*\Big(\bigcup_k (X\cap A_k)\Big) + m^*(X\cap A^c) = m^*\Big(X\cap\big(\bigcup_k A_k\big)\Big) + m^*(X\cap A^c) && (14.157b)\\
&\geqslant m^*(X\cap A) + m^*(X\cap A^c), && (14.157c)
\end{aligned}$$

ce qui signifie que $A\in\mathcal{M}$.

(ii) **Seconde affirmation** En particularisant à $X = A$ et en tenant compte des faits que $A\cap A_k = A_k$ et $A\cap A^c = \varnothing$,

$$m^*(A) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A\cap A_k) + m^*(A\cap A^c), \tag{14.158}$$

c'est-à-dire que pour tout n nous avons

$$m^*\big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\big) \geqslant \sum_{k=1}^{n} m^*(A_k). \tag{14.159}$$

L'inégalité est encore vraie à la limite, et l'inégalité inverse étant toujours vraie pour une mesure extérieure,

$$m^*\big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\big) = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A_k). \tag{14.160}$$

(vi) **Union dénombrable quelconque** Soit maintenant une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}$ que nous ne supposons plus être disjoints. Nous nous ramenons au cas disjoint en posant

$$\begin{cases}
B_1 = A_1 & (14.161a)\\
B_n = A_n\cap\big(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\big)^c, & (14.161b)
\end{cases}$$

c'est-à-dire que nous mettons dans B_n les éléments de A_n qui ne sont dans aucun des A_k précédents. Autrement dit, nous posons $B_0 = \emptyset$ et $B_n = A_n \backslash B_{n-1}$. L'ensemble $\mathcal{M}$ étant stable par réunion finie, par complément et par intersection finie nous avons $B_n \in \mathcal{M}$. De plus les B_n sont disjoints, donc

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{M}. \tag{14.162}$$

La première égalité se justifie de la façon suivante : si $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ alors nous notons n_0 le plus petit n tel que $x \in A_n$ et alors $x \in B_{n_0}$.

(vii) **Espace complet** Nous prouvons à présent que $(S, \mathcal{M}, m^*)$ est un espace mesuré complet. Soit N une partie m^*-négligeable de S et $Y \in \mathcal{M}$ tel que $m^*(Y) = 0$ et $N \subset Y$. D'abord $m^*(N) = 0$ parce que

$$m^*(N) \leqslant m^*(Y) = 0. \tag{14.163}$$

Si $X \subset S$ nous avons

$$X \cap N \subset N \Rightarrow m^*(X \cap N) = 0 \tag{14.164a}$$

$$X \cap N^c \subset X \Rightarrow m^*(X \cap N^c) \leqslant m^*(X). \tag{14.164b}$$

Donc

$$m^*(X \cap N) + m^*(X \cap N^c) \leqslant m^*(X), \tag{14.165}$$

ce qui montre que N est est m^*-mesurable.

□

14.67.
Ce théorème nous pousse à adopter des éléments de notation. Lorsqu'un espace mesuré $(S, \mathcal{F}, \mu)$ est donné, nous noterons

$$(S, \mathcal{M}, \mu^*) \tag{14.166}$$

l'espace mesuré construit de la façon suivante. D'abord μ^* est la mesure extérieure associée à μ par la proposition 14.33. Ensuite $\mathcal{M}$ est la tribu des parties μ^*-mesurables, qui est bien une tribu parce que μ^* est une mesure extérieure (14.66). La proposition (14.36) dit alors que $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$. De plus 14.66 nous explique que si $A \in \mathcal{F}$ alors $\mu(A) = \mu^*(A)$. Tout cela pour dire que

$$(S, \mathcal{F}, \mu) \subset (S, \mathcal{M}, \mu^*). \tag{14.167}$$

Et enfin, 14.66 nous dit que l'espace mesuré $(S, \mathcal{M}, \mu^*)$ est complet.

Exemple 14.68.
Montrons un cas dans lequel $(S, \mathcal{M}, \mu^*)$ n'est pas σ-fini. Soit S un ensemble non dénombrable et $\mathcal{F}$ la tribu des parties de S qui sont, soit finis ou dénombrables, soit de complémentaire fini ou dénombrable. Nous y mettons la mesure

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est au plus dénombrable} \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases} \tag{14.168}$$

Cette mesure n'est pas σ-finie parce qu'aucune union de dénombrables est non dénombrable. De plus $(S, \mathcal{F}, \mu)$ est complet parce que toute partie contenue dans un ensemble fini ou dénombrable est fini ou dénombrable (1.136).

(i) **$\mathcal{F}$ n'est pas $\mathcal{P}(S)$** La tribu $\mathcal{F}$ est différente de $\mathcal{P}(S)$. En effet S étant infini, il existe par 1.147 une bijection $\varphi \colon \{1, 2\} \times S \to S$. Alors l'ensemble $\varphi(\{1\} \times S)$ est non dénombrable et son complémentaire

$$\varphi\big(\{1\} \times S\big)^c = \varphi\big(\{2\} \times S\big) \tag{14.169}$$

n'est pas dénombrable non plus. Cet ensemble n'est donc pas de $\mathcal{F}$.

(ii) $\mathcal{M}$ **est** $\mathcal{P}(S)$ En effet, soit $A \subset S$; il faut prouver que pour tout $X \subset S$ nous avons

$$\mu^*(X) = \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c). \tag{14.170}$$

Nous prouvons cela en séparant les cas, suivant que X est dénombrable ou non.

Si X est fini ou dénombrable, alors $X \cap A$ et $X \cap A^c$ le sont également, et nous avons $\mu^*(X) = \mu(X) = 0$ ainsi que $\mu^*(X \cap A) = \mu^*(X \cap A^c) = 0$.

Si au contraire X n'est pas dénombrable,

$$\mu^*(X) = \inf_{\substack{A\in\mathcal{F}\\ X\subset A}} \mu(A) = \infty, \tag{14.171}$$

parce que X n'étant pas dénombrable, l'ensemble A ne l'est pas non plus et $\mu(A) = \infty$. Mais comme X n'est pas dénombrable, soit $X \cap A$, soit $X \cap A^c$ (soit les deux) n'est pas dénombrable non plus ; par conséquent

$$\mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c) = \infty. \tag{14.172}$$

Par conséquent $(S, \mathcal{F}, \mu) \neq (S, \mathcal{M}, \mu^*)$. Mais puisque $(S, \mathcal{F}, \mu)$ est complété nous devons avoir $(S, \mathcal{F}, \mu) = (S, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mu})$. Tout cela pour dire que nous avons un exemple avec

$$(S, \mathcal{M}, \mu^*) \neq (S, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mu}). \tag{14.173}$$

△

Nous avons deux façons de créer un espace complet à partir de $(S, \mathcal{F}, \mu)$.

(1) Partir de la mesure extérieure μ^* et construire $(S, \mathcal{M}, \mu^*)$.

(2) Partir des ensembles μ-négligeables, construire $\hat{\mathcal{F}}$ et ensuite $(S, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mu})$.

Ces deux façons ne sont pas équivalentes en général comme le montre l'exemple 14.68. Mais il sera montré par la proposition 14.72 que si $(S, \mathcal{F}, \mu)$ est σ-fini alors les deux sont équivalent.

Lemme 14.69.
Soit $(S, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Alors pour tout $X \subset S$ tel que $\mu^*(X) < \infty$ il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $X \subset A$ et $\mu^*(X) = \mu(A)$.

C'est-à-dire que μ^* a beau être défini sur toutes les parties de S, ce qu'il faut rajouter pour être μ-mesurable, c'est pas grand chose.

Démonstration. Par définition de la mesure extérieure associée à μ en tant qu'infimum, pour tout $n \geqslant 1$, il existe $A_n \in \mathcal{F}$ tel que $X \subset A_n$ et $\mu(A_n) \leqslant \mu^*(X) + \frac{1}{2^n}$. Nous posons $A = \bigcap_{n\geqslant 1} A_n$ et nous vérifions que ce A fait l'affaire.

D'abord $A \in \mathcal{F}$ parce qu'une tribu est stable par union dénombrable. Ensuite pour tout $n \geqslant 1$ nous avons

$$\mu(A) \leqslant \mu(A_n) \leqslant \mu^*(X) + \frac{1}{2^n}, \tag{14.174}$$

et à la limite $\mu(A) \leqslant \mu^*(X)$. Mais $X \subset A$ implique $\mu^*(X) \leqslant \mu(A)$ parce que $\mu^*(X)$ l'infimum d'un ensemble contenant $\mu(A)$. □

Corolaire 14.70.
Soit une mesure μ et la mesure extérieure μ^* associée[15]*. Une partie N de X est négligeable si et seulement si $\mu^*(N) = 0$.*

Démonstration. Si μ^* est la mesure extérieure associée à μ et si N est μ-négligeable alors $\mu^*(N) = 0$ parce que

$$\mu^*(N) \leqslant \mu^*(Y) = \mu(Y) = 0 \tag{14.175}$$

pour un certain Y mesurable de mesure nulle contenant N.

D'autre part si $\mu^*(N) = 0$ alors le lemme 14.69 donne une partie mesurable A telle que $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$, c'est-à-dire que N est négligeable. □

15. Par la proposition 14.33.

Lemme 14.71.
Si l'espace mesuré $(S, \mathcal{F}, \mu)$ est σ-fini alors l'espace mesuré $(S, \mathcal{M}, \mu^*)$ est également σ-fini.

Démonstration. Puisque $(S, \mathcal{F}, \mu)$ est σ-fini, nous avons une suite croissante A_n d'éléments de $\mathcal{F}$ tels que $\bigcup_n A_n = S$ et telle que $\mu(A_n) < \infty$ pour tout n. Étant donné que $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$, cette suite convient également pour montrer que $(S, \mathcal{M}, \mu^*)$ est σ-fini parce que $\mu^*(A_n) = \mu(A_n) < \infty$. □

La proposition suivante montre que si $(S, \mathcal{F}, \mu)$ est σ-finie alors nous avons l'égalité.

Proposition 14.72.
Soit $(S, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini, μ^* la mesure extérieure associée et $\mathcal{M}$ la tribu des ensembles μ^*-mesurables[16]*. Alors*

$$(S, \mathcal{M}, \mu^*) = (S, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mu}). \tag{14.176}$$

Démonstration. La proposition 14.36 indique que tous les éléments de $\mathcal{F}$ sont μ^*-mesurables, c'est-à-dire que $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$. Mais l'espace $(S, \mathcal{M}, \mu^*)$ est complet par le théorème de Carathéodory 14.66, donc par minimalité du complété (14.64(7)),

$$(S, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mu}) \subset (S, \mathcal{M}, \mu^*) \tag{14.177}$$

au sens où $\hat{\mathcal{F}} \subset \mathcal{M}$ et si $A \in \hat{\mathcal{F}}$ alors $\hat{\mu}(A) = \mu^*(A)$. Notons que cette inclusion est vraie même si la mesure n'est pas σ-finie.

Nous passons à l'inclusion inverse. Soit $A \in \mathcal{M}$, c'est-à-dire que pour tout $Y \subset S$ nous avons

$$\mu^*(Y) = \mu^*(Y \cap A) + \mu^*(Y \cap A^c). \tag{14.178}$$

Nous allons montrer que $A \in \hat{\mathcal{F}}$ en séparant les cas suivant que $\mu^*(A) = \infty$, ou non.

(i) <u>**Si** $\mu^*(A) < \infty$</u> Par le lemme 14.69, il existe $X \in \mathcal{F}$ tel que $A \subset X$ et $\mu^*(A) = \mu(X)$. Comme $(S, \mathcal{F}, \mu) \subset (S, \mathcal{M}, \mu^*)$ nous avons alors

$$\mu^*(A) = \mu(X) = \mu^*(X). \tag{14.179}$$

Nous écrivons la relation (14.178) avec ce X en guise de Y, et en nous souvenant que $X \cap A = A$ et $X \cap A^c = X \backslash A$:

$$\mu^*(X) = \mu^*(A) + \mu^*(X \backslash A). \tag{14.180}$$

En tenant compte de (14.179) et du fait que $\mu^*(A) < \infty$, nous pouvons simplifier et trouver $\mu^*(X \backslash A) = 0$. Le lemme 14.69 nous donne alors $B \in \mathcal{F}$ tel que $X \backslash A \subset B$ et $\mu(B) = \mu^*(X \backslash A) = 0$, c'est-à-dire que $X \backslash A$ est μ-négligeable. Par conséquent $X \backslash A \in \hat{\mathcal{F}}$. En écrivant

$$A = X \backslash (X \backslash A), \tag{14.181}$$

nous avons écrit A comme différence de deux éléments de $\hat{\mathcal{F}}$ et nous concluons que $A \in \hat{\mathcal{F}}$.

(ii) <u>**Si** $\mu^*(A) < \infty$</u> Le lemme 14.71 nous indique que $(S, \mathcal{M}, \mu^*)$ est σ-fini et il existe donc une suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$ dans $\mathcal{M}$ telle que $\bigcup_n S_n = S$ et $\mu^*(S_n) < \infty$. L'ensemble $A \cap S_n$ est un élément de $\mathcal{M}$ vérifiant

$$\mu^*(A \cap S_n) \leqslant \mu^*(A) < \infty, \tag{14.182}$$

ce qui implique que $A \cap S_n \in \hat{\mathcal{F}}$ par la première partie. Maintenant $A = \bigcup_n (A \cap S_n) \in \hat{\mathcal{F}}$ par union dénombrable d'éléments de la tribu $\hat{\mathcal{F}}$.

□

Proposition 14.73 ([1]).
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Nous considérons un mesurable $M \in \mathcal{F}$ ainsi que

— *la tribu induite $\mathcal{F}_M = \{A \cap M \text{ tel que } A \in \mathcal{F}\}$,*

16. C'est bien une tribu par 14.66(1).

— *la tribu complétée* $\hat{\mathcal{F}}$ *de* $\mathcal{F}$ *dans* Ω*,*

— *la tribu complétée* $\widehat{\mathcal{F}_M}$ *de* $\mathcal{F}_M$ *dans* M *(où nous avons considéré la mesure restreinte*[17] *de* μ*).*

— *la tribu induite* $(\hat{\mathcal{F}})_M = \{A \cap M \text{ tel que } A \in \hat{\mathcal{F}}\}$ *de* $\hat{\mathcal{F}}$ *sur* M*.*

Alors

$$(\hat{\mathcal{F}})_M = \widehat{\mathcal{F}_M}. \tag{14.183}$$

Démonstration. L'utilisation de la proposition 14.7 nous donne déjà les expressions alternatives

$$(\hat{\mathcal{F}})_M = \{A \cap M \text{ tel que } A \in \hat{\mathcal{F}}\} = \{A \subset M \text{ tel que } A \in \hat{\mathcal{F}}\} \tag{14.184}$$

et

$$\mathcal{F}_M = \{A \cap M \text{ tel que } A \in \mathcal{F}\} = \{A \subset M \text{ tel que } A \in \mathcal{F}\}. \tag{14.185}$$

Pour prouver $(\hat{\mathcal{F}})_M = \widehat{\mathcal{F}_M}$ il faudra faire deux inclusions, et nous avons l'embarras du choix.

(i) **Première : $\widehat{\mathcal{F}_M} \subset \{M \cap A$ tel que $A \in \hat{\mathcal{F}}\}$** Un élément de $\widehat{\mathcal{F}_M}$ est de la forme $B \cup N$ où $B \in \mathcal{F}_M$ et où N est négligeable[18] dans M. Vu que $B \in \mathcal{F}_M$, il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $B = A \cap M$. Vu que B et N sont dans M nous pouvons « factoriser » l'intersection :

$$B \cup N = M \cap (A \cup N) \tag{14.186}$$

avec N négligeable dans M et donc également négligeable dans Ω. Donc $A \cup N \in \hat{\mathcal{F}}$.

(ii) **Deuxième : $\{M \cap A$ tel que $A \in \hat{\mathcal{F}}\} \subset \widehat{\mathcal{F}_M}$** Soit $A \in \hat{\mathcal{F}}$. Nous avons une partie négligeable N de Ω et un élément $B \in \mathcal{F}$ tels que $A = B \cup N$. Nous avons la décomposition

$$M \cap (B \cup N) = (M \cap B) \cap (M \cap N). \tag{14.187}$$

Il s'agit maintenant de nous assurer que cette décomposition implique que $M \cap (B \cup N) \in \widehat{\mathcal{F}_M}$. Soit $N_1 \in \mathcal{F}$ tel que $\mu(N_1) = 0$ et $N \subset N_1$. Puisque $M \cap N_1 \in \mathcal{F}$ (intersections dans une tribu), nous pouvons écrire

$$M \cap N \subset M \cap N_1 \tag{14.188}$$

avec $\mu(M \cap N_1) = 0$. Cela pour dire que $M \cap N$ est négligeable dans M. La décomposition (14.187) est donc bien une union d'un élément de $\mathcal{F}_M$ avec un négligeable de M, et donc bien un élément de $\widehat{\mathcal{F}_M}$.

□

14.74.
La principale application de la proposition 14.73 est le cas où $\mathcal{F} = \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}^n)$ et M est un borélien B de $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas, la proposition explique que la tribu de Lebesgue sur B (complétée depuis les boréliens de la topologie induite) est donnée directement par l'intersection entre B et la tribu de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$. Donc sans devoir passer par la topologie induite, les boréliens et la completion :

$$\mathcal{L}\text{eb}(\mathbb{R}^n)_M = \widehat{\mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R}^n)_M}. \tag{14.189}$$

Exemple dans la proposition 18.65 qui donne une structure d'espace mesuré dans S^1 à partir de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$.

17. Ce n'est pas ce qu'il se passe dans le cas de S^1 par rapport à $\mathbb{C}$, voir la proposition 18.67(3) bien que S^1 soit un borélien de $\mathbb{C}$.

18. Pour rappel, une partie est négligeable quand elle est inclue à une partie de mesure nulle.

14.5.2 Prolongement

Le théorème suivant est parfois nommé théorème d'extension de Carathéodory, par exemple sur Wikipédia. Le théorème de Carathéodory en étant un des ingrédients principaux, on comprend.

Théorème 14.75 (Prolongement de Hahn[362])**.**
Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de parties d'un ensemble S et μ une mesure sur $(S, \mathcal{A})$. Soit $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$ la tribu engendrée par $\mathcal{A}$. Alors

(1) La mesure μ se prolonge en une mesure m sur $\mathcal{F}$.

(2) Si μ est σ-finie alors le prolongement est unique et m est σ-finie.

(3) Si μ est finie, alors m l'est aussi.

Démonstration. La proposition 14.15 nous donne une mesure extérieure μ^* sur S dont la restriction à $\mathcal{A}$ est μ. Si $\mathcal{M}$ est la tribu des parties μ^*-mesurables de S alors le théorème de Carathéodory 14.66 nous dit que $(S, \mathcal{M}, \mu^*)$ est un espace mesuré.

(i) $\underline{\mathcal{A} \subset \mathcal{M}}$ Cette partie est une adaptation de ce qui a déjà été fait dans la preuve de la proposition 14.36. Soit $A \in \mathcal{A}$ et $X \in S$; nous devons prouver la relation de la définition 14.34. Comme μ^* est une mesure extérieure nous avons automatiquement

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c). \tag{14.190}$$

Il reste à prouver l'inégalité inverse. Soit une suite B_k d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $X \subset \bigcup_k B_k$; nous avons alors

$$\mu^*(X \cap A) \leqslant \mu^*\big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \cap A\big) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(B_k \cap A) = \sum_k \mu(B_k \cap A) \tag{14.191}$$

où nous avons utilisé la définition 14.8(3) ainsi que le lemme 14.13. De la même façon,

$$\mu^*(X \cap A^c) \leqslant \sum_k \mu(B_k \cap A^c). \tag{14.192}$$

Mettant les deux bouts ensemble, en remarquant que $B_k \cap A \in \mathcal{A}$ et donc que $\mu^*(B_k \cap A) = \mu(B_k \cap A)$,

$$\mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c) \leqslant \sum_k \mu(B_k \cap A) + \mu(B_k \cap A^c) = \sum_k \mu(B_k). \tag{14.193}$$

La somme $\mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c)$ est donc inférieure à chacun des éléments de l'ensemble sur lequel on prend l'infimum pour définir [19] $\mu^*(X)$, donc

$$\mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c) \leqslant \mu^*(X). \tag{14.194}$$

A fortiori nous avons $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}$ et donc $(S, \sigma(\mathcal{A}), \mu^*)$ est un espace mesuré. Cela prouve l'existence d'une mesure prolongeant μ à $\sigma(\mathcal{A})$.

(i) **Unicité** Nous supposons à présent que μ est σ-finie. Soient m_1 et m_2 deux mesures prolongeant μ et définies sur une tribu contenant $\mathcal{A}$. Nous posons

$$\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{A} \text{ tel que } \mu(A) < \infty\}. \tag{14.195}$$

Dans l'optique d'utiliser le théorème d'unicité des mesures 14.29, nous prouvons que $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{C})$. Vu que μ est σ-finie, il existe une suite croissante (S_n) d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $S = \bigcup_n S_n$ et $\mu(S_n) < \infty$. Alors si $A \in \mathcal{A}$ nous avons $A = \bigcup_n (A \cap S_n)$, et donc $A \in \sigma(\mathcal{C})$. Donc $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{C})$. Mais étant donné que $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ nous avons aussi $\sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{A})$. Au final $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{C})$.

19. Définition 14.17.

Les mesures m_1 et m_2 sont des mesures sur $\sigma(\mathcal{C})$ coïncidant sur $\mathcal{C}$ (parce que $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$). De plus la classe $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie et contient une suite croissante dont l'union est S (parce que μ est σ-finie).

Le théorème 14.29 nous dit alors que m_1 et m_2 coïncident sur $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{A})$.

(ii) **Extension finie et σ-finie** Enfin si μ est σ-finie il existe $S_n \in \mathcal{A}$ avec $\mu(S_n) < \infty$ et $\bigcup_n S_n = S$. Ces ensembles vérifient tout autant $m(S_n) = \mu(S_n) < \infty$ pour tout prolongement m de μ.

Idem si μ est finie, tout prolongement est fini.

□

Exemple 14.76 ([362]).
Soit $\mathcal{A}$, l'algèbre de parties de $\mathbb{R}$ formée par les réunions finies d'intervalles de la forme $]-\infty, a[$, $[a, b[$ et $[b, +\infty[$ avec $-\infty < a \leqslant b < +\infty$. Notons que les singletons ne font pas partie de $\mathcal{A}$ parce que $[a, a[= \varnothing$. Nous posons

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \varnothing \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases} \tag{14.196}$$

Cela donne une mesure (non σ-finie) sur $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$.

Nous allons prouver que la tribu engendrée par $\mathcal{A}$ est la tribu des boréliens et que μ accepte (au moins) deux prolongements distincts à $\sigma(\mathcal{A})$.

D'abord nous avons

$$]a, b[= \big(-\infty, a[\cup [b, +\infty[\big) \cap [a, b[, \tag{14.197}$$

donc toutes les boules ouvertes appartiennent à $\sigma(\mathcal{A})$. Ces dernières comprenant une base dénombrable de la topologie de $\mathbb{R}$ (par la proposition 7.118), tous les ouverts de $\mathbb{R}$ sont dans $\sigma(\mathcal{A})$. Par conséquent $\mathcal{B}or(\mathbb{R}) \subset (\mathbb{R}^d)$. Mais en même temps tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont des boréliens, donc $\mathcal{B}or(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{A})$ parce que la fermeture en tant qu'algèbre de parties est plus petite que la fermeture en tant que tribu.

La mesure de comptage prolonge μ parce qu'à part l'ensemble vide, tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont infinis. Notons que les singletons sont dans $\sigma(\mathcal{A})$, donc la mesure de comptage prend d'autres valeurs que 0 et $+\infty$.

Par ailleurs la mesure

$$\mu'(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \varnothing \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \tag{14.198}$$

est également une mesure prolongeant μ à $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}or(\mathbb{R})$.

La mesure de comptage et μ' sont deux prolongements distincts de μ. △

Exemple 14.77 ([362]).
Nous montrons maintenant une mesure non σ-finie qui se prolonge en deux mesures distinctes, toutes deux σ-finies.

Nous considérons la même algèbre $\mathcal{A}$ de parties que celle donnée dans l'exemple 14.76, mais cette fois vue sur $\mathbb{Q}$ uniquement. La mesure de comptage m sur $(\mathbb{Q}, \mathcal{A})$ n'est pas σ-finie.

Puisque les singletons sont des boréliens, nous avons $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$, ce qui fait que $(\mathbb{Q}, \sigma(\mathcal{A}), m)$ est un prolongement σ-fini de m. L'espace mesuré $(\mathbb{Q}, \sigma(\mathcal{A}), 2m)$ est également σ-fini et est un prolongement distinct de $(\mathbb{Q}, \mathcal{A}, m)$. △

Proposition 14.78.
Soient des espaces mesurés $(S_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ et $(S_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ ainsi qu'une application $\varphi\colon S_1 \to S_2$ avec les hypothèses suivantes :

(1) φ est une bijection,

(2) φ est mesurable d'inverse mesurable,

(3) si $\mu_1(A) = 0$ alors $\mu_2\big(\varphi(A)\big) = 0$,

(4) si $\mu_2(A) = 0$ alors $\mu_1\big(\varphi^{-1}(A)\big) = 0$.

Alors

$$\hat{\mathcal{F}}_2 = \varphi(\hat{\mathcal{F}}_1). \tag{14.199}$$

Démonstration. Nous prouvons que $\hat{\mathcal{F}}_1 \subset \varphi(\hat{\mathcal{F}}_1)$. Vu la symétrie des hypothèses, l'inclusion inverse se fera de même.

Soit $A \in \hat{\mathcal{F}}_2$. Nous avons $A = B \cup N$ avec $B \in \mathcal{F}_2$ et N, une partie μ_2-négligeable. Nous considérons $N_1 \in \mathcal{F}_2$ tel que $\mu_2(N_1) = 0$ et $N \subset N_1$. Notre but est maintenant de prouver que $\varphi^{-1}(B \cup N) \in \hat{\mathcal{F}}_1$.

Comme φ est une bijection, nous avons

$$\varphi^{-1}(B \cup N) = \varphi^{-1}(B) \cup \varphi^{-1}(N). \tag{14.200}$$

Là-dedans, $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1$ parce que φ est borélienne. Il nous reste à voir que $\varphi^{-1}(N)$ est μ_1-négligeable. Puisque $N \subset N_1$, nous avons $\varphi^{-1}(N) \subset \varphi^{-1}(N_1)$ où $\varphi^{-1}(N_1) \in \mathcal{F}_1$.

Par construction, $\mu_2(N_1) = 0$ et par hypothèse, $\mu_1\big(\varphi^{-1}(N_1)\big) = 0$.

Au total,

$$\varphi^{-1}(B \cup N) = \underbrace{\varphi^{-1}(B)}_{\in \mathcal{F}_1} \cup \underbrace{\varphi^{-1}(N)}_{\mu_1\text{-négligeable}} \in \hat{\mathcal{F}}_1. \tag{14.201}$$

□

14.5.3 Mesure image

Le produit d'une mesure par une fonction est défini par la propriété 14.195.

Proposition-Définition 14.79 (Mesure image[367])**.**
Soient $(S_1, \mathcal{F}_1)$ et $(S_2, \mathcal{F}_2)$ des espaces mesurables. Soit $\varphi \colon S_1 \to S_2$ une application mesurable. Si m_1 est une mesure positive sur S_1 alors l'application définie par

$$m_2(A_2) = m_1\big(\varphi^{-1}(A_2)\big) \tag{14.202}$$

est une mesure positive sur $(S_2, \mathcal{F}_2)$.

*La mesure m_2 ainsi définie est la **mesure image** de m_1 par l'application φ. Elle est notée $\varphi(m_1)$.*

Démonstration. Il y a deux choses à vérifier pour avoir une mesure positive[20]. D'abord pour l'ensemble vide :

$$m_2(\varnothing) = m_1\big(\varphi^{-1}(\varnothing)\big) = m_1(\varnothing) = 0. \tag{14.203}$$

Ensuite pour l'additivité. Soient A_n dans $\mathcal{F}_2$ des parties deux à deux disjointes et telles que $\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}_2$. Alors nous avons

$$\begin{aligned}
m_2\big(\bigcup_n A_n\big) &= m_1\Big(\varphi^{-1}\big(\bigcup_n A_n\big)\Big) && (14.204a)\\
&= m_1\big(\bigcup_n \varphi^{-1}(A_n)\big) && (14.204b)\\
&= \sum_n m_1\big(\varphi(A_n)\big) && (14.204c)\\
&= \sum_n m_2(A_n). && (14.204d)
\end{aligned}$$

□

Lemme 14.80.
Soient deux espaces mesurables $(S_1, \mathcal{F}_1)$ et $(S_2, \mathcal{F}_2)$ ainsi que deux mesures μ et ν sur $(S_1, \mathcal{F}_1)$. Si $\varphi \colon S_1 \to S_2$ est mesurable et si $\mu \leqslant \nu$ alors $\varphi(\mu) \leqslant \varphi(\nu)$.

20. Définition 14.16

Démonstration. Soit B mesurable dans $(S_2, \mathcal{F}_2)$ (c'est-à-dire $B \in \mathcal{F}_2$). Alors

$$\varphi(\mu)(B) = \mu\big(\varphi^{-1}(B)\big) \leqslant \nu\big(\varphi^{-1}(B)\big) = \varphi(\nu)(B). \tag{14.205}$$

□

Il est naturel de se demander comment il faut intégrer par rapport à une mesure image. La réponse sera dans le théorème 14.202.

14.5.4 Régularité d'une mesure

Certaines mesures ont de la compatibilité avec la topologie. Nous allons étudier ça.

Théorème 14.81 ([367]).
Soit X un espace métrique et m une mesure positive bornée sur $\big(X, \mathcal{B}or(X)\big)$. Alors si B est un borélien,

(1) Régularité extérieure : $m(B) = \inf\{m(\Omega) \text{où } \Omega \text{ est un ouvert contenant } B\}$

(2) Régularité intérieure : $m(B) = \sup\{m(F) \text{où } F \text{ est un fermé, } F \subset B\}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des $B \in \mathcal{B}\text{or}(X)$ tels que pour tout $\epsilon > 0$, il existe Ω_ϵ ouvert et F_ϵ fermé tels que $F_\epsilon \subset B \subset \Omega_\epsilon$ et $m(\Omega_\epsilon \backslash F_\epsilon) \leqslant \epsilon$. Nous allons montrer que $\mathcal{F}$

— est une tribu

— contient les ouverts

— est inclus à la tribu borélienne (ça c'est dans la définition de $\mathcal{F}$).

De ces trois points nous déduirons que $\mathcal{F} = \mathcal{B}\text{or}(X)$.

(i) **$\mathcal{F}$ contient les ouverts** Soit Ω un ouvert de X. Alors Ω^c est fermé et $d(x, \Omega^c) = 0$ si et seulement si $x \in \Omega^c$ par la proposition 7.260. Nous pouvons donc écrire

$$\Omega^c = \bigcap_{n \geqslant 1} \{x \in X \text{ tel que } d(x, \Omega^c) < \frac{1}{n}\}. \tag{14.206}$$

En passant au complémentaire et en posant $F_n = \{x \in X \text{ tel que } d(x, \Omega^c) \geqslant \frac{1}{n}\}$ nous avons

$$\Omega = \bigcup_{n \geqslant 1} F_n. \tag{14.207}$$

Chacun des F_n est fermé parce que F_n est l'image réciproque du fermé $[\frac{1}{n}, \infty[$ par l'application $x \mapsto d(x, \Omega^c)$ qui est continue. De plus les F_n forment une suite croissante, donc le lemme 14.19 nous assure que $m(\Omega) = \lim_{n \to \infty} m(F_n)$. Et le lemme 14.18 que $m(\Omega \backslash F_n) = m(\Omega) - m(F_n)$.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe alors $n_\epsilon \geqslant 1$ tel que

$$m(\Omega \backslash F_n) = m(\Omega) - m(F_n) \leqslant \epsilon. \tag{14.208}$$

Bref si Ω est ouvert nous considérons $\Omega_\epsilon = \Omega$ et $F_\epsilon = F_{n_\epsilon}$ et nous avons

$$F_\epsilon \subset \Omega \subset \Omega_\epsilon \tag{14.209}$$

avec $m(\Omega_\epsilon \backslash F_\epsilon) \leqslant \epsilon$.

L'ensemble $\mathcal{F}$ contient les ouverts.

(ii) **$\mathcal{F}$ est une tribu** Il y a à vérifier les trois conditions de la définition 14.1.

(i) **Les ensembles faciles** Les ensembles X et $\varnothing$ sont dans $\mathcal{F}$ parce qu'ils sont ouverts et fermés.

(ii) **Complémentaire** Soit $B \in \mathcal{F}$, soit $\epsilon > 0$ et les ensembles F_ϵ et Ω_ϵ qui vont avec. Alors en passant au complémentaire nous avons

$$\Omega_\epsilon^c \subset B^c \subset F_\epsilon^c \tag{14.210}$$

De plus

$$F_\epsilon^c \backslash \Omega_\epsilon^c = F_\epsilon^c \cap (\Omega_\epsilon^c)^c = F_\epsilon^c \cap \Omega_\epsilon = \Omega_\epsilon \backslash F_\epsilon. \tag{14.211}$$

Par conséquent

$$m(F_\epsilon^c \backslash \Omega_\epsilon^c) = m(\Omega_\epsilon \backslash F_\epsilon) \leqslant \epsilon. \tag{14.212}$$

Cela montre que $B^c \in \mathcal{F}$.

(iii) **Union dénombrable** Soient (B_n) une suite d'éléments de $\mathcal{F}$ et $\epsilon > 0$. Pour chaque n nous choisissons un ouvert Ω_n et un fermé F_n tels que $F_n \subset B_n \subset \Omega_n$ et

$$m(\Omega_n \backslash F_n) \leqslant \frac{\epsilon}{2^{n+2}}. \tag{14.213}$$

Puisque $\Omega_n \backslash B_n \subset \Omega_n \backslash F_n$ nous avons aussi

$$m(\Omega_n \backslash B_n) \leqslant m(\Omega_n \backslash F_n) \leqslant \frac{\epsilon}{2^{n+2}}. \tag{14.214}$$

Nous posons $\Omega = \bigcup_{n\geqslant 1} \Omega_n$ (un ouvert) et $B = \bigcup_{n\geqslant 1} B_n$ ainsi que $A = \bigcup_{n\geqslant 1} F_n$ (qui n'est pas spécialement fermé).

Le but est de majorer $m(\Omega \backslash F)$ où F est un fermé qui est encore à déterminer. Calculons déjà ceci :

$$\begin{aligned}
\Omega \backslash B &= \bigcup_n \Omega_n \cap \big(\bigcup_k B_k\big)^c && (14.215a)\\
&= \bigcup_n \Big(\Omega_n \cap \big(\bigcap_k B_k^c\big)\Big) && (14.215b)\\
&=\subset \bigcup_n \big(\Omega_n \cap B_n^c\big) && (14.215c)\\
&= \bigcup_n (\Omega_n \backslash B_n) && (14.215d)
\end{aligned}$$

où l'union n'est pas spécialement disjointe. Par conséquent,

$$m(\Omega \backslash B) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(\Omega_n \backslash B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{n+2}} = \frac{\epsilon}{4}. \tag{14.216}$$

De la même façon nous avons

$$B \backslash A = \big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\big) \cap \big(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_n\big)^c \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \backslash F_n. \tag{14.217}$$

Nous avons alors le inégalités de mesures

$$\begin{aligned}
m(B \backslash A) &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n \backslash F_n) && (14.218a)\\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(\Omega_n \backslash F_n) && (14.218b)\\
&\leqslant \frac{\epsilon}{4}. && (14.218c)
\end{aligned}$$

C'est vraiment dommage que A ne soit pas en général un fermé, sinon il répondrait à la question. Nous posons $F_1' = F_1$ et $F_n' = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$. En tant qu'unions finies de fermés, les F'_n sont des fermés (lemme 7.6(2)). De plus la suite (F'_n) est croissante et l'union est A. Par le lemme 14.19(1) nous avons

$$m(A) = m\big(\bigcup_n F'_n\big) = \lim_{n\to\infty} m(F'_n). \tag{14.219}$$

Il existe donc n_ϵ tel que

$$m(A) - m(F'_n) \leqslant \epsilon \tag{14.220}$$

Nous posons $F = F'_{n_\epsilon}$. Comme $F \subset A$ nous avons aussi $m(A\backslash F) = m(A) - m(F) \leqslant \epsilon$. Et en plus $F \subset A \subset B \subset \Omega$, ce qui donne bien la propriété voulue $F \subset B \subset \Omega$. Il reste à nous assurer de $m(\Omega\backslash F)$. Nous avons d'abord

$$m(B\backslash F) = m\big((B\backslash A) \cup (A\backslash F)\big) = m(B\backslash A) + m(A\backslash F) \leqslant \frac{5\epsilon}{4}. \tag{14.221}$$

Et enfin :

$$m(\Omega\backslash F) = m\big((\Omega\backslash B) \cup (B\backslash F)\big) = m(\Omega\backslash B) + m(B\backslash F) \leqslant \frac{6\epsilon}{4}. \tag{14.222}$$

Et donc à redéfinition près de ϵ, c'est d'accord.

Il est donc établi que $\mathcal{F}$ est une tribu. Qui plus est, l'ensemble $\mathcal{F}$ est une tribu incluse aux boréliens et contenant les ouverts. Ergo $\mathcal{F} = \mathcal{B}\text{or}(X)$.

(iii) **Régularité extérieure** Soit B un borélien et $\epsilon > 0$. Alors il existe F_ϵ fermé et Ω_ϵ ouvert tels que $F_\epsilon \subset B \subset \Omega_\epsilon$ et $m(\Omega_\epsilon\backslash F_\epsilon) \leqslant \epsilon$. Vu que $B \subset \Omega_\epsilon$ pour tout ϵ, nous avons aussi

$$m(B) \leqslant \inf_\epsilon m(\Omega_\epsilon). \tag{14.223}$$

Mais comme $\mu(\Omega_\epsilon) \geqslant m(B)$ pour tout ϵ, nous avons en réalité $m(B) = \inf_\epsilon m(\Omega_\epsilon)$.
Soit maintenant un ouvert Ω tel que $B \subset \Omega$. Nous devons prouver l'existence d'un $\epsilon > 0$ tel que $m(\Omega_\epsilon) \leqslant m(\Omega)$. Cela permettra de conclure que l'infimum sur tous les ouverts contenant B est égal à l'infimum sur les ouverts de la forme Ω_ϵ.
Nous posons $m(\Omega) = m(B) + \delta$ et avec $\epsilon \leqslant \delta$ nous avons

$$m(\Omega_\epsilon\backslash B) \leqslant m(\Omega_\epsilon\backslash F_\epsilon) \leqslant \epsilon \tag{14.224}$$

et donc aussi

$$m(\Omega_\epsilon) \leqslant m(B) + \epsilon \leqslant m(B) + \delta = m(\Omega). \tag{14.225}$$

(iv) **Régularité intérieure** Elle se fait de même.

□

Définition 14.82.
Soit X un espace topologique et m une mesure positive sur $\big(X, \mathcal{B}or(X)\big)$.

*(1) m est une **mesure de Borel** si elle est finie sur tout compact.*

*(2) m est **régulière extérieurement** si $\forall B \in \mathcal{B}or(X)$,*

$$m(B) = \inf\{m(\Omega) \text{ tel que } \Omega \text{ est ouvert et } B \subset \Omega\} \tag{14.226}$$

*(3) m est **régulière intérieurement** si $\forall B \in \mathcal{B}or(X)$,*

$$m(B) = \sup\{m(K) \text{ tel que } K \text{ est compact et } K \subset B\} \tag{14.227}$$

*(4) m est une mesure **régulière** si elle est régulière dans les deux sens.*

*(5) m est une **mesure de Radon** si elle est de Borel et régulière.*

Proposition 14.83.
Soit X un espace localement compact et dénombrable à l'infini[21] *Alors toute mesure de Borel sur $\big(X, \mathcal{B}or(X)\big)$ est de Radon.*

Démonstration. Nous avons une suite exhaustive [22] de compacts X_k tels que

$$X = \bigcup_{k\geqslant 1} X_k = \bigcup_{k\geqslant 1} \mathrm{Int}(X_k). \tag{14.228}$$

(i) **Régularité intérieure** Soit B, un borélien de X ; nous avons $B = \bigcup_{k\geqslant 1}(B \cap X_k)$ et comme cette union est croissante,

$$m(B) = \lim_{k\to\infty} m(B \cap X_k) \tag{14.229}$$

par le lemme 14.19(1). Dans la suite, il va y avoir beaucoup de considérations sur les topologies induites. Nous nommons τ_k la topologie de X_k induite depuis celle de X. Il ne faudra pas confondre les expressions « un compact *de* X_k » et « un compact *dans* X_k ». La première parle d'un compact pour la topologie τ_k. La seconde parle d'un compact pour la topologie de X, inclus dans X_k.

Si $a < m(B)$ alors il existe $k \geqslant 1$ tel que $a < m(B \cap X_k)$, c'est-à-dire

$$a < m(B \cap X_k) \leqslant m(B). \tag{14.230}$$

Mais (X_k, m) est un espace mesuré borné parce que m est de Borel et X_k est compact. Par conséquent la (restriction de la) mesure m est régulière sur l'espace mesuré $\big(X_k, \mathcal{B}\mathrm{or}(X_k)\big)$ par le théorème 14.81. De plus l'ensemble $B \cap X_k$ est un borélien de (X_k, τ_k) parce que

$$B \cap X_k \in \mathcal{B}\mathrm{or}(X)_{X_k} = \mathcal{B}\mathrm{or}(X_k) \tag{14.231}$$

où nous avons utilisé la propriété de compatibilité entre topologie induite et tribu des borélien du théorème 14.52. Il existe donc un fermé F_ϵ de (X_k, τ_k) tel que

$$\begin{cases} F_\epsilon \subset B \cap X_k & (14.232a)\\ m(B \cap X_k) \leqslant m(F_\epsilon) + \epsilon. & (14.232b) \end{cases}$$

En mettant bout à bout les inégalités nous avons trouvé

$$a < m(B \cap X_k) \leqslant m(F_\epsilon) + \epsilon < m(F_\epsilon), \tag{14.233}$$

et donc en particulier $a < m(F_\epsilon)$. L'ensemble F_ϵ est en plus un compact de (X, τ_X). En effet X_k étant fermé de (X, τ_X), le lemme 7.34 nous dit que F_ϵ est un fermé de (X, τ_X). Mais X_k étant compact, F_ϵ est un fermé inclus dans un compact, il est donc compact (lemme 7.82).

Pour tout $a < m(B)$ nous avons trouvé un compact F_ϵ inclus dans B dont la mesure est plus grande que a. Cela prouve la régularité intérieure de la mesure m.

(ii) **Régularité extérieure** Soit un borélien B de X. Si $m(B) = \infty$ alors tous les ouverts contenant B ont mesure infinie et $m(B)$ en est évidemment le supremum. Nous supposons donc que $m(B) < \infty$.

Nous notons τ_k la topologie induite de X sur $\mathrm{Int}(X_k)$. Nous posons $B_k = B \cap \mathrm{Int}(X_k)$. L'espace $\big(\mathrm{Int}(X_k), m\big)$ est un espace mesuré borné et $B_k \in \mathcal{B}\mathrm{or}\Big(\mathrm{Int}(X_k)\Big)$. Il existe donc un ouvert Ω_k de $\big(\mathrm{Int}(X_k), \tau_k\big)$ tel que $B_k \subset \Omega_k$ et

$$m(\Omega_k \backslash B_k) \leqslant \frac{\epsilon}{2^k}. \tag{14.234}$$

De plus $\mathrm{Int}(X_k)$ est un ouvert de (X, τ_X), donc en réalité Ω_k est un ouvert de X. Nous posons

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k \tag{14.235}$$

21. Définitions 7.72 et 7.76.
22. Définition 7.267.

qui est encore un ouvert de (X, τ_X).
Il est temps de voir que Ω vérifie $m(\Omega \backslash B) \leqslant \epsilon$. Pour cela,

$$\Omega \backslash B = \Big(\bigcup_k \Omega_k\Big) \cap \Big(\bigcup_l B_l\Big)^c \tag{14.236a}$$

$$= \Big(\bigcup_k \Omega_k\Big) \cap \Big(\bigcap B_l^c\Big) \tag{14.236b}$$

$$=\subset \bigcup_k (\Omega_k \cap B_k^c) \tag{14.236c}$$

$$= \bigcup_k (\Omega_k \backslash B_k), \tag{14.236d}$$

ce qui donne au niveau des mesures :

$$m(\Omega \backslash B) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(\Omega_k \backslash B_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon. \tag{14.237}$$

□

Remarque 14.84.
Exprimé sur $\mathbb{R}^N$, la proposition 14.83 s'exprime en disant que toute mesure de Borel sur $\mathbb{R}^N$ est régulière. Typiquement, l'espace X dont il est question est un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

14.5.5 Théorème de récurrence

Soient X un espace mesurable, μ une mesure finie sur X et $\phi \colon X \to X$ une application mesurable[23] préservant la mesure, c'est-à-dire que pour tout ensemble mesurable $A \subset X$,

$$\mu\big(\phi^{-1}(A)\big) = \mu(A). \tag{14.238}$$

Si $A \subset X$ est un ensemble mesurable, un point $x \in A$ est dit **récurrent** par rapport à A si et seulement si pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $k \geqslant p$ tel que $\phi^k(x) \in A$.

Théorème 14.85 (Théorème de récurrence de Poincaré.)**.**
Si A est mesurable dans X, alors presque tous les points de A sont récurrents par rapport à A.

Démonstration. Soit $p \in \mathbb{N}$ et l'ensemble

$$U_p = \bigcup_{k=p}^{\infty} \phi^{-k}(A) \tag{14.239}$$

des points qui repasseront encore dans A après p itérations de ϕ. C'est un ensemble mesurable en tant que union d'ensembles mesurables (pour rappel, les tribus sont stables par union dénombrable, comme demandé à la définition 14.1), et nous avons donc

$$\mu(U_p) \leqslant \mu(X) < \infty. \tag{14.240}$$

De plus $U_p = \phi^{-p}(U_0)$, donc $\mu(U_p) = \mu(U_0)$. Vu que $U_p \subset U_p$, nous avons

$$\mu(U_0 \backslash U_p) = 0. \tag{14.241}$$

Étant donné que $A \subset U_0$ nous avons a fortiori que

$$\{x \in A \text{ tel que } x \notin U_p\} \subset U_0 \backslash U_p, \tag{14.242}$$

et donc

$$\mu\{x \in A \text{ tel que } x \notin U_p\} = 0. \tag{14.243}$$

Cela signifie exactement que l'ensemble des points x de A tels que aucun des $\phi^k(x)$ avec $k \geqslant p$ n'est dans A est de mesure nulle. □

23. Définition 14.38.

14.6 Mesurabilité des fonctions à valeurs réelles

Nous allons parler de la mesurabilité de fonctions

$$f\colon (S,\mathcal{F}) \to \big(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}\mathrm{or}(\bar{\mathbb{R}})\big) \tag{14.244}$$

où $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

14.86.
Nous convenons que $0 \times \pm\infty = 0$ parce que nous voulons qu'une droite (qui est un rectangle dont une mesure est 0 et l'autre ∞) soit de mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$.

Les produits et sommes $\pm\infty \pm \pm\infty$ et $\pm\infty \times \pm\infty$ sont ceux que l'on croit. Sauf bien entendu $+\infty - \infty$ et $1/0$ qui ne sont toujours pas définis.

Lemme 14.87.
L'ensemble B est un borélien de $\bar{\mathbb{R}}$ si et seulement si il existe un borélien B_0 de $\mathbb{R}$ tel que B soit B_0 ou $B_0 \cup \{-\infty\}$ ou $B_0 \cup \{-\infty\}$ ou $B_0 \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Démonstration. Comme la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ est la topologie induite de celle sur $\bar{\mathbb{R}}$, la tribu induite l'est aussi par le théorème 14.51. Donc si B est un borélien de $\bar{\mathbb{R}}$, l'ensemble $B \cap \mathbb{R}$ est un borélien de $\mathbb{R}$. □

Lemme 14.88 ([367])**.**
Si $\mathcal{S}_0$ est l'ensemble des intervalles du type

$$]\alpha,\beta[, \quad [-\infty,\beta[, \quad]\alpha,+\infty] \tag{14.245}$$

avec $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$ alors $\sigma(\mathcal{S}_0) = \mathcal{B}or(\bar{\mathbb{R}})$.

Démonstration. Les intervalles $]\alpha,\beta[$ engendrent la topologie de $\mathbb{R}$[24], donc $\mathcal{B}\mathrm{or}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathcal{S}_0)$. De plus le lemme 14.3 nous autorise à dire que

$$\bigcap_{n\geqslant 1} [n,+\infty] = \{+\infty\} \in \sigma(\mathcal{S}_0). \tag{14.246}$$

Par conséquent tous les ensembles énumérés dans le lemme 14.87 font partie de $\sigma(\mathcal{S}_0)$. Cela implique que $\mathcal{B}\mathrm{or}(\bar{\mathbb{R}}) \subset \sigma(\mathcal{S}_0)$.

Pour l'inclusion inverse, $\sigma(\mathcal{S}_0)$ est engendré par des parties qui font partie de $\mathcal{B}\mathrm{or}(\bar{\mathbb{R}})$, donc $\sigma(\mathcal{S}_0) \subset \mathcal{B}\mathrm{or}(\bar{\mathbb{R}})$. □

14.6.1 Fonctions à valeurs réelles sur un espace mesurable

Théorème 14.89.
Soient un espace mesurable $(S,\mathcal{F})$ et une fonction $f\colon S \to \bar{\mathbb{R}}$. Les propriétés suivantes sont équivalents.

(1) La fonction f est mesurable.

(2) L'ensemble $\{f < a\}$ est dans $\mathcal{F}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$

(3) L'ensemble $\{f \leqslant a\}$ est dans $\mathcal{F}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$

Démonstration. Plusieurs implications à prouver.

(i) **(1)⇒(2)** Puisque f est mesurable et que $[-\infty,a[\in \mathcal{B}\mathrm{or}(\bar{\mathbb{R}})$, nous avons $f^{-1}\big([-\infty,a[\big) \in \mathcal{F}$.

24. Parce toutes les boules sont des intervalles de ce type et que les boules forment une base de topologie, proposition 7.118.

(ii) **(2)⇒(1)** Nous posons $\mathcal{A} = \{[-\infty, a[\text{ tel que } a \in \mathbb{R}\}$.
Nous avons $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}_0$ (le $\mathcal{S}_0$ du lemme 14.88). Et de plus,

$$]\alpha, \beta[= [-\infty, \beta[\setminus[-\infty, \alpha] = [-\infty, \beta[\setminus \bigcap_{n\geqslant 1} [-\infty, \alpha + \frac{1}{n}[. \tag{14.247}$$

Donc $]\alpha, \beta[\in \sigma(\mathcal{A})$.
Et aussi :

$$]\alpha, +\infty] = \bar{\mathbb{R}}\setminus[-\infty, \alpha + \frac{1}{n}[, \tag{14.248}$$

ce qui donne $]\alpha, +\infty] \in \sigma(\mathcal{A})$.
Au final, $\mathcal{S}_0 \subset \sigma(\mathcal{A})$ et donc $\sigma(\mathcal{S}_0) \subset \sigma(\mathcal{A})$. Le lemme 14.88 nous dit que $\sigma(\mathcal{S}_0) = \mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})$. Nous avons donc bien $\sigma(\mathcal{S}_0) = \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})$.
par ailleurs, nous savons que $f^{-1}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{F}$ parce que les éléments de $\mathcal{A}$ sont de la forme $\{f < a\}$. Cela donne $\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{A})\big) = \mathcal{F}$. Mais $\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{A})\big)$ peut aussi s'exprimer par le lemme de transport 14.43 : $\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{A})\big) = f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{A})\big)$. En combinant les deux,

$$f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{A})\big) = \mathcal{F}, \tag{14.249}$$

et en remplaçant $\sigma(\mathcal{A})$ par $\mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})$ nous avons ce que nous voulions :

$$f^{-1}\big(\mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})\big) \in \mathcal{F}, \tag{14.250}$$

ce qui signifie que f est mesurable.

(iii) **(3)⇒(2)** Nous avons

$$\{f < a\} = \bigcup_{n\geqslant 1} \{f \leqslant a - \frac{1}{n}\}. \tag{14.251}$$

donc ceci est une union dénombrable d'éléments de $\mathcal{F}$. Et $\{f < a\}$ est dans $\mathcal{F}$.

(iv) **(1)⇒(3)** Nous avons

$$\{f \leqslant a\} = \{f < a\} \cup f^{-1}\big([-\infty, a]\big). \tag{14.252}$$

Le premier ensemble est dans $\mathcal{F}$ par (2). Ensuite $[-\infty, a]$ est un fermé de $\bar{\mathbb{R}}$ et donc un borélien de $\bar{\mathbb{R}}$. Son image réciproque est donc un élément de $\mathcal{F}$ parce que f est mesurable. Au final nous avons bien $\{f \leqslant a\} \in \mathcal{F}$.

□

Lemme 14.90 ([370])**.**
Une fonction $f\colon X \to \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si $f^{-1}(I)$ est mesurable pour tout I de la forme $]a, \infty[$.

Démonstration. Nous devons prouver que $f^{-1}(A)$ est mesurable dans X pour tout borélien A de $\mathbb{R}$. Nous posons

$$S = \{A \subset \mathbb{R} \text{ tel que } f^{-1}(A) \text{ est mesurable dans } X\} \tag{14.253}$$

et nous prouvons que c'est une tribu. D'abord $f^{-1}(\mathbb{R}) = X$, et X est mesurable, donc $\mathbb{R} \in S$. Ensuite si $A \in S$ alors $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c$. En tant que complémentaire d'un mesurable de X, l'ensemble $f^{-1}(A)^c$ est mesurable dans X. Et enfin si $A_n \in S$ alors $f^{-1}(\bigcup_n A_n) = \bigcup_n f^{-1}(A_n)$ qui est encore mesurable dans X en tant qu'union de mesurables.

Donc S est une tribu qui contient tous les ensembles de la forme $]a, \infty]$. Le lemme 14.47 conclut que S contient tous les boréliens de $\mathbb{R}$. □

Lemme 14.91.
Soit $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Soit $\lambda \in \bar{\mathbb{R}}$. Les parties $\{x \geqslant \lambda\}$, $\{x > \lambda\}$, $\{x \leqslant \lambda\}$ et $\{x < \lambda\}$ sont des boréliens de $\bar{\mathbb{R}}$.

Lemme 14.92.
Soit une application mesurable $f\colon (\Omega, \mathcal{A}) \to \big(\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \mathcal{B}or\big)$. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$ *; nous définissons*

$$\begin{aligned} f_\lambda\colon \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto \min\big(f(\omega), \lambda\big). \end{aligned} \tag{14.254}$$

Alors f_λ *est mesurable*

Démonstration. Soit A mesurable (i.e. borélien) dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Nous devons montrer que $f_\lambda^{-1}(A)$ est borélien. Pour cela nous écrivons

$$A = \Big(A \cap \{x > \lambda\}\Big) \cup \Big(A \cap \{x \leqslant \lambda\}\Big). \tag{14.255}$$

Par définition f_λ ne prend jamais de valeurs plus grandes que λ, donc $f_\lambda^{-1}\big(A \cap \{x > \lambda\}\big) = \emptyset$. D'autre part, $f_\lambda^{-1}\big(A \cap \{x \leqslant \lambda\}\big) = f^{-1}\big(A \cap \{x \leqslant \lambda\}\big)$.

Étant donné que A et $\{x \leqslant \lambda\}$ sont boréliens [25], l'intersection $A \cap \{x \leqslant \lambda\}$ est borélienne, et donc

$$f_\lambda^{-1}(A) = f^{-1}\big(A \cap \{x \leqslant \lambda\}\big) \in \mathcal{A}. \tag{14.256}$$

□

Lemme 14.93 ([370])**.**
Soit $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ *une suite de fonctions mesurables* [26]. *Alors* $\sup_n f_n$ *est mesurable.*

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned} (\sup f_n)^{-1}\big(]a, \infty]\big) &= \{x \in X \text{ tel que } (\sup f_n)(x) > a\} && (14.257a)\\ &= \bigcup_n \{x \in X \text{ tel que } f_n(x) > a\} && (14.257b)\\ &= \bigcup_n f_n^{-1}\big(]a, \infty]\big). && (14.257c) \end{aligned}$$

Étant donné que f_n est mesurable et que $]a, \infty]$ est mesurable, chacun des $f_n^{-1}\big(]a, \infty]\big)$ est mesurable dans X. L'ensemble $(\sup f_n)^{-1}\big(]a, \infty]\big)$ est donc une union dénombrable de parties mesurables. Il est donc mesurable.

Le lemme 14.90 conclut que $\sup f_n$ est mesurable. □

Proposition 14.94.
Si $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ *est une suite de fonctions mesurables et positives, alors la fonction* [27] $\sum_n f_n$ *est mesurable.*

Démonstration. Nous considérons les fonctions $s_k(x) = \sum_{n=0}^k f_n(x)$ qui valent éventuellement ∞ en certains points. Nous avons

$$\sum_n f_n(x) = \sup_k s_k(x), \tag{14.258}$$

donc le lemme 14.93 nous donne la mesurabilité de la somme de f_n. □

Définition 14.95.
Soit $(S, \mathcal{F})$ *un espace mesurable. Une* ***partition mesurable dénombrable*** *de* S *est une suite* $(S_n)_{n \geqslant 1}$ *de parties de* S *telles que*

(1) $S_n \in \mathcal{F}$ *pour tout* n,

(2) $S_N \cap S_k = \emptyset$ *si* $n \neq k$,

(3) $S = \bigcup_{n \geqslant 1} S_n$.

25. Lemme 14.91.
26. Ici X est un espace mesuré et $\mathbb{R}$ est muni des boréliens.
27. Définition 12.369 pour la série de fonctions.

Lemme 14.96 (Lemme de recollement)**.**
Soit (S_n) une partition mesurable dénombrable de l'espace mesurable $(S,\mathcal{F})$. Soit $(S',\mathcal{F}')$ un autre espace mesurable et des fonctions mesurables

$$f_n\colon (S_n,\mathcal{F}_{S_n})\to(S',\mathcal{F}') \tag{14.259}$$

où $\mathcal{F}_{S_n}$ est la tribu induite[28]*. Alors la fonction*

$$\begin{aligned} f\colon (S,\mathcal{F})&\to(S',\mathcal{F}')\\ x&\mapsto f_n(x)\ \text{si } x\in S_n \end{aligned} \tag{14.260}$$

est mesurable.

Démonstration. Soit $A'\in\mathcal{F}'$; nous devons prouver que $f^{-1}(A')\in\mathcal{F}$. Nous savons que

$$f^{-1}(A')=\bigcup_{n\geqslant 1} f_n^{-1}(A'), \tag{14.261}$$

qui est une union dénombrable d'éléments $f_n^{-1}(A')\in\mathcal{F}_{S_n}$.

Puisque $S_n\in\mathcal{F}$ nous avons $\mathcal{F}_{S_n}\subset\mathcal{F}$ parce qu'un élément de $\mathcal{F}_{S_n}$ est de la forme $S_n\cap B$ avec $B\in\mathcal{F}$. Ainsi, pour chaque n nous avons

$$f_n^{-1}(A')\in\mathcal{F}_{S_n}\subset\mathcal{F}. \tag{14.262}$$

Au final l'égalité (14.261) écrit $f^{-1}(A')$ comme une union d'éléments de $\mathcal{F}$ et est donc un élément de $\mathcal{F}$. □

Proposition 14.97.
Soit $(S,\mathcal{F})$ un espace mesurable et des applications mesurables $f,g\colon S\to\bar{\mathbb{R}}$. Alors les fonctions suivantes sont mesurables :

(1) λf pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$

(2) $f+g$ si elle existe.

(3) $1/f$ si elle existe.

(4) fg.

Démonstration. Commençons par clarifier « si elle existe ». La fonction $f+g$ n'existe pas au point $x\in S$ si $f(x)=+\infty$ et $g(x)=-\infty$. La fonction $1/f$ n'existe pas au point $x\in S$ si $f(x)=0$. Voir le point 14.86.

(i) **La partie où $f+g$ existe est mesurable** La partie de S sur laquelle $f+g$ existe est

$$\{x\in S \text{ tel que } \big(f(x),g(x)\big)\neq(+\infty,-\infty), \big(f(x),g(x)\big)\neq(-\infty,+\infty)\}. \tag{14.263}$$

Nous avons

$$\{(f,g)=(+\infty,-\infty)\}=\{f=\infty\}\cap\{g=-\infty\} \tag{14.264}$$

qui est un ensemble mesurable parce que, par exemple,

$$\{+\infty\}=\bigcap_{n\geqslant 1}[n,+\infty]. \tag{14.265}$$

La cas $(-\infty,+\infty)$ est identique, et au final la partie de S sur laquelle $f+g$ n'existe pas est mesurable. Par complémentarité la partie sur laquelle $f+g$ existe est également mesurable[29].

(ii) **Idem pour la partie sur laquelle $1/f$ existe** Idem.

28. Définition 14.6.
29. Parfois on a envie de dire que l'affirmation « A est mesurable » ne passe pas le test de Popper.

(iii) **Mesurabilité de λf** Si $\lambda = 0$, nous avons une fonction constante dont la mesurabilité est évidente[30]. Nous supposons $\lambda > 0$. Alors

$$\{\lambda f < a\} = \{f < a/\lambda\} \in \mathcal{F}. \tag{14.266}$$

Pour $\lambda < 0$ nous avons de la même manière

$$\{\lambda f < a\} = \{f > a/\lambda\} \in \mathcal{F}. \tag{14.267}$$

Ce dernier point est suffisant pour que λf soit mesurable par le théorème 14.89(3) et par complémentarité.

(iv) **Mesurabilité de $f + g$** Soit $a \in \mathbb{R}$; le théorème 14.89 nous demande d'avoir envie de prouver que $\{f + g < a\} \in \mathcal{F}$. Nous avons

$$f(x) + g(x) < a \tag{14.268}$$

si et seulement si

$$f(x) < a - g(x) \tag{14.269}$$

si et seulement si

$$\exists q \in \mathbb{Q} \text{ tel que } f(x) < q < a - g(x). \tag{14.270}$$

Donc

$$\{f + g < a\} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \Big(\{f < q\} \cap \{g < a - r\}\Big), \tag{14.271}$$

qui est une union dénombrable d'éléments de $\mathcal{F}$. Donc $\{f + g < a\} \in \mathcal{F}$ et $f + g$ est mesurable. Note qu'en toute rigueur il faudrait « $\cap$là où $f + g$ est définie » un peu partout, mais cela ne change rien parce que l'intersection de deux parties mesurables est mesurable.

(v) **Mesurabilité de $1/f$** Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $a > 0$ alors

$$\{1/f < a\} = \{f < 0\} \cup \{f > \frac{1}{a}\} \in \mathcal{F}. \tag{14.272}$$

et si $a < 0$ alors

$$\{1/f < a\} = \{f < 0\} \cap \{f > \frac{1}{a}\} \in \mathcal{F}. \tag{14.273}$$

(vi) **Mesurabilité de fg** Nous allons la prouver en plusieurs fois.

(i) **Si f est mesurable alors f^2 est mesurable** Si $a \leqslant 0$ alors $\{f^2 < a\} = \emptyset$. Si $a > 0$ nous avons

$$\{f^2 < a\} = \{-\sqrt{a} < f < \sqrt{a}\} \in \mathcal{F}. \tag{14.274}$$

(ii) **$f\mathbb{1}_A$ est mesurable** Soit $A \in \mathcal{F}$, et prouvons que $f\mathbb{1}_A$ est mesurable. Par définition,

$$(f\mathbb{1}_A)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases} \tag{14.275}$$

Nous posons

$$\begin{aligned} f_1 \colon A^c &\to \bar{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto 0 \end{aligned} \tag{14.276}$$

et

$$\begin{aligned} f_2 \colon A &\to \bar{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned} \tag{14.277}$$

30. Prenez quand même le temps d'y penser.

Alors nous avons

$$(\mathbb{1}_A f)(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in A^c \\ f_2(x) & \text{si } x \in A. \end{cases} \tag{14.278}$$

Les ensembles A et A^c forment une partition mesurable dénombrable de S. La fonction f_1 est mesurable ; pour prouver que f_2 est mesurable, nous l'écrivons $f_2 = f \circ j_A$ où $j_A \colon A \to S$ est l'injection canonique. L'application

$$j_A \colon (A, \mathcal{F}_A) \to (S, \mathcal{F}) \tag{14.279}$$

est mesurable parce que si $B \in \mathcal{F}$ alors $j_A^{-1}(B) = A \cap B \in \mathcal{F}_A$. D'autre part l'application

$$f \colon (S, \mathcal{F}) \to \big(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})\big) \tag{14.280}$$

est mesurable par hypothèse. La composée $f_2 = f \circ j_A$ est alors mesurable par la proposition 14.39. Le lemme de recollement 14.96 nous donne alors la mesurabilité de $f\mathbb{1}_A$.

(iii) <u>**Le produit fg est mesurable**</u> Nous posons

$$F = \{x \in S \text{ tel que } |f(x)| < +\infty, |g(x)| < \infty\}. \tag{14.281}$$

En tant qu'intersection de deux ensembles mesurables, F est mesurable. Par la partie précédente, les applications $f_1 = g\mathbb{1}_F$ et $g_1 = g\mathbb{1}_F$ sont mesurables. L'application $f_1 + g_1 \colon S \to \mathbb{R}$ est encore mesurable. Par conséquent l'application

$$f_1 g_1 = \frac{1}{2}\big((f_1 + g_1)^2 - f_1^2 - g_1^2\big) \tag{14.282}$$

est mesurable.

Voyons maintenant ce qui se passe en dehors de F. Nous allons utiliser le lemme de recollement sur la fonction

$$(fg)(x) = \begin{cases} (f_1 f_2)(x) & \text{si } x \in F \\ -\infty & \text{si } x \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{si } x \in \mathcal{V} \\ +\infty & \text{si } x \in \mathcal{W} \end{cases} \tag{14.283}$$

où $F, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ forment une partition mesurable dénombrable[31] de S. Pour le sport nous montrons que $\mathcal{U}$ est mesurable :

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = &\big(\{f = -\infty\} \cap \{g > 0\}\big) && (14.284a)\\ &\cup \big(\{f = +\infty\} \cap \{g < 0\}\big) && (14.284b)\\ &\cup \big(\{g = -\infty\} \cap \{f > 0\}\big) && (14.284c)\\ &\cup \big(\{g = +\infty\} \cap \{f < 0\}\big). && (14.284d) \end{aligned}$$

□

Proposition 14.98.
Si $f_n \colon S \to \bar{\mathbb{R}}$ est une suite de fonctions mesurables, alors les fonctions $\inf_n f_n$ et $\sup_n f_n$ sont mesurables.

Démonstration. Nous avons les découpages

$$\{\inf_n f_n < a\} = \bigcup_n \{f_n < a\} \in \mathcal{F} \tag{14.285}$$

et

$$\{\sup_n f_n \leqslant a\} = \bigcap_n \{f_n \leqslant a\} \in \mathcal{F}. \tag{14.286}$$

Le théorème 14.89 permet de conclure. □

31. Définition 14.95.

Note : pour (14.286) nous ne pouvions pas utiliser les inégalités strictes parce que $\{\sup_n f_n < a\}$ n'est pas spécialement égal à $\bigcap_n \{f_n < a\}$.

14.99.
La proposition 14.98 nous permet de définir les parties positives et négatives de f par $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = \sup(-f, 0)$. Ce sont des applications mesurables. Nous avons les décompositions

$$f = f^+ - f^- \tag{14.287a}$$
$$|f| = f^+ + f^-. \tag{14.287b}$$

Corolaire 14.100.
Si $f \colon S \to \bar{\mathbb{R}}$ est mesurable alors les applications f^+, f^- et $|f|$ sont mesurables en tant qu'applications $S \to \bar{\mathbb{R}}^+$.

Démonstration. Nous faisons la preuve pour f^+. Nous savons que $f^+ \colon S \to \bar{\mathbb{R}}$ est mesurable par la proposition 14.98. Nous considérons l'injection canonique $f \colon \bar{\mathbb{R}}^+ \to \bar{\mathbb{R}}$ et

$$\begin{aligned} f_1^+ \colon S &\to \bar{\mathbb{R}}^+ \\ x &\mapsto f^+(x). \end{aligned} \tag{14.288}$$

Alors $f_1^+ = j \circ f^+$ est mesurable. Et c'est bien cela que nous voulions.

□

Note : f^+ et f_1^+ sont exactement les mêmes fonctions. Elles ne diffèrent que par la tribu que nous considérons sur l'espace d'arrivée. Nous allons à partir de maintenant les noter toutes deux f^+.

Remarque 14.101.
L'application $|f|$ peut être mesurable sans que f le soit. Soit en effet une partie $A \notin \mathcal{F}$, et posons

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ -1 & \text{si } x \in A^c. \end{cases} \tag{14.289}$$

Alors $f^{-1}(\{1\}) = A$ n'est pas mesurable alors que $|f|(x) = 1$ pour tout x.

Il est temps d'aller relire les définitions 10.38.

Proposition 14.102.
Si les fonctions $f_n \colon S \to \bar{\mathbb{R}}$ sont mesurables alors les fonctions $\limsup f_n$ et $\liminf f_n$ sont mesurables.

Démonstration. Par le lemme 10.40 nous écrivons $\limsup_n f_n(x) = \inf_{n \geqslant 1} \sup_{k \geqslant n} f_k(x)$. Pour chaque k nous considérons la fonction $g_k = \sup_{n \geqslant k} f_n$. Par la proposition 14.98, les fonctions g_k sont mesurables. En utilisant encore la même proposition, $\inf_{n \geqslant 1} g_k$ est encore mesurable. □

Proposition 14.103 ([371])**.**
Si $f_n \colon S \to \bar{\mathbb{R}}$ est une suite de fonctions mesurables dont la limite ponctuelle existe, alors la limite est mesurable.

Démonstration. Si la limite existe, elle est égale à la limite supérieure par le lemme 10.41. Or la limite supérieure est mesurable par la proposition 14.102. □

14.6.2 Fonction étagée

Définition 14.104 ([372])**.**
Soit $(S, \mathcal{F})$ un espace mesurable et une fonction $f \colon S \to \big(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}or(\bar{\mathbb{R}})\big)$. Il serait dommage de confondre les trois concepts suivants.

— *Une **fonction simple** est une fonction dont l'image est constituée d'un nombre fini de valeurs.*
— *Une **fonction étagée** est une fonction simple qui est elle-même une fonction mesurable.*
— *Une **fonction en escalier** est une fonction étagée dont les valeurs sont constantes sur des intervalles : ce sont donc des fonctions constantes par morceaux.*

Dans les trois cas, la fonction f peut être écrite comme somme de fonctions caractéristiques :

$$f(x) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}(x) \tag{14.290}$$

où $A_j = f^{-1}(\alpha_j)$. Ce qui change est la nature des A_j.

— Si f est simple, les A_j sont quelconques.
— Si f est étagée, les A_i peuvent être choisis mesurables parce que $\{\alpha_i\}$ est un borélien, ce qui fait de $A_i = f^{-1}(\alpha_i)$ un choix mesurable.
— Si f est en escalier, les A_i sont des intervalles.

Définition 14.105.
*La **forme canonique** d'une fonction simple f est la suivante. Soit $\{\alpha_i\}_{i=1,\ldots,l}$ les valeurs distinctes prises par f et $A_i = f^{-1}(\alpha_i)$. La forme canonique de f est alors*

$$f = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}. \tag{14.291}$$

Lemme 14.106.
Si f est une fonction simple dont la représentation canonique est

$$f = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}, \tag{14.292}$$

alors

(1) les A_i sont disjoints,
(2) l'union est égale à tout l'ensemble : $S = \bigcup_i A_i$.

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 14.107
Le lemme 14.108 et le théorème 14.110 disent la même chose alors que la preuve du théorème 14.110 est beaucoup plus compliquée.La démonstration du lemme serait fausse ?

M'est avis que ce que le théorème donne en plus est la convergence uniforme en cas de fonction bornée. La suite (14.293) ne va pas converger uniformément.

Lemme 14.108 (Limite croissante de fonctions étagées[1])**.**
Soit $f\colon (S, \mathcal{F}) \to \bar{\mathbb{R}}$ une fonction positive mesurable. Il existe une suite $f_n\colon S \to \mathbb{R}$ de fonctions étagées positives telles que $f_n \to f$ ponctuellement et $f_n \leqslant f$.

Démonstration. Nous considérons (q_n) une suite parcourant tous les rationnels positifs [32] avec $q_0 = 0$ pour être sûr. Pour $n \in \mathbb{N}$ nous définissons la fonction

$$f_n(x) = \max\{q_i \text{ tel que } i \leqslant n,\, q_i \leqslant f(x)\}. \tag{14.293}$$

L'ensemble sur lequel le maximum est pris n'est pas vide parce que $q_0 = 0$. La fonction f_n est simple parce qu'elle ne prend que n valeurs différentes. Nous avons aussi, par construction, $f_n(x) \leqslant f(x)$. Et aussi pour tout $x \in S$, $f_n(x) \to f(x)$, parce que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

32. Nous rappelons que $\mathbb{Q}$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}$ par la proposition 10.15.

En ce qui concerne le fait que f_n soit mesurable, nous notons $\{r_0, \ldots, r_n\}$ l'ensemble des $\{q_0, \ldots, q_n\}$ classés dans l'ordre croissant. Nous posons en plus $r_{n+1} = +\infty$. Nous avons alors

$$f_n^{-1}(r_k) = \{x \in S \text{ tel que } f(x) \geqslant r_k, f(x) < r_{k+1}\} = \{f \geqslant r_k\} \cap \{f < r_{k+1}\}. \tag{14.294}$$

En tant qu'intersection de deux ensembles mesurables, le théorème 14.89 dit que $f_n^{-1}(r_k)$ est mesurable. □

Remarque 14.109.
Pour avoir $f_n < |f|$ nous pouvons poser

$$f_n(x) = \begin{cases} \max\{q_i \text{ tel que } i \leqslant n,\, q_i \leqslant f(x)\} & \text{si } f(x) \geqslant 0\\ \min\{q_i \text{ tel que } i \leqslant n,\, q_i \geqslant f(x)\} & \text{si } f(x) < 0. \end{cases} \tag{14.295}$$

Théorème 14.110 (Théorème fondamental d'approximation, thème 23[367, 373, 374])**.**
Soit un espace mesuré $(S, \mathcal{A}, \mu)$.

(1) Soit une fonction mesurable $f\colon S \to [0, +\infty]$. Alors il existe une suite croissante de fonctions $\varphi_n\colon S \to [0, +\infty[$ étagées positives dont la limite ponctuelle est f.
(2) Si de plus f est bornée, la convergence est uniforme.
(3) Idem pour f à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$.

Démonstration. Nous découpons l'intervalle $[0, n]$ en plusieurs morceaux.

$$I_{n,k} = \begin{cases} [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[& \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n2^n - 1\\ [n, \infty] & \text{si } k = n2^n. \end{cases} \tag{14.296}$$

Nous posons $S_{n,k} = f^{-1}(I_{n,k})$. Ce sont des ensembles mesurables parce que f est mesurable. Et de plus, pour chaque n, la suite $(S_{n,k})_{k\geqslant 0}$ est une partition mesurable finie de S. Nous posons

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{n2^n} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{S_{n,k}}. \tag{14.297}$$

C'est-à-dire que sur chaque $S_{n,k}$ nous approximons f par le bas. La fonction φ_n est étagée et positive : $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant f(x)$ par construction.

(i) <u>**Croissance**</u> Nous allons voir que $\varphi_n \leqslant \varphi_{n+1}$. Soit $k \neq n2^n$. Si $x \in S_{n,k}$ alors $\varphi_n(x) = \frac{k}{2^n}$ et nous avons aussi la décomposition

$$S_{n,k} = S_{n+1,2k} \cup S_{n+,2k+1}. \tag{14.298}$$

Si $x \in S_{n+1,2k}$ alors $\varphi_{n+1}(x) = \frac{2k}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} = \varphi_n(x)$. Et si $x \in S_{n+1,2k+1}$ alors

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{2k+1}{2^{n+1}} = \frac{k + \frac{1}{2}}{2^n} > \varphi_n(x). \tag{14.299}$$

Il reste à traiter le cas $x \in \{f \geqslant n\}$. Dans ce cas nous avons $\varphi_n(x) = n$. Il y a encore deux cas à traiter :

$$\{f \geqslant n\} = \{f \in [n, n+1[\} \cup \{f \in [n+1, \infty]\}. \tag{14.300}$$

Pour plus de simplicité dans les notations, nous notons $\bar{n} = n2^n$, c'est-à-dire que $I_{n,\bar{n}}$ est le $I_{n,k}$ avec le k le plus grand possible. Nous avons

$$I_{n,\bar{n}} = [n, n+1[\cup [n+1, \infty]. \tag{14.301}$$

Le premier élément se décompose en $I_{n+1,k}$ avec $k < n+1$ (nous préciserons plus tard exactement les valeurs de k) tandis que le second est $[n+1, \infty] = I_{n+1,\overline{n+1}}$.

Pour $x \in S_{n+1,\overline{n+1}}$ nous avons

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{(n+1)2^{n+1}}{2^{n+1}} = n+1 > \varphi_n(x). \tag{14.302}$$

Si au contraire $f(x) \in [n, n+1[$ nous devons précisément voir quels sont les k qui font en sorte que $I_{n+1,k}$ recouvre $[n, n+1[$. Le plus petit k est donné par $\frac{k}{2^{n+1}} = n$, c'est-à-dire $k = n2^{n+1}$ et le plus grand k est donné par $\frac{k}{2^{n+1}} < n+1$, c'est-à-dire $k = 2^{n+1}(n+1) - 1$. Donc si $f(x) \in [n, n+1[$ alors $x \in S_{n+1,k}$ avec

$$n2^{n+1} \leqslant k \leqslant (n+1)2^{n+1} - 1 \tag{14.303}$$

Dans ce cas

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{k}{2^{n+1}} \geqslant \frac{n2^{n+1}}{2^{n+1}} = n = \varphi_n(x). \tag{14.304}$$

(ii) **Convergence ponctuelle** Si $f(x) < \infty$ alors il existe[33] $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f(x) < n_0$. Pour $bn \geqslant n_0$ nous avons $f(x) < n$ et donc $\varphi_n(x)$ se calcule à partir d'un des intervalles de taille $1/2^n$:

$$\varphi_n(x) = \frac{k}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k+1}{2^n}. \tag{14.305}$$

Donc

$$|\varphi_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}, \tag{14.306}$$

ce qui signifie que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$.
Si $f(x) = +\infty$ alors $f(x) > n$ pour tout n. Et alors $\varphi_n(x) = n$ pour tout n, ce qui donne bien $\varphi_n(x) \to \infty$.

(iii) **Convergence uniforme** Soit f bornée : $0 \leqslant f(x) < M$ pour tout $x \in S$. Soit aussi $\epsilon > 0$. Nous prenons $n_0 > M$ tel que $\frac{1}{2^{n_0 < \epsilon}}$. Alors pour tout $n \geqslant n_0$ nous avons

$$0 \leqslant f(x) - \varphi_n(x) \leqslant \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^{n_0}} \leqslant \epsilon. \tag{14.307}$$

Notez qu'il n'y a pas de valeurs absolues parce que nous savons déjà que la limite est croissante.

□

14.6.3 Fonctions réelles à variables réelles

Nous nous focalisons à présent sur le cas des fonctions

$$f : \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})\big) \to \big(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})\big). \tag{14.308}$$

14.111 ([1]).
Anticipons un peu pour expliquer pourquoi ce que nous allons faire maintenant est suffisant pour ce que nous avons en tête[34]. Toutes les fonctions mesurables

$$f : \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})\big) \to \big(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})\big) \tag{14.309}$$

seront a fortiori mesurables au sens de

$$f : \big(\mathbb{R}, \mathcal{L}\text{eb}(\mathbb{R})\big) \to \big(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}\text{or}(\bar{\mathbb{R}})\big) \tag{14.310}$$

où $\mathcal{L}\text{eb}(\mathbb{R})$ est la tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire la tribu complétée de celle des boréliens (définition 14.132).

33. Le vrai snob citera ici le lemme 1.372.
34. Pour rappel, nous avons en tête de définir une théorie de la mesure afin d'y définir des intégrales. En particulier nous allons étudier l'intégrale de Lebesgue et en ce qui concerne $\mathbb{R}^n$, nous aurons la tribu de Lebesgue.

14.112.
Nous allons maintenant donner quelques conditions pour que des fonctions soient mesurables au sens de la tribu des boréliens sur l'espace d'arrivée et de départ. Ces résultats seront donc immédiatement applicables à la théorie de l'intégration où nous considérons la tribu de Lebesgue sur l'espace de départ.

Autrement dit, les résultats présentés ici sont un peu plus forts que ce dont nous avons réellement besoin …ou alors ce sont les hypothèses que nous allons poser en théorie de l'intégration, qui seront un peu plus fortes que nécessaires. C'est une question de point de vue.

Corolaire 14.113.
Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors toute application monotone $f\colon I \to \mathbb{R}$ est borélienne.

Démonstration. Puisque f est monotone, l'ensemble $\{f < a\}$ est un intervalle. Or tous les intervalles sont boréliens, donc f est mesurable par le théorème 14.89. □

Définition 14.114.
Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$ a une propriété (monotone, mesurable, continue, etc.) ***par morceaux*** *si il existe une suite strictement croissante de points $(x_I)_{i\in\mathbb{Z}}$ dans I telle que f ait la propriété sur chacun des ouverts $]x_j, x_{j+1}[$..*

Dans cette définition, les points sont numérotés par $\mathbb{Z}$ et non par $\mathbb{N}$ parce que nous nous laissons la liberté d'avoir une infinité de points de chacun des deux côtés.

Proposition 14.115.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}$. Si f est continue ou monotone par morceaux sur I alors elle y est borélienne.

Démonstration. L'ensemble $\{]x_j, x_{j+1}[\}_{j\in\mathbb{Z}} \cup \{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ forme une partition mesurable dénombrable de I (les singletons sont des boréliens). À une belle redéfinition près de la numérotation (deux fois $\mathbb{Z}$ va dans $\mathbb{N}$), nous les appelons $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et nous définissons les fonctions f_n comme étant les restrictions de f aux intervalles I_k.

Toute fonction sur un singleton est mesurable. Toute fonction continue sur un ouvert est mesurable (théorème 14.51). Toute fonction monotone sur un ouvert est mesurable (corolaire 14.113).

Le lemme de recollement 14.96 donne alors la mesurabilité de f. □

14.116.
Toutes les fonctions que nous pouvons écrire explicitement sont mesurables …en tout cas toutes celles que l'on trouve en pratique. En effet nous avons déjà toutes les fonctions continues par morceaux via la proposition 14.115 et ensuite toutes les limites par la proposition 14.103. Cela donne les séries, les dérivées, les primitives, etc.

14.7 Tribu produit

14.7.1 Produit d'espaces mesurables

Définition 14.117.
Si $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont deux tribus sur deux ensembles Ω_1 et Ω_2, nous définissons la ***tribu produit*** *$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ comme étant la tribu engendrée par*

$$\{X \times Y \text{ tel que } X \in \mathcal{A}_1, Y \in \mathcal{A}_2\}. \tag{14.311}$$

Ces ensembles sont appelés ***rectangles*** *de $(\Omega_1, \mathcal{A}_1) \otimes (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$.*

Proposition 14.118 ([375])**.**
Soient deux espaces mesurables $(S_1, \mathcal{F}_1)$ et $(S_2, \mathcal{F}_2)$. Si $\mathcal{C}_i$ est une classe de parties de S_i avec $\mathcal{F}_i = \sigma(\mathcal{C}_i)$ et $S_i \in \mathcal{C}_i$. Alors

$$\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 = \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2). \tag{14.312}$$

Démonstration. Nous notons p_1 et p_2 les projections de $S_1 \times S_2$ vers S_1 et S_2. Nous commençons par prouver que

$$\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 = \sigma\big(\mathrm{P}_1^{-1}(\mathcal{F}_1) \cup p_2^{-1}(\mathcal{F}_2)\big). \tag{14.313}$$

En effet cette union est dans $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ parce que ce sont tous des produits de la forme $A_1 \times S_2$ et $S_1 \times A_2$ où $A_i \in \mathcal{F}_i$. Inversement, tous les produits de la forme $A_1 \times A_2$ sont dans la tribu engendrée par l'union parce que

$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \times S_2) \cap (S_1 \times A_2). \tag{14.314}$$

Par conséquent, la partie $p_1^{-1}(\mathcal{F}_1) \cup p_2^{-1}(\mathcal{F}_2)$ engendre tous les produits qui engendrent la tribu $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$. L'égalité (14.313) est donc correcte.

Si $C_1 \in \mathcal{C}_1$ alors

$$p_1^{-1}(C_1) = C_1 \times S_2 \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \tag{14.315}$$

et donc $p_1^{-1}(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$. En utilisant le lemme de transport 14.43 nous avons alors

$$p_1^{-1}(\mathcal{F}_1) = p_1^{-1}\big(\sigma(\mathcal{C}_1)\big) = \sigma\big(p_1^{-1}\mathcal{C}_1\big) \subset \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_1) \tag{14.316}$$

et au bout de la même façon,

$$p_2^{-1}(\mathcal{F}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2). \tag{14.317}$$

Vu les relations (14.316), (14.317) et (14.313) nous avons

$$\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 = \sigma\big(\mathrm{P}_1^{-1}(\mathcal{F}_1) \cup p_2^{-1}(\mathcal{F}_2)\big) \subset \sigma(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2). \tag{14.318}$$

Réciproquement, si $C_1 \in \mathcal{C}_1$ et $C_2 \in \mathcal{C}_2$ alors

$$C_1 \times C_2 = (C_1 \times S_1) \cap (S_1 \times C_2) = p_1^{-1}(C_1) \cap p_2^{-1}(C_2) \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2. \tag{14.319}$$

□

14.7.2 Le cas des boréliens

Si X_1 et X_2 sont des espaces topologiques et si nous notons $\mathcal{O}_i$ l'ensemble de leurs ouverts, par définition $\mathcal{B}\mathrm{or}(X_i) = \sigma(\mathcal{O}_i)$. De plus par la proposition 14.118 nous savons que

$$\sigma(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2) = \mathcal{B}\mathrm{or}(X_1) \otimes \mathcal{B}\mathrm{or}(X_2). \tag{14.320}$$

Lemme 14.119.
Si $(X_i, \mathcal{O}_i)$ sont des espaces topologiques, alors

$$\mathcal{B}or(X_1) \otimes \mathcal{B}or(X_2) \subset \mathcal{B}or(X_1 \times X_2) \tag{14.321}$$

Démonstration. Si $A_i \in \mathcal{O}_i$ alors $A_1 \times A_2$ est un ouvert de $X_1 \times X_2$ (voir la définition 7.14). Par conséquent, $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ est contenu dans l'ensemble des ouverts de $X_1 \times X_2$ ou encore

$$\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{B}\mathrm{or}(X_1 \times X_2), \tag{14.322}$$

et donc

$$\sigma(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2) \subset \sigma\big(\mathcal{B}\mathrm{or}(X_1 \times X_2)\big) \tag{14.323}$$

finalement, par (14.320)

$$\mathcal{B}\mathrm{or}(X_1) \otimes \mathcal{B}\mathrm{or}(X_2) \subset \mathcal{B}\mathrm{or}(X_1 \times X_2). \tag{14.324}$$

□

Il n'y a en général pas égalité, mais nous allons immédiatement voir que dans (presque) tous les cas raisonnables, les boréliens sur un produit sont le produit des boréliens.

Proposition 14.120 ([375]).
Soient (X_1, d_1) et (X_2, d_2) des espaces métriques séparables. Alors

$$\mathcal{B}or(X_1 \times X_2) = \mathcal{B}or(X_1) \otimes \mathcal{B}or(X_2). \tag{14.325}$$

Démonstration. Nous savons par le lemme 7.206 que tout ouvert de $X_1 \times X_2$ est une réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$. Donc tout ouvert de $X_1 \times X_2$ est dans $\mathcal{B}\mathrm{or}(X_1) \otimes \mathcal{B}\mathrm{or}(X_2)$. Par conséquent

$$\mathcal{B}\mathrm{or}(X_1 \times X_2) \subset \mathcal{B}\mathrm{or}(X_1) \otimes \mathcal{B}\mathrm{or}(X_2). \tag{14.326}$$

L'inclusion inverse étant déjà acquise par le lemme 14.119, nous avons l'égalité. □

Proposition 14.121.
Les boréliens sur $\mathbb{R}^N$ sont ceux qu'on croit.

(1) $\mathcal{B}or(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}or(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}or(\mathbb{R})$
(2) $\mathcal{B}or(\mathbb{R}^{N+1}) = \mathcal{B}or(\mathbb{R}^N) \otimes \mathcal{B}or(\mathbb{R})$

Démonstration. Cela n'est rien d'autre que la proposition 14.120. □

Proposition 14.122.
Soit un espace mesurable $(S, \mathcal{F})$ et des applications $f_k \colon S \to \mathbb{R}$ $(k = 1, \ldots, N)$. Alors l'application

$$\begin{aligned} f \colon (S, \mathcal{F}) &\to (\mathbb{R}^N, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^N)) \\ x &\mapsto \big(f_1(x), \ldots, f_N(x)\big) \end{aligned} \tag{14.327}$$

est mesurable si et seulement si chacun des f_i est mesurable.

Démonstration. Division en deux.

(i) **<u>Condition nécessaire</u>** Nous supposons que les f_i sont mesurables. Nous avons

$$f^{-1}\big(\prod_{k=1}^{N}]a_k, b_k[\big) = \{x \in S \text{ tel que } f_1(x) \in \,]a_1, b_1[, \cdots f_N(x) \in \,]a_N, b_N[\} \tag{14.328a}$$

$$= \bigcap_{k=1}^{N} f_k^{-1}\big(]a_k, b_k[\big). \tag{14.328b}$$

Cela est une intersection finie d'éléments de $\mathcal{F}$ et est donc un élément de $\mathcal{F}$. Mais les pavés ouverts engendrent $\mathcal{B}\mathrm{or}(\mathbb{R}^N)$ parce qu'ils sont une base dénombrable de la topologie (proposition 14.46). Le théorème 14.44 nous assure alors que f est mesurable parce que l'image inverse d'une base de la tribu est mesurable.

(ii) **<u>Condition suffisante</u>** Si f est mesurable alors en particulier

$$f_k^{-1}\big(]a, b[\big) = f^{-1}\big(\mathbb{R} \times \ldots \times \,]a, b[\, \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}\big) \in \mathcal{F}. \tag{14.329}$$

Pour cela nous avons utilisé la proposition 14.121 qui nous indique que le produit dans la parenthèse est un borélien de $\mathbb{R}^N$ en tant que produit de boréliens de $\mathbb{R}$.
Encore une fois f_k^{-1} tombe dans $\mathcal{F}$ pour une base dénombrable de la topologie de $\mathbb{R}$ et est donc mesurable.

□

14.8 Mesure de Lebesgue sur ℝ

Nous notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des intervalles[35] de $\mathbb{R}$.

35. Définition 1.20.

Proposition 14.123.
L'ensemble réunions finies d'éléments de $\mathcal{S}$ est une algèbre de parties de $\mathbb{R}$ que nous allons noter $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$.

Démonstration. Nous devons vérifier la définition 14.11. Les ensembles $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont des intervalles et font donc partie de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$.

Si $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ se décompose en union d'intervalles de la forme (a_k, b_k) avec $k = 1, \ldots, n$ (ici nous mettons des parenthèses au lieu de crochets parce qu'à priori nous ne savons pas). Alors

$$A^c = \bigcup_{k=0}^{k} (b_k, a_{k+1}) \tag{14.330}$$

où nous avons posé $b_0 = -\infty$ et $a_{n+1} = +\infty$. Ici encore les parenthèses sont soit fermées soit ouvertes en fonction de ce qu'étaient celles dans la décomposition de A. Quoi qu'il en soit, cette décomposition de A^c montre que $A^c \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$.

Enfin si $A, B \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ alors $A \cup B \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$. □

Lemme 14.124.
Tout élément de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ admet une décomposition minimale unique en réunion finie d'intervalles. Cette décomposition est formée d'intervalles deux à deux disjoints.

Démonstration. Nous allons montrer que si $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$, alors la décomposition minimale consiste en les composantes connexes [36] de A. Pour cela nous rappelons que la proposition 10.47 dit qu'une partie de $\mathbb{R}$ est connexe si et seulement si elle est un intervalle. D'abord cela nous dit immédiatement que les composantes connexes de A forment une décomposition de A en intervalles. Nous devons prouver qu'elle est minimale.

Soit $\{C_k\}_{k=1,\ldots,n}$ les composantes connexes de A. Aucun connexe de $\mathbb{R}$ contenu dans A ne peut intersecter plus d'un des C_k, et par conséquent nous ne pouvons pas décomposer A en moins de n intervalles.

Pour l'unicité, soit $\{I_k\}_{k=1,\ldots,n}$ un ensemble de n intervalles tels que $\bigcup_{k=1}^n I_k = A$. Chacun des I_k intersecte un et un seul des C_k. En effet si $x \in I_k \cap C_i$ et $y \in I_k \cap C_j$, alors $[x, y] \subset I_k$ parce que I_k est un intervalle. Mais C_i étant le plus grand connexe contenant x, $[x, y] \subset C_i$ et de la même façon, $[x, y] \subset C_j$. Par conséquent C_i et C_j sont tous deux la composante connexe de x et y. Nous en déduisons que $C_i = C_j$, c'est-à-dire $i = j$.

Par ailleurs nous avons $I_k \cap I_l = \emptyset$ dès que $k \neq l$ parce que sinon l'ensemble $I_k \cap I_l$ serait connexe et la décomposition des $\{I_k\}_{k=1,\ldots,n}$ ne serait pas minimale : en remplaçant I_k et I_l par $I_k \cup I_l$ on aurait eu une décomposition contenant moins d'éléments. Donc à renumérotation près nous pouvons supposer que I_k intersecte C_l si et seulement si $k = l$.

Dans ce cas nous devons avoir $I_k = C_k$, sinon les éléments de $C_k \backslash I_k$ ne seraient pas dans $\bigcup_{i=1}^n I_i$. □

Définition 14.125 (longueur d'intervalle[362])**.**
*Si I est un intervalle d'extrémités a et b avec $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$ alors nous définissons la **longueur** de I par*

$$\ell(I) = \begin{cases} b - a & \text{si } -\infty < a \leqslant b < +\infty \\ \infty & \text{si } a \text{ ou } b \text{ est infini} \end{cases} \tag{14.331}$$

Si $A \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ et si sa décomposition minimale est $A = \bigcup_{k=1}^n I_k$, alors on définit

$$\ell(A) = \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k). \tag{14.332}$$

Le lemme suivant nous indique que nous pouvons calculer la longueur d'un élément de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ sans savoir la décomposition minimale, pourvu que l'on connaisse une décomposition disjointe.

36. Définition 7.61.

Lemme 14.126 ([362]).
Si

$$B = \bigcup_{r=1}^{p} J_r \tag{14.333}$$

est une décomposition de $B \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ en intervalles deux à deux disjoints alors

$$\ell(B) = \sum_{r=1}^{p} \ell(J_r). \tag{14.334}$$

Démonstration. Nous prouvons dans un premier temps le résultat dans le cas où $B = I$ est un intervalle. Soit I un intervalle et une décomposition en intervalles disjoints $I = \bigcup_{r=1}^{p} J_r$. Nous montrons qu'alors $\ell(I) = \sum_{r=1}^{p} \ell(J_r)$. Nous verrons ensuite comment passer au cas où B est un élément générique de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$.

(i) **Si $B = I$ est un intervalle infini** Si I est infini alors un des J_r soit l'être et donc $\sum_{r=1}^{p} \ell(J_r) = \infty = \ell(I)$.

(ii) **Si $B = I$ est un intervalle ininfini** Pour chaque $r = 1, \ldots, p$ nous notons a_r et b_r les extrémités de J_r. Vu que les J_r sont connexes et disjoints, si $a_k \leqslant a_l$ alors $b_k \leqslant a_l$, sinon l'ensemble (non vide) $]a_l, b_k[$ serait dans l'intersection $I_k \cap I_l$ qui, elle, est vide. Plus généralement, si $x \in J_k$ et $y \in J_l$ avec $x < y$ alors pour tout $x' \in J_k$ et tout $y' \in J_l$ nous avons $x' < y'$. Vu qu'il y a un nombre fini d'ensembles J_r, nous pouvons les classer dans l'ordre croissant :

$$a_1 \leqslant b_1 \leqslant a_2 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_{p-1} \leqslant a_p \leqslant b_p. \tag{14.335}$$

Vu que les J_r sont disjoints et que leur union est connexe nous avons en réalité

$$a = a_1 \leqslant b_1 = a_2 \leqslant b_2 = a_3 \leqslant \ldots \leqslant b_{p-1} = a_p \leqslant b_p, \tag{14.336}$$

donc une somme télescopique donne

$$\ell(I) = b - a = \sum_{r=1}^{p} (b_r - a_r) = \sum_{r=1}^{p} \ell(J_r). \tag{14.337}$$

(iii) **Si B n'est pas un intervalle** Soit $\{I_k\}_{k=1,\ldots,n}$ la décomposition minimale de B. Alors

$$\spadesuit = \ell(B) = \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) = \sum_{k=1}^{n} \ell\Big(\bigcup_{r=1}^{p} (I_k \cap J_r)\Big). \tag{14.338}$$

Mais I_k est un intervalle et s'écrit comme union disjointe $I_k = \bigcup_{r=1}^{p} (I_k \cap J_r)$, donc par la première partie

$$\spadesuit = \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{p} \ell(I_k \cap J_r) = \sum_{r=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k \cap J_r). \tag{14.339}$$

Ici J_r est un intervalle qui se décompose en $J_r = \bigcup_{k=1}^{n} (I_k \cap J_r)$, donc nous pouvons encore utiliser la première partie :

$$\spadesuit = \sum_{r=1}^{p} \ell(J_r), \tag{14.340}$$

ce qu'il fallait.

□

Lemme 14.127.
Si $A, B \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ avec $A \subset B$ alors $\ell(A) \leqslant \ell(B)$.

Démonstration. Nous avons évidemment $B = A \cup B\backslash A$. Notons que $B\backslash A \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ par le lemme 14.13. Si $\{I_k\}$ est une décomposition disjointe de A et $\{J_i\}$ une de $B\backslash A$ alors $\{I_k\} \cup \{J_i\}$ est une décomposition disjointe de $A \cup B\backslash A$ et le lemme 14.126 nous dit que

$$\ell(B) = \ell(A \cup B\backslash A) = \ell(A) + \ell(B\backslash A). \tag{14.341}$$

Par conséquent $\ell(B) \geqslant \ell(A)$. □

Lemme 14.128.
Si I est un intervalle et si il se décompose en

$$I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \tag{14.342}$$

où les I_n sont des intervalles disjoints, alors

$$\ell(I) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n). \tag{14.343}$$

Démonstration. Nous allons encore diviser la preuve en deux parties suivant que I soit de longueur finie ou pas.

(i) **Si I est de longueur finie** Soient a et b les extrémités de I : $-\infty < a \leqslant b < +\infty$. Pour tout $N \geqslant 1$ nous avons

$$\sum_{n=1}^{N} \ell(I_n) = \ell\big(\bigcup_{n=1}^{n} I_n\big) \leqslant \ell(I). \tag{14.344}$$

La première égalité est le lemme dans le cas d'une union finie 14.126. L'inégalité est le lemme 14.127. Cela étant vrai pour tout N, à la limite $N \to \infty$ nous conservons l'inégalité :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \leqslant \ell(I). \tag{14.345}$$

Nous devons encore voir l'inégalité inverse. Pour cela nous supposons que $a < b$. Sinon $\ell(I) = 0$ et tous les I_n doivent être vide sauf un qui contiendra seulement $\{a\}$ (si I le contient).

Soit $\epsilon > 0$ avec $\epsilon < b - a$ et l'intervalle

$$[a + \frac{\epsilon}{4}, b - \frac{\epsilon}{4}] = [a', b'] \subset I. \tag{14.346}$$

Si les a_n et le b_n sont le extrémités des I_n alors

$$[a', b'] \subset I = \bigcup_{n\geqslant 1} I_n \subset \bigcup_{n\geqslant 1}]a_n - \frac{\epsilon}{2^{n+2}}, b_n + \frac{\epsilon}{2^{n+2}}[= \bigcup_{n\geqslant 1}]a'_n, b'_n[\tag{14.347}$$

où nous avons posé $a'_n = a_n - \epsilon/2^{n+2}$ et $b'_n = b_n + \epsilon/2^{n+2}$. Nous avons donc recouvert le compact [37] $[a', b']$ par des ouverts. Nous pouvons donc en extraire un sous-recouvrement fini (c'est la définition de la compacité), c'est-à-dire une partie finie F de $\mathbb{N}$ telle que

$$[a', b'] \subset \bigcup_{n\in F}]a'_n, b'_n[. \tag{14.348}$$

Le lemme 14.127 nous dit alors que

$$\heartsuit = b' - a' \leqslant \ell\big(\bigcup_{n\in F}]a'_n, b'_n[\big) \leqslant \sum_{n\in F} (b'_n - a'_n). \tag{14.349}$$

37. Lemme 10.19.

La seconde inégalité se prouve en recopiant [38] la preuve de 14.14. Nous continuons le calcul :

$$\heartsuit \leqslant \sum_{n\in F}(b_n - a_n) + \sum_{n\in F}\frac{\epsilon}{2^{n+1}} \leqslant \sum_{n\in F}(b_n - a_n) + \frac{\epsilon}{2}. \tag{14.350}$$

Mais $b' - a' = (b-a) - \frac{\epsilon}{2}$, donc

$$b - a - \frac{\epsilon}{2} \leqslant \sum_{n\in F}(b_n - a_n) + \frac{\epsilon}{2}. \tag{14.351}$$

D'où nous déduisons que

$$\ell(I) = b - a \leqslant \sum_{n\in F}(b_n - a_n) + \epsilon \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}}(b_n - a_n) + \epsilon = \sum_{n\in\mathbb{N}}\ell(I_n) + \epsilon. \tag{14.352}$$

Cela étant valable pour tout ϵ nous déduisons que

$$\ell(I) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}}\ell(I_n). \tag{14.353}$$

(ii) **Si I est de longueur infinie** Étant donné que I est un intervalle de longueur infinie, il doit au moins contenir un ensemble du type $]-\infty, a]$ ou $[a, +\infty[$; donc pour tout $M > 0$, il existe $N \geqslant 1$ tel que

$$\ell\big(I \cap [-N, N]\big) \geqslant M. \tag{14.354}$$

Mais $I \cap [-N, N]$ est un intervalle et

$$I \cap [-N, N] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \cap [-N, N] \tag{14.355}$$

qui est une union disjointe. Par conséquent,

$$M \leqslant \ell\big(I \cap [-N, N]\big) = \sum_n \ell\big(I_n \cap [-N, N]\big) \leqslant \sum_n \ell(I_n). \tag{14.356}$$

Cela étant vrai pour tout $M > 0$, nous concluons que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\ell(I_n) = \infty. \tag{14.357}$$

□

Remarque 14.129.
Pour la preuve de 14.128 nous ne pouvons pas classer les I_n en ordre croissant comme nous l'avons fait dans la preuve de 14.126. En effet si $I = [0, 1]$ et que nous recouvrons $[0, \frac{1}{2}[$ et $]\frac{1}{2}, 1]$ par une infinité d'intervalles chacun, nous ne pouvons plus les classer par ordre croissant.

Proposition 14.130 ([362]).
La fonction ℓ ainsi définie est une mesure σ-finie sur l'algèbre de parties $\mathcal{A}_\mathcal{S}$.

Démonstration. Le fait que ℓ soit σ-finie provient par exemple du fait que $\ell\big(]-n, n[\big) = 2n$ tandis que $\bigcup_n]-n, n[= \mathbb{R}$.

Nous devons à présent prouver que ℓ est additive. Soient $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des éléments disjoints de $\mathcal{A}_\mathcal{S}$, avec leurs décomposition minimales

$$A_i = \bigcup_{k=1}^{n} I_k^{(i)}. \tag{14.358}$$

38. Nous ne pouvons pas invoquer directement le lemme 14.14 parce que nous n'avons pas encore prouvé que ℓ était une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_\mathcal{S})$.

Pour chaque $i \in \mathbb{N}$, le lemme 14.128 nous indique que

$$\ell(A_i) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \ell(I_k^{(i)}). \tag{14.359}$$

L'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable et nous pouvons considérer la décomposition

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{(i,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} I_k^{(i)}. \tag{14.360}$$

Cette décomposition n'est pas spécialement minimale [39] mais elle est disjointe. Le lemme 14.128 donne

$$\ell(\bigcup_i A_i) = \sum_{(i,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \ell(I_k^{(i)}) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \ell(I_k^{(i)}) \right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \ell(A_i). \tag{14.361}$$

La décomposition de la somme sur $\mathbb{N}^2$ en deux sommes sur $\mathbb{N}$ est faite en vertu de la proposition 11.109. □

14.8.1 Mesure et tribu de Lebesgue

Théorème 14.131.
Il existe une unique mesure λ sur $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R})\big)$ telle que

$$\lambda\big(]a, b[\big) = b - a \tag{14.362}$$

pour tout $a \leqslant b$ dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. L'existence provient du théorème de prolongement de Hahn 14.75 : la mesure ℓ sur $(\mathcal{A}_\mathcal{S})$ se prolonge à $\sigma(\mathcal{A}_\mathcal{S}) = \mathcal{B}\mathrm{or}(\mathbb{R})$.

Nous ne pouvons pas prouver l'unicité en invoquant la partie unicité de Hahn (c'est tentant parce que ℓ est σ-finie) parce que dans ce théorème nous ne fixons la valeur de λ que sur une toute petite partie de $\mathcal{A}_\mathcal{S}$. Nous allons cependant voir que cette petite partie suffit à garantir l'unicité.

La classe

$$\mathcal{D} = \{]a, b[\text{ tel que } -\infty < a \leqslant b < +\infty\} \tag{14.363}$$

est stable par intersection finie et engendre la tribu borélienne. En effet $\mathcal{D}$ contient toutes les boules et donc une base dénombrable de la topologie de $\mathbb{R}$ (proposition 7.118). Donc tous les ouverts de $\mathbb{R}$ sont dans $\sigma(\mathcal{D})$ et $\sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{B}\mathrm{or}(\mathbb{R})$. Nous pouvons donc dire grâce au théorème 14.29 qu'il y a unicité de la mesure sur $\mathcal{B}\mathrm{or}(\mathbb{R})$ lorsque les valeurs sur $\mathcal{D}$ sont fixées. □

Définition 14.132.
La mesure de l'espace mesuré $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}), \lambda\big)$ donné par le théorème 14.131 est la ***mesure de Lebesgue*** *sur $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R})\big)$.*

Nous définissons aussi la ***tribu de Lebesgue*** *par la proposition 14.72 : $\big(\mathbb{R}, \mathcal{L}eb(\mathbb{R}), \lambda\big)$ est l'espace mesuré complété de $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}), \lambda\big)$.*

Remarque 14.133.
Il n'est pas évident que la tribu de Lebesgue soit plus grande que celle des boréliens, ni que la tribu des parties soit plus grande que celle de Lebesgue. Nous mentionnons cependant les faits suivants.

(1) Il existe des ensembles mesurables non-boréliens, et cela ne nécessite pas l'axiome du choix. Un argument classique de cardinalité est donné dans [360]. La construction la plus explicite que j'aie trouvée est dans [376], mais ça a l'air de demander des connaissances précises sur les ordinaux.

39. A_1 pourrait contenir $[0, 1]$ et A_2 contenir $]1, 2]$.

(2) Vu que l'ensemble de Cantor C est mesurable de mesure nulle (proposition 14.152), tout sous-ensemble de Cantor est mesurable de mesure nulle parce que la tribu de Lebesgue est complète par définition. Le cardinal de $\mathcal{P}(C)$ est strictement supérieur à la puissance du continu, alors que le cardinal de l'ensemble des boréliens est au plus égal à la puissance du continu. Donc il existe des non boréliens contenus dans Cantor ; de tels non boréliens sont alors mesurables au sens de Lebesgue.

(3) Si nous admettons l'axiome du choix alors il existe des ensembles non mesurables au sens de Lebesgue. Nous en verrons un dans l'exemple 14.146.

Exemple 14.134 (Un ouvert contenant tous les rationnels et de mesure arbitrairement petite)**.**
Il est possible de construire un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{Q}$ et de mesure de Lebesgue plus petite que ϵ. Pour cela si (q_i) est une énumération des rationnels, il suffit de prendre

$$\mathcal{O} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(q_n, \frac{\epsilon}{2^{n+1}}). \tag{14.364}$$

Cela est un ouvert comme union d'ouverts, ça contient tous les rationnels, et sa mesure se majore. En effet le théorème 14.131 donne $\lambda\big(B(q_n, \frac{\epsilon}{2^n})\big) = \frac{\epsilon}{2^n}$. Vu que ces boules ne sont à priori pas disjointes, le lemme 14.18 donne

$$\lambda(\mathcal{O}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon \tag{14.365}$$

par (11.303) avec $q = \frac{1}{2}$.

Par complémentarité, nous pouvons construire un ensemble fermé de mesure non nulle et ne contenant aucun rationnel. Et même un fermé dans $[0, 1]$, de mesure $1 - \epsilon$ ne contenant aucun rationnel.

Cela peut surprendre parce qu'il existe des tonnes de suites d'irrationnels qui convergent vers des rationnels [40], et il semble difficile de créer un ensemble contenant beaucoup d'irrationnels tout en préservant la propriété de fermeture vis à vis des suites convergentes. △

Exemple 14.135 (Mesure finie, non borné)**.**
Il existe des parties de $\mathbb{R}$ qui sont de mesure finie sans être bornés. Par exemple en posant

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(n, \frac{1}{2^n}). \tag{14.366}$$

La partie A n'est pas bornée parce que que $\mathbb{N} \subset A$. Mais en termes de mesure,

$$\lambda(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty \tag{14.367}$$

en vertu de la somme de la série géométrique, proposition 11.119. △

14.8.2 Propriétés de la mesure de Lebesgue

Proposition 14.136.
Tout ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$ est mesurable de mesure nulle.

Démonstration. Un point de $\mathbb{R}$ est un intervalle de mesure nulle. Si D est dénombrable, il est union disjointes et dénombrable de points. Le lemme 14.128 nous dit alors que sa mesure est $\lambda(D) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(\{a_i\}) = 0$. □

Remarque 14.137.
Il existe cependant des ensembles non dénombrables et tout de même de mesure nulle. Par exemple l'ensemble de Cantor (voir la proposition 14.152).

40. Si $q \in \mathbb{Q}$ et $r \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ alors la suite $(q + r/10^k)_k$ est une suite d'irrationnels convergente vers le rationnel q.

Proposition 14.138.
La mesure de Lebesgue est invariante par translation, c'est-à-dire que si A est mesurable alors $\lambda(A) = \lambda(A+\alpha)$ pour tout réel α.

Démonstration. Nous commençons par les intervalles ouverts :

$$\lambda\big(]a,b[+\alpha\big) = \lambda\big(]a+\alpha,b+\alpha[\big) = (b+\alpha)-(a+\alpha) = b-a = \lambda\big(]a,b[\big). \tag{14.368}$$

D'après ce qui est dit dans l'exemple 14.30, la mesure de Lebesgue sur les boréliens est invariante par translation.

Si A est mesurable alors il existe un borélien B et un ensemble négligeable N tels que $A = B\cup N$ par la caractérisation 14.129b de la complétion. Alors $A+\alpha = B+\alpha\cup N+\alpha$ et $N+\alpha$ est encore un ensemble négligeable. Donc $\lambda(A+\alpha) = \alpha(B+\alpha) = \lambda(B)$. □

Le mesure ℓ définie sur l'algèbre de parties $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ (voir proposition 14.130). La proposition 14.15 nous donne donc une mesure extérieure par

$$\lambda^*(X) = \inf\{\sum_n \ell(A_n); A_n\in\mathcal{A}_{\mathcal{S}}, X\subset\bigcup_n A_n\}. \tag{14.369}$$

La proposition suivante montre que cette mesure extérieure peut être exprimée seulement avec des intervalles ouverts.

Proposition 14.139.
Nous avons

$$\lambda^*(X) = \inf\{\sum_{n\geqslant 1}\ell(I_n); I_n \textit{ sont des intervalles ouverts et } X\subset\bigcup_n I_n\}. \tag{14.370}$$

Démonstration. Nous savons que dans la définition (14.369), chacun des A_n est une réunion disjointe d'intervalles (pas spécialement ouverts) deux à deux disjoints ; donc

$$\lambda^*(X) = \inf\{\sum_n \ell(I_n); I_n\in\mathcal{S}, X\subset\bigcup_n I_n\}. \tag{14.371}$$

Soit $\epsilon>0$. Si $A\subset\bigcup_n I_n$, pour chaque $n\geqslant 1$ nous considérons un intervalle ouvert J_n tel que $I_n\subset J_n$ et $\ell(I_n)+\frac{\epsilon}{2^n}\leqslant \ell(J_n)$. Faisant cela pour chacun des découpages de X en intervalles nous trouvons

$$\lambda^*(X)\leqslant \inf\{\sum_n \ell(J_n)\ J_n \text{ est ouvert et } X\subset\bigcup_n J_n\}+\epsilon. \tag{14.372}$$

Étant donné que ϵ est arbitraire nous avons l'égalité. □

Proposition 14.140 ([362]).
Si $X\subset\mathbb{R}$ est tel que $\lambda^*(X)<\infty$ alors

(1) *Pour tout $\epsilon>0$ il existe un ouvert Ω_ϵ tel que*

$$\begin{cases} X\subset\Omega_\epsilon & (14.373a)\\ \lambda(\Omega_\epsilon)\leqslant\lambda^*(X)+\epsilon. & (14.373b)\end{cases}$$

(2) *Il existe une intersection dénombrable d'ouverts G telle que*

$$\begin{cases} X\subset G & (14.374a)\\ \lambda(G)=\lambda^*(X). & (14.374b)\end{cases}$$

Démonstration. Pour (1), la proposition 14.139 nous a déjà dit que

$$\lambda^*(X) = \inf\{\sum_n \ell(I_n)\ I_n \text{ est un intervalle ouvert}, X\subset\bigcup_n I_n\}, \tag{14.375}$$

donc si $\epsilon > 0$, il existe des intervalles ouverts I_n tels que

$$\begin{cases} X \subset \bigcup_n I_n & (14.376a)\\ \sum_n \ell(I_n) \leqslant \lambda^*(X) + \epsilon. & (14.376b)\end{cases}$$

Si nous posons $\Omega_\epsilon = \bigcup_n I_n$, alors nous avons bien

$$\begin{cases} X \subset \Omega_\epsilon & (14.377a)\\ \lambda(\Omega_\epsilon) \leqslant \sum_n \ell(I_n) \leqslant \lambda^*(X) + \epsilon. & (14.377b)\end{cases}$$

En ce qui concerne (2), pour chaque $k \geqslant 1$ nous considérons l'ensemble $\Omega_{1/k}$ obtenu comme précédemment avec $\epsilon = 1/k$ et nous posons $G = \bigcap_{k\geqslant 1} \Omega_{1/k}$. Cela est une intersection dénombrable d'ouverts vérifiant $X \subset G$ (parce que $X \subset \Omega_{1/k}$ pour tout k) et donc $\lambda^*(X) \leqslant \lambda^*(G) = \lambda(G)$. De plus pour tout k nous avons

$$\lambda(G) \leqslant (\Omega_{1/k}) \leqslant \lambda^*(X) + \frac{1}{k} \tag{14.378}$$

pour tout k. En faisant $k \to \infty$ nous avons

$$\lambda(G) \leqslant \lambda^*(X). \tag{14.379}$$

Au final

$$\lambda(G) \leqslant \lambda^*(X) \leqslant \lambda(G), \tag{14.380}$$

d'où l'égalité. □

Corolaire 14.141.
Une partir $N \subset \mathbb{R}$ est négligeable[41] *si et seulement si $\lambda^*(N) = 0$.*

Démonstration. Nous savons que si N est négligeable il existe un borélien Y tel que $N \subset Y$ avec $\lambda(Y) = 0$. Par conséquent [42]

$$\lambda^*(N) \leqslant \lambda^*(Y) = \lambda(Y) = 0. \tag{14.381}$$

Pour l'implication inverse nous supposons que $\lambda^*(N) = 0$ et nous prenons l'ensemble G définit par la proposition 14.140(2) : c'est un borélien contenant N et tel que $\lambda(G) = \lambda^*(N) = 0$. L'ensemble N est donc négligeable. □

Théorème 14.142 (Régularité extérieure de la mesure de Lebesgue)**.**
Pour tout mesurable $A \subset \mathbb{R}$ nous avons

$$\lambda(A) = \inf\{\lambda(\Omega); \Omega \textit{ ouvert contenant } A\}. \tag{14.382}$$

Démonstration. Nous commençons par le cas où B est un borélien.

(i) **Si B borélien, $\lambda(B) < \infty$** Soit $\epsilon > 0$; par la proposition 14.140(1) il existe un ouvert Ω_ϵ contenant B tel que $\lambda(\Omega_\epsilon) \leqslant \lambda^*(B) + \epsilon$. Vu qu'ici B est borélien, $\lambda^*(B) = \lambda(B)$ et nous concluons que pour tout ϵ il existe un ouvert Ω_ϵ tel que

$$\begin{cases} B \subset \Omega_\epsilon & (14.383a)\\ \lambda(\Omega_\epsilon) \leqslant \lambda(B) + \epsilon, & (14.383b)\end{cases}$$

et donc

$$\lambda(B) = \inf\{\lambda(\Omega);\ \Omega \text{ ouvert contenant } B\ \}. \tag{14.384}$$

(ii) **Si B borélien, $\lambda(B) = +\infty$** Dans ce cas l'infimum est pris uniquement sur des ouverts Ω tels que $\lambda(\Omega) = \infty$.

41. Définition 14.61.
42. Au péril d'être lourd nous rappelons que λ^* est défini sur toutes les parties de $\mathbb{R}$.

(iii) **<u>Si A est mesurable non borélien</u>** Nous passons maintenant au cas où A est mesurable sans être borélien. Il s'écrit donc $A = B \cup N$ avec B borélien et N négligeable par la proposition 14.64, et par définition $\lambda(A) = \lambda(B)$. Si Y est un borélien tel que $N \subset Y$ et $\lambda(Y) = 0$ alors

$$
\begin{aligned}
\lambda(A) = \lambda(B) &= \inf\{\lambda(\Omega) \text{ tel que } \Omega \text{ ouvert}, B \subset \Omega\} && (14.385a)\\
&\leqslant \inf\{\lambda(\Omega) \text{ tel que } \Omega \text{ ouvert}, B \cup N \subset \Omega\} && (14.385b)\\
&\leqslant \inf_{\Omega',Y'}\{\lambda(\Omega' \cup Y') \text{ tel que } \Omega',\, Y' \text{ ouverts}, B \subset \Omega', Y \subset Y'\} && (14.385c)\\
&\leqslant \inf_{\Omega',Y'}\{\lambda(\Omega') + \lambda(Y') \text{ tel que } \Omega',\, Y' \text{ ouverts}, B \subset \Omega', Y \subset Y'\} && (14.385d)\\
&\leqslant \inf_{\Omega'}\{\lambda(\Omega') \text{ tel que } \Omega' \text{ ouvert}, B \subset \Omega\} && (14.385e)\\
&= \lambda(B). && (14.385f)
\end{aligned}
$$

Justifications :

— (14.385a) Le cas borélien déjà fait.

— (14.385b) Les ouverts Ω tels que $B \cup N \subset \Omega$ vérifient a fortiori $B \subset \Omega$; nous avons donc agrandit l'ensemble sur lequel l'infimum est pris.

— (14.385c) Parmi les ouverts Ω qui recouvrent $B \cup N$, il y a ceux de la forme $\Omega' \cup Y'$ où Ω' recouvre B et Y' est un ouvert contenant Y. Donc nous avons rétréci l'ensemble sur lequel l'infimum est pris et par conséquent agrandit l'infimum.

— (14.385d) Mesure d'une union majorée par la somme des mesures.

— (14.385e) Vu que Y est borélien, $\lambda(Y) = \inf_{Y' \text{ ouvert}}\{\lambda(Y') \text{ tel que } Y \subset Y'\} = 0$. Donc pour tout Ω' et tout $\epsilon > 0$, nous pouvons trouver un Y' vérifiant les conditions tel que $\lambda(\Omega') + \lambda(Y') \leqslant \lambda(\Omega') + \epsilon$.

Toutes les inégalités sont des égalités en en particulier (14.385b) donne

$$\lambda(A) = \inf\{\lambda(\Omega) \text{ tel que } \Omega \text{ ouvert}, B \cup N \subset \Omega\}, \tag{14.386}$$

ce qu'il fallait.

□

Proposition 14.143 ([362]).
Si A est mesurable dans $\mathbb{R}$ et si $\epsilon > 0$ alors il existe un ouvert Ω_ϵ et un fermé F_ϵ tels que

$$
\begin{cases}
F_\epsilon \subset A \subset \Omega_\epsilon & (14.387a)\\
\lambda(\Omega_\epsilon \setminus F_\epsilon) \leqslant \epsilon. & (14.387b)
\end{cases}
$$

Démonstration. Nous commençons par le cas où A est un borélien, que nous noterons B.

(i) **<u>Première étape</u>** Montrons qu'il existe un ouvert U_ϵ tel que

$$
\begin{cases}
B \subset U_\epsilon & (14.388a)\\
\lambda(U_\epsilon \setminus B) \leqslant \frac{\epsilon}{2}. & (14.388b)
\end{cases}
$$

Si $\lambda(B) < \infty$ alors le théorème 14.142 nous donne un ouvert U_ϵ tel que $B \subset U_\epsilon$ et $\lambda(U_\epsilon) \leqslant \lambda(B) + \frac{\epsilon}{2}$. Nous avons alors

$$\lambda(\Omega_\epsilon \setminus B) = \lambda(\Omega_\epsilon) - \lambda(B) \leqslant \frac{\epsilon}{2}. \tag{14.389}$$

Si par contre $\lambda(B) = \infty$, nous posons $B_n = B \cap [-n, n]$ et $\epsilon_n = \epsilon/2^{n+1}$. Pour chaque n nous avons un ouvert Ω_n tel que

$$
\begin{cases}
B_n \subset \Omega_n & (14.390a)\\
\lambda(\Omega_n \setminus B_n) \leqslant \frac{\epsilon}{2^{n+1}} & (14.390b)
\end{cases}
$$

Par conséquent en posant $\Omega = \bigcup_{n\geqslant 1}\Omega_n$ nous avons [43]

$$\begin{cases} B\subset\Omega & (14.391a)\\ \lambda(\Omega\backslash B)\leqslant\lambda\big(\bigcup_n(\Omega_n\backslash B_n)\big)\leqslant\sum_{n\geqslant 1}\lambda(\Omega_n\backslash B_n)=\frac{\epsilon}{2}. & (14.391b)\end{cases}$$

La première étape est terminée.

(ii) **Deuxième étape** Nous prouvons à présent qu'il existe un ouvert Ω_ϵ et un fermé F_ϵ tels que

$$\begin{cases} F_\epsilon\subset B\subset\Omega_\epsilon & (14.392a)\\ \lambda(\Omega_\epsilon\backslash B)\leqslant\frac{\epsilon}{2} & (14.392b)\\ \lambda(B\backslash F_\epsilon)\leqslant\frac{\epsilon}{2}. & (14.392c)\end{cases}$$

L'ouvert Ω_ϵ, nous l'avons déjà de l'étape précédente. Pour le fermé, nous appliquons la première étape au borélien B^c ; ce qui nous trouvons est un ouvert G_ϵ tel que

$$\begin{cases} B^c\subset G_\epsilon & (14.393a)\\ \lambda(G_\epsilon\backslash B^c)\leqslant\frac{\epsilon}{2}. & (14.393b)\end{cases}$$

En posant $F_\epsilon = G_\epsilon^c$ nous avons un fermé tel que $F_\epsilon\subset B$ et

$$\lambda(B\backslash F_\epsilon)=\lambda(F_\epsilon^c\backslash B^c)=\lambda(G_\epsilon\backslash B^c)\leqslant\frac{\epsilon}{2}. \tag{14.394}$$

(iii) **Dernière étape** Les ensembles F_ϵ et Ω_ϵ trouvés à la deuxième étape donnent bien les relations (14.387). En effet $\Omega_\epsilon\backslash F_\epsilon=(\Omega_\epsilon\backslash B)\cup(B\backslash F_\epsilon)$, donc

$$\lambda(\Omega_\epsilon\backslash F_\epsilon)\leqslant\lambda(\Omega_\epsilon\backslash B)+\lambda(B\backslash F_\epsilon)=\epsilon. \tag{14.395}$$

Nous passons au cas où $A = B\cup N$ est mesurable. Nous commençons par prendre les Ω_ϵ et F_ϵ qui correspondent à B :

$$\begin{cases} F_\epsilon\subset B\subset\Omega_\epsilon & (14.396a)\\ \lambda(\Omega_\epsilon\backslash F_\epsilon)\leqslant\epsilon. & (14.396b)\end{cases}$$

Soit Y un borélien tel que $N\subset Y$ et $\lambda(Y)$ puis un ouvert Y' tel que $\lambda(Y')\leqslant\epsilon$ et $Y\subset Y'$. L'existence d'un tel Y' est assurée par la proposition 14.142 appliquée à Y. Nous vérifions que les ensembles F_ϵ et $\Omega_\epsilon\cup Y'$ fonctionnent. En effet $\Omega_\epsilon\cup Y'\backslash F_\epsilon\subset(\Omega_\epsilon\backslash F_\epsilon)\cup Y'$, donc

$$\begin{cases} F_\epsilon\subset B\cup N\subset\Omega_\epsilon\cup Y' & (14.397a)\\ \lambda\big((\Omega_\epsilon\backslash F_\epsilon)\big)\leqslant\lambda(\Omega_\epsilon\backslash F_\epsilon)+\lambda(Y')\leqslant 2\epsilon. & (14.397b)\end{cases}$$

Donc en réalité il faut choisir $\Omega_{\epsilon/2}$, $F_{\epsilon/2}$ et $\lambda(Y')\leqslant\epsilon/2$. □

Théorème 14.144 (Régularité intérieure de la mesure de Lebesgue)**.**
Si A est mesurable dans $\mathbb{R}$ alors

$$\lambda(A)=\sup\{\lambda(K); K \textit{ compact contenu dans } A\}. \tag{14.398}$$

Démonstration. Par la proposition 14.143 nous avons

$$\lambda(A)=\sup_{F\text{ fermé dans }A}\lambda(F). \tag{14.399}$$

43. Nous utilisons la petite relation ensembliste $\big(\bigcup_n A_n\big)\backslash\big(\bigcup_n B_n\big)\subset\bigcup_n(A_n\backslash B_n)$.

Pour un tel F nous posons $K_n = F \cap [-n, n]$ qui est compact[44] et contenu dans B. De plus le lemme 14.19(2) nous dit que

$$\lambda(F) = \lim_{n\to\infty} \lambda(K_n) \tag{14.400}$$

Donc tous les $\lambda(F)$ peuvent être arbitrairement approchés par un $\lambda(K)$ avec K compact dans A, et le supremum (14.399) n'est pas affecté en nous restreignant à prendre des compacts contenus dans B :

$$\lambda(A) = \sup_{F \text{ fermé dans } A} \lambda(F) = \sup_{K \text{ compact dans } A} \lambda(K). \tag{14.401}$$

□

14.8.3 Fonctions mesurables

Lemme 14.145.
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable telle que $\lambda(f \neq 0) > 0$. Alors il existe une partie mesurable M et $m > 0$ tels que $\lambda(M) > 0$ et $f(x) > m$ pour tout $x \in M$.

Démonstration. Nous notons

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) > 0\}, \tag{14.402}$$

et nous supposons que $\lambda(D) > 0$ pour fixer les idées (si ce n'est pas le cas, nous prenons pour D la partie où f est strictement négative).

Nous posons

$$A_1 = [1, \infty[\tag{14.403a}$$
$$A_n = [\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}[. \tag{14.403b}$$

Ces parties A_n sont disjointes ; donc les parties

$$D_n = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) \in A_n\} \tag{14.404}$$

sont également disjointes. Vu que $\bigcup_n D_n =]0, \infty[$, nous avons $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$. Vu que

$$\lambda(D) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(D_n) > 0, \tag{14.405}$$

il existe au moins un N tel que $\lambda(D_N) > 0$. Pour $x \in D_N$ nous avons

$$f(x) \in A_N = [\frac{1}{N}, \frac{1}{N-1}[. \tag{14.406}$$

Donc pour $x \in D_N$ nous avons $f(x) > \frac{1}{N}$. □

14.8.4 Ensemble de Vitali (non mesurable)

Exemple 14.146 (Un ensemble non mesurable au sens de Lebesgue[377])**.**
Nous considérons l'ensemble quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$; chaque classe intersecte l'intervalle $[0, 1]$. Grâce à l'axiome du choix (voir 1.8) nous pouvons construire un ensemble V contenant un représentant dans $[0, 1]$ de chaque classe. Un tel ensemble est un **ensemble de Vitali**. Nous allons prouver que V n'est pas mesurable.

Supposons que V soit mesurable. Alors tous les ensembles de la forme $V + q$ ($q \in \mathbb{Q}$) sont mesurables et ont même mesure par la proposition 14.138. Nous posons

$$A = \bigcup_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ -1\leqslant q\leqslant 1}} (V + q) \subset [-1, 2]. \tag{14.407}$$

44. parce que fermé et borné, théorème de Borel-Lebesgue 10.21.

Cela est une union disjointe d'ensembles mesurables. Donc

$$\lambda(A) = \sum_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ -1\leqslant q\leqslant 1}} \lambda(V+q). \tag{14.408}$$

Vu que $A \subset [-1,2]$ nous avons $\lambda(A) \leqslant 3$ et donc tous les termes de la somme doivent être nuls. Nous avons donc $\lambda(A) = 0$.

Prouvons toutefois que $[0,1] \subset A$, ce qui serait une contradiction. Soit $x \in [0,1]$; il est dans une des classes de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ et donc il existe $v \in V$ tel que $x - v \in \mathbb{Q}$. De plus $x, v \in [0,1]$, donc

$$-1 \leqslant x - v \leqslant 1. \tag{14.409}$$

Cela fait que $x \in V + (x-v) \subset A$. Nous avons donc $x \in A$ et donc $[0,1] \subset A$. En conséquence de quoi nous aurions $\lambda(A) \geqslant 1$. $\triangle$

14.8.5 Ensemble de Cantor

Nous considérons la fonction donnant l'écriture décimale des nombres définie en (11.327).

Définition 14.147 (Ensemble de Cantor)**.**
Soit $K_0 = [0,1[$ et les ensembles K_n définis par la récurrence

$$K_{n+1} = \big(\frac{1}{3}K_n\big) \cup \big(\frac{1}{3}(K_n+2)\big). \tag{14.410}$$

L'ensemble

$$K = \bigcup_{n\geqslant 0} K_n \tag{14.411}$$

*est l'**ensemble triadique de Cantor**.*

Les principales propriétés de l'ensemble de Cantor sont qu'il est non dénombrable (proposition 14.151) et borélien de mesure nulle (proposition 14.152).

14.148.
L'idée de base pour prouver que l'ensemble K est non dénombrable est que ses éléments sont les nombres qui s'écrivent en base 3 sans utiliser le chiffre 1. En prenant un nombre sans 1 écrit en base 3, en changeant tous les 2 en 1 et en lisant le résultat en base 2, nous obtenons tous les nombres possibles en base 2 et donc une quantité non dénombrable. L'idée est donc simple et astucieuse. La mise en musique est un peu plus délicate parce qu'il faut faire attention aux queues de suites ; c'est pour cela que nous avons construit l'ensemble de Cantor en partant de $[0,1[$ et non de $[0,1]$.

Le lemme suivant dit précisément ce que nous entendons en disant que les éléments de l'ensemble de Cantor sont les nombres qui s'écrivent en base 3 sans utiliser le chiffre 1. Nous rappelons que $\mathbb{D}_3$ est l'ensemble des suites constituées de 0, 1 et 2, et qui ne se terminent pas par une suite infinie de 2, voir 11.127 pour une définition précise.

Lemme 14.149 ([1])**.**
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{D}_3$ (définition 11.127) ; nous avons $\varphi_3(x) \in K_n \in$ si et seulement si $x_1, \ldots, x_n \in \{0,2\}$.

Démonstration. Nous procédons par récurrence en commençant avec $n = 1$. Si $x_1 = 1$ alors

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{3} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x_k}{3^k} \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[. \tag{14.412}$$

Notons que $\varphi_3(x) = \frac{2}{3}$ est impossible parce que ça demanderait une queue de suite de 2. Par conséquent $\varphi_3(x) = [0,1[\setminus[\frac{1}{3},\frac{2}{3}[= K_1$.

Nous passons à la récurrence.

(i) **Sens direct** Nous supposons que $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \{0, 2\}$ et nous montrons que $\varphi_3(x) \in K_{n+1}$. La chose surprenante est que nous n'allons pas considérer deux cas suivant que x_{n+1} vaut 0 ou 1 ; nous allons considérer deux cas suivant [45] que x_1 vaut 0 ou 1. Écrivons encore $\varphi_3(x)$:

$$\varphi_3(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x_k}{3^k} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}. \tag{14.413}$$

(i) **Si $x_1 = 0$** Alors nous avons

$$3\varphi_3(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x_k}{3^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{k+1}}{3^k} = \varphi_3(x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots) \tag{14.414}$$

Vu que par hypothèse $x_2, \ldots, x_{n+1}$ sont dans $\{0, 2\}$ nous avons $3\varphi_3(x) \in K_n$ par hypothèse de récurrence. Cela implique que $\varphi_3(x) \in K_{n+1}$.

(ii) **Si $x_1 = 2$** Alors

$$\varphi_3(x) = \frac{2}{3} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}, \tag{14.415}$$

et

$$3\varphi_3(x) - 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{k+1}}{3^k} = \varphi(x_2, \ldots, x_{n+1}, \ldots), \tag{14.416}$$

et donc là nous avons $3\varphi_3(x) - 2 \in K_n$, ce qui implique encore $\varphi_3(x) \in K_{n+1}$.

(ii) **Sens réciproque** Nous devons maintenant prouver que $\varphi_3(x) \in K_{n+1}$ implique $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \{0, 2\}$. Par le même calcul que précédemment nous avons soit

$$3\varphi_3(x) = \varphi_3(x_2, \ldots, x_{n+1}, \ldots), \tag{14.417}$$

si $x_1 = 0$, soit

$$3\varphi_3(x) - 2 = \varphi_3(x_2, \ldots, x_{n+1}, \ldots), \tag{14.418}$$

si $x_1 = 2$. Dans les deux cas, si $x_l = 1$ pour un certain $2 \leqslant l \leqslant n+1$, alors l'hypothèse de récurrence donne que ces éléments ne sont pas dans K_n et donc $\varphi_3(x)$ pas dans K_{n+1}.

□

Corolaire 14.150 ([1]).
En posant $\mathbb{E} = \{x \in \mathbb{D}_3$ tel que $x_i \neq 1 \forall i\}$ nous avons $K = \varphi_3(\mathbb{E})$. Et plus précisément, $\varphi_3 \colon \mathbb{E} \to K$ est une bijection.

Démonstration. Nous divisons la preuve en trois étapes.

(i) **Image contenue dans K** Si $x \in \mathbb{E}$ et $n \in \mathbb{N}$ nous avons $x_1, \ldots, x_n \in \{0, 2\}$ et donc $\varphi_3(x) \in K_n$ par la proposition 14.149. Donc

$$\varphi_3(x) \in \bigcup_{n \geqslant 1} K_n = K. \tag{14.419}$$

(ii) **Injective** L'application $\varphi_3 \colon \mathbb{E} \to K$ est injective parce qu'elle est déjà injective depuis $\mathbb{D}_3$.

(iii) **Surjective** Soit $p \in K \subset [0, 1[$. Vu que $\varphi_3 \colon \mathbb{D}_3 \to [0, 1[$ est surjective (théorème 11.130), il existe $x \in \mathbb{D}_3$ tel que $\varphi_3(x) = p$. Pour tout n nous avons $\varphi_3(x) \in K_n$ et donc $x_1, \ldots, x_n \in \{0, 2\}$ et donc au final $x \in \mathbb{E}$.

□

45. Pour comprendre pourquoi, faire un dessin de comment K_n se transforme en K_{n+1} et remarquer dans K_2, les deux premiers segments ne sont pas une division du premier segment de K_1, mais bien une copie des *deux* segments de K_1.

Proposition 14.151 ([1]).
L'ensemble de Cantor est non dénombrable.

Démonstration. Nous avons prouvé à la proposition 11.131 que l'ensemble $\mathbb{D}_2$ n'était pas dénombrable. Nous allons à présent prouver que l'application

$$\begin{aligned}\psi\colon \mathbb{D}_2 &\to K\\ c &\mapsto \varphi_3(c \text{ en remplaçant les 1 par des 2})\end{aligned} \tag{14.420}$$

est une bijection. Le fait que ψ soit injective est une conséquence du fait que ce soit la composition de deux applications injectives (le remplacement et φ_3). Il faut par contre montrer que l'image est égale à K, en notant qu'il n'est pas évident à priori que l'image soit contenue dans K.

L'opération qui consiste à remplacer les 1 par des 2 est une bijection $\mathbb{D}_2 \to \mathbb{E}$. Le corolaire 14.150 nous dit aussi que $\varphi_3\colon \mathbb{E} \to K$ est une bijection. En tant que composée de bijections, ψ est une bijection.

Étant en bijection avec $\mathbb{D}_2$ qui n'est pas dénombrable par la proposition 11.131, l'ensemble de Cantor n'est pas dénombrable. □

Proposition 14.152 (Ensemble de Cantor).
L'ensemble de Cantor[46] *est borélien, non dénombrable et de mesure nulle.*

Démonstration. Nous reprenons les notations de la définition 14.147. Le fait que l'ensemble de Cantor soit non dénombrable a été prouvé dans la proposition 14.151.

L'ensemble de Cantor étant une intersection dénombrable de boréliens, il est borélien par le lemme 14.3. Vu que $K_n \subset [0,1[$ nous avons $\frac{1}{3}K_n \leqslant \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}(K_n+2) \geqslant \frac{2}{3}$, donc K_n est une union disjointe de 2^n intervalles de mesure $2/3^n$. Nous avons donc

$$\lambda(K_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n. \tag{14.421}$$

L'ensemble de Cantor étant contenu dans chacun des K_n, sa mesure est plus petite que la mesure de chacun des K_n (lemme 14.18) et donc $\lambda(K) \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$ pour tout n ; ergo $\lambda(K) = 0$. □

14.8.6 Mesure positive sans intervalle

Vu que la mesure de Lebesgue est basée sur la mesure des intervalles et quelques extensions, nous sommes en droit de croire qu'une partie de mesure strictement positive de $\mathbb{R}$ doit toujours contenir un intervalle, éventuellement à partie de mesure nulle près. Eh bien non.

Exemple 14.153 ([378]).
Soient une énumération (q_i) de $\mathbb{Q} \cap]0,1[$ et une suite (r_i) telle que $\sum_{i=0}^{\infty} r_i < \frac{1}{2}$. Quitte à prendre r_i plus petit, supposons de plus que $B(q_i, r_i) \subset [0,1]$.

Nous posons $J_n = B(q_i, r_i)$, $J = \bigcup_{i=0}^{\infty} J_n$ et

$$B = [0,1]\backslash J. \tag{14.422}$$

Les parties J_i ne sont pas disjointes, donc, en notant λ la mesure de Lebesgue,

$$0 < \lambda(J) \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \lambda(J_i) \leqslant \frac{1}{2}. \tag{14.423}$$

Mais, par définition, l'union $[0,1] = B \cup J$ est disjointe, donc

$$1 = \lambda\big([0,1]\big) = \lambda(J) + \lambda(B). \tag{14.424}$$

Nous en déduisons que

$$\frac{1}{2} \leqslant \lambda(B) \leqslant 1. \tag{14.425}$$

46. Définition 14.147

Je plaide que cette partie B ne contient non seulement aucun intervalle, mais qu'il est impossible de le compléter par une partie de mesure nulle pour obtenir un intervalle.

Soit un intervalle I dans $[0,1]$. Il existe $q_i \in I$ et donc[47]

$$J_i \subset B \backslash I. \tag{14.426}$$

Donc il n'existe pas de parties de mesure nulle qui, ajoutée à B, contiendrait I. △

Vous voulez un truc dingue à propos de la partie J de l'exemple 14.153 ? Le théorème 14.144 nous dit qu'il existe dans J des compacts de mesure arbitrairement proches de $\lambda(J)$. Il existe donc des compacts non seulement de mesure strictement positive mais même de mesure assez grande, tout en étant infiniment découpés.

14.9 Intégrale par rapport à une mesure

14.154.
Nous n'en avons pas encore terminé avec la théorie de la mesure, mais nous devons quand même définir les intégrales et voir quelques propriétés avant de continuer avec la mesure parce que la définition de la mesure sur un espace mesurable produit[48] passe par une intégrale.

14.155.
En théorie de l'intégration, la convention est la suivante : pour une fonction $f\colon X \to \mathbb{R}$, nous considérons sur X la tribu des ensembles mesurables au sens de Lebesgue sur X, *tout en gardant celle des boréliens sur l'ensemble d'arrivée.* C'est-à-dire qu'en théorie de l'intégration, c'est

$$f\colon \big(X, \mathcal{L}\text{eb}(X)\big) \to \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}\text{or}(\mathbb{R})\big). \tag{14.427}$$

En particulier, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sera mesurable si pour tout borélien A de $\mathbb{R}^m$ l'ensemble $f^{-1}(A)$ est Lebesgue-mesurable dans $\mathbb{R}^n$.

Étant donné qu'il est franchement difficile de créer des ensembles non mesurables au sens de Lebesgue, il est franchement difficile de créer des fonctions non mesurables à valeurs réelles. L'hypothèse de mesurabilité est donc toujours satisfaite dans les cas pratiques.

Voir aussi le point 14.111, et les résultats qui suivent.

14.9.1 Définition pour les fonctions à valeurs positives

Voir le thème 29.

Une mesure μ sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ permet de définir une fonctionnelle linéaire sur l'ensemble des fonctions mesurables $\Omega \to \mathbb{R}$. Cette fonctionnelle linéaire est l'intégrale que nous allons définir à présent.

Définition 14.156.
Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré ainsi que $Y \in \mathcal{A}$. Notre but est de définir

$$\int_Y f d\mu \tag{14.428}$$

*que nous nommons **intégrales de** f de f sur Y pour la mesure μ.*

(i) **Fonction étagée** *Si f est une fonction étagée*[49]*, et si sa forme canonique est $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ alors nous définissons*

$$\int_Y f d\mu = \sum_i \alpha_i \mu(Y \cap A_i). \tag{14.429}$$

47. C'est ici que nous utilisons le fait que r_i est choisi pour que $B(q_i, r_i)$ ne déborde pas de $[0,1]$. Sinon il aurait fallu chipoter et prendre seulement une partie de la boule.

48. Théorème 14.217.

49. Définition 14.104.

(ii) **Fonction mesurable à valeurs positives** *Pour une fonction $\mathcal{A}$-mesurable $f\colon \Omega \to [0,\infty]$ nous définissons l'intégrale de f sur Y par*

$$\int_Y f d\mu = \sup\left\{ \int_Y \psi d\mu \text{ où } \psi \text{ est une fonction étagée telle que } 0 \leqslant \psi \leqslant f \right\}. \tag{14.430}$$

Remarque 14.157.
Toute fonction mesurable à valeurs dans $[0,+\infty]$ est intégrable (l'intégrale vaut éventuellement $+\infty$). Au moment où une fonction commence à prendre des valeurs positives et négatives, nous demandons à pouvoir intégrer séparément les parties positive et négative. C'est pour cela que nous disons qu'une fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}$ est intégrable si $|f|$ l'est.

14.158.
Le nombre $\int_0^\infty f$ est défini directement par (14.430) complètement indépendamment d'une éventuelle limite $\lim_{x\to 0}\int_0^x f$. Cette limite sera traitée dans le lemme 14.239.

14.159.
Si la fonction n'est pas mesurable ? Alors nous n'avons pas défini son intégrale. Supposons la plus simple des fonctions non mesurables sur Ω : la fonction indicatrice d'une partie non mesurable :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{14.431}$$

où $A \subset \Omega$ n'est pas mesurable[50].

Nous supposons que l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ est complet (définition 14.63). Vu que A n'est pas mesurable, il n'est pas contenu dans une partie négligeable (parce que l'espace est complet), et nous voulons que l'intégrale ne soit pas nulle ; sinon on se demande bien à quoi sert une intégrale.

Toute fonction étagée minorant f est forcément nulle en dehors de A. Dès que B est une partie mesurable de mesure non nulle dans A, le complémentaire de B dans A est encore non mesurable, et nous voulons encore que l'intégrale de f sur ce complémentaire soit non nul.

Mais comme A n'est pas mesurable et que $\mathbb{1}_A$ n'est le supremum d'aucune suite de fonctions mesurables (lemme 14.93), bien que le supremum qui définirait l'intégrale de f existe (toute partie de $\mathbb{R}$ a un supremum), il est sans espoir que ce supremum ait un sens que l'on puisse interpréter en tant que mesure de f.

Lemme 14.160.
L'intégrale d'une fonction positive nulle presque partout est nulle.

Démonstration. Soient un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, et une fonction mesurable $f\colon \Omega \to [0,\infty]$. Nous posons

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega \text{ tel que } f(x) \neq 0\}. \tag{14.432}$$

L'hypothèse est que $\mu(\Omega_+) = 0$. Nous devons prouver que $\int_\Omega f d\mu = 0$. Vu que f est positive, nous utilisons la définition 14.429. Soit une fonction étagée positive ψ minorant f. Nous la décomposons en

$$\psi = \sum_{k=1}^n \psi_k \mathbb{1}_{A_k} \tag{14.433}$$

où les A_k sont mesurables et $\psi_k \in [0,\infty[$. Nous allons prouver que $\psi_i\mu(A_k) = 0$ pour tout k, en séparant trois cas.

(i) **Si $A_k \cap \Omega_+ = \varnothing$** Soit $x \in A_k$. Nous avons

$$\psi = \psi(x) \leqslant f(x) = 0. \tag{14.434}$$

Donc $\psi_k = 0$.

50. Ça existe, par exemple 14.146.

(ii) **Si** $A_k \subset \Omega_+$ Alors, par le lemme 14.18, $\mu(A_k) \leqslant \mu(\Omega_+) = 0$ et donc $\psi_k \mu(A_k) = 0$.

(iii) **Si** $A_k \cap \Omega_+ \neq A_k$ Soit $x \in A_k \backslash \Omega_+$. Nous avons

$$\psi_k = \psi(x) \leqslant f(x) = 0, \tag{14.435}$$

et donc encore $\psi_k = 0$.

Nous avons donc prouvé que pour toute fonction étagée positive minorant f,

$$\int_\Omega \psi d\mu = \sum_{k=1}^{n} \psi_k \mu(A_k) = 0. \tag{14.436}$$

Le supremum est donc nul. □

14.9.2 Premières propriétés

14.161.
Si $(\Omega^n(\mathfrak{A})\mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesurable, et si Y est un élément de $\mathcal{A}$, nous avons l'espace mesurable $(Y, \mathcal{A}_Y, \mu_Y)$ donné par

- $\mathcal{A}_y = \{B \cap Y \text{ tel que } B \in \mathcal{A}\}$,
- $\mu_Y = \mu$.

Et là, nous arrivons à un problème de notations parce que $\int_Y f d\mu$ peut désigner l'intégrale de f sur Y dans $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ou l'intégrale de f sur Y dans $(Y, \mathcal{A}_Y, \mu_Y)$.

Heureusement, nous allons tout de suite montrer que ces deux choses sont identiques.

Lemme 14.162.
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ainsi que $Y \in \mathcal{A}$. Nous considérons une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}^+$ qui est $\mathcal{A}$-mesurable et intégrable sur Y.

Alors, avec des notations que j'espère être claires,

(1) f est $\mathcal{A}_Y$-mesurable,

(2) f est $(Y, \mathcal{A}_Y, \mu_Y)$-intégrable,

(3) nous avons l'égalité

$$\int_{(Y, \mathcal{A}_Y, \mu_Y)} f|_Y = \int_{(Y \subset \Omega, \mathcal{A}, \mu)} f. \tag{14.437}$$

Démonstration. Nous considérons les deux ensembles suivants :

$$S_1 = \{\psi \text{ étagées sur } Y \text{ et majorées par } f|_Y\} \tag{14.438a}$$
$$S_2 = \{\psi \text{ étagées sur } \Omega \text{ et majorées par } f\}. \tag{14.438b}$$

Nous considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} s \colon S_1 &\to S_2 \\ s(\psi)(x) &= \begin{cases} \psi(x) & \text{si } x \in Y \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{14.439}$$

L'application s est une bijection.

Pour $\psi \in S_1$ nous avons

$$\psi = \sum_{k=1}^{n} \psi_k \mathbb{1}_{A_k}|_Y \tag{14.440}$$

avec $A_k \in \mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}$ et $\mathbb{1}_{A_k}|_Y : Y \to \{0, 1\}$. Nous avons aussi

$$s(\psi) = \sum_{\psi_k} \mathbb{1}_{A_k} \tag{14.441}$$

avec $\mathbb{1}_{A_k}\colon \Omega \to \{0,1\}$.

En ce qui concerne les intégrales de ces fonctions étagées, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{(Y,\mathcal{A}_Y,\mu_Y)} \psi &= \sum_{k=1}^{n} \psi_k \mu_Y(A_k \cap Y) && (14.442a)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \psi_k \mu(A_k) && (14.442b)\\
&= \int_{(Y\subset\Omega,\mathcal{A},\mu)} s(\psi). && (14.442c)
\end{aligned}$$

Justifications. Pour passer à (14.442b) nous avons utilisé d'abord que $A_k \subset Y$ et ensuite que $\mu_Y(A_k) = \mu(A_k)$.

Nous sommes maintenant prêts à prouver l'égalité du lemme. Nous avons ceci :

$$\begin{aligned}
\int_{(Y,\mathcal{A}_Y,\mu_Y)} f|_Y &= \sup\{\int_{(Y,\mathcal{A}_Y,\mu_Y)} \psi \text{ tel que } \psi \in S_1\} && (14.443a)\\
&= \sup\{\int_{(Y\subset\Omega,\mathcal{A},\mu)} s(\psi) \text{ tel que } \psi \in S_1\} && (14.443b)\\
&= \sup\{\int_{(Y\subset\Omega,\mathcal{A},\mu)} \varphi \text{ tel que } \varphi \in S_2\} && (14.443c)\\
&= \int_{(Y\subset\Omega,\mathcal{A},\mu)} f. && (14.443d)
\end{aligned}$$

□

Lemme 14.163.
Si $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ *est un espace mesuré et si* $B \in \mathcal{A}$ *alors*

$$\mu(B) = \int_B 1 d\mu = \int_\Omega \mathbb{1}_B. \tag{14.444}$$

Démonstration. La fonction caractéristique d'une partie mesurable est une fonction étagée dont la forme canonique est $\mathbb{1}_B = 1 \cdot \mathbb{1}_B + 0 \times \mathbb{1}_{B^c}$. Son intégrale est donc

$$\int \mathbb{1}_B d\mu = 1 \times \mu(B) + 0 \times \mu(B^c) = \mu(B) \tag{14.445}$$

parce que $0 \times \mu(B^c) = 0$, même si $\mu(B^c) = \infty$, comme nous l'avons convenu en 14.86. □

Proposition 14.164 ([1])**.**
Soient une fonction $f\colon (\Omega,\mathcal{A},\mu) \to \mathbb{R}^+$ *et une fonction* g *intégrable sur* Ω *telle que* $f \leqslant g$*. Alors* f *est intégrable.*

Démonstration. Une fonction étagée qui minore f minore également g. Donc l'ensemble sur lequel il faut faire le supremum pour définir $\int_\Omega f$ est inclus dans celui pour $\int_\Omega g$. Le second supremum étant fini, le premier l'est également. □

Lemme 14.165.
Soient un espace mesuré $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$*, une fonction* $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^+$ *et* $Y \in \mathcal{A}$*. Nous avons :*

$$\int_Y f d\mu = \int_\Omega f \mathbb{1}_Y d\mu. \tag{14.446}$$

Démonstration. En plusieurs parties, selon la généralité.

(i) **Si f est étagée** Nous posons $f = \sum_{k=1}^{n} f_k \mathbb{1}_{A_k}$ avec $f_k \in \mathbb{R}^+$. Dans ce cas,

$$f\mathbb{1}_Y = \sum_k f_k \mathbb{1}_{A_k \cap Y} \tag{14.447}$$

est encore une fonction étagée. Donc nous avons d'une part

$$\int_\Omega f\mathbb{1}_Y = \int_\Omega \sum_k f_k \mathbb{1}_{A_k\cap Y} = \sum_k f_k \mu(A_k \cap Y), \tag{14.448}$$

et d'autre part,

$$\int_Y f d\mu = \sum_k f_k \mu(Y \cap A_k), \tag{14.449}$$

(ii) **Si f est à valeurs positives** Nous posons

$$S_1 = \{\psi \text{ étagées sur } \Omega \text{ tel que } 0 \leqslant \psi \leqslant f\mathbb{1}_Y\} \tag{14.450}$$

et

$$S_2 = \{\psi\mathbb{1}_Y \text{ tel que } \psi \text{ étagée avec } 0 \leqslant \psi \leqslant f\}. \tag{14.451}$$

Nous prouvons que $S_1 = S_2$.
Si $\psi \in S_1$, alors

$$0 \leqslant \psi \leqslant f\mathbb{1}_Y \leqslant f. \tag{14.452}$$

De plus comme $\psi = 0$ hors de Y nous avons $\psi = \psi\mathbb{1}_Y$.
Pour l'autre inclusion, soit $0 \leqslant \psi \leqslant f$ pour une fonction étagée ψ et montrons que $\psi\mathbb{1}_Y \in S_1$. L'application $\psi\mathbb{1}_Y$ est étagée sur Ω et vérifie

$$0 \leqslant \psi\mathbb{1}_Y \leqslant f\mathbb{1}_Y \tag{14.453}$$

parce que $\psi \leqslant f$.

(iii) **L'égalité à prouver** Dans l'égalité 14.446 à prouver, le membre de droite est, d'après la définition 14.430,

$$\int_\Omega f\mathbb{1}_Y = \sup\{\int \psi \text{ tel que } \psi \in S_1\}. \tag{14.454}$$

Il nous reste donc à prouver que $\int_Y f$ se calcule de la même façon avec les éléments de S_2. D'abord nous copions la définition :

$$\int_Y f = \sup\{\int_Y \psi \text{ tel que } 0 \leqslant \psi \leqslant f\}. \tag{14.455}$$

Ensuite nous réfléchissons un peu. Si $0 \leqslant \psi \leqslant f$ avec $\psi = \sum_k \psi_k \mathbb{1}_{A_k}$, alors

$$\int_Y \psi = \sum_k \mu(A_k \cap Y) = \int_Y \psi\mathbb{1}_Y = \int_\Omega \psi\mathbb{1}_Y. \tag{14.456}$$

La dernière égalité est la partie déjà faite, à propos des fonctions étagées. Nous avons donc bien

$$\int_Y f = \sup\{\int_Y s \text{ tel que } s \in S_2\}. \tag{14.457}$$

□

14.9.3 Propriétés plus avancées

14.9.3.1 Convergence monotone

Le théorème suivant est très utile parce que le théorème fondamental d'approximation 14.110 donne les fonctions étagées qu'il faut.

Théorème 14.166 (Théorème de la convergence monotone ou de Beppo-Levi[379])**.**
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *et* (f_n) *une suite croissante de fonctions mesurables à valeurs dans* $[0, \infty]$. *Alors la limite ponctuelle* $\lim_{n\to\infty} f_n$ *existe, est mesurable et*

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n d\mu, \tag{14.458}$$

cette intégrable valant éventuellement ∞.

Démonstration. La limite ponctuelle de la suite est la fonction à valeurs dans $[0, \infty]$ donnée par

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x). \tag{14.459}$$

Ces limites existent parce que pour chaque x la suite $f_n(x)$ est une suite numérique croissante. Nous notons

$$I_0 = \int_\Omega f d\mu. \tag{14.460}$$

Nous posons par ailleurs

$$I_n = \int_\Omega f_n. \tag{14.461}$$

Cela est une suite numérique croissante qui a par conséquent une limite que nous notons $I = \lim_{n\to\infty} I_n$. Notre objectif est de montrer que $I = I_0$. D'abord par croissance de la suite, pour tous n nous avons $I_n \leqslant I_0$, par conséquent $I \leqslant I_0$.

Nous prouvons maintenant l'inégalité dans l'autre sens en nous servant de la définition (14.430). Soit une fonction simple h telle que $h \leqslant f$, et une constante $0 < C < 1$. Nous considérons les ensembles

$$E_n = \{x \in \Omega \text{ tel que } f_n(x) \geqslant Ch(x)\}. \tag{14.462}$$

Ces ensembles vérifient les propriétés $E_n \subset E_{n+1}$ et $\bigcup_{n=1}^\infty E_n = \Omega$. Pour chaque n nous avons les inégalités

$$\int_\Omega f_n \geqslant \int_{E_n} f_n \geqslant C\int_{E_n} h. \tag{14.463}$$

Si nous prenons la limite $n \to \infty$ dans ces inégalités,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n \geqslant C\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} h = C\int_\Omega h. \tag{14.464}$$

Par conséquent $\lim_{n\to\infty}\int f_n \geqslant C\int_\Omega h$. Mais étant donné que cette inégalité est valable pour tout C entre 0 et 1, nous pouvons l'écrire sans le C :

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n \geqslant \int_\Omega h. \tag{14.465}$$

Par définition, l'intégrale de f est donné par le supremum des intégrales de h où h est une fonction simple dominée par f. En prenant le supremum sur h dans l'équation (14.465) nous avons

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n \geqslant \int_\Omega f, \tag{14.466}$$

ce qu'il nous fallait. □

Remarque 14.167.
La proposition 14.110 ainsi que le lemme 14.108 montrent qu'une fonction mesurable peut-être écrite comme limite croissante de fonctions simples. Cela permet de démontrer des théorèmes en commençant par prouver sur les fonctions simples et en utilisant Beppo-Levi pour généraliser.

Remarque 14.168.
Une des raisons de demander la positivité des fonctions f_n est de n'avoir pas d'ambiguïté à parler d'intégrales qui valent ∞. Si par exemple nous prenons $\Omega = [0, 1]$ et que nous considérons

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{14.467}$$

Ce sont des fonctions intégrables, mais la limite étant la fonction $1/x$, l'égalité (14.458) est une égalité entre deux intégrales valant ∞.

Corolaire 14.169 (Inversion de somme et intégrales)**.**
Si (u_n) est une suite de fonctions mesurables positives ou nulles, alors

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int u_i = \int \sum_{i=0}^{\infty} u_i. \tag{14.468}$$

Démonstration. Nous considérons la suite des sommes partielles de (u_n) : $f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} u_n(x)$. Le théorème de la convergence monotone (théorème 14.166) implique que

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n. \tag{14.469}$$

Nous remplaçons maintenant f_n par sa valeur en termes des u_i et dans le membre de gauche nous permutons l'intégrale avec la somme finie :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \int u_n = \int \sum_{i=0}^{\infty} u_n, \tag{14.470}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

14.9.3.2 Lemme de Fatou

Lemme 14.170 (Lemme de Fatou)**.**
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f_n \colon \Omega \to [0, \infty]$ une suite de fonctions mesurables. Alors la fonction $f(x) = \liminf f_n(x)$ est mesurable et

$$\int_\Omega \liminf f_n d\mu \leqslant \liminf \int_\Omega f d\mu. \tag{14.471}$$

Démonstration. Nous posons

$$g_n(x) = \inf_{i\geqslant n} f_i(x). \tag{14.472}$$

Cela est une suite croissance de fonctions positives mesurables telles que, par définition,

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \liminf f_n(x). \tag{14.473}$$

Nous pouvons y appliquer le théorème de la convergence monotone,

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n(x) = \int \liminf f_n(x). \tag{14.474}$$

Par ailleurs, pour chaque $i \geqslant n$ nous avons

$$\int g_n \leqslant \int f_i, \tag{14.475}$$

en passant à l'infimum nous avons

$$\int g_n \leqslant \inf_{i\geqslant n} \int f_i, \tag{14.476}$$

et en passant à la limite nous avons

$$\int \liminf f_n = \lim_{n\to\infty} \int g_n \leqslant \lim_{n\to\infty} \inf_{i\geqslant n} \int f_i = \liminf_{i\to\infty} \inf f_i. \tag{14.477}$$

□

L'inégalité donnée dans ce lemme n'est en général pas une égalité, comme le montre l'exemple suivant :

$$f_i = \begin{cases} \mathbb{1}_{[0,1]} & \text{si } i \text{ est pair} \\ \mathbb{1}_{[1,2]} & \text{si } i \text{ est impair.} \end{cases} \tag{14.478}$$

Nous avons évidemment $g_n(x) = 0$ tandis que $\int_{[0,2]} f_i = 1$ pour tout i.

Théorème 14.171 ([362]).
Soient f, g des fonctions étagées positives sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Alors si $\alpha \in [0, \infty]$ nous avons

(1)

$$\int_\Omega (\alpha f) d\mu = \alpha \int_\Omega f d\mu. \tag{14.479}$$

(2)

$$\int_\Omega (f+g) d\mu = \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu. \tag{14.480}$$

(3) Si $a_k \in \mathbb{R}^+$ et si les f_k sont étagées positives,

$$\int_\Omega \left(\sum_{k=1}^n a_k f_k \right) = \sum_{k=1}^n a_k \left(\int_\Omega f_k d\mu \right). \tag{14.481}$$

Démonstration. En ce qui concerne le produit par un nombre, tout repose sur le fait que

$$(\alpha f)^{-1}(\alpha a_i) = f^{-1}(a_i), \tag{14.482}$$

ce qui fait que si la représentation canonique de f est $f = \sum_i a_i \mathbb{1}_{A_i}$ alors la représentation canonique de αf est $\alpha f = \sum_i (\alpha a_i) \mathbb{1}_{A_i}$. Donc

$$\int_\Omega \alpha f d\mu = \sum_i \alpha a_i \mu(A_i) = \alpha \sum_i a_i \mu(A_i) = \alpha \int_\Omega f d\mu. \tag{14.483}$$

Pour la somme c'est plus lourd. Soient les formes canoniques

$$f = \sum_i a_i \mathbb{1}_{A_i} \tag{14.484a}$$

$$g = \sum_j b_j \mathbb{1}_{B_i}. \tag{14.484b}$$

Vu que l'union des B_j est Ω nous avons l'union disjointe $A_i = \bigcup_j A_i \cap B_j$ et donc $\mu(A_i) = \sum_j \mu(A_i \cap B_j)$. Nous avons donc pour les intégrales :

$$\int_\Omega f d\mu = \sum_i a_i \sum_j \mu(A_i \cap B_j) \tag{14.485a}$$

$$\int_\Omega g d\mu = \sum_i b_k \sum_l \mu(B_k \cap A_l). \tag{14.485b}$$

Pour la somme :

$$\int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu = \sum_{k,l}(a_k + b_l)\mu(A_k \cap B_l). \tag{14.486}$$

Nous devons maintenant évaluer $\int_\Omega (f+g)d\mu$. Pour cela nous remarquons que si $c \in (f+g)(\Omega)$ (l'ensemble des valeurs atteintes pas $f+g$), alors nous notons

$$I_c = \{(k,l) \text{ tel que } a_k + b_l = c\} \tag{14.487}$$

et nous avons

$$\{f+g=c\} = \bigcup_{(k,l)\in I_c} (A_k \cap B_l), \tag{14.488}$$

et comme cette union est disjointe, nous pouvons faire la somme des mesures :

$$\mu(f+g=c) = \sum_{(k,l)\in I_c} \mu(A_k \cap B_l). \tag{14.489}$$

Cela nous permet de faire le calcul suivant :

$$\int_\Omega (f+g)d\mu = \sum_{c\in(f+g)(\Omega)} c\mu(f+g=c) \tag{14.490a}$$

$$= \sum_{c\in(f+g)(\Omega)} c \sum_{(k,l)\in I_c} \mu(A_k \cap B_l) \tag{14.490b}$$

$$= \sum_{c\in(f+g)(\Omega)} \sum_{(k,l)\in I_c} (a_k + b_l)\mu(A_k \cap B_l) \tag{14.490c}$$

Dans cette double somme, tous les couples (k,l) sont tirés une et une seule fois parce qu'ils sont tous dans un et un seul des I_c, donc

$$\int_\Omega (f+g)d\mu = \sum_{c\in(f+g)(\Omega)} \sum_{(k,l)\in I_c} (a_k + b_l)\mu(A_k \cap B_l) \tag{14.491a}$$

$$= \sum_{(k,l)} (a_k + b_l)\mu(A_k \cap B_l) \tag{14.491b}$$

$$= \int_\Omega f d\mu + \int_\Omega g d\mu. \tag{14.491c}$$

□

Remarque 14.172.
Si $f = \sum_k a_k \mathbb{1}_{A_k}$ n'est pas une décomposition canonique, il n'en reste pas moins que chacun des $\mathbb{1}_{A_k}$ est la forme canonique de lui-même. Donc le théorème 14.171 s'applique et nous avons quand même

$$\int_\Omega f d\mu = \sum_k a_k \mu(A_k). \tag{14.492}$$

Proposition 14.173.
Soient deux fonctions mesurables $f, g \colon \Omega \to [0, +\infty]$. Alors

$$\int_\Omega (f+g) = \int_\Omega f + \int_\Omega g. \tag{14.493}$$

Démonstration. Soient des suites $f_n \to f$ et $g_n \to g$ fournies par le théorème fondamental d'approximation 14.110. Par le théorème de la convergence monotone 14.166 nous avons d'une part

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (f_n + g_n) = \int_\Omega \int (f+g), \tag{14.494}$$

et par le théorème 14.171 nous avons d'autre part

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (f_n + g_n) = \lim_{n\to\infty} \Big(\int f_n + \int g_n \Big) = \int f + \int g \tag{14.495}$$

où nous avons encore utilisé la convergence monotone.

En égalant les deux, nous avons notre résultat. □

14.9.4 Fonctions à valeurs réelles

L'intégrale d'une fonction à valeurs dans $[0, +\infty]$ étant faite, nous passons aux fonctions à valeurs dans $[-\infty, +\infty]$.

Proposition-Définition 14.174 ([1]).
Soit une fonction mesurable $f\colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$. Nous considérons les deux fonction suivantes à valeurs dans $[0, +\infty]$:

$$f^+(x) = \begin{cases} 0 & si\ f(x) < 0 \\ f(x) & si\ f(x) \geqslant 0. \end{cases} \tag{14.496a}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} 0 & si\ f(x) > 0 \\ -f(x) & si\ f(x) \leqslant 0. \end{cases} \tag{14.496b}$$

Nous avons $\int_\Omega |f| < \infty$ si et seulement si $\int_\Omega f^+ < \infty$ et $\int_\Omega f^- < \infty$.

*Dans ce cas nous disons que f est **intégrable** au sens de Lebesgue et nous posons*

$$\int_\Omega f = \int_\Omega f^+ - \int_\Omega f^- \tag{14.497}$$

Démonstration. Vu que f est mesurable, les fonctions f^+ et f^- sont également mesurables et nous avons l'égalité

$$|f| = f^+ + f^-. \tag{14.498}$$

La proposition 14.173 nous dit alors que

$$\int_\Omega |f| = \int_\Omega f^+ + \int_\Omega f^-. \tag{14.499}$$

Dans cette égalité, tous les nombres sont dans $[0, \infty]$. Le membre de gauche vaut $+\infty$ si et seulement si au moins un des deux de droite vaut $+\infty$. □

Nous verrons comment donner un sens à $\int_\Omega f$ dans certains cas où f n'est pas intégrable sur Ω dans la section 14.14.7 sur les intégrales impropres.

Nous définissons aussi

$$\mu(f) = \int_\Omega f \tag{14.500}$$

si f est une fonction mesurable sur Ω.

Lemme 14.175.
Pour $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ nous avons $\int_\Omega |f| < \infty$ si et seulement si $\int_\Omega f$ existe et est finie.

Démonstration. Deux sens.

(i) $\Rightarrow$ La proposition 14.174 nous indique que $\int_\Omega f^+$ et $\int_\Omega f^-$ sont finies. Dans ce cas, la partie « définition » de 14.174 donne $\int_\Omega f = \int_\Omega f^+ - \int_\Omega f^- < \infty$.

(ii) $\Leftarrow$ Nous n'avons défini $\int_\Omega f$ que dans le cas où les intégrales de f^+ et f^- sont finies.

□

Ce lemme justifie pourquoi nous appelons l'espace L^1 l'espace des « fonctions intégrables ».

Remarque 14.176.
Dans $\mathbb{R}^d$, quasiment toutes les fonctions et ensembles sont mesurables. En effet la construction d'ensembles non mesurables demande obligatoirement l'utilisation de l'axiome du choix ; de tels ensembles doivent être construits « exprès pour ». Il y a très peu de chances pour que vous tombiez sur un ensemble non mesurable de $\mathbb{R}^d$ sans que vous ne vous en rendiez compte.

Il y en a un en l'exemple 14.146.

Remarque 14.177.
« Mesurable » ne signifie pas « intégrable ». Par exemple la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \bar{\mathbb{R}} \\ \omega &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{\omega} & \text{si } \omega \neq 0 \\ \infty & \text{si } \omega = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{14.501}$$

est mesurable, mais non intégrable.

14.9.5 Additivité de l'intégrale

Lemme 14.178.
Soit une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $|f(x)| \leqslant g(x)$ pour tout $x \in \Omega$. Si g est intégrable, alors f est intégrable.

Démonstration. La fonction g est manifestement à valeurs réelles positives. La proposition 14.164 nous dit alors que $|f|$ est intégrable. Ensuite c'est au tour de la proposition 14.174 de conclure à l'intégrabilité de f. □

Proposition 14.179.
Soient deux fonctions intégrables sur $(S, \mathcal{F}, \mu)$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors $f + g$ est intégrable et

$$\int_S (f+g)d\mu = \int_S f d\mu + \int_S g d\mu. \tag{14.502}$$

Démonstration. En plusieurs étapes suivant la généralité de f et g.

(i) **Si f et g sont étagées et positives** C'est le théorème 14.171(2) déjà prouvé.

(ii) **Si f et g sont à valeurs positives** Le théorème fondamental d'approximation 14.110 nous permet de considérer des suites croissantes de fonctions étagées positives (f_k) et (g_k) qui vérifient $f_k \to f$ et $g_k \to g$.
Pour chaque k nous avons

$$\int_S (f_k + g_k)d\mu = \int_S f_k d\mu + \int_S g_k d\mu. \tag{14.503}$$

De plus, la suite $k \mapsto f_k + g_k$ est une suite croissante de fonctions étagées positives convergeant vers $f + g$. Le théorème de la convergence monotone 14.166 nous permet donc de passer à la limité dans (14.503) et de permuter toutes les limites avec toutes les intégrales, des deux côtés.

(iii) **f et g à valeurs réelles** Il faut diviser le domaine en de nombreuses régions suivant les signes de f, g et $f + g$.

□

Nous prouvons à présent l'additivité de l'intégrale pour des unions finie. Une version pour les unions dénombrables sera donnée dans les propositions 14.193 et 14.194.

Proposition 14.180 (σ-additivité finie)**.**
Si $A, B \subset \Omega$ sont des parties disjointes de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et si $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ est intégrable sur $A \cup B$ alors les intégrales $\int_A f$ et $\int_B f$ existent et

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f. \tag{14.504}$$

Démonstration. Vu que A et B sont disjoints, $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$. En utilisant alors le lemme 14.165 et la proposition 14.179 nous avons le calcul

$$\int_{A\cup B} f = \int_\Omega f\mathbb{1}_{A\cup B} = \int_\Omega f\mathbb{1}_A + \int_\Omega f\mathbb{1}_B = \int_A f + \int_B f. \tag{14.505}$$

□

14.9.6 Fonctions à valeurs vectorielles (dimension finie)

Nous voulons intégrer des fonctions du type

$$f\colon \Omega \to V \tag{14.506}$$

où Ω et V sont des espaces vectoriels. Nous expliquons à présent plus précisément le cadre.

14.181.
Nous considérons à présent un espace vectoriel normé $(V, \|.\|)$ de dimension finie, et un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Attention à ne pas confondre espace de départ et espace d'arrivée. Vu que V est un espace topologique, nous avons bien entendu les boréliens de V, et pour peut que nous ayons une mesure sur V (qui qui n'est pas compliqué à créer à partir de celle canonique de $\mathbb{R}^n$ et un isomorphisme), nous avons déjà une définition de $\int_V f d\mu$ lorsque $f\colon V \to \mathbb{R}$.

Ici nous nous proposons non d'intégrer $f\colon V \to \mathbb{R}$ mais bien $f\colon (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to V$ où V est un espace vectoriel normé.

Le lemme suivant est la point de départ pour définir les intégrales de fonctions à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie. Pour les fonctions à valeurs dans un espace de dimension infine (par exemple de Banach), il existe des choses, mais c'est un peu plus compliqué.

Lemme 14.182 ([1]).
Soit un espace vectoriel V réel de dimension finie, muni de la norme N. Soient une base $\{e_i\}$ de V, et une fonction $f\colon (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to V$ telle que la norme $N(f)\colon \Omega \to \mathbb{R}^+$ soit intégrable. Nous notons f_i les composantes de f : $f(x) = \sum_i f_i(x)e_i$.

Alors pour chaque i,

(1) la fonction $|f_i|\colon \Omega \to \mathbb{R}^+$ est intégrable,

(2) la fonction $f_i\colon \Omega \to \mathbb{R}$ est intégrable.

Démonstration. Si V était un espace muni d'un produit scalaire, et si la base $\{e_i\}$ était orthonormée, ce serait facile parce que la norme majore toutes les composantes. Hélas, ce n'est pas spécialement le cas. La base $\{e_i\}$ n'est pas spécialement orthonormée et même la norme N ne dérive pas spécialement d'un produit scalaire.

Nous allons utiliser l'équivalence de toutes les normes en dimension finie (théorème 11.45) pour nous ramener au cas d'une norme euclidienne.

Nous considérons sur V la norme « euclidienne » construite sur la base $\{e_i\}$: $\|\sum_i v_i e_i\| = \sum_i |v_i|^2$. Par équivalence des normes nous avons des nombres non nuls λ_1 et λ_2 tels que

$$N(v) \leqslant \lambda_1 \|v\|, \tag{14.507}$$

et

$$\|v\| \leqslant \lambda_2 N(v) \tag{14.508}$$

pour tout $v \in V$. Pour un i fixé nous avons alors les majorations

$$N\big(f_i(x)e_i\big) \leqslant \lambda_1 \|f_i(x)e_i\| \leqslant \lambda_1 \|f(x)\| \leqslant \lambda_1\lambda_2 N\big(f(x)\big). \tag{14.509}$$

En posant $N_i = N(e_i)$ nous avons la majoration [51]

$$|f_i(x)| \leqslant \frac{\lambda_1\lambda_2}{N(e_i)} N\big(f(x)\big). \tag{14.510}$$

L'application

$$\begin{aligned} |f_i|\colon \Omega &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto |f_i(x)| \end{aligned} \tag{14.511}$$

51. Vous notez l'utilisation de la condition (3) de la définition 7.136 de la norme pour « convertir » la norme N en valeur absolue.

est donc une fonction à valeurs réelles positives, majorée par une fonction intégrable (la fonction $x \mapsto N\big(f(x)\big)$). Elle est donc intégrable par le lemme 14.178.

La fonction f_i elle-même est alors intégrable par la proposition 14.174. □

Notons que ce lemme est en réalité très simple si V est un espace vectoriel normé dont la norme découle d'un produit scalaire, comme c'est le cas pour $\mathbb{C}$. D'ailleurs, il ne faut pas se voiler la face : le cas d'intégrales de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ sera dans le Frido le cas de loin le plus courant. À ce propos, nous n'avons pas encore défini ce que nous voulons noter $\int_\Omega f d\mu$ lorsque f est une fonction à valeurs vectorielles. Comblons vite ce manque ...

Proposition-Définition 14.183 ([1])**.**
Soit une fonction $f\colon \Omega \to V$ où V est un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit une base $\{e_i\}$ de V. Si la fonction $\|f\|\colon \Omega \to \mathbb{R}^+$ est intégrable, alors

(1) toutes les composantes $f_i\colon \Omega \to \mathbb{R}$ sont intégrables,

(2) le vecteur

$$\sum_i (\int_\Omega f_i) e_i \tag{14.512}$$

ne dépend pas de la base choisie.

*Dans ce cas, la fonction f est dite **intégrable** et nous définissons*

$$\int_\Omega f d\mu = \sum_i (\int_\Omega f_i) e_i. \tag{14.513}$$

Démonstration. Le fait que les composantes soient intégrables est le lemme 14.182. Soient deux bases de V, $\{e_i\}$ et $\{s_\alpha\}$, liées conformément à (4.209) par la relation $s_\alpha = \sum_i Q_{i\alpha} e_i$ pour une certaine matrice inversible Q. Nous avons pour tout $x \in \Omega$:

$$f(x) = \sum_i f_i(x) e_i = \sum_\alpha f_\alpha(x) s_\alpha \tag{14.514}$$

avec $f_\alpha(x) = \sum_i f_i(x) Q^{-1}_{\alpha i}$ par la proposition 4.109.

Notons pour être pointilleux que les ensembles $\{e_i\}$ et $\{s_\alpha\}$ ne sont pas indexés par le même ensemble, de telle sorte que f_i ne peut pas être confondu avec f_α, même lorsqu'on attribue des valeurs à i et à α.

Comme combinaisons linéaires des fonctions f_i qui sont intégrables, les fonctions f_α sont intégrables (proposition 14.179). En écrivant $\int_\Omega f$ par rapport à la base $\{s_\alpha\}$ nous trouvons :

$$\sum_\alpha (\int f_\alpha) s_\alpha = \sum_\alpha \big(\int \sum_i f_i(x) Q^{-1}_{\alpha i} dx \big) \sum_j Q_{j\alpha} e_j \tag{14.515a}$$

$$= \sum_j \int \sum_{\alpha i} f_i(x) Q^{-1}_{\alpha i} Q_{j\alpha} dx e_j \tag{14.515b}$$

$$= \sum_j \int f_j(x) dx e_j \tag{14.515c}$$

$$= \sum_j (\int f_i) e_i \tag{14.515d}$$

où nous avons permuté des sommes finies et des intégrales des fonctions f_i, à valeurs dans $\mathbb{R}$ en vertu de la proposition 14.179 □

La proposition suivante est, pour les intégrales à valeurs vectorielles, analogue à la proposition 14.174.

Proposition 14.184.
Soit une fonction mesurable $f\colon \Omega \to (V, \|.\|)$. Soit une base $\{e_i\}$ de V et la décomposition $f = \sum_i f_i e_i$.

Nous avons équivalence entre

(1) $\int_\Omega \|f\| < \infty$
(2) $\int_\Omega |f_i| < \infty$
(3) $\int_\Omega f_i^+ < \infty$ *et* $\int_\Omega f_i^- < \infty$.

Démonstration. L'équivalence entre les points (2) et (3) est la proposition 14.174. Nous démontrons l'équivalence entre (1) et (2).

Vu que toutes les normes sont équivalentes sur V, nous considérons en particulier la norme associée à la base $\{e_i\}$ donnée par

$$N(x) = \sum_i |x_i|. \tag{14.516}$$

Il existe des constantes λ_1 et λ_2 telles que

$$\lambda_1\big(\sum_i |f_i(x)|\big) \leqslant \|f(x)\| \leqslant \lambda_2\big(\sum_i |f_i(x)|\big) \tag{14.517}$$

pour tout $x \in \Omega$.

La première inégalité dit que si $\int_\Omega \|f\| < \infty$, alors $\lambda_1\big(\sum_i \int_\Omega |f-i|\big) < \infty$. Et vu que chacun des termes est positif, ils sont tous finis.

La seconde inégalité donne l'implication dans réciproque. □

14.9.7 Quelques propriétés

Le lemme suivant nous aide à détecter des fonctions presque partout nulles.

Lemme 14.185.
Soit f une fonction mesurable positive ou nulle telle que

$$\int_\Omega f d\mu = 0. \tag{14.518}$$

Alors $f = 0$ μ-presque partout.

Démonstration. L'ensemble des points $x \in \Omega$ tels que $f(x) \neq 0$ peut s'écrire comme une union dénombrable disjointe :

$$\{x \in \Omega \text{ tel que } f(x) \neq 0\} = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i \tag{14.519}$$

avec

$$E_0 = \{x \in \Omega \text{ tel que } f(x) > 1\} \tag{14.520a}$$

$$E_i = \{x \in \Omega \text{ tel que } \frac{1}{i+1} \leqslant f(x) < \frac{1}{i}\}. \tag{14.520b}$$

Si un des ensembles E_i est de mesure non nulle, alors nous pouvons considérer la fonction simple $h(x) = \frac{1}{i+1}\mathbb{1}_{E_i}$ dont l'intégrale sur Ω est strictement positive. Par conséquent le supremum de la définition (14.430) est strictement positif.

Nous savons donc que $\mu(E_i) = 0$ pour tout i. Étant donné que la mesure d'une union disjointe dénombrable est égale à la somme des mesures, nous avons

$$\mu\{x \in \Omega \text{ tel que } f(x) \neq 0\} = 0, \tag{14.521}$$

ce qui signifie que f est nulle μ-presque partout. □

Corolaire 14.186.
Soit f une fonction mesurable sur l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ telle que

$$\int_\Omega f\mathbb{1}_{f>0} d\mu = 0. \tag{14.522}$$

Alors $f \leqslant 0$ presque partout.

Démonstration. Nous avons l'égalité d'ensembles

$$\{f\mathbb{1}_{f>0} \neq 0\} = \{\mathbb{1}_{f>0} \neq 0\}. \tag{14.523}$$

Mais lemme 14.185 implique que $f\mathbb{1}_{f>0}$ est nulle presque partout, c'est-à-dire que la mesure de l'ensemble du membre de gauche est nulle par conséquent

$$\mu\{\mathbb{1}_{f>0} \neq 0\} = 0. \tag{14.524}$$

Cela signifie que la fonction f est presque partout négative ou nulle. □

14.9.8 Permuter limite et intégrale

14.9.8.1 Convergence uniforme

Proposition 14.187 (Permuter limite et intégrale)**.**
Soit $f_n \to f$ uniformément sur un ensemble mesuré A de mesure finie. Alors si les fonctions f_n et f sont intégrables sur A, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n. \tag{14.525}$$

Démonstration. Notons f la limite de la suite (f_n). Pour tout n nous avons les majorations

$$\left| \int_A f_n d\mu - \int_A f d\mu \right| \leqslant \int_A |f_n - f| d\mu \tag{14.526a}$$
$$\leqslant \int_A \|f_n - f\|_\infty d\mu \tag{14.526b}$$
$$= \mu(A)\|f_n - f\|_\infty \tag{14.526c}$$

où $\mu(A)$ est la mesure de A. Le résultat découle maintenant du fait que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. □

Il existe un résultat considérablement plus intéressant que cette proposition. En effet, l'intégrabilité de f n'est pas nécessaire. Cette hypothèse peut être remplacée soit par l'uniforme convergence de la suite (théorème 14.188), soit par le fait que les normes des f_n sont uniformément bornées (théorème de la convergence dominée de Lebesgue 14.190).

Théorème 14.188 ([380])**.**
La limite uniforme d'une suite de fonctions intégrables sur un borné est intégrable, et on peut permuter la limite et l'intégrale.

Plus précisément, soit A un ensemble de μ-mesure finie et $f_n\colon A \to \mathbb{R}$ des fonctions intégrables sur A. Si la limite $f_n \to f$ est uniforme, alors f est intégrable sur A et nous pouvons inverser la limite et l'intégrale :

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n. \tag{14.527}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ et n tel que $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \epsilon$ (ici la norme uniforme est prise sur A). Étant donné que f_n est intégrable sur A, il existe une fonction simple φ_n qui minore f_n telle que

$$\left| \int_A \varphi_n - \int_A f_n \right| < \epsilon. \tag{14.528}$$

La fonction $\varphi_n + \epsilon$ est une fonction simple qui majore la fonction f. Si ψ est une fonction simple qui minore f, alors

$$\int_A \psi \leqslant \int_A \varphi_n + \epsilon \leqslant \int_A f_n + \epsilon\mu(A). \tag{14.529}$$

Par conséquent le supremum qui définit $\int_A f$ existe, ce qui montre que f est intégrable. Le fait qu'on puisse inverser la limite et l'intégrale est maintenant une conséquence de la proposition 14.187. □

Remarque 14.189.
L'hypothèse sur le fait que A soit de mesure finie est importante. Il n'est pas vrai qu'une suite uniformément convergente de fonctions intégrables est intégrables. En effet nous avons par exemple la suite

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{14.530}$$

qui converge uniformément vers $f(x) = 1/x$ sur $A = [1, \infty[$. Le limite n'est cependant guerre intégrable sur A.

14.9.8.2 Convergence dominée de Lebesgue

Théorème 14.190 (Convergence dominée de Lebesgue)**.**
Soit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. Nous supposons que

(1) Pour chaque n nous avons $f_n \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$,

(2) $f_n \to f$ simplement presque partout sur Ω,

(3) Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que

$$|f_n(x)| \leqslant g(x) \tag{14.531}$$

pour presque[52] tout $x \in \Omega$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors

(1) f est intégrable,

(2) $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n = \int_\Omega f$,

(3) $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| = 0$.

Démonstration. La fonction limite f est intégrable parce que $|f| \leqslant g$ et g est intégrable[53]. Par hypothèse nous avons

$$-g(x) \leqslant f_n(x) \leqslant g(x). \tag{14.532}$$

En particulier la fonction $g_n = f_n + g$ est positive et mesurable si bien que le lemme de Fatou 14.170 implique

$$\int_\Omega \liminf g_n \leqslant \liminf \int_\Omega g_n. \tag{14.533}$$

Évidemment nous avons $\liminf g_n = f + g$, de telle sorte que

$$\int f + \int g \leqslant \liminf \int g_n = \liminf \int f_n + \int g, \tag{14.534}$$

et le nombre $\int g$ étant fini, nous pouvons le retrancher des deux côtés de l'inégalité :

$$\int f \leqslant \liminf \int f_n. \tag{14.535}$$

52. Si il n'y avait pas le « presque » ici, ce théorème serait à peu près inutilisable en probabilité ou en théorie des espaces L^p, comme dans la démonstration du théorème de Fischer-Riesz 27.44 par exemple.

53. Par le lemme 14.178

Afin d'obtenir une minoration de $\int f$ nous refaisons exactement le même raisonnement en utilisant la suite de fonctions $k_n = -f_n \to k = -f$. Nous obtenons que

$$\int k \geqslant \liminf \int k_n = -\limsup \int f_n, \tag{14.536}$$

et par conséquent

$$\liminf \int f_n \leqslant \int f \leqslant \limsup \int f_n. \tag{14.537}$$

La limite supérieure étant plus grande ou égale à la limite inférieure, les trois quantités dans les inégalités (14.537) sont égales.

Nous prouvons maintenant le troisième point. Soit la suite de fonctions

$$h_n(x) = |f_n(x) - f(x)| \tag{14.538}$$

qui tend ponctuellement vers zéro. De plus

$$h_n(x) \leqslant |f_n(x)| + |f(x)| \leqslant 2g(x), \tag{14.539}$$

ce qui prouve que les h_n majorés par une fonction intégrable. Donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega h_n(x)dx = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0 \tag{14.540}$$

□

Remarque 14.191.
Lorsque nous travaillons sur des problèmes de probabilités, la fonction g peut être une constante parce que les constantes sont intégrables sur un espace de probabilité.

Corolaire 14.192.
Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite numérique absolument convergente. Alors elle est convergente. Il en est de même pour les séries de fonctions si on considère la convergence ponctuelle.

Démonstration. L'hypothèse est la convergence de l'intégrale $\int_{\mathbb{N}} |a_i| dm(i)$ où dm est la mesure de comptage. Étant donné que $|a_i| \leqslant |a_i|$, la fonction a_i (fonction de i) peut jouer le rôle de g dans le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (théorème 14.190). □

14.9.9 Additivité de l'intégrale de Lebesgque

Les propositions 14.193 et 14.194 démontrent la même chose. La différence est la méthode utilisée pour permuter une somme et une intégrale. Dans le premier cas, nous utilisons la convergence monotone (et sommes obligés de séparer le cas où f est positive), alors que dans le second cas, nous utilisons la convergence dominée de Lebesgue, et nous ne devons pas faire de séparation d'après la positivité de f.

Proposition 14.193 (σ-additivité dénombrable[1])**.**
Si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont des parties mesurables disjointes de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et si $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ est intégrable sur $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ alors les intégrales $\int_{A_i} f d\mu$ existent et

$$\int_{\bigcup_i A_i} f d\mu = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{A_i} f d\mu. \tag{14.541}$$

Démonstration. En deux cas d'après la positivité de f.

(i) <u>**Si f est positive**</u> Nous posons $f_N = f\mathbb{1}_{\bigcup_{i=0}^N A_i}$. Cette suite de fonctions vérifie la limite

$$\lim_{N\to\infty} f_N = f\mathbb{1}_{\bigcup_{i=0}^{\infty}}. \tag{14.542}$$

De plus, pour chaque N nous avons

$$\int_\Omega f_N = \int_\Omega f\mathbb{1}_{\bigcup_i A_i} = \int_{\bigcup_i A_i} f = \sum_{i=0}^{N}\int_{A_i} f \tag{14.543}$$

Justifications :

— La proposition 14.165 pour l'introduction de la fonction caractéristique de $\bigcup_i A_i$

— La proposition 14.180 qui traite le cas de la sous-additivité finie pour la dernière égalité.

La suite $(f_N)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions mesurables[54] et positives. Donc le théorème de la convergence monotone 14.166 s'applique et

$$\sum_{i=0}^{\infty}\int_{A_i} f = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=0}^{N}\int_{A_i} f = \lim_{N\to\infty}\int_{\bigcup_{i=0}^{N} A_i} f = \lim_{N\to\infty}\int_\Omega f_N \tag{14.544a}$$

$$= \int_\Omega \lim_{N\to\infty} f_N = \int_\Omega f\mathbb{1}_{\bigcup_{i=0}^{\infty}} = \int_{\bigcup_i A_i} f d\mu. \tag{14.544b}$$

(ii) **Si f est à valeurs réelles** Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $f = f_+ - f_-$ où f_+ et f_- sont intégrables. Nous avons alors

$$\int_{\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i} f d\mu = \int_{\bigcup_i A_i} f_+ - \int_{\bigcup_i A_i} f_- \tag{14.545a}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{A_k} f_+ - \int_{k=0}^{\infty} f_- \tag{14.545b}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\int_{A_k} f_+ - \int_{A_k} f_-\Big) \tag{14.545c}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{A_k} f. \tag{14.545d}$$

Justifications :

— Pour (14.545c), c'est l'associativité de la somme, proposition 11.90.

— Pour (14.545d), c'est la proposition 14.179.

□

Proposition 14.194 (σ-additivité[381])**.**
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Nous considérons des parties disjointes $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de Ω telles que $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = \Omega$. Si $f \in L^1(\Omega)$, alors

$$\int_\Omega f d\mu = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{A_k} f d\mu. \tag{14.546}$$

Démonstration. Nous posons $\Omega_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$ ainsi que $f_n = f\mathbb{1}_{\Omega_n}$. Pour chaque $N \in \mathbb{N}$ nous avons

$$\sum_{k=0}^{N}\int_{A_k} f d\mu = \int_{\bigcup_{k=0}^{N} A_k} f \tag{14.547a}$$

$$= \int_{\Omega_N} f \tag{14.547b}$$

$$= \int_\Omega f_N. \tag{14.547c}$$

Justifications :

54. La fonction f elle-même est mesurable ; c'est inclus dans la définition de « intégrable ».

— Pour (14.547a), c'est la proposition 14.180 qui traite du cas de sommes finies.
— Pour (14.547c) c'est la proposition 14.193.

L'idée est maintenant de passer à la limite des deux côtés de (14.547). Voici le raisonnement :

— Nous montrons qu'à droite, la limite existe et vaut $\int_\Omega f d\mu$.
— Le fait que la limite du membre de droite existe implique l'existence de la limite du membre de gauche.
— La limite du membre de gauche vaut $\sum_{k=0}^{\infty}\int_{A_k} f d\mu$.

La limite du membre de droite s'établi avec le théorème de la convergence dominée de Lebesgue 14.188.

— Nous avons convergence simple $f_n \to f$ parce que $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_i = \Omega$.
— La fonction $g = |f|$ est intégrable sur Ω parce que $f \in L^1(\Omega)$ par hypothèse.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \Omega$ nous avons $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ parce que $|f_n(x)|$ est soit égal à $g(x)$ soit égal à zéro suivant que $x \in \Omega_n$ ou non.

Donc le théorème de la convergence dominée est applicable. La limite du membre de droite de (14.547) existe et vaut :

$$\lim_{N\to\infty}\int_\Omega f_N = \int_\Omega f. \tag{14.548}$$

Nous pouvons alors prendre aussi la limite du membre de gauche dans (14.547) et obtenir le résultat attendu. □

14.9.10 Produit d'une mesure par une fonction (mesure à densité)

Proposition-Définition 14.195 (Produit d'une mesure par une fonction[1, 382]).
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et une fonction mesurable positive $w \colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}^+$. Alors la formule

$$(w \cdot \mu)(A) = \int_A w d\mu \tag{14.549}$$

*pour tout $A \in \mathcal{F}$ définit une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{F})$ appelée **produit** de la mesure μ par la fonction w. La fonction w est la **densité** de la mesure $w \cdot \mu$ par rapport à la mesure μ.*

Démonstration. D'abord $(w \cdot \mu)(\emptyset) = 0$ parce que le lemme 14.163 donne

$$(w \cdot \mu)(\emptyset) = \int_\Omega w\mathbb{1}_\emptyset d\mu = \int_\Omega 0 d\mu = 0 \times \mu(\Omega) = 0 \tag{14.550}$$

où nous avons (éventuellement) utilisé deux fois la convention $0 \times \infty = 0$.

Ensuite si les ensembles A_i sont des éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{F}$ alors nous avons $\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{1}_{A_i}$, et donc

$$(w \cdot \mu)(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i) = \int_{\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i} w d\mu = \sum_{i=0}^{\infty}\int_{A_i} w d\mu = \sum_{i=0}^{\infty}(w \cdot \mu)(A_i). \tag{14.551}$$

où nous avons utilisé la σ-additivité dénombrable de l'intégrale de la proposition 14.193. □

En particulier nous parlons souvent de mesure à densité par rapport à la mesure de Lebesgue. C'est alors la construction suivante.

Définition 14.196.
*Si μ est une mesure sur $\mathbb{R}^d$, une fonction $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une **densité** pour μ si pour tout $A \subset \mathbb{R}^d$ nous avons*

$$\mu(A) = \int_A f(x) dx \tag{14.552}$$

où dx est la mesure de Lebesgue.

*Si la mesure μ admet une densité, nous disons que c'est une **mesure à densité** par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Exemple 14.197.
Toutes les mesures n'admettent pas de densité. Par exemple la mesure de Dirac donnée par

$$\nu(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{14.553}$$

n'a pas de densité par rapport à la mesure de Lebesgue. △

La meure ν de l'exemple 14.553 admet, au sens des distributions, la mesure de Dirac δ comme densité, mais c'est une autre histoire qui vous sera contée une autre fois.

Proposition 14.198 ([382]).
Soit une fonction mesurable $w\colon (S,\mathcal{F},\mu) \to \bar{\mathbb{R}}^+$.

(1) Si $f\colon S \to \bar{\mathbb{R}}^+$ est mesurable, alors $f\cdot(w\cdot\mu) = (fg)\cdot\mu$.

(2) Si $f\colon S \to \bar{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ est mesurable, elle est $w\cdot\mu$-intégrable si et seulement si fw est μ-intégrable. Dans ce cas, nous avons encore $f\cdot(w\cdot\mu) = (fg)\cdot\mu$.

Attention : dans le cas où f est à valeurs dans $\mathbb{C}$, alors il faut que w soit à valeurs finies dans $\mathbb{R}$ parce que nous n'avons pas définit $\infty \times z$ lorsque $z \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Nous commençons par prouver le résultat pour la fonction caractéristique de l'ensemble mesurable A. Nous avons : $\mathbb{1}_A\cdot(w\cdot\mu)(B) = \int_B \mathbb{1}_A d(w\cdot\mu)$. Mais par définition, l'intégrale d'une fonction indicatrice est la mesure de l'ensemble indiqué. En passant sur le fait que $\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\cap B}$,

$$\int_B \mathbb{1}_A d(w\cdot\mu) = (w\cdot\mu)(A\cap B) = \int_S \mathbb{1}_{A\cap B} w d\mu = \int_S \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B w d\mu = \int_B \mathbb{1}_A w d\mu = (\mathbb{1}_A w)\cdot\mu(B). \tag{14.554}$$

Supposons maintenant que f soit une fonction étagées qui s'écrit $f = \sum_k a_k \mathbb{1}_{A_k}$ où les A_k sont des ensembles mesurables disjoints. Alors le calcul est le suivant, en utilisant le fait que sur A_k, on a $a_k = f(x)$:

$$\begin{aligned}
f\cdot(g\cdot\mu)B &= \int_B f d(g\cdot\mu) && (14.555a)\\
&= \sum_k a_k (g\cdot\mu)(A_k\cap B) && (14.555b)\\
&= \sum_k a_k \int_{A_k\cap B} g f\mu && (14.555c)\\
&= \int_{A_k\cap} f(x)g(x)d\mu(x) && (14.555d)\\
&= \sum_k (fg\cdot\mu)(A_k\cap B) && (14.555e)\\
&= (fg\cdot\mu)(B) && (14.555f)
\end{aligned}$$

parce que les $A_k \cap B$ forment une partition de l'ensemble B (voir le point (3) de la définition 14.16).

Si $f\colon S \to \bar{\mathbb{R}}^+$ est mesurable, le théorème 14.110 donne une suite croissante f_n de fonctions étagées positives convergeant (ponctuellement) vers f. Vu que la fonction w est positive, nous avons aussi la limite positive et croissante $wf_n \to wf$. Ainsi l'utilisation du théorème de la convergence monotone est justifié dans le calcul suivant :

$$\int_S f d(w\cdot\mu) = \lim_{n\to\infty}\int_S f_n d(w\cdot\mu) = \lim_{n\to\infty}\int_S (wf_n)d\mu = \int_S wf d\mu. \tag{14.556}$$

Nous passons maintenant au cas général où f est une fonction à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ (avec w finie dans ce dernier cas). Nous avons la chaine d'équivalences

$\Leftrightarrow$ f est $(w\cdot\mu)$ intégrable

$\Leftrightarrow$ $|f|$ est $(w \cdot \mu)$-intégrable

$\Leftrightarrow$ $|f|w$ est μ-intégrable

$\Leftrightarrow$ $|fw|$ est μ-intégrable.

Si cela est le cas, la formule se démontre en se ramenant au cas déjà prouvé des fonctions positives en utilisant les $(fw)^+ = f^+w$, $(fw)^- = f^-w$ etc. □

14.9.11 Mesure et topologie

Exemple 14.199 (Un compact n'est pas toujours de mesure finie)**.**
Soit l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R}))$ réel avec ses boréliens et la fonction

$$\begin{aligned} w\colon \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}or(\mathbb{R})\big) &\to \big(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}or(\bar{\mathbb{R}})\big) \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ +\infty & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{14.557}$$

Essayons d'étudier la mesure de densité w par rapport à la mesure de Lebesgue.

(i) __w est mesurable__ Soit un borélien B de $\bar{\mathbb{R}}$. Si B ne contient pas ∞ alors $w^{-1}(B)$ est un borélien de $\mathbb{R}$ par continuité de l'application restreinte $w\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$. Ici nous avons par exemple appliqué la proposition 14.115 à chacun des deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, \infty[$. Si $+\infty \in B$ alors

$$w^{-1}(B) = w^{-1}\big(B\backslash\{0\}\big) \cup w^{-1}(\{\infty\}) = w^{-1}\big(B\backslash\{0\}\big) \cup \{0\}, \tag{14.558}$$

qui est borélien par union de boréliens.

(ii) __**Mesure produit**__ La proposition 14.195 nous assure alors qu'en posant [55]

$$\mu(B) = \int_B \frac{1}{|x|} d\lambda(x) \tag{14.559}$$

où λ est la mesure de Lebesgue, nous avons une mesure.

(iii) __**Mesure du singleton**__ Pour avoir les idées claires, nous pouvons nous demander la mesure $\mu\big(\{0\}\big)$. Nous cela nous devons calculer

$$\int_{\{0\}} \frac{1}{|x|} d\lambda(x) = \int_{\{0\}} w(x) d\lambda(x) \tag{14.560}$$

où là, l'abus de notation n'est plus possible. Mais quelle que soit la fonction étagée $h = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ considérée,

$$\int_{\{0\}} h(x) d\lambda(x) = \sum_i \alpha_i \lambda\big(A_i \cap \{0\}\big) = 0. \tag{14.561}$$

Attention : ceci n'a rien de particulier à la fonction $x \mapsto 1/|x|$. Lorsqu'une mesure a une densité par rapport à Lebesgue, la mesure d'un singleton sera toujours nulle.

(iv) __**Mesure de la boule compacte**__ Il n'en reste pas moins que $\mu\big([-1, 1]\big) = \infty$.

△

14.200.
En réalité, il n'y a pas de liens forts entre mesure et topologie. Un espace topologique est une chose, et y mettre une mesure en est une autre. Bien entendu, une topologie étant donnée, nous pouvons considérer la tribu des boréliens et y mettre une mesure un peu quelconque. Il n'y a pas de choix canonique.

Notons que même dans l'exemple de compact de mesure infinie 14.199, la mesure introduite n'est pas sans lien avec la topologie de $\mathbb{R}$. En effet pour avoir une mesure à densité par rapport à

55. Avec un mini abus de notation : si $0 \in B$, cette notation n'est pas tout à fait correcte.

Lebesgue, nous avons dû prendre une application mesurable par rapport à la tribu des boréliens, laquelle est éminemment liée à la topologie. Il y a donc parfaitement moyen de construire des espaces mesurés tenant compte de la topologie, et ayant des propriétés qui ne sont pas celle attendues.

Quand les choses sont faciles, ça se passe bien. La proposition suivante dit qu'une fonction continue sur un compact y est intégrable ; sauf que pour dire cela de façon précise, il faut un peu bosser parce qu'il y a de écueils à éviter, tels que l'exemple 14.199.

Proposition 14.201 ([1]).
Soit un espace mesuré $(K, \mathcal{A}, \mu)$ *et une fonction* $f\colon K \to \mathbb{R}$*. Nous supposons pas mal de trucs techniques :*

(1) La mesure est finie : $\mu(K) < \infty$.

(2) L'ensemble K *est par ailleurs un espace topologique compact*[56].

(3) La fonction f *est continue pour les topologies de* K *et de* $\mathbb{R}$.

(4) La fonction f *est mesurable pour la tribu* $\mathcal{A}$ *de* K *et la tribu des boréliens de* $\mathbb{R}$.

Alors f *est intégrable sur* K *et* $\int_K |f| < \infty$.

L'hypothèse (4) ne se déduit pas nécessairement de l'hypothèse (3). Dans les cas usuels, nous avons bien « continue implique mesurable », mais si $\mathcal{A}$ n'a aucun rapport avec la topologie ...hum ...

Démonstration. Si nous écrivons $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ avec f^+ et f^- prenant des valeurs positives ou nulles[383], en vertu de la proposition 14.174, si nous devons prouver séparément $\int_K f^+ < \infty$ et $\int_K f^- < \infty$. Nous allons donc prouver cette proposition en plusieurs étapes.

(i) **Si f est positive** La fonction f est continue sur K qui est compact (même en tant qu'espace topologique en soi ; il n'est pas nécessaire d'être compact *dans* quelque chose), donc elle a un maximum par le théorème 7.126 nommons M ce maximum. Donc $f\colon K \to [0, M]$. De plus la mesure μ sur K est finie et vérifie disons $\mu(K) = m$.
Soit une fonction étagée $h\colon K \to \mathbb{R}^+$ majorée par f. Nous notons

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(x) \tag{14.562}$$

où les A_i sont des éléments de $\mathcal{A}$. Vu que $0 \leqslant h(x) \leqslant f(x) \leqslant M$, nous avons[57]

$$\int_K h = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(K \cap A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} M\mu(K \cap A_i) \leqslant M = \mu(K) = Mm \tag{14.563}$$

parce que les A_i sont disjoints et vérifient $\bigcup_i A_i = K$ (lemme 14.106).
Donc tous les éléments de l'ensemble sur lequel nous prenons le supremum dans la définition (14.430) sont contenus dans $[0, Mm]$. Le supremum est donc dans $[0, Mm]$ et est alors strictement plus petit que l'infini.

(ii) **Si f est positive ou négative** Nous appliquons la première partie séparément à f^+ et f^-. Et nous avons alors que f est intégrable et

$$\int_K |f| = \int_K f^+ + \int_K f^- < \infty. \tag{14.564}$$

□

56. Nous ne prétendons pas que la tribu $\mathcal{A}$ soit liée à la topologie de K.
57. Définition (14.429).

14.10 Propriétés des intégrales

Théorème 14.202 ([382]).
Soient deux espaces mesurables $(S_1, \mathcal{F}_1)$ et $(S_2, \mathcal{F}_2)$ ainsi qu'une application mesurable $\varphi\colon S_1 \to S_2$. Soit encore μ, une mesure positive sur $(S_1, \mathcal{F}_1)$.

Si $f\colon S_2 \to \bar{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$ est mesurable alors,

(1) f est $\varphi(\mu)$-intégrale si et seulement si $f \circ \varphi$ est μ-intégrable.

(2) dans le cas où f est $\varphi(\mu)$-intégrable, nous avons

$$\int_{S_2} f d\big(\varphi(\mu)\big) = \int_{S_1} (f \circ \varphi) d\mu. \tag{14.565}$$

Démonstration. L'intégrabilité est la définition 14.174, et demande que $|f|$ soit intégrable. L'égalité (14.565) a un sens si les deux membres sont infinis. Tant que les fonctions considérées sont positives, le point (1) est immédiat. Ce n'est qu'au moment où les fonctions considérées deviennent à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ que l'intégrabilité de $|f|$ commence à jouer parce qu'il faut que f^+ et f^- soient séparément intégrables.

Nous allons prouver la formule (14.565) pour des fonctions de plus en plis générales. Pour la suite nous notons $\mu' = \varphi(\mu)$.

(i) **Pour $f = \mathbb{1}_B$, B mesurable** Soit $B \in \mathcal{F}_2$. Nous avons $\mathbb{1}_B \circ \varphi = \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(B)}$. Donc en utilisant le lemme 14.163 nous avons

$$\int_{S_2} \mathbb{1}_B d\mu' = \mu'(B) = \mu\big(\varphi^{-1}(B)\big) = \int_{S_1} \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(B)} d\mu = \int_{S_1} (\mathbb{1}_B \circ \varphi) d\mu. \tag{14.566}$$

(ii) **f est étagée positive** La fonction f peut être écrite sous la forme

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{B_k} \tag{14.567}$$

avec $B_k \in \mathcal{F}_2$ et $a_k \in \mathbb{R}^+$. Nous avons alors, en utilisant la sous-additivité de l'intégrale du théorème 14.171(3),

$$\int_{S_2} f d\mu' = \sum_k a_k \int_{S_2} \mathbb{1}_{B_k} d\mu' \tag{14.568a}$$

$$= \sum_k a_k \int_{S_1} (\mathbb{1}_{B_k} \circ \varphi) d\mu \tag{14.568b}$$

$$= \int_{S_1} \Big(\sum_k a_k \mathbb{1}_{B_k}\Big) \circ \varphi d\mu \tag{14.568c}$$

$$= \int_{S_1} (f \circ \varphi) d\mu. \tag{14.568d}$$

(iii) **f à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}^+$** Vu que f est mesurable, par le théorème 14.110 il existe une suite croissante de fonctions étagées positives convergeant vers f. Soit donc cette suite, $f_n\colon S_2 \to \mathbb{R}^+$. Les fonctions $f_n \circ \varphi$ sont étagées et positives et nous avons aussi la limite ponctuelle et croissante $f_n \circ \varphi \to f \circ \varphi$ parce que φ est continue. Le théorème de la convergence monotone (théorème 14.166) permet d'écrire ceci :

$$\int_{S_2} f d\mu' = \lim \int_{S_2} f_n d\mu' = \lim \int_{S_1} (f_n \circ \varphi) d\mu = \int_{S_1} (f \circ \varphi) d\mu. \tag{14.569}$$

(iv) **Pour $f\colon S_2 \to \bar{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{C}$** C'est maintenant que l'intégrabilité va jouer. Nous avons $|f|\circ\varphi = |f\circ\varphi|$, donc

$$\int_{S_2} |f| d\mu' = \int_{S_1} |f|\circ\varphi d\mu = \int_{S_1} |f\circ\varphi| d\mu, \tag{14.570}$$

ce qui montre que f est μ'-intégrable si et seulement si $f\circ\varphi$ est μ-intégrable.

De plus si $f = f^+ - f^-$ alors $f^+\circ\varphi = (f\circ\varphi)^+$, $f^-\circ\varphi = (f\circ\varphi)^-$, et de façon similaire pour les parties imaginaires et réelles.

□

14.11 Mesure à densité

14.11.1 Théorème de Radon-Nikodym

Définition 14.203 ([384])**.**
Soient μ et ν deux mesures sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$. Nous disons que la mesure μ est ***dominée*** *par ν si pour tout ensemble mesurable A, $\nu(A) = 0$ implique $\mu(A) = 0$.*

Si ν est une mesure positive et μ une mesure, nous disons que μ est ***absolument continue*** *par rapport à ν si $\nu(A) = 0$ implique $\mu(A) = 0$. On note aussi $\mu \ll \nu$.*

La mesure μ est **portée** par l'ensemble $E \in \mathcal{A}$ si pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) = \mu(A \cap E). \tag{14.571}$$

Nous écrivons que $\mu \perp \nu$ si il existe un ensemble $E \in \mathcal{A}$ tel que μ soit porté par E et ν soit porté par $\complement E$.

Théorème 14.204 (Radon-Nikodym[385])**.**
Soient μ et ν deux mesures σ-finies sur un espace métrisable $(\Omega, \mathcal{A})$.

(1) Il existe un unique couple de mesures μ_1 et μ_2 telles que

(1a) $\mu = \mu_1 + \mu_2$

(1b) μ_1 est dominé par ν

(1c) $\mu_2 \perp \nu$.

Dans ce cas, les mesures μ_1 et μ_2 sont positives et σ-finies.

(2) À égalité ν-presque partout près, il existe une unique fonction mesurable positive f telle que pour tout mesurable A,

$$\mu_1(A) = \int_A d\mu_1 = \int_\Omega \mathbb{1}_A f d\nu. \tag{14.572}$$

(3) À égalité ν-presque partout près, il existe une unique fonction positive mesurable h telle que $\mu_1 = h\nu$.

Corolaire 14.205.
Si μ es une mesure σ-finie dominée par la mesure σ-finie m, alors μ possède une unique fonction de densité.

Corolaire 14.206.
Soient μ et m, deux mesures positives σ-finies sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Alors m domine μ si et seulement si μ possède une densité par rapport à m.

Démonstration. Si μ est dominée par m, alors la décomposition $\mu = \mu + 0$ satisfait le théorème de Radon-Nikodym. Par conséquent il existe une fonction f telle que

$$\mu(A) = \int_A f dm. \tag{14.573}$$

Cette fonction est alors une densité pour μ par rapport à m.

Pour la réciproque, nous supposons que μ a une densité f par rapport à m, et que A est un ensemble de m-mesure nulle :

$$m(A) = \int_\Omega \mathbb{1}_A dm = 0. \tag{14.574}$$

Cela signifie que la fonction $\mathbb{1}_A$ est m-presque partout nulle. La fonction produit $\mathbb{1}_A f$ est également nulle m-presque partout, et par conséquent

$$\mu(A) = \int_\Omega \mathbb{1}_A f dm = 0. \tag{14.575}$$

□

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 14.207
Est-ce que la démonstration de cela ne demande pas la convergence monotone d'une façon ou d'une autre ?

14.11.2 Mesure complexe

Définition 14.208 (Mesure complexe[386])**.**
Si $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace mesurable, une ***mesure complexe*** *est une application $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ telle que*

(1) $\mu(\emptyset) = 0$,

(2) ν est sous-additive : si les ensembles $A_i \in \mathcal{A}$, alors $\sum_i \mu(A_i) = \mu(\bigcup_i A_i)$.

Notons que la série $\sum_i \mu(A_i)$ est alors nécessairement absolument convergente. En effet changer l'ordre de la somme ne change pas l'union, et donc ne change pas la valeur de la somme. Si $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une permutation,

$$\sum_i \mu(A_{\sigma(i)}) = \mu\big(\bigcup_i A_{\sigma(i)}\big) = \mu\big(\bigcup_i A_i\big) = \sum_i \mu(A_i). \tag{14.576}$$

Le théorème 11.94 dit alors que la somme doit être absolument convergente.

Théorème 14.209 (Radon-NikoDym complexe[58])**.**
Soit μ une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et ν une mesure complexe. Alors

(1) Il existe un unique couple de mesures complexes ν_a, ν_s sur $(\Omega, \mathcal{A})$ tel que

  (1a) $\nu = \nu_a + \nu_s$

  (1b) $\nu_a \ll \mu$

  (1c) $\nu_s \perp \mu$.

(2) Ces mesures satisfont alors $\nu_a \perp \nu_s$.

(3) Il existe une fonction intégrable $h\colon \Omega \to \mathbb{C}$ telle que $\nu_a = h\mu$.

(4) La fonction h est unique à μ-équivalence près.

(5) Si de plus $\nu \ll \mu$ alors $\nu = h\mu$.

Démonstration. No proof. □

Remarque 14.210.
Le point (5) est souvent utilisé sous la forme

$$\nu(A) = \int_\Omega \mathbb{1}_A(\omega) h(\omega) d\mu(\omega) = \int_A h(\omega) d\mu(\omega). \tag{14.577}$$

58. L'histoire du nom de ce théorème est intéressante. Lorsque monsieur et madame Rèmederdonnukodym apprirent que leurs amis, les Rèmedelaboulechevelue avaient appelé leur fils Théo, ils décidèrent d'en faire autant. C'est en souvenir de ces circonstances que monsieur Nikodym (prénommé Radon) décida de faire des math.

14.11.3 Théorème d'approximation

Lemme 14.211 ([373]).
Soit un espace topologique métrique (Ω, d). Nous considérons sa tribu des boréliens[59] $\mathcal{B}or(\Omega)$ *ainsi qu'une mesure finie μ sur $\big(\Omega, \mathcal{B}or(\Omega)\big)$.*

Soit un borélien A de Ω et $\epsilon > 0$.

Il existe un fermé F et un ouvert V de Ω tels que

(1) $F \subset A \subset V$

(2) $\mu(V \setminus F) < \epsilon$.

Démonstration. Soit la famille $\mathcal{D}$ des parties D de Ω qui vérifient la propriété suivante : pour tout $\epsilon > 0$, il existe un fermé F et un ouvert V de Ω tels que $F \subset D \subset V$ et $\mu(V \setminus F) < \epsilon$.

Nous allons prouver que $\mathcal{D}$ est une tribu qui contient tous les ouverts.

(i) **$\mathcal{D}$ contient les ouverts** Soit un ouvert D. Nous posons

$$F_n = \{x \in \Omega \text{ tel que } d(x, D^c) \geqslant 2^{-n}\}. \tag{14.578}$$

(i) **F_n est fermé** Le lemme 7.131 montre que le complémentaire F_n^c est ouvert. Donc F_n est fermé.

(ii) **$D \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$** Si $x \in D$, alors il existe $\delta > 0$ tel que $B(x, \delta) \subset D$ (parce que D est ouvert). Donc $d(x, V^c) \geqslant \delta$. Donc $x \in F_n$ pour $2^{-n} < \delta$.

(iii) **$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \subset D$** Si $x \in F_n$, nous avons $d(x, D^c) > 0$, c'est-à-dire que x n'est pas dans D^c. Autrement dit, $x \in D$.

(iv) **$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = D$** Nous avons donc l'égalité

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n. \tag{14.579}$$

Vu que $F_n \subset F_{n+1}$, le lemme 14.19(1) nous indique que

$$\lim_{n \to \infty} \mu(F_n) = \mu\big(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k\big) = \mu(D). \tag{14.580}$$

Étant donné que la mesure est finie, nous pouvons écrire cela sous la forme

$$\mu(D) - \mu(F_n) \to 0. \tag{14.581}$$

Pour chaque n nous avons l'encadrement

$$F_n \subset D \subset D \tag{14.582}$$

où F_n et D sont ouverts. Lorsque ϵ est donné, il suffit de prendre n assez grand pour avoir $\mu(D \setminus F_n) < \epsilon$ pour avoir un encadrement de D par un fermé et un ouvert (D lui-même) dont la différence des mesures est plus petite que e.

Tout cela pour dire que $D \in \mathcal{D}$.

(ii) **$\mathcal{D}$ est une tribu** Il faut vérifier les trois points de la définition 14.1.

(i) **$\Omega \in \mathcal{D}$** Nous venons de voir que les ouverts sont dans $\mathcal{D}$. Or Ω est un ouvert.

(ii) **$D \in \mathcal{D}$ implique $D^c \in \mathcal{D}$** Soit F fermé et V ouvert tels que $F \subset D \subset V$. Nous avons aussi

$$V^c \subset D^c \subset F^c \tag{14.583}$$

où V^c est fermé et F^c est ouvert. De plus $F^c \setminus = V \setminus F$ et donc

$$\mu(F^c \setminus V^c) = \mu(V \setminus F). \tag{14.584}$$

Nous pouvons donc choisir F et V pour avoir $\mu(F^c \setminus V^c) < \epsilon$.

59. Définition 14.45.

(iii) $\underline{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i \in \mathcal{D}}$ Soient $D_i \in t\mathcal{D}$. Pour chaque n nous posons

$$F_n \subset D_n \subset V_n \tag{14.585}$$

en choisissant V_n et F_n de telle sorte que $\mu(V_n \setminus F_n) < 2^{-n}\epsilon$.
Nous posons

$$Y_N = \bigcup_{n=0}^{N} F_n, \tag{14.586}$$

et

$$Y = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n. \tag{14.587}$$

Chacun des Y_N est fermé en tant qu'union finie de fermés (lemme 7.6(2)). Mais Y ne l'est pas spécialement [60]. Le lemme 14.19 nous dit cependant que $\mu(Y) = \lim_{N\to\infty} \mu(Y_N)$.
Nous posons

$$D = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n \tag{14.588}$$

ainsi que

$$V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n. \tag{14.589}$$

La partie V est ouverte dans Ω comme union d'ouverts (c'est dans le définition d'une topologie). Nous avons, pour tout N, l'encadrement

$$Y_N = \bigcup_{n=0}^{N} F_n \subset Y \subset D \subset V. \tag{14.590}$$

Nous prouvons à présent que $\lim_{N\to\infty} \mu(V \setminus Y_N) = 0$, de telle sorte que l'encadrement (14.590) dise que $D \in \mathcal{D}$.
D'abord nous avons

$$V \setminus Y \subset \bigcup_{n} (V_n \setminus F_n) \tag{14.591}$$

parce que si $x \in V \setminus Y$, alors $x \in V_i$ pour un certain i, mais vu que x n'est pas dans Y, il n'est dans aucun des F_n donc en particulier pas dans F_i et $x \in V_n \setminus F_i$.
Un peu de calcul :

$$\begin{aligned}
\mu(V) - \mu(Y) &= \mu(V \setminus Y) && (14.592a)\\
&\leqslant \mu\Big(\bigcup_{n} (V_n \setminus F_n)\Big) && (14.592b)\\
&\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \mu(V_n \setminus F_n) && (14.592c)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\epsilon && (14.592d)\\
&= 2\epsilon. && (14.592e)
\end{aligned}$$

Justifications :

- Pour (14.592a), c'est le lemme 14.18.
- Pour (14.592b), c'est (14.591).
- Pour (14.592c), c'est le lemme 14.18(4).
- Pour (14.592e), c'est la série géométrique (11.303).

60. Par exemple $A_n = [1/n, 2]$ sont des fermés dont l'union est $]0, 2]$ qui n'est pas fermé.

Nous choisissons maintenant N assez grand pour que $\mu(Y)-\mu(Y_N)<\epsilon$. Nous avons alors l'encadrement

$$Y_N\subset Y\subset D\subset V \tag{14.593}$$

avec

$$\mu(V\setminus Y_N)=\mu(V)-\mu(Y_N)=\underbrace{\mu(V)-\mu(y)}_{\leqslant 2\epsilon}+\mu(Y)-\mu(Y_N)\leqslant 2\epsilon+\epsilon=3\epsilon. \tag{14.594}$$

Nous avons donc montré que $\mathcal{D}$ était une tribu contenant les ouverts. Donc $\mathcal{D}$ contient tous les boréliens. □

Lemme 14.212 ([373]).
Soit un espace topologique métrique (Ω, d). Nous considérons sa tribu des boréliens $\mathcal{B}or(\Omega)$ ainsi qu'une mesure μ sur $\big(\Omega,\mathcal{B}or(\Omega)\big)$.

Soient un ouvert $W\subset\Omega$ tel que $\mu(W)<\infty$ et un borélien A tel que $A\subset W$. Soit aussi $\epsilon>0$.

Il existe un fermé F et un ouvert V tels que

(1) $\mu(V)<\infty$,

(2) $\mu(V\setminus F)<\epsilon$,

(3) et $F\subset A\subset V$.

Démonstration. Vu que la mesure de W est finie, nous considérons la mesure finie

$$\begin{aligned}\nu\colon \mathcal{B}\mathrm{or}(\Omega)&\to[0,\mu(W)]\\ B&\mapsto \mu(B\cap W).\end{aligned} \tag{14.595}$$

La partie A étant borélienne ; par le lemme 14.211, nous avons un fermé F et un ouvert V_1 ouvert tels que

$$F\subset A\subset V_1 \tag{14.596}$$

et $\nu(V_1\setminus F)<\epsilon$. Nous posons $V=V_1\cap W$; vu que $A\subset W$ et $A\subset V_1$ nous avons aussi $A\subset V_1\cap W$ et donc l'encadrement

$$F\subset A\subset V\subset W. \tag{14.597}$$

En ce qui concerne la mesure :

$$\mu(V\setminus F)=\mu(V)-\mu(F)=\mu(V\cap W)-\mu(F\cap W)=\nu(B)-\nu(F)<\epsilon. \tag{14.598}$$

□

Théorème 14.213 (Théorème d'approximation, thème 23[373]).
Soit un espace topologique métrique (Ω, d). Nous considérons sa tribu des boréliens $\mathcal{B}or(\Omega)$ ainsi qu'une mesure μ sur $\big(\Omega,\mathcal{B}or(\Omega)\big)$.

Soient un ouvert $W\subset\Omega$ tel que $\mu(W)<\infty$ et un un borélien A tel que $A\subset W$. Soit aussi $\epsilon>0$.

Il existe un fermé $F\subset W$ et une fonction $f\in C^0(\Omega,\mathbb{R})$ vérifiant

(1) $F\subset A\subset W$,

(2) $f|_F=1$,

(3) $f|_{W^c}=0$

(4) $\|f-\mathbb{1}_A\|_{L^1}<\epsilon$

Démonstration. Par le lemme 14.212, il existe un fermé F et un ouvert V tels que

$$F\subset A\subset V\subset W \tag{14.599}$$

et $\mu(V\backslash F) < \epsilon$. Nous posons alors

$$f(x) = \frac{d(x, V^c)}{d(x, V^c) + d(x, F)}. \tag{14.600}$$

Le dénominateur de cette expression ne s'annule jamais parce que si $d(x, V^c) = 0$, c'est que $x \in V^c$. Mais alors x n'est pas dans V et donc pas dans F non plus. La partie F étant fermée, $d(x, F) > 0$ par lemme 7.132. De plus la fonction f est continue par le lemme 7.133.

(i) **Pour (2)** Si $x \in F$, alors $d(x, F) = 0$, et f devient

$$f(x) = \frac{d(x, V^c)}{d(x, V^c)} = 1 \tag{14.601}$$

(ii) **Pour (3)** Si $x \in W^c$, alors $x \in V^c$ et $d(x, V^c) = 0$ si bien que $f(x) = 0$.

(iii) **Pour (4)** Les premiers points montrent que

$$\mathbb{1}_F \leqslant f \leqslant \mathbb{1}_V. \tag{14.602}$$

Mais nous avons aussi, par ailleurs,

$$\mathbb{1}_F \leqslant \mathbb{1}_A leq \mathbb{1}_V. \tag{14.603}$$

Ces deux encadrement, par le lemme 1.380 donnent l'encadrement

$$|f - \mathbb{1}_A| \leqslant \mathbb{1}_V - \mathbb{1}_F. \tag{14.604}$$

En ce qui concernent les intégrales nous avons alors

$$\int_\Omega |\mathbb{1}_A - f| \leqslant \int_\Omega (\mathbb{1}_V - \mathbb{1}_F) d\mu \tag{14.605a}$$
$$= \mu(V) - \mu(F) \tag{14.605b}$$
$$< \epsilon. \tag{14.605c}$$

Pour (14.605b), c'est le lemme 14.163.

□

14.12 Produit de mesures

Lemme 14.214 (Propriété des sections[370]).
Soient $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ des tribus sur les ensembles Ω_1 et Ω_2. Si $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ alors pour tout $x \in \Omega_1$ et $y \in \Omega_2$, les ensembles

$$A_1(y) = \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x, y) \in A\} \tag{14.606a}$$
$$A_2(x) = \{y \in \Omega_2 \text{ tel que } (x, y) \in A\} \tag{14.606b}$$

sont mesurables.

Démonstration. Soit $y \in \Omega_2$; nous allons prouver le résultat pour $A_1(y)$. Pour cela nous notons

$$S = \{A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \text{ tel que } \forall y \in \Omega_2, A_1(y) \in \mathcal{A}_1\}, \tag{14.607}$$

et nous allons noter que S est une tribu contenant les rectangles. Par conséquent, S sera égal à $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

(i) **Les rectangles** Considérons le rectangle $A = X \times Y$ et si $y \in \Omega_2$ alors

$$A_1(y) = \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x, y) \in X \times Y\}. \tag{14.608}$$

Donc soit $y \in Y$ alors $A_1(y) = X \in \mathcal{A}_1$, soit $y \notin Y$ et alors $A_1(y) = \varnothing \in \mathcal{A}_1$.

(ii) **Tribu : ensemble complet** Nous avons $\Omega_1 \times \Omega_2 \in S$ parce que c'est un rectangle.

(iii) **Tribu : complémentaire** Soit $A \in S$. Montrons que $A^c \in S$. Nous avons d'abord

$$(A^c)_1(y) = \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x, y) \in A^c\}. \tag{14.609}$$

D'autre part

$$A_1(y)^c = \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x, y) \notin A\} = \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x, y) \in A^c\} = (A^c)_1(y). \tag{14.610}$$

Vu que $\mathcal{A}_1$ est une tribu et que par hypothèse $A_1(y) \in \mathcal{A}_1$, nous avons aussi $A_1(y)^c \in S$, et donc $(A^c)_1(y) \in \mathcal{A}_1$, ce qui prouve que $A^c \in S$.

(iv) **Tribu : union dénombrable** Soit une suite $A_n \in S$. Nous avons

$$\begin{aligned}
(\bigcup_n A_n)_1(y) &= \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x, y) \in \bigcup_n A_n\} && (14.611a)\\
&= \bigcup_n \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x, y) \in A_n\} && (14.611b)\\
&= \bigcup_n (A_n)_1(y), && (14.611c)
\end{aligned}$$

et ce dernier ensemble est dans $\mathcal{A}_1$ parce que c'est une union dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}_1$.

Nous avons donc prouvé que S est une tribu contenant les rectangles, donc S contient au moins $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. □

Corolaire 14.215.
Si $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable[61] *sur $X \times Y$ alors pour chaque y dans Ω_2, la fonction*

$$\begin{aligned}
f_y : X &\to \mathbb{R}\\
x &\mapsto f(x, y)
\end{aligned} \tag{14.612}$$

est mesurable.

Démonstration. Soit $\mathcal{O}$ un ensemble mesurable de $\mathbb{R}$ (i.e. un borélien), et $y \in \Omega_2$. Nous avons

$$f_y^{-1}(\mathcal{O}) = \{x \in X \text{ tel que } f(x, y) \in \mathcal{O}\} = A_1(y) \tag{14.613}$$

où

$$A = \{(x, y) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \text{ tel que } f(x, y) \in \mathcal{O}\} = f^{-1}(\mathcal{O}). \tag{14.614}$$

Ce dernier est mesurable parce que f l'est. □

Théorème 14.216 ([370] [62]).
Soient $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ $(i = 1, 2)$ deux espaces mesurés σ-finie. Soit $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Alors les fonctions[63]

$$\begin{aligned}
x &\mapsto \mu_2\big(A_2(x)\big) && (14.615a)\\
y &\mapsto \mu_1\big(A_1(y)\big) && (14.615b)
\end{aligned}$$

sont mesurables et

$$\int_{\Omega_1} \mu_2\big(A_2(x)\big) d\mu_1(x) = \int_{\Omega_2} \mu_2\big(A_1(y)\big) d\mu_2(y). \tag{14.616}$$

61. Définition 14.38.
62. Modèle non contractuel : des notations et la définition de λ-système peuvent varier entre la référence et le présent texte.
63. Voir la notation du lemme 14.606.

Démonstration. Nous supposons d'abord que μ_1 et μ_2 sont finies et nous notons $\mathcal{D}$ le sous-ensemble de $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ sur lequel le théorème est correct. Nous allons commencer par prouver que $\mathcal{D}$ est un λ-système.

(i) **λ-système : différence ensembliste** Soient $A, B \in \mathcal{D}$ avec $A \subset B$. Nous avons

$$\begin{aligned}(B\backslash A)_1(y) &= \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in B\backslash A\} && (14.617a)\\ &= \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in B\}\backslash\{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in A\} && (14.617b)\\ &= B_1(y)\backslash A_1(y). && (14.617c)\end{aligned}$$

Vu que $A_1(y) \subset B_1(y)$ et que les mesures sont finies le lemme 14.18 nous donne

$$\mu_1\big((B\backslash A)_1(y)\big) = \mu_1\big(B_1(y)\big) - \mu_1\big(A_1(y)\big), \tag{14.618}$$

et similairement pour $1 \leftrightarrow 2$. Les deux fonctions (de y) à droite étant mesurables, nous avons la mesurabilité de la fonction $y \mapsto \mu_1\big((B\backslash A)_1(y)\big)$.

Prouvons la formule intégrale en nous rappelant que la formule (14.616) est supposée correcte pour A et B séparément :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_2}\mu_1\big((B\backslash A)_1(y)\big)d\mu_2(y) &= \int_{\Omega_2}\mu_1\big(B_1(y)\big)d\mu_2(y) - \int_{\Omega_2}\mu_1\big(A_1(y)\big)d\mu_2(y) && (14.619a)\\ &= \int_{\Omega_1}\mu_2\big(B_2(x)\big)d\mu_1(x) - \int_{\Omega_1}\mu_2\big(A_2(x)\big)d\mu_1(x) && (14.619b)\\ &= \int_{\Omega_1}\mu_2\big((B\backslash A)_2(x)\big)d\mu_1(x). && (14.619c)\end{aligned}$$

(ii) **λ-système : limite de suite croissante** Soit (A_n) une suite croissante dans $\mathcal{D}$; nous posons $B_n = A_n\backslash A_{n-1}$ et $A_0 = \varnothing$ de telle sorte à travailler avec une suite d'ensembles disjoints qui satisfait $\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n$. Vu que la suite est croissante nous avons $A_{n-1} \subset A_n$ et donc $B_n \in \mathcal{D}$ par le point déjà fait sur la différence ensembliste. Nous avons :

$$\begin{aligned}\mu_1\big((\bigcup_n B_n)_1(y)\big) &= \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in \bigcup_n B_n\} && (14.620a)\\ &= \bigcup_n\{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in B_n\} && (14.620b)\\ &= \bigcup_n (B_n)_1(y). && (14.620c)\end{aligned}$$

Par conséquent, par la propriété (3) d'une mesure nous avons

$$\mu_1\big((\bigcup_n B_n)_1(y)\big) = \sum_n \mu_1\big((B_n)_1(y)\big). \tag{14.621}$$

En tant que somme de fonctions positives et mesurables, la fonction

$$y \mapsto \sum_n \mu_1\big((B_n)_1(y)\big) \tag{14.622}$$

est mesurable par la proposition 14.94. Il faut encore vérifier la formule intégrale. Le gros du boulot est de permuter une somme et une intégrale par le corolaire 14.169 :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_2}\sum_n \mu_1\big((B_n)_1(y)\big)d\mu_2(y) &= \sum_n\int_{\Omega_2}\mu_1\big((B_n)_1(y)\big)d\mu_2(y) && (14.623a)\\ &= \sum_n\int_{\Omega_1}\mu_2\big((B_n)_2(x)\big)d\mu_1(x) && (14.623b)\\ &= \int_{\Omega_1}\sum_n \mu_2\big((B_n)_2(x)\big)d\mu_1(x) && (14.623c)\\ &= \int_{\Omega_1}\mu_2\big((\bigcup_n B_n)_1(y)\big)d\mu_1(x). && (14.623d)\end{aligned}$$

Maintenant que $\mathcal{D}$ est un λ-système contenant les rectangles, le lemme 14.28 dit que la tribu engendrée par $\mathcal{D}$ (c'est-à-dire $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$) est le λ-système $\mathcal{D}$ lui-même.

La preuve est finie dans le cas de mesures finies. Nous commençons maintenant à prouver dans le cas où les mesures μ_1 et μ_2 sont seulement σ-finies. Nous considérons des suites croissantes $\Omega_{i,n} \to \Omega_i$ d'ensembles mesurables et de mesure finie : $\mu_i(\Omega_{i,n}) < \infty$. D'abord remarquons que

$$\mu_2\Big((A \cap \Omega_{1,j} \times E_{2,j})_2(x)\Big) = \mu_2\Big(A_2(x) \cap \Omega_{2,j}\Big)\mathbb{1}_{\Omega_{1,j}}. \tag{14.624}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\heartsuit &= (A \cap \Omega_{1,j} \times E_{2,j})_2(x) && (14.625a)\\
&= \{y \in \Omega_2 \text{ tel que } (x,y) \in A \cap \Omega_{1,j} \times E_{2,j}\} && (14.625b)\\
&= \{y \in \Omega_2 \text{ tel que } (x,y) \in A \times \Omega_{2,j}\} \cap \{y \in \Omega_2 \text{ tel que } (x,y) \in \Omega_{1,j} \times \Omega_{2,j}\}. && (14.625c)
\end{aligned}$$

Si $y \in \Omega_{1,j}$ alors $\{y \in \Omega_2 \text{ tel que } (x,y) \in \Omega_{1,j} \times \Omega_{2,j}\} = \Omega_{2,j}$ et dans ce cas

$$\heartsuit = \{y \in \Omega_2 \text{ tel que } (x,y) \in A \times \Omega_{2,j}\} \cap \Omega_{2,j} = A_2(x) \cap E_{2,j}. \tag{14.626}$$

Et inversement, si $x \notin \Omega_{1,j}$ alors $\heartsuit = \varnothing$. Dans les deux cas nous avons (14.624).

Les ensembles $A \cap \Omega_{1,j} \times \Omega_{2,j}$ étant de mesure finie, nous pouvons leur appliquer la première partie :

$$\int_{\Omega_1} \mu_2\Big((A \cap \Omega_{1,j} \times \Omega_{2,j})_2(x)\Big)d\mu_1(x) = \int_{\Omega_2} \mu_1\Big((A \cap \Omega_{1,j} \times \Omega_{2,j})_1(y)\Big)d\mu_2(u), \tag{14.627}$$

ou encore

$$\int_{\Omega_1} \mu_2\Big(A_2(x) \cap \Omega_{2,j}\Big)\mathbb{1}_{\Omega_{1,j}}(x)d\mu_1(x) = \int_{\Omega_2} \mu_1\Big(A_1(y) \cap \Omega_{1,j}\Big)\mathbb{1}_{\Omega_{2,j}}(y)d\mu_2(y). \tag{14.628}$$

Ce que nous avons dans ces intégrales sont (par rapport à j) des suites croissantes de fonction positives ; nous pouvons donc permuter une limite et une intégrale. En sachant que si $k \to \infty$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{1,j}(x) &\to 1 && (14.629a)\\
\mu_2\big(A_2(x) \cap \Omega_2, j\big) &\to \mu_2\big(A_2(x)\big), && (14.629b)
\end{aligned}$$

nous trouvons le résultat demandé. □

Théorème-Définition 14.217 ([387, 388]).
Soient μ_i des mesures σ-finies sur $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ $(i = 1, 2)$.

(1) Il existe une et une seule mesure, notée $\mu_1 \otimes \mu_2$, sur $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ telle que

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \tag{14.630}$$

pour tout $A_1 \in \mathcal{A}_1$ et $A_2 \in \mathcal{A}_2$.

(2) Cette mesure est donnée par la formule[64]

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A) = \int_{\Omega_1} \mu_2\big(A_2(x)\big)d\mu_1(x) = \int_{\Omega_2} \mu_1\big(A_1(y)\big)d\mu_2(y). \tag{14.631}$$

*Cette mesure est la **mesure produit** de μ_1 par μ_2.*

(3) La mesure $\mu_1 \otimes \mu_2$ ainsi définie est σ-finie.

64. Voir les notations du lemme 14.214.

Démonstration. La partie « existence » sera divisée en deux parties : l'une pour prouver que les formules (14.631) donnent une mesure et une pour montrer que cette mesure vérifie la condition (14.630).

(i) **Unicité** L'ensemble des rectangles de $\Omega_1 \times \Omega_2$ engendre la tribu $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, est fermé par intersection et contient une suite croissante d'ensembles $P_n \times R_n$ de mesure finie ($\mu(P_n \times R_n) < \infty$) telle que $P_n \times R_n \to \Omega_1 \times \Omega_2$. Cette suite est donné par le fait que μ_1 et μ_2 sont σ-finies. En effet si (X_n) et (Y_n) sont des recouvrements dénombrables de Ω_1 et Ω_2 par des ensembles de mesure finie, en posant $P_n = \bigcup_{k=1}^n X_n$ et $R_n = \bigcup_{k=1}^n Y_n$ nous avons bien une suite croissante de rectangles qui tendent vers $\Omega_1 \times \Omega_2$. Avec ces rectangles en main, le théorème 14.29 donne l'unicité.

(ii) **Les formules définissent une mesure** Le théorème 14.216 dit que ces formules ont un sens et que l'égalité entre les deux intégrales est correcte. Nous prouvons à présent qu'elles déterminent effectivement une mesure sur $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$.

Pour tout $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, $\mu(A) \geqslant 0$ parce que μ est donnée par l'intégrale d'une fonction positive.

En ce qui concerne la condition d'unions dénombrable disjointe, soient $A^{(i)}$ des éléments disjoints de $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$; nous commençons par remarquer que

$$\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A^{(i)}\Big)_2(x) = \{y \in \Omega_2 \text{ tel que } (x,y) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A^{(i)}\} \tag{14.632a}$$

$$= \bigcup_{i=1}^{\infty} \{y \in \Omega_2 \text{ tel que } (x,y) \in A^{(i)}\} \tag{14.632b}$$

$$= \bigcup_{i=1}^{\infty} A_2^{(i)}(x). \tag{14.632c}$$

Par conséquent,

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A^{(i)}\Big) = \int_{\Omega_1} \mu_2\Big(\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A^{(i)}\Big)_2(x)\Big)\, d\mu_1(x) \tag{14.633a}$$

$$= \int_{\Omega_1} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_2\big(A_2^{(i)}(x)\big) d\mu_1(x) \tag{14.633b}$$

$$= \int_{\Omega_1} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu_2\big(A_2^{(i)}(x)\big) d\mu_1(x). \tag{14.633c}$$

où nous avons utilisé l'additivité de la mesure μ_2. À ce niveau, il serait commode de permuter la somme et l'intégrale. Pour ce faire nous considérons la suite (croissante) de fonctions

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \mu_2\big(A_2^{(i)}(x)\big). \tag{14.634}$$

Nous pouvons permuter la limite et l'intégrale grâce au théorème de la convergence monotone 14.166 ; ensuite la somme se permute avec l'intégrale en tant que somme finie :

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A^{(i)}\Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_1} \big(A_2^{(i)}(x)\big) d\mu_1(x) \tag{14.635a}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(A^{(i)}) \tag{14.635b}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A^{(i)}). \tag{14.635c}$$

(iii) **Elles vérifient la condition** Prouvons que les formules (14.631) se réduisent à (14.630) dans le cas des rectangles. Soit donc $A = X_1 \times X_2$ avec $X_i \in \mathcal{A}_i$. Alors

$$A_1(y) = \{x \in \Omega_1 \text{ tel que } (x,y) \in X_1 \times X_2\} \tag{14.636}$$

et

$$\mu_1\big(A_1(y)\big) = \mathbb{1}_{X_2}(y)\mu_1(X_1), \tag{14.637}$$

donc

$$\begin{aligned}
(\mu_1 \otimes \mu_2)(A) &= \int_{\Omega_2} \mu_1\big(A_1(y)\big) d\mu_2(y) && (14.638a)\\
&= \int_{\Omega_2} \mu_1(X_1)\mathbb{1}_{X_2}(y) d\mu_2(y) && (14.638b)\\
&= \mu_1(X_1)\int_{\Omega_2} \mathbb{1}_{X_2}(y) d\mu_2(y) && (14.638c)\\
&= \mu_1(X_1)\mu_2(X_2). && (14.638d)
\end{aligned}$$

Pour cela nous avons utilisé le fait que l'intégrale de la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable est la mesure de cet ensemble.

□

Définition 14.218 (Produit d'espaces mesurés)**.**
*Si $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ sont deux espaces mesurés, l'**espace produit** est l'ensemble $\Omega_1 \times \Omega_2$ muni de la tribu produit $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ de la définition 14.117 et de la mesure produit $\mu_1 \otimes \mu_2$ définie par le théorème 14.217.*

Remarque 14.219.
Il n'est pas garantit que la tribu $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ soit la tribu la plus adaptée à l'ensemble $S_1 \times S_2$. Dans le cas de $\mathbb{R}^N$, il se fait que c'est le cas : en prenant des produits des boréliens sur $\mathbb{R}$ on obtient bien les boréliens sur $\mathbb{R}^N$, voir proposition 14.121.

14.13 Tribu et mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$

Définition 14.220 (Mesure de Lebesgue)**.**
En plusieurs étapes.

(1) D'abord nous avons la mesure λ_N sur $\mathbb{R}^n$ définie sur

$$\big(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}or(\mathbb{R}) \otimes \ldots \otimes \mathcal{B}or(\mathbb{R})\big) \tag{14.639}$$

comme le produit $\lambda \otimes \ldots \otimes \lambda$ via la définition 14.218.

(2) Ensuite nous nous souvenons du corolaire 14.121 qui donne λ_N comme une mesure sur

$$\big(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^N)\big). \tag{14.640}$$

(3) Et enfin nous considérons la completion de la mesure λ_N (théorème 14.64), que nous notons encore λ_N.

Lemme 14.221.
Tout hyperplan de $\mathbb{R}^n$ est de mesure nulle.

Proposition 14.222 ([374])**.**
Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une union dénombrable et disjointe de cubes semi-ouverts.

Démonstration. Nous allons même montrer que ces cubes peuvent être choisis sur un quadrillage.

Soit G un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $\{Q_i^1\}_{i\in\mathbb{N}}$ un découpage de $\mathbb{R}^n$ en cubes semi-ouverts de côté 1 et dont les sommets sont en les coordonnées entières. Ils sont de la forme

$$\prod_{i=1}^{n}[n_i, n_i+1[\tag{14.641}$$

où les n_i sont des entiers. Ce sont des cubes disjoints. Nous considérons ensuite pour chaque $k > 1$ le découpage $\{Q_i^{(k)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ en cubes de côtés 2^{-k} qui consiste à découper en 2 les côtés des cubes du découpage $Q^{(k-1)}$. Ces cubes forment encore un découpage dénombrable de $\mathbb{R}^n$ en des cubes disjoints. Ils sont de la forme

$$\prod_{i=1}^{n}[\frac{n_i}{2^k}, \frac{n_i+1}{2^k}[\tag{14.642}$$

où les n_i sont encore entiers. Ensuite nous considérons $\mathcal{E}$ l'union de tous les $Q_i^{(k)}$ contenus dans G.

Montrons que $\mathcal{E} = G$. D'abord $\mathcal{E} \subset G$ parce que $\mathcal{E}$ est une union d'ensembles contenus dans G. Ensuite si $x \in G$, il existe une boule de rayon r autour de x contenue dans G ; alors un des ensembles $Q_i^{(k)}$ avec $2^{-j} < \frac{r}{2}$ est contenue dans $B(x,r)$ et donc dans $\mathcal{E}$.

Bien entendu l'union qui donne $\mathcal{E}$ n'est pas satisfaisante par ce que les $Q_i^{(k+1)}$ sont contenus dans les $Q_i^{(k)}$; les intersections sont donc loin d'être vides.

Nous faisons ceci :

$$R^{(0)} = \{Q_i^{(1)} \text{contenu dans } G\} \tag{14.643a}$$
$$R^{(k+1)} = \{Q_i^{(k+1)} \text{contenus dans } G \text{ et pas dans } R^{(k)}\}. \tag{14.643b}$$

En fin de compte l'union de tous les ensembles contenus dans les $R^{(k)}$ forment encore $\mathbb{R}^n$, mais sont d'intersection vide. □

Les cubes dont il est question dans cette preuve, de côtés 2^{-k} sont souvent appelés des cubes **dyadiques**.

Corolaire 14.223 ([374]).
Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une union dénombrable de cubes presque disjoints[65].

Démonstration. Il suffit de prendre les cubes de la proposition 14.222 et de les fermer. Ce que l'on ajoute est de mesure nulle[66]. □

Remarque 14.224.
La proposition 14.222 est une propriété seulement de la topologie de $\mathbb{R}^n$ alors que le corolaire fait intervenir la mesure de Lebesgue parce qu'il faut bien dire que les intersections sont de mesure (de Lebesgue) nulle.

14.13.1 Ensembles négligeables

Lemme 14.225 ([389]).
L'image d'une partie négligeables de $\mathbb{R}^N$ par une application Lipschitz est négligeable.

Démonstration. Soit N une partie négligeable de $\mathbb{R}^N$ et une application Lipschitz $f\colon N \to \mathbb{R}^N$. Soit $Q \subset \mathbb{R}^N$ un cube borné de côté r. Pour tout $x, x' \in N \cap Q$ nous avons

$$\|f(x) - f(x')\| \leqslant C\|x - x'\| \leqslant Cr. \tag{14.644}$$

Donc $f(N \cap Q)$ est dans une boule de rayon Cr. Mais comme toutes les normes sont équivalentes[67] sur $\mathbb{R}^N$ nous pouvons tout aussi bien prendre la norme $\|.\|_1$ au lieu de la norme $\|.\|_2$ (qui est toujours

65. « presque » au sens où les intersections éventuelles sont de mesure de Lebesgue nulle.
66. Voir le lemme 14.221.
67. Proposition 11.43

la norme prise implicitement lorsqu'on parle de $\mathbb{R}^n$), de telle sorte que les boules soient des cubes. Quoi qu'il en soit, $f(N \cap Q)$ est contenu dans un cube de côté $2Cr$ et au niveau de la mesure extérieure,

$$m^*\big(f(N \cap Q)\big) \leqslant (2Cr)^N = (2C)^N r^N, \tag{14.645}$$

ou encore

$$m\big(f(N \cap Q)\big) \leqslant (2C)^N m(Q) \tag{14.646}$$

parce que r^N est la mesure du cube Q.

Soit maintenant $\epsilon > 0$; vu que N est négligeable, il existe un ouvert U contenant N et tel que $m(U) < \epsilon$. Ce U est une union presque disjointe de cubes dyadiques (Q_n) par le corolaire 14.223. Nous avons alors

$$\begin{aligned}
m^*\big(f(N)\big) &= m^*\big(f(\bigcup_n N \cap Q_n)\big) && (14.647a)\\
&= m^*\big(\bigcup_n f(N \cap Q_n)\big) && (14.647b)\\
&\leqslant \sum_n m^*(f(N \cap Q_n)) && (14.647c)\\
&\leqslant \sum_n (2C)^N m(Q_n) && (14.647d)\\
&= (2C)^N m(U) && (14.647e)\\
&< (2C)^d \epsilon. && (14.647f)
\end{aligned}$$

Au final, $m^*\big(f(N)\big) \leqslant (2C)^N\epsilon$. L'ensemble N est donc négligeable parce que le lemme 14.70 le dit : $m^*(N) = 0$. □

Corolaire 14.226.
Un sous-espace vectoriel strict de $\mathbb{R}^N$ est négligeable.

Démonstration. Un sous-espace vectoriel strict de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k < N$ est l'image de

$$A = \{t_1 e_1 + \cdots + t_k e_k \text{ tel que } t_i \in \mathbb{R}\} \tag{14.648}$$

par une application linéaire. Ce A est un pavé de mesure de Lebesgue nulle. Donc l'image est négligeable par le lemme 14.225. □

14.13.2 Parties et fonctions mesurables

Pour rappel, la notion d'application de classe C^1 est donnée par la définition 11.170.

Proposition 14.227.
Soient U et V des ouverts de $\mathbb{R}^N$ et $\phi\colon U \to V$ un C^1-difféomorphisme. Si $E \subset U$ est mesurable, alors $\phi(E)$ est mesurable[68].

Démonstration. Si E est mesurable, il existe un borélien B et un ensemble négligeable N tels que $E = B \cup N$. Vu que ϕ est un homéomorphisme, l'application ϕ^{-1} est borélienne parce que continue (théorème 14.51). Nous avons

$$\phi(B) = (\phi^{-1})^{-1}(B), \tag{14.649}$$

c'est-à-dire que $\phi(B)$ est l'image inverse de B par ϕ^{-1}. L'ensemble $\phi(B)$ est donc borélien.

Il reste à voir que $\phi(N)$ est négligeable. Soit $Q \subset U$ une cube compact. L'application $d\phi\colon Q \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ est continue et donc bornée (par la remarque 11.175) sur le compact Q. Par les accroissements finis (théorème 11.194), l'application ϕ est donc Lipschitz sur Q. La partie $\phi(N \cap Q)$ est alors négligeable par le lemme 14.225. Pour conclure,

$$\phi(N) = \bigcup_i \phi(N \cap Q_i) \tag{14.650}$$

68. Ici « mesurable » parle de mesurabilité au sens de la tribu de Lebesgue, c'est-à-dire pas seulement les boréliens.

où les Q_i sont tous des cubes compacts. Donc $\phi(N)$ est une union dénombrable d'ensembles négligeables ; ergo négligeable lui-même par le lemme 14.62. □

Proposition 14.228.
Soient U et V des ouverts de $\mathbb{R}^N$ et $\phi\colon U\to V$ un C^1-difféomorphisme. Si $f\colon V\to\mathbb{C}$ est mesurable, alors $f\circ\phi\colon U\to\mathbb{C}$ l'est.

Démonstration. Soit A une partie mesurable de $\mathbb{C}$. Il nous faut prouver que

$$(f\circ\phi)^{-1}(A)=\phi^{-1}\big(f^{-1}(A)\big) \tag{14.651}$$

soit mesurable. Par hypothèse , $f^{-1}(A)$ est mesurable. Vu que ϕ est un C^1-difféomorphisme, elle et son inverse sont mesurables par la proposition 14.227. Donc l'image du mesurable $f^{-1}(A)$ par ϕ^{-1} est encore mesurable. □

14.13.3 Propriétés d'unicité

Corolaire 14.229.
La mesure λ_N est l'unique mesure sur $(\mathbb{R}^N,\mathcal{B}or(\mathbb{R}^N))$ à satisfaire

$$\mu\big(\prod_{i=1}^N[a_i,b_i]\big)=\prod_{i=1}^n|a_i-b_i| \tag{14.652}$$

Démonstration. Par définition de la mesure produit, λ_N est l'unique mesure sur $(\mathbb{R}^N,\mathcal{B}or(\mathbb{R})\otimes\ldots\otimes\mathcal{B}or(\mathbb{R}))$ à satisfaire la condition. La proposition 14.121 conclut. □

Vu que les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés (théorème 10.21), et que tout borné est dans un tel produit d'intervalle, la mesure de Lebesgue est une mesure de Borel (définition 14.82(1)).

Théorème 14.230 ([390])**.**
La mesure de Lebesgue est invariante par translation. Autrement dit si A est mesurable dans $\mathbb{R}^n$ et si $a\in\mathbb{R}^n$ alors $A+a$ est mesurable et

$$\lambda_N(A+a)=\lambda_N(A). \tag{14.653}$$

Démonstration. Nous supposons que A est borélien ; sinon il l'est à ensemble négligeable près. Nous notons t_a la translation et nous nommons μ la mesure donnée par

$$\mu(A)=\lambda_N(A+a). \tag{14.654}$$

Vu que

$$\mu\big(\prod_{n=1}^N[r_n,s_n[\big)=\lambda_N\big(\prod_i[r_n+a_n,s_n+a_n[\big)=\prod_i|s_n-r_n|. \tag{14.655}$$

Vu qu'il y a unicité de la mesure vérifiant cette propriété (corolaire 14.229), nous avons $\mu=\lambda_N$. □

Pour la suite nous notons Q_0 le cube unité de $\mathbb{R}^N$: $Q_0=\big([0,1[\big)^N$.

Théorème 14.231 ([390])**.**
Soit μ une mesure positive sur $\mathbb{R}^N$ telle que

(1) μ soit invariante par translation (des boréliens),

(2) $\mu(Q_0)=1$.

Alors $\mu=\lambda_N$.

Démonstration. Pour simplifier l'écriture nous faisons $N=2$. Notre but est de prouver que $\mu([0,r[\times[0,r'[)=rr'$ pour tout $r,r'\in\mathbb{R}$.

(i) **Longueur $=1/J$** Soient J, K des entiers. Nous pouvons diviser le cube Q_0 en rectangles de côtés $1/J$ et A/K :

$$Q_0 = \bigcup_{\substack{1\leqslant j\leqslant J\\ 1\leqslant k\leqslant K}} [\frac{j-1}{J}, \frac{j}{J}[\times [\frac{k-1}{K}, \frac{k}{K}[\tag{14.656}$$

où l'union est disjointe. En ce qui concerne la mesure nous commençons par utiliser la sous-additivité :

$$\mu(Q_0) = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant J\\ 1\leqslant k\leqslant K}} \mu\left([\frac{j-1}{J}, \frac{j}{J}[\times [\frac{k-1}{K}, \frac{k}{K}[\right). \tag{14.657}$$

Nous utilisons ensuite, sur chacun des termes séparément l'invariance par translation selon les vecteurs $(\frac{j-1}{J}, 0)$ et $(0, \frac{k-1}{K})$:

$$1 = \mu(Q_0) = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant J\\ 1\leqslant k\leqslant K}} \mu\left([0, \frac{1}{J}[\times [0, \frac{1}{K}[\right) = JK\mu\mu\left([0, \frac{1}{J}[\times [0, \frac{1}{K}[\right), \tag{14.658}$$

et donc

$$\mu\left([0, \frac{1}{J}[\times [0, \frac{1}{K}[\right) = \frac{1}{J} \times \frac{1}{K}. \tag{14.659}$$

(ii) **Longueur L/K** Soient L, M des entiers et calculons :

$$\begin{aligned}
\mu\left([\frac{0}{J}, \frac{L}{J}[\times [\frac{0}{K}, \frac{M}{K}[\right) &= \sum_{\substack{0\leqslant l\leqslant L-1\\ 0\leqslant m\leqslant M-1}} \mu\left([\frac{l}{J}, \frac{l+1}{J}[\times [\frac{m}{K}, \frac{m+1}{K}[\right) && \text{(14.660a)}\\
&= LM\mu\left([\frac{0}{J}, \frac{1}{J}[\times [\frac{0}{K}, \frac{1}{K}[\right) && \text{(14.660b)}\\
&= LM \times \frac{1}{J} \times \frac{1}{K}. && \text{(14.660c)}
\end{aligned}$$

Nous avons donc, pour tout J, K, L, M :

$$\mu\left([0, \frac{L}{J}[\times [0, \frac{M}{K}[\right) = \frac{L}{J} \times \frac{M}{K}, \tag{14.661}$$

c'est-à-dire que pour tout $r, s \in \mathbb{Q}^+$ nous avons

$$\mu\big([0, r[\times [0, s[\big) = rs. \tag{14.662}$$

(iii) **Longueur réelle** Nous passons au cas de longueur réelle. Soit $a > 0$ et une suite croissante de rationnels $r_n \to a$. Une telle suite existe par la proposition 10.16. L'intervalle $[0, a[$ s'écrit sous la forme d'une union croissante $[0, a[= \bigcup_{n\geqslant 1}[0, r_n[$; le lemme 14.19(1) peut être utilisé et nous avons

$$\mu\big([0, a[\big) = \mu\left(\bigcup_{n\geqslant 1}[0, r_n[\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\big([0, r_n[\big) = \lim_{n\to\infty} r_n = a. \tag{14.663}$$

Enfin, si $a, a' \in \mathbb{R}$, l'invariance par translation donne

$$\mu\big([a, a'[\big) = \mu\big([0, a'-a[\big) = a' - a. \tag{14.664}$$

Par unicité de la mesure ayant cette propriété, nous avons $\mu = \lambda_N$. □

Corolaire 14.232.
Si μ est une mesure positive sur $\mathbb{R}^N$ invariante par translation et telle que $\mu(Q_0) = C < \infty$ alors $\mu = C\lambda_N$.

Démonstration. Si $C > 0$ nous considérons la mesure $\frac{1}{C}\mu$ qui vérifie $(\frac{1}{C}\mu)(Q_0) = 1$. En conséquence du théorème 14.231, $\frac{1}{C}\mu = \lambda_N$ et $\mu = C\lambda_N$.

Si au contraire $C = 0$ alors nous pouvons paver $\mathbb{R}^N$ avec des cubes Q_i de côté 1 qui ont tous mesure 0. Par conséquent, $\mathbb{R}^N = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$, donc $\mu(\mathbb{R}^N) = \sum_i \mu(Q_i) = 0$. Par conséquent $\mu = 0$ parce que toute partie de $\mathbb{R}^N$ a une mesure au maximum égale à celle de $\mathbb{R}^N$. □

14.13.4 Régularité

Les différentes notions de régularité pour une mesure sont données dans la définition 14.82. Ce sont essentiellement des questions de compatibilité entre la mesure et la topologie.

Proposition 14.233.
La mesure de Lebesgue est une mesure de Radon sur tout ouvert de $\mathbb{R}^N$.

Démonstration. Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^N$. C'est localement compact et dénombrable à l'infini. Il suffit de prouver que λ_N est de Borel sur V pour que le théorème 14.83 conclue à la régularité de la mesure de Lebesgue.

Soit K un compact de V. Par la proposition 7.86 c'est également un compact de $\mathbb{R}^N$. Par conséquent K est dans un pavé fermé de $\mathbb{R}^N$ du type

$$K \subset \prod_{n=1}^{N} [a_n, b_n] \tag{14.665}$$

et donc en passant par le corolaire 14.229,

$$\lambda_N(K) \leqslant \prod_{i=1}^{N} (b_n - a_n) < \infty. \tag{14.666}$$

Nous avons démontré que λ_N reste fini sur tout compact de V. □

14.14 Propriétés de l'intégrale de Lebesgue

Un lemme qui a l'air de rien, mais qui au final est souvent utilisé ; tellement qu'on l'oublie un peu.

Lemme 14.234 ([1])**.**
Soit un compact K de $\mathbb{R}$ et une fonction continue $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors l'intégrale

$$\int_K f \tag{14.667}$$

existe et est finie.

Démonstration. Vu que f est continue sur le compact K, elle y atteint une borne supérieure [69] que nous nommons M.

Soit R tel que $B(0, R)$ contienne K. La fonction $(M + 1)\mathbb{1}_{B(0,R)}$ majore strictement f sur le mesurable $B(0, R)$. L'ensemble sur lequel nous prenons le supremum dans la définition (14.430) de l'intégrale de f contient donc au moins le nombre fini $(M + 1)\mu(K)$. Le supremum existe et est fini (proposition 1.393). □

Le lemme suivant est la contrepartie du côté des intégrales de l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue démontrée dans le théorème 14.230.

69. Nous ne nous lasserons jamais de citer le théorème de Weierstrass 7.126.

Lemme 14.235 (Invariance par translation)**.**
Soient f intégrable sur $\mathbb{R}^d$ et $a \in \mathbb{R}^d$. Alors en posant

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R}^d &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto f(x+a) \end{aligned} \tag{14.668}$$

nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} g d\lambda. \tag{14.669}$$

Nous pouvons aussi écrire

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x+a) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\lambda(x). \tag{14.670}$$

14.14.1 Quelques limites dans les bornes

Dans le cas de l'intégrale de Lebesgue définie par 14.156, si f est une fonction sur $\mathbb{R}$ et si λ est la mesure de Lebesgue, nous avons une définition directe de

$$\int_0^\infty f d\lambda. \tag{14.671}$$

Nous sommes cependant en droit de nous demander si nous n'aurions pas également ceci :

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x f\lambda = \int_0^\infty f d\lambda. \tag{14.672}$$

Lorsque l'intégrale considérée est celle de Riemann, l'égalité (14.672) est une définition. Ici, ça va être une propriété, voir le lemme 14.239.

14.236.
Tant que nous sommes à parler de limites dans les bornes, nous aurions pu vouloir, pour les séries, suivre le chemin suivant :

- Définir l'intégrale de Lebesgue sur un espace mesuré.
- Prendre au passage le cas particulier $\sum_{k=0}^\infty a_k = \int_{\mathbb{N}} a$ où $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable pour la mesure de comptage.
- Démontrer qu'avec ces définitions, $\sum_{k=0}^\infty a_k = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^N a_k$.

Or le dernier point est pris comme définition et son égalité avec l'intégrale pour la mesure de comptage est une propriété [70]. Pourquoi ? Parce que la définition 14.16 de mesure positive demande déjà d'avoir défini les sommes sur $\mathbb{N}$.

Lemme 14.237.
Soit une partie mesurable $A \subset \mathbb{R}^+$ de mesure finie. Alors

$$\lim_{M\to 0} \lambda\big(A \cap [M, \infty[\big) = 0. \tag{14.673}$$

Démonstration. La fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \lambda\big(A \cap [x, \infty[\big) \end{aligned} \tag{14.674}$$

est décroissante et bornée vers le bas par 0. Elle possède dont une limite $\ell \geqslant 0$ (corolaire 10.51). Nous allons prouver que $\ell = 0$ en calculant la limite sur les entiers.

Nous posons $J_k = [k, k+1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$ nous avons :

$$f(n) = \lambda\big(A \cap [n, \infty[\big) \tag{14.675a}$$

$$= \lambda\big(\bigcup_{k=n}^\infty (A \cap J_k)\big) \tag{14.675b}$$

$$= \sum_{k=n}^\infty \lambda(A \cap J_k). \tag{14.675c}$$

70. Proposition 14.242.

Mais nous savons par hypothèse sur la mesure de A que

$$\lambda(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda(A \cap J_k) < \infty. \tag{14.676}$$

Donc $f(n)$ est une queue de série convergente. Elle tend donc vers zéro par le lemme 11.89. C'est-à-dire que

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0. \tag{14.677}$$

Et comme $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe et vaut ℓ, la seule possibilité est $\ell = 0$. □

Lemme 14.238.
Soit une fonction mesurable $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$. Alors

$$\lim_{x\to\infty} \int_x^{\infty} f d\lambda = 0. \tag{14.678}$$

Démonstration. Nous posons

$$F(x) = \int_x^{\infty} f d\lambda. \tag{14.679}$$

Nous commençons par prouver que c'est une fonction décroissante. En effet,

$$F(x) - F(x+a) = \int_x^{\infty} f - \int_{x+a}^{\infty} f = \int_x^{x+a} f + \int_{x+a}^{\infty} f - \int_{x+a}^{\infty} = \int_x^{a+a} f \geqslant 0. \tag{14.680}$$

Nous avons utilisé 14.180.

Vu que f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$, nous avons $F(x) \geqslant 0$ pour tout x. La fonction F est décroissante et bornée vers le bas. Donc elle a une limite :

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \ell \geqslant 0. \tag{14.681}$$

Supposons $\ell > 0$ et posons $0 < \epsilon < \ell$. Soit M tel que pour tout $x > M$ nous ayons

$$\int_x^{\infty} f > m. \tag{14.682}$$

Soit $a \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$|\int_a^{\infty} f(t) - \ell \, dt| < \epsilon. \tag{14.683}$$

En vertu de (14.682) nous considérons $a_0 > a$ tel que

$$\int_{a_0}^{\infty} f = I_0 > m. \tag{14.684}$$

Nous construisons la suite strictement croissante (a_k) de la façon suivante :

$$\int_{a_k}^{\infty} f = I_k > m \tag{14.685}$$

et

$$|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f - I_k| < \epsilon. \tag{14.686}$$

Donc pour k nous avons

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f \geqslant I_k - \epsilon \geqslant m - \epsilon. \tag{14.687}$$

Mais

$$\int_{a_0}^{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f \geqslant \sum_k (m-\epsilon) = \infty. \tag{14.688}$$

Nous avons une contradiction. □

Lemme 14.239 ([1]).
Soit $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ intégrale sur $[a,\infty]$ pour la mesure de Lebesgue. Alors la limite

$$\lim_{b\to\infty}\int_{[a,b]} f \tag{14.689}$$

existe et vaut

$$\lim_{b\to\infty}\int_{[a,b]f} = \int_{[a,\infty]} f. \tag{14.690}$$

Démonstration. Vu qu'on a le droit de découper les domaines d'intégration en domaines disjoints, et que l'ajout d'un point ne change rien à la mesure de Lebesgue, nous avons pour tout $b\in[a,\infty[$ que

$$\int_{[a,\infty]} f = \int_{[a,b]} f + \int_{[b,\infty]} f. \tag{14.691}$$

Nous avons l'intention de prendre la limite $b\to\infty$. Le lemme 14.238 nous assure que la limite de la dernière intégrale existe et vaut zéro. Donc la limite de l'intégrale du milieu existe et vaut celle à gauche. □

14.14.2 Mesure de comptage et série

Définition 14.240 (mesure de comptage).
*Soit $(S,\mathcal{F})$ un ensemble mesurable. La **mesure de comptage** sur $(S,\mathcal{F})$ est la mesure définie par*

$$m(A)=\begin{cases} \operatorname{Card}(A) & \text{si } A \text{ est fini}\\ +\infty & \text{sinon.}\end{cases} \tag{14.692}$$

Cette mesure est utilisée pour voir des séries comme des intégrales sur $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),m)$.

Lemme 14.241.
Si m est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ et si $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, alors le triple $\big(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),m\big)$ est un espace mesuré[71] σ-fini.

Démonstration. Bien entendu l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ est une tribu sur $\mathbb{N}$. Nous devons donc seulement vérifier les conditions de la définition 14.16.

Si A est une partie de $\mathbb{N}$, alors $m(A)\in[0,\infty]$ parce que c'est soit le cardinal de A soit ∞.

Le cardinal de l'ensemble vide est zéro (ça fait partie de la définition du cardinal 1.120).

Soient des parties deux à deux disjointes $\{A_i\}_{i\in I}$ de $\mathbb{N}$. Posons $A=\bigcup_{i\in I}A_i$. Si I est infini dénombrable, alors l'union est infinie : prendre par exemple la partie $S=\{\min(A_i)\}_{i\in I}$ qui est en bijection avec I. Nous avons alors d'une part

$$m\big(\bigcup_i A_i\big)\geqslant m(S)=\infty, \tag{14.693}$$

et d'autre part

$$\sum_{i\in I} m(A_i)\geqslant\sum_{i\in I}1=\infty. \tag{14.694}$$

Si par contre I est fini, alors le lemme 1.122(5) dit que

$$m\big(\bigcup_{i\in I}\big)=\operatorname{Card}\big(\bigcup_{i\in I}A_i\big)=\sum_{i\in I}m(A_i). \tag{14.695}$$

Le fait que notre espace soi σ-finie se voit par exemple en posant $E_n=\{0,\ldots,n\}$. Chaque E_n est de mesure finie, et leur union est $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n=\mathbb{N}$. □

71. Définition 14.16.

Proposition 14.242 ([1]).
Soit l'espace mesuré $\big(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m\big)$ [72]. *Nous considérons une application* $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ *(c'est à dire une suite de nombres réels positifs).*

(1) L'intégrale $\int_{\mathbb{N}} a\,dm < \infty$ *si et seulement si la série aussi :* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.

(2) Si $\int_{\mathbb{N}} a\,dm$ *existe, alors*

$$\int_{\mathbb{N}} a\,dm = \sum_{n=0}^{\infty} a_n. \tag{14.696}$$

Démonstration. Nous allons travailler avec la définition 14.156 de l'intégrale et 14.104 pour les fonctions étagées.

(i) **Si l'intégrale est** $<\infty$ Nous supposons que $\int_{\mathbb{N}} adm < \infty$. La proposition 14.193 nous permet de découper $\mathbb{N}$ en parties disjointes. Nous choisissons de voir $\mathbb{N} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{i\}$ et donc de considérer l'égalité

$$\int_{\mathbb{N}} adm = \sum_{i=0}^{\infty}\int_{\{i\}} adm. \tag{14.697}$$

Vu que $m\big(\{i\}\big) = 1$ et que a est constante sur $\{i\}$, nous avons $\int_{\{i\}} adm = a_i$, et donc

$$\int_{\mathbb{N}} adm = \sum_{i=0}^{\infty} a_i. \tag{14.698}$$

(ii) **Si la somme est** $<\infty$ Le terme général a_n tend vers zéro [73]. En particulier, pour chaque $r \in \mathbb{R}$, il n'existe qu'un nombre fini d'éléments de la suite a plus grands que r.

Soit une fonction étagée $\psi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ minorant a. Vu qu'elle est étagée, elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs différentes que nous nommons $\{\alpha_i\}$, et les parties $A_i = \psi^{-1}(\alpha_i)$ sont finies parce que ψ minore a.

Avant de faire un petit calcul, posons quelque notations. D'abord $Z = \psi^{-1}(0)$. Nous avons $\mathbb{N} = \bigcup_i A_i \cup Z$. Nous posons aussi $A = \bigcup_i A_i$; c'est le support de ψ.

Nous pouvons maintenant faire un calcul pour l'intégrale de ψ sur $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{N}} \psi dm &= \sum_i \alpha_i \operatorname{Card}(A_i) && \text{def. (14.429)} && (14.699a)\\
&= \sum_i \Big(\sum_{k\in A_i}\psi(k)\Big) && && (14.699b)\\
&= \sum_{k\in\bigcup_i A_i}\psi(k) && && (14.699c)\\
&= \sum_{k\in A}\psi(k) + \sum_{k\in Z}\psi(k) && && (14.699d)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}}\psi(k). && && (14.699e)
\end{aligned}$$

Justifications.

— Pour (14.699b). Pour tout k dans A_i nous avons $\psi(k) = \alpha_i$.

— Pour (14.699c). Les A_i sont disjoints et chacun est fini. La proposition 11.104 fait le boulot.

Étant donné que ψ minore a, nous avons donc montré que

$$\int_{\mathbb{N}} \psi dm = \sum_{k\in\mathbb{N}}\psi(k) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} a_n. \tag{14.700}$$

Donc l'intégrale de toutes les fonctions étagées minorant a est majorée par la série de a. Donc l'intégrale de a existe et est majorée par cette somme.

72. La mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ est donnée en la définition 14.240.

73. Proposition 11.88.

(iii) **Valeur de l'intégrale** Nous supposons encore que la série est finie. Nous avons déjà prouvé que

$$\int_{\mathbb{N}} adm \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n. \tag{14.701}$$

Nous allons prouver l'inégalité inverse en trouvant une bonne suite de fonctions étagées. Soit, pour chaque $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \psi_N \colon \mathbb{N} &\to \mathbb{R}^+ \\ k &\mapsto \begin{cases} a_k & \text{si } k \leqslant N \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{14.702}$$

Cela est une fonction étagée qui minore a. Nous pouvons donc reprendre le calcul (14.699) :

$$\int_{\mathbb{N}} \psi dm = \sum_{k\in\mathbb{N}} \psi_N(k) = \sum_{k=0}^{N} a_k. \tag{14.703}$$

Par définition de la série, nous avons

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{N}} \psi_N dm = \sum_{k=0}^{\infty} a_k. \tag{14.704}$$

Donc le supremum des intégrales de fonctions étagées est au moins égal à $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Nous avons prouvé l'inégalité inverse de (14.701), et donc l'égalité (14.696).

□

Exemple 14.243.
L'intervalle $I = [0,1]$ muni de la tribu de toutes ses parties et de la mesure de comptage est un espace mesuré non σ-fini. △

14.14.3 Théorème de la moyenne

Théorème 14.244 ([1]).
Soit Q un compact connexe par arcs et une fonction continue $f \colon Q \to \mathbb{R}$. Si λ est la mesure de Lebesgue, alors il existe $a \in Q$ tel que

$$f(a) = \frac{1}{\lambda(Q)} \int_Q f d\lambda \tag{14.705}$$

Démonstration. En posant $I = \int_Q f d\lambda$ nous avons immédiatement

$$\min(f)\lambda(Q) \leqslant I \leqslant \max(f)\lambda(Q) \tag{14.706}$$

où le minimum et le maximum existent parce que f est continue sur un compact. Si une des deux inégalités est une égalité alors la fonction est constante. En effet supposons que la première inégalité soit une égalité ; si la fonction n'était pas constante, il existerait une boule sur laquelle f serait strictement supérieure à $\min(f)$. En intégrant d'abord sur cette boule et ensuite sur le complémentaire nous obtenons une intégrale plus grande que $\min(f)\lambda(Q)$.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\alpha, \beta \in Q$ tels que $f(\alpha) \leqslant \min(f)+\epsilon$ et $f(\beta) \geqslant \max(f)-\epsilon$. Soit $\gamma\colon [0,1] \to Q$ un chemin continu tel que $\gamma(0) = \alpha$ et $\gamma(1) = \beta$. La fonction $f \circ \gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ est alors continue et vérifie $(f\circ\gamma)(0) \leqslant \min(f) + \epsilon$ et $(f \circ \gamma)(1) \geqslant \max(f) - \epsilon$.

Si ϵ est assez petit et vu que les inégalités (14.706) sont strictes,

$$\lambda(Q)(f\circ\gamma)(0) \leqslant \min(f)\lambda(Q) + \epsilon\lambda(Q) < I < \max(f)\lambda(Q) - \epsilon\lambda(Q) \leqslant \lambda(Q)(f\circ\gamma)(1). \tag{14.707}$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires 10.82, il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $\lambda(Q)(f\circ\gamma)(t_0) = I$. Le point $a = \gamma(t_0)$ vérifie

$$f(a) = \frac{1}{\lambda(Q)} \int_Q f d\lambda. \tag{14.708}$$

□

14.14.4 Primitives et intégrales

Définition 14.245.
Si $a < b$ nous posons
$$\int_a^b f(t)dt = \int_{[a,b]} f. \tag{14.709}$$
Si par contre $a > b$ nous posons $\int_a^b f = -\int_b^a f$.

Proposition 14.246 (Primitive et intégrale[272])**.**
Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$ et continue sur $]a,b[$. Alors la fonction
$$\begin{aligned} F\colon [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_{[a,x]} f(t)dt. \end{aligned} \tag{14.710}$$
est l'unique primitive de f sur $]a,b[$ s'annulant en $x = a$.

Démonstration. Nous devons prouver que F est dérivable et que pour tout $x_0 \in\,]a,b[$ nous avons $F'(x_0) = f(x_0)$. Soit $\epsilon > 0$. Par continuité de f en x_0, il existe une fonction $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que
$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha(h) \tag{14.711}$$
avec $\lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$. Cette dernière limite signifie qu'il existe un $\delta > 0$ tel que $|\alpha(h)| < \epsilon$ pour tout h tel que $|h| < \delta$, c'est-à-dire pour tout $h \in B(0,\delta)$. À partir de maintenant nous ne considérons plus que de tels h.

Notre travail maintenant est de prouver que F est dérivable en x_0, et de montrer que la dérivée est $f(x_0)$. Pour cela,
$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \tag{14.712a}$$
$$= \int_0^h f(x_0 + t)dt \tag{14.712b}$$
$$= \int_0^h \big[f(x_0) + \alpha(t)\big]dt \tag{14.712c}$$
$$= hf(x_0) + \int_0^h \alpha(t)dt. \tag{14.712d}$$

Nous avons donc montré que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un δ (défini via la fonction α) tel que $|h| < \delta$ implique
$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| < \epsilon. \tag{14.713}$$
Cela signifie que
$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0), \tag{14.714}$$
qui n'est rien d'autre que le fait que F est dérivable en x_0 et que sa dérivée est $f(x_0)$.

Le fait que F s'annule en $x = a$ est par sa définition. L'unicité provient du corolaire 12.199. □

Théorème 14.247 (Théorème fondamental du calcul intégral)**.**
Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I contenant strictement l'intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et F une primitive de f sur I. Alors
$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a). \tag{14.715}$$

Démonstration. Nous avons vu par la proposition 14.246 que la fonction

$$\begin{aligned} G\colon [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t)dt \end{aligned} \tag{14.716}$$

était l'unique primitive de f sur $]a,b[$ à s'annuler pour $x=a$. Nous avons évidemment

$$\int_a^b f(t)dt = G(b). \tag{14.717}$$

Si F est une primitive quelconque, il suffit de soustraire sa valeur en $x=a$: $G(x) = F(x) - F(a)$ et donc

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) = F(b) - F(a), \tag{14.718}$$

comme il fallait le prouver. □

Le théorème fondamental s'écrit souvent sous la forme [74]

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt. \tag{14.719}$$

Sous cette forme, il faut penser que nous calculons $f(x)$ en un point pas trop éloigné de a, en sachant $f(a)$ et en intégrant la dérivée entre les deux.

Remarque 14.248.
Le lien entre primitive et intégrale est fondamentalement lié à l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue, et non à la construction précise de cette mesure. Mais en même temps, la mesure de Lebesgue est l'unique à être invariante par translation.

Quelque remarques.

(1) Le théorème fondamental du calcul intégral est à utiliser pour calculer des intégrales des fonctions réelles lorsqu'on a des primitives sur un domaine strictement plus large que le domaine sur lequel nous voulons intégrer.
(2) Une version pour les intégrales impropres sera donnée au corolaire 14.260.
(3) Une primitive est forcément une fonction continue parce qu'une primitive est dérivable.
(4) Le théorème fondamental du calcul intégral ne sert pas qu'à calculer des intégrales à partir de primitives. Il sert aussi à démontrer des résultats plus théoriques, comme le théorème 12.379.
(5) En vertu du corolaire 12.199, une fonction ne possède qu'une seule primitive à constante près.

14.14.5 Exemples et applications

Si f est une fonction définie sur un intervalle I et y admettant des primitives, nous notons

$$\int f(x)dx \tag{14.720}$$

l'ensemble des primitives de f sur I :

$$\int f(x)dx = \{F(x) + C \text{ tel que } C \in \mathbb{R}\} \tag{14.721}$$

où F est une quelconque primitive de f.

74. Par exemple dans les théorèmes du reste des polynômes de Taylor 15.51 et de Cauchy-Lipschitz 17.42.

Exemple 14.249.
Une primitive bien connue de $f\colon x \mapsto x^2$ est la fonction $F\colon x \to \frac{x^3}{3}$. Nous écrivons donc

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C. \tag{14.722}$$

Cela est un abus de notations terrible pour dire en réalité

$$\{x \mapsto \frac{x^3}{3} + C \text{ tel que } C \in \mathbb{R}\}. \tag{14.723}$$

△

En termes de notations, nous posons

$$\int_a^b f(t)dt = \Big[F(t)\Big]_{t=a}^{t=b} = F(b) - F(a). \tag{14.724}$$

Remarque 14.250.
La valeur de l'intégrale ne dépend pas de la primitive qu'on choisi pour le calculer, car si F_1 et F_2 sont deux primitives de f alors $F_1 = F_2 + C$ et $F_1(b) - F_1(a) = (F_2(b) + C) - (F_2(a) + C) = F_2(b) - F_2(a)$.

Remarque 14.251.
Si l'intervalle d'intégration est réduit à un seul point alors la valeur de l'intégrale est zéro. Nous le savions déjà, et cela est cohérent avec le théorème fondamental car $\int_a^a f(t)dt = F(a) - F(a) = 0$.

Remarque 14.252.
Toute intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine est nulle.

Proposition 14.253 ([1])**.**
Soient des espaces vectoriels normés E et F où F est de dimension finie[75]*. Nous considérons une fonction $f\colon E \to F$ de classe C^1 ainsi qu'un chemin $\gamma\colon [0,1] \to E$ de classe C^1 également.*

Alors nous avons l'égalité

$$\int_0^1 (df)_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big) = f\big(\gamma(1)\big) - f\big(\gamma(0)\big). \tag{14.725}$$

Démonstration. Nous posons

$$\begin{aligned} f\colon [0,1] &\to F \\ t &\mapsto (f \circ \gamma)(t). \end{aligned} \tag{14.726}$$

Cette fonction vérifie $g'(t) = (df)_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)$ par le lemme 12.289. Le théorème fondamental du calcul intégral[76] nous permet donc d'écrire

$$\int_0^1 (df)_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)dt = \int_0^1 g'(t)df = g(1) - g(0). \tag{14.727}$$

Notons que g est continue grâce aux hypothèses de classe C^1 pour γ et f. □

14.14.6 Permuter limite et dérivée

14.254 ([272])**.**
Voici une preuve alternative du théorème 12.379. Elle utilise des intégrales ; elle demande donc plus de dependences.

75. Sinon l'intégrale dont nous allons parler n'est pas définie au sens où nous n'en avons pas donné de définition. Voir 14.181.

76. Théorème 14.247.

Énoncé Soient une suite de fonctions $f_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

(1) f_i est de classe C^1 pour tout i,

(2) $f_i \to f$ simplement,

(3) $f_i' \to g$ uniformément sur tout compact.

Alors

(1) f est de classe C^1,

(2) $f' = g$,

(3) $f_i \to f$ uniformément sur tout compact.

Preuve Nous commençons par considérer $x_0 \in \mathbb{R}$ et un intervalle compact K contenant x_0. Nous montrons que $f'(x_0) = g(x_0)$ en plusieurs étapes.

(i) **Une formule intégrale** Par hypothèse, les fonctions f_i sont continues (en particulier sur un ouvert contenant K), et le théorème fondamental de l'analyse 14.247 donne

$$f_i(x) = f_i(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_i'(t)dt \tag{14.728}$$

pour tout $x \in K$. Nous avons envie de prendre la limite $i \to \infty$ en permutant la limite avec l'intégrale. Pour cela nous allons utiliser la convergence dominée de Lebesgue.

(ii) **Convergence dominée** La convergence uniforme sur tout compact des fonctions continues f_i' vers g donne la continuité de g, théorème 12.361. En particulier g est bornée et donc intégrable sur le compact $[x_0, x]$. Mais il en faut plus pour le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (théorème 14.190). Soit $a > 0$; il existe N tel que pour tout $i > n$ nous ayons $\|f_i' - g\| < a$. Avec cela nous avons

$$|f_i'(x)| < |g(x)| + a \tag{14.729}$$

pour tout $x \in K$. En particulier, la fonction $x \mapsto g(x) + a$ fonctionne pour la convergence dominée et nous pouvons permuter la limite et l'intégrale dans (14.728).

(iii) **Passage à la limite** En passant à la limite $i \to \infty$ dans (14.728) nous trouvons

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)dt. \tag{14.730}$$

(iv) **Premières conclusions** Il suffit maintenant de prendre la dérivée de (14.730) au point $x = x_0$ grâce à la proposition 14.246 :

$$f'(x_0) = g(x_0). \tag{14.731}$$

Cela nous donne l'égalité $f = g$ parce que x_0 était arbitraire.

De plus g est continue comme limite uniforme des fonctions continues f_i'. Plus précisément, pour voir la continuité de g en x_0, prendre un ouvert borné $B(x_0, r)$ autour de x_0, et ensuite un compact K contenant cet ouvert. La convergence uniforme $f_i' \to g$ sur K implique la convergence uniforme sur $B(x_0, r)$ et donc la continuité sur $B(x_0, r)$ (théorème 12.361).

(v) **$f_i \to f$ uniforme sur tout compact** Un compact n'étant pas spécialement connexe, nous ne pouvons pas reprendre le travail fait jusqu'ici sans prendre une petite précaution. Soit un compact L. Cette partie de $\mathbb{R}$ étant bornée[77], nous pouvons prendre r assez grand pour que $L \subset \overline{B(0, r)}$. Nous posons $K = \overline{B(0, r)}$ et nous prouvons la convergence uniforme $f_i \to f$ sur K. A fortiori, cela donnera la convergence uniforme sur L.

77. Par le théorème de Borel-Lebesgue 10.21

Prenons la différence entre (14.730) et (14.728) :

$$|f(x) - f_i(x)| = \left|f(x_0) - f_i(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t) - f_i'(t)dt\right| \tag{14.732a}$$
$$\leqslant |f(x_0) - f_i(x_0)| + \left|\int_{x_0}^{x} |g(t) - f_i'(t)|dt\right| \tag{14.732b}$$
$$\leqslant |(f - f_i)(x_0)| + |x - x_0|\|g - f_i'\|_K. \tag{14.732c}$$

Notez les valeurs absolues autour de l'intégrale dans (14.732b). Elles sont nécessaires parce que x est dans un voisinage de x_0, sans que nous sachions si $x \geqslant x_0$ ou $x \leqslant x_0$ (ça change le signe de l'intégrale).

Nous avons donc

$$\|f - f_i\| \leqslant |(f - f_i)(x_0)| + \operatorname{diam}(K)\|g - f_i'\| \tag{14.733}$$

où $\operatorname{diam}(K)$ est le diamètre de K, c'est-à-dire la plus grande distance entre deux éléments de K c'est un nombre fini parce que K est borné. Il majore évidemment $|x - x_0|$. Le membre de droite tend vers zéro si $i \to \infty$ parce que nous avons convergence simple $f_i \to f$ et donc $(f - f_i)(x_0) \to 0$, et parce que nous avons convergence uniforme sur tout compact, donc $\|g - f_i'\| \to 0$.

Nous avons donc bien $\lim_{i\to\infty} \|f - f_i\| = 0$, c'est-à-dire convergence uniforme de (f_i) vers f sur K.

La proposition suivante est la généralisation à $\mathbb{R}$ de la proposition 12.437.

Proposition 14.255.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, si $f_\alpha(x) = x^\alpha$ alors

$$f_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1}. \tag{14.734}$$

Au niveau du domaine, c'est $\mathbb{R}$ auquel il faut enlever $\{0\}$ si $\alpha - 1 < 0$.

Démonstration. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et une suite de rationnels α_i qui converge vers α. Le plus amateurs d'abstraction diront $(\alpha_i) \in \alpha$ en référence à la proposition 1.354.

Nous notons $f_\alpha(x) = x^\alpha$ et $f_i(x) = x^{\alpha_i}$. Par définition nous avon

$$f_i \to f_\alpha \tag{14.735}$$

ponctuellement. De plus en utilisant la proposition 12.437 nous savons que $f_i'(x) = \alpha_i x^{\alpha_i - 1}$. En posant $g(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ nous avons donc

$$f_i' \to g. \tag{14.736}$$

ponctuellement. Mais f_i' est continue pour tout i et g également. Donc la convergence $f_i \to f_\alpha$ est uniforme sur tout compact [78]. Le théorème 12.379 nous permet de permuter limite et dérivée pour avoir $g = f_\alpha'$. □

14.14.7 Intégrales impropres

Définition 14.256 ([272]).
*Une fonction $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **localement intégrable** sur un intervalle I si f est intégrable sur tout intervalle compact contenu dans I.*

Proposition 14.257.
Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f. \tag{14.737}$$

78. Proposition 12.368.

Démonstration. Notons que la valeur de f en b n'a strictement aucune importance parce que l'intégrale de Lebesgue ne dépend pas du choix de la valeur de la fonction en un ensemble de mesure nulle ; et en même temps la limite à gauche de (14.737) ne dépend pas non plus de la valeur de f en b. Bref si f n'est pas définie en b, nous pouvons poser $f(b) = 42$.

Notons de plus que du point de vue de l'intégrale de Lebesgue, $\int_{[a,b]}$ et $\int_{[a,b[}$ sont identiques et valent toutes les deux $\int_a^b$ (lorsque ça existe).

Supposons d'abord que f est positive. Alors nous posons $f_n = f\mathbb{1}_{[a,b-\frac{1}{n}]}$. Ponctuellement nous avons la limite croissante $f_n \to f$ et de plus

$$\lim_{x\to b^-}\int_{[a,x]} f = \lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]} f_n. \tag{14.738}$$

Chacun des f_n est intégrable sur $[a,b]$. Le théorème de Beppo-Levi 14.166 implique que f est intégrable sur $[a,b]$ et que

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b f. \tag{14.739}$$

Cela montre que dans le cas d'une fonction f positive nous avons bien (14.737).

Si f n'est pas positif, alors nous la décomposons en partie positive et négative $f = f^+ - f^-$ et par définition de l'intégrale d'une fonction non positive,

$$\lim_{x\to b^-}\int_{[a,x[} f = \lim\int f^+ - \lim\int f^-. \tag{14.740}$$

□

Il peut cependant arriver que la limite $\lim_{x\to b}\int_a^b f$ existe alors que f n'est pas intégrable sur $[a,b]$. C'est l'ennui des fonctions non positives. Un exemple classique est

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt \tag{14.741}$$

Définition 14.258 ([391])**.**
Si

$$\lim_{x\to b}\int_a^b f \tag{14.742}$$

existe alors nous disons que l'intégrale est ***convergente*** *en b. Ce procédé de limite est l'intégrale* ***impropre*** *de f sur $[a,b]$.*

Exemple 14.259 (Intégale impropre)**.**
Nous considérons la fonction $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x\in[2n-2,2n-1[\\ -\frac{1}{n} & \text{si } x\in[2n-1,2n[. \end{cases} \tag{14.743}$$

Par la divergence de la série harmonique, $\int_0^\infty |f|$ n'existe pas. La fonction f n'est donc pas intégrable au sens de Lebesgue (définition 14.174).

Cependant pour tout n pair nous avons

$$\int_0^n f = 0. \tag{14.744}$$

Du coup pour tout $x\geqslant 0$ nous avons

$$\int_0^x f = \int_{2n}^x f \tag{14.745}$$

où $2n$ est le plus grand nombre pair inférieur à x. Nous avons $|x-2n|\leqslant 2$ et $|f(x)|\leqslant\frac{1}{n}$ pour $x\in[2n,x]$. Donc

$$\int_{2n}^x f \leqslant \frac{2}{n}. \tag{14.746}$$

Nous avons par conséquent

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x f = 0, \tag{14.747}$$

ce qui signifie que l'intégrale de f sur $[0,\infty[$ converge au sens des intégrales impropres. △

L'intégrale (14.741) est une intégrale convergente mais la fonction n'est pas intégrable (parce que pour être intégrale il faut que $|f|$ soit intégrable). Nous pouvons ainsi dire que cette intégrale converge mais n'existe pas.

Le corolaire suivant nous autorise à utiliser le théorème fondamental du calcul intégral 14.247 même dans les cas limites.

Corolaire 14.260.
Si f est localement intégrable sur $[a,b]$ et si F est une primitive de f sur tout ouvert de $[a,b]$ alors

$$\int_a^b f = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a). \tag{14.748}$$

Démonstration. Pour chaque x dans $[a,b[$ nous avons

$$\int_a^x f = F(x) - F(b). \tag{14.749}$$

La proposition 14.257 nous explique que la limite $x\to b^-$ du membre de gauche existe et vaut $\int_a^b f$. Donc également le membre de droite :

$$\int_a^b f = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(b). \tag{14.750}$$

□

La convergence des intégrales de fonctions $\frac{1}{x^\alpha}$ en 0 et ∞ est une question classique de l'intégration. De plus ces fonctions servent souvent à utiliser une théorème de comparaison (type intégrale dominée de Lebesgue).

Proposition 14.261.
Deux intégrales remarquables.

(1) Nous avons

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} = \infty \tag{14.751}$$

si et seulement si $\alpha \geqslant 1$.

(2) Nous avons

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} = \infty \tag{14.752}$$

si et seulement si $\alpha \leqslant 1$.

Démonstration. La fonction $\frac{1}{x^\alpha}$ admet la primitive $F(x) = \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}$ sur tout compact de $]0,\infty[$. Le corolaire 14.260 nous permet [79] de dire que $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}$ vaudra

$$\lim_{x\to 0-+}\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{x^{\alpha-1}}. \tag{14.753}$$

Cela est strictement plus petit que ∞ si et seulement si $\alpha < 1$. □

79. Tout ce que nous avons fait avec la borne b de l'intégrale $\int_a^b$ reste valable avec la borne a.

14.15 Changement de variables dans une intégrale multiple

Dans ce qui suit, U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^N$ et $\phi\colon U \to V$ est un C^1-difféomorphisme. Nous notons $\mathcal{Q}$ l'ensemble des cubes fermés dans U dont les côtés sont parallèles aux axes.

14.15.1 Des lemmes

Lemme 14.262 ([390]).
Soient μ et ν deux mesures de Borel sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^N$. Si $\mu(Q) \leqslant \nu(Q)$ pour tout $Q \in \mathcal{Q}$ alors $\mu(B) \leqslant \nu(B)$ pour tout borélien B.

Démonstration. Si Q est un cube semi-ouvert, c'est-à-dire de la forme

$$Q = \prod_{i=1} N[a_n, a_n + h[\subset U \tag{14.754}$$

alors Q est une réunion croissante de cubes fermés du type $[a_n + \epsilon, a_n + h - \epsilon]$, et donc $\mu(Q) \leqslant \nu(Q)$ par le lemme 14.19(1). La propriété est donc vraie pour les cubes semi-ouverts.

Si Ω est un ouvert, alors il est réunion disjointe dénombrable de cubes semi-ouverts par la proposition 14.222. Donc pour tout ouvert $\Omega \subset U$ nous avons $\mu(\Omega) \leqslant \nu(\Omega)$. En vertu de la proposition 14.83 et de la remarque 14.84, les mesures μ et ν sont régulières, et l'inégalité au niveau des ouverts se répercute en inégalité pour tout boréliens de U :

$$\mu(B) \leqslant \nu(B) \tag{14.755}$$

pour tout $B \in \mathcal{B}\text{or}(U)$. Notons que U étant ouvert dans $\mathbb{R}^N$, les boréliens de U sont exactement les boréliens de $\mathbb{R}^N$ inclus dans U par le corolaire 14.53. □

Lemme 14.263 ([390]).
Soit une application $\theta\colon U \to \mathbb{R}^N$ de classe C^1 où U est ouvert dans $\mathbb{R}^N$. Pour tout $Q \in \mathcal{Q}$ nous avons

$$\lambda_N\big(\theta(Q)\big) \leqslant \sup_{s \in Q} \|d\theta_s\|^N \lambda_N(Q). \tag{14.756}$$

Démonstration. Nous notons h la longueur du côté du cube. Le théorème des accroissements finis 12.325, pour la composante θ_i donne, pour $u, v \in Q$:

$$\big|\theta_i(u) - \theta_i(v)\big| \leqslant \sup_{s \in Q} \|(d\theta_i)_s\| \|u - v\| \leqslant \sum_{s \in Q} \|(d\theta_i)_s\| h. \tag{14.757}$$

D'autre part nous avons (nous écrivons pour $N = 2$ pour être plus court) :

$$d\theta_s(u) = \frac{d}{dt}\Big[\theta_1(s + tu)e_1 + \theta_2(s + tu)e_2\Big]_{t=0} = (d\theta_1)_s(u)e_1 + (d\theta_2)_s(u)e_2. \tag{14.758}$$

Donc pour chaque i : $\|d\theta_s\| \geqslant \|(d\theta_i)_s\|$, et nous continuons la majoration (14.757) :

$$\big|\theta_i(u) - \theta_i(v)\big| \leqslant\leqslant \sum_{s \in Q} \|(d\theta_i)_s\| h \leqslant \sup_{s \in Q} \|d\theta_s\| h. \tag{14.759}$$

Les points $\theta(u)$ et $\theta(v)$ sont donc dans un cube de côté $\sup_{s \in Q} \|d\theta_s\| h$, ce qui permet de majorer $\lambda_N\big(\theta(Q)\big)$ par

$$\lambda_N\big(\theta(Q)\big) \leqslant \Big(\sup_{s \in Q} \|d\theta_s\| h\Big)^N = \Big(\sup_{s \in Q} \|d\theta_s\|\Big)^N \lambda_N(Q) \tag{14.760}$$

où le dernier facteur provient de l'égalité $h^N = \lambda_N(Q)$. □

14.15.2 Déterminant et mesure de Lebesgue

Dans la suite, Q_0 désigne le cube unité : $Q_0 = \big([0,1[\big)^N$.

Théorème 14.264 (Interprétation géométrique du déterminant[390]).
Soit une application linéaire $T\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$. Alors pour tout borélien B de $\mathbb{R}^N$,

$$\lambda_N\big(T(B)\big) = |\det(T)|\lambda_N(B). \tag{14.761}$$

Démonstration. Nous considérons la mesure positive μ donnée par $\mu(B) = \lambda_N\big(T(B)\big)$, qui est bien une mesure par la proposition 14.79. Cette mesure est invariante par translation parce que λ_N l'est :

$$\mu(B+a) = \lambda_N\big(T(B)+a\big) = \lambda_N\big(T(B)\big) = \mu(B). \tag{14.762}$$

De plus, $T(Q_0)$ est borné et nous notons $\mu(Q_0) = C$. Nous avons $\mu = C\lambda_N$ par le corolaire 14.232.

(i) $\underline{C(T_1T_2) = C(T_1)C(T_2)}$ Par définition,

$$C(T_1T_2)\lambda_N(B) = \lambda_N\big((T_1T_2)(B)\big) \tag{14.763a}$$
$$= \lambda_N\big(T_1(T_2B)\big) = C(T_1)\lambda_N\big(T_2(B)\big) = C(T_1)C(T_2)\lambda_N(B). \tag{14.763b}$$

Par conséquent la fonction C est multiplicative :

$$C(T_1T_2) = C(T_1)C(T_2). \tag{14.764}$$

Et en plus, $C(\mathrm{Id}) = 1$.

(ii) **Matrice diagonale** En guise de T, nous considérons l'application linéaire diagonale donnée par $De_i = d_ie_i$, ou, sous forme matricielle, $D = \mathrm{diag}(d_1,\ldots,d_N)$ qui fait

$$T(Q_0) = [0,d_1[\times\ldots\times[0,d_N[\tag{14.765}$$

La mesure de cela est $|d_1\cdots d_N|$, ce qui nous donne

$$C(D) = |d_1\ldots d_N| = |\det(D)|. \tag{14.766}$$

(iii) **Matrice orthogonale** Nous considérons maintenant $T = U$ où U est une matrice orthogonale ($UU^t = 1$). Une matrice orthogonale est une isométrie [80] qui conserve donc la boule unité : $UB(0,1) = B(0,1)$. Nous avons

$$\lambda_N\big(B(0,1)\big) = \lambda_N\big(UB(0,1)\big) = C(U)\lambda_N\big(B(0,1)\big) \tag{14.767}$$

par conséquent $C(U) = 1$, et 1 est justement le déterminant de U.

(iv) **Matrice quelconque** Nous savons par le corolaire 13.35 de la décomposition polaire que toute matrice peut être écrite sous la forme $T = U_1DU_2$ où U_i sont orthogonales et D est diagonale. Donc $C(T) = C(U_1)C(D)C(U_2) = \det(U_1)\det(D)\det(U_2) = \det(U_2DU_2) = \det(T)$ parce que le déterminant est multiplicatif (proposition 9.9(1)).

□

Ce théorème donne une interprétation géométrique du déterminant en tant que facteur de dilatation des volumes lors de l'utilisation d'une application linéaire. Si T est une application linéaire quelconque,

$$\lambda_N\big(T(Q_0)\big) = |\det(T)|\lambda_N(Q_0) = |\det(T)|. \tag{14.768}$$

Le déterminant de T est le volume de l'image du cube unité par l'application T.

De la même façon, en utilisant l'application linéaire $T(x) = ax$ nous avons pour tout borélien B :

$$\lambda_N(aB) = a^N\lambda_N(B). \tag{14.769}$$

Une dilatation d'un facteur a des longueurs provoque une multiplication par a^N des volumes.

80. Proposition 9.38.

14.15.3 Le théorème et sa démonstration

Théorème 14.265 (Changement de variable[389, 390]).
Soient U et V des ouverts de $\mathbb{R}^N$ ainsi qu'un C^1-difféomorphisme $\phi\colon U \to V$. Nous notons J_ϕ la fonction

$$\begin{aligned} J_\phi\colon \mathbb{R}^N &\to \mathbb{R} \\ a &\mapsto \det(d\phi_a). \end{aligned} \tag{14.770}$$

Alors :

(1) Si $E \subset U$ est borélien, alors $\phi(E)$ est borélien et

$$\lambda_N\big(\phi(E)\big) = \int_E |J_\phi| d\lambda_N, \tag{14.771}$$

c'est-à-dire $\phi^{-1}(\lambda_N) = |J_\phi| \cdot \lambda_N$.

(2) Si $f\colon V \to [0, +\infty]$ est mesurable alors la fonction

$$\begin{aligned} (f \circ \phi) \times |J_\phi|\colon U &\to [0, \infty] \\ x &\mapsto (f \circ \phi)(x)|J_\phi(x)|d\lambda_N(x) \end{aligned} \tag{14.772}$$

l'est également et[81]

$$\int_{\phi(U)} f d\lambda_N = \int_U (f \circ \phi)(x)|J_\phi(x)|d\lambda_N(x). \tag{14.773}$$

(3) Si $f\colon V \to \mathbb{C}$ est mesurable alors elle est intégrable si et seulement si $(f \circ \phi) \times |J_\phi|\colon U \to \mathbb{C}$ est intégrable. Si c'est le cas, alors nous avons encore la formule de changement de variables :

$$\int_V f d\lambda_N = \int_{\phi^{-1}(V)} (f \circ \phi)|J_\phi| d\lambda_N. \tag{14.774}$$

Démonstration. Attention : la preuve va être longue.

(1) Le fait que $\phi(E)$ soit borélien lorsque E l'est est la proposition 14.227. En ce qui concerne la formule annoncée, il faut travailler.

(i) **Inégalité dans un sens (cubes)** Nous commençons par prouver l'inégalité

$$\lambda_N\big(\phi(Q)\big) \leqslant \int_Q |J_\phi(x)| dx \tag{14.775}$$

pour tout $Q \in \mathcal{Q}$. On peut diviser le côté du cube Q en k éléments de longueurs égales. Le cube est alors divisé en k^N petits cubes d'intérieurs disjoints. Nous les nommons Q_i ($i = 1, \ldots, k^N$) Nous avons alors

$$\sum_i \lambda_N(Q_i) = \sum_i \lambda_N\big(\operatorname{Int}(Q_i)\big) = \lambda_N\Big(\bigcup_i \operatorname{Int}(Q_i)\Big) \leqslant \lambda_N(Q) \leqslant \sum_i \lambda_N(Q_i). \tag{14.776}$$

La dernière inégalité est le fait que les intersections ne sont pas disjointes. Toutes ces inégalités sont en réalité des égalités et en particulier : $\lambda_N(Q) = \sum_i \lambda_N(Q_i)$.
Soit $a \in Q_i$. Posons

$$\begin{aligned} \theta\colon U &\to U \\ \theta &= (d\phi_a)^{-1} \circ \phi \end{aligned} \tag{14.777}$$

Cela appelle deux commentaires. D'abord l'application $d\phi_a\colon U \to V$ est inversible parce que ϕ est un difféomorphisme (lemme 11.186). Ensuite, l'application θ est la composée de $(d\phi_a)$ (qui est linéaire) et de ϕ qui est de classe C^1 ; donc θ est de classe C^1. Donc le

81. L'intégrabilité d'une fonction est la définition 14.174 qui stipule que l'intégrale de $|f(x)|$ est finie. L'égalité proposée a un sens si les deux membres sont infinis. Il n'y a donc pas d'hypothèses d'intégrabilité obligatoire pour écrire une intégrale lorsque la fonction a des valeurs positives.

lemme 14.263 s'applique. La différentielle de θ n'est pas trop compliquée à écrire parce que nous avons la formule de différentielle d'une composée (théorème 11.184) et le fait que $(d\phi_a)^{-1}$ qui est linéaire et donc sa propre différentielle (lemme 11.180). Nous avons donc $d\theta = (d\phi_a)^{-1} \circ d\phi$, et le lemme donne

$$\lambda_N\left((d\phi_a)^{-1}\phi(a)\right) \leqslant \sup_{s\in Q_i} \|(d\phi_a)^{-1} \circ d\phi_s\|^N \lambda_N(Q_i) \tag{14.778}$$

Étant donné que $(d\phi_a)^{-1}$ est une application linéaire, la proposition 14.264 s'applique, et donc

$$\lambda_N\left((d\phi_a)^{-1}\phi(a)\right) = |\det(d\phi_a)^{-1}|\lambda_N\big(\phi(a)\big). \tag{14.779}$$

Le déterminant d'une application réciproque est donné par la proposition 9.9(4) :

$$\det\left((d\phi_a)^{-1}\right) = \frac{1}{\det\big(d\phi_a\big)} = \frac{1}{J_\phi(a)}. \tag{14.780}$$

Recollant les morceaux,

$$\lambda_N\big(\phi(Q_i)\big)\frac{1}{J_\phi(a)} \leqslant \sup_{s\in Q_i} \|(d\phi_a)^{-1} \circ d\phi_s\|^N \lambda_N(Q_), \tag{14.781}$$

ou encore :

$$\lambda_N\big(\phi(Q_i)\big) \leqslant |J_\phi(a)| \sup_{s\in Q_i} \|(d\phi_a)^{-1} \circ d\phi_s\|^N \lambda_N(Q_i). \tag{14.782}$$

Vu que a et s sont proches l'un de l'autre (on peut choisir encore la taille du cube), nous pouvons espérer que $(d\phi_a)^{-1}$ ne soit pas loin d'être l'inverse de $d\phi_s$. Et c'est en effet le cas. Pour s'en assurer, remarquons que l'application

$$d\phi\colon Q_i \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \tag{14.783}$$

est continue et même uniformément continue parce que Q_i est compact. De plus la composition de différentielles étant un produit de matrices nous pouvons permuter la limite dans le calcul suivant :

$$\lim_{s\to a}(d\phi_a)^{-1} \circ d\phi_s = (d\phi_a)^{-1} \circ \lim_{s\to a} d\phi_s = \mathbb{1}. \tag{14.784}$$

Donc si $\epsilon > 0$ est donné, il existe δ tel que pour tout $s \in B(a,\delta)$, $\|(d\phi_a)^{-1} \circ d\phi_s - \mathbb{1}\| \leqslant \epsilon$. En ce qui concerne les normes, si $\|A - \mathbb{1}\| \leqslant \epsilon$ alors $\|A\| \leqslant \|A - \mathbb{1}\| + \|\mathbb{1}\| \leqslant \epsilon + 1$.

Cela étant dit, nous nous souvenons que nous avions découpé U en un nombre fini de cubes Q_i d'égales dimensions ; il suffit de prendre k suffisamment grand pour que la diagonale des cubes sot plus petite que le minimum des δ_i. Avec un tel découpage,

$$\sup_{s\in Q_i} \|(d\phi_a)^{-1} \circ d\phi_s\| \leqslant 1 + \epsilon \tag{14.785}$$

et par conséquent

$$\lambda_N\big(\phi(Q_i)\big) \leqslant (1+\epsilon)^N |J_\phi(a_i)| \lambda_N(Q_i) \tag{14.786}$$

où nous avons ajouté un indice i au point a pour nous rappeler que nous avons choisi $a \in Q_i$.

Le théorème de la moyenne 14.244 appliqué à l'intégrale $\int_{Q_i} |J_\phi(t)| d\lambda_N(t)$ donne l'existence d'un $a_i \in Q_i$ tel que

$$|J_\phi(a_i)| = \frac{1}{\lambda_N(Q_i)} \int_{Q_i} |J_\phi| d\lambda_N. \tag{14.787}$$

Ce point a_i vérifie l'inégalité (14.786) comme tout point de Q_i. Nous sommons ces inégalités sur tous les i :

$$
\begin{aligned}
\lambda_N\big(\phi(Q)\big) &\leqslant \sum_i \lambda_N\big(\phi(Q_i)\big) && (14.788a)\\
&\leqslant (1+\epsilon^N \sum_i \left(\frac{1}{\lambda_N(Q_i)\int_{Q_i}|J_\phi|d\lambda_N}\right)\lambda_N(Q_i) && (14.788b)\\
&= (1+\epsilon)^N \sum_i \int_{Q_i} |J_\phi| d\lambda_N && (14.788c)\\
&= (1+\epsilon)^N \int_Q |J_\phi| d\lambda_N && (14.788d)
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé le fait que $\mathbb{1}_Q = \sum_i \mathbb{1}_{Q_i}$ presque partout. En prenant le limite $\epsilon \to 0$ nous trouvons

$$
\lambda_N\big(\phi(Q)\big) \leqslant \int_Q |J_\phi| d\lambda_N. \tag{14.789}
$$

L'inégalité (14.775) est prouvée.

(ii) **Inégalité pour les boréliens** Soit B un borélien de U. Vu que U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^N$, les mesures de Lebesgue sur U et sur V sont les mêmes que celles sur $\mathbb{R}^n$ par le corolaire 14.53.

Par les définitions 14.195 et 14.79, les applications μ et n définies par $\mu = \phi^{-1}(\lambda_N)$ et $\nu = |J_\phi|\lambda_N$ sont des mesures positives sur U (de Borel, qui plus est). L'inégalité (14.775) à peine prouvée s'écrit $\mu(Q) \leqslant \nu(Q)$ pour tout cube Q. Le lemme 14.262 nous dit alors que l'inégalité tient pour tout borélien.

(iii) **Inégalité dans l'autre sens** En utilisant la notation de la mesure image et du produit d'une mesure par une fonction [82], nous pouvons écrire l'inégalité prouvée sous la forme $\phi^{-1}(\lambda_N) \leqslant |J_\phi|\lambda_N$. En inversant les rôles de U et V (et donc de ϕ et ϕ^{-1}) nous avons aussi

$$
\phi(\lambda_N) \leqslant |J_{\phi^{-1}}|\lambda_N. \tag{14.790}
$$

En y appliquant ϕ^{-1} et le lemme 14.79,

$$
\lambda_N \leqslant \phi^{-1}\big(|J_{\phi^{-1}}|\lambda_N\big). \tag{14.791}
$$

Nous prouvons à présent que $\phi^{-1}\big(|J_{\phi^{-1}}| \cdot \lambda_N\big) = \Big(|J_{\phi^{-1}}| \circ \phi\Big) \cdot \phi^{-1}(\lambda_N)$ en appliquant à un borélien B de U. D'une part

$$
\begin{aligned}
\phi^{-1}\big(|J_{\phi^{-1}}| \cdot \lambda_N\big)(B) &= \big(|J_{\phi^{-1}}| \cdot \lambda_N\big)\phi(B) && (14.792a)\\
&= \int_{\phi(B)} |J_{\phi^{-1}}| d\lambda_N, && (14.792b)
\end{aligned}
$$

et d'autre part,

$$
\begin{aligned}
\big(|J_{\phi^{-1}}| \circ \phi\big) \cdot \phi^{-1}(\lambda_N)B &= \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_B(x)\big(|J_{\phi^{-1}}| \circ \phi\big)(x) d\big(\phi^{-1}(\lambda_N)\big)(x) && (14.793a)\\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_B\big(\phi^{-1}(x)\big)\big(|J_{\phi^{-1}}| \circ \phi\big)\big(\phi^{-1}(x)\big) d\lambda_N(x) && (14.793b)\\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_{\phi(B)} |J_{\phi^{-1}}| && (14.793c)\\
&= \int_B |J_{\phi^{-1}}| d\lambda_N. && (14.793d)
\end{aligned}
$$

Justification :

82. Définition 14.79 et 14.195

— Pour (14.793b), le théorème 14.202(2).

L'équation (14.791) devient alors

$$\lambda_N \leqslant \big(|J_{\phi^{-1}}| \circ \phi\big) \cdot \phi^{-1}(\lambda_N). \tag{14.794}$$

Nous allons faire le produit de cette mesure par $|J_\phi|$ en nous souvenant que $J_\phi(x) = \det\big(d\phi_x\big)$. Par le lemme 11.186 nous avons aussi $(d\phi_x)^{-1} = d\phi^{-1}_{\phi(x)}$ et donc, par la propriété 9.9(3) du déterminant,

$$J_\phi(x) = \frac{1}{\det\big(d\phi^{-1}_{\phi(x)}\big)} = \frac{1}{J_{\phi^{-1}}\big(\phi(x)\big)}. \tag{14.795}$$

Nous avons

$$|J_\phi| \cdot \lambda_N \leqslant |J_\phi| \cdot \big(|J_{\phi^{-1}}| \circ \phi\big) \cdot \phi^{-1}(\lambda_N). \tag{14.796}$$

En utilisant la proposition 14.198, il s'agit de multiplier la mesure $\phi^{-1}(\lambda_N)$ par la fonction

$$x \mapsto |J_\phi(x) J_{\phi^{-1}}\big(\phi(x)\big)| = 1. \tag{14.797}$$

Nous avons donc bien

$$|J_\phi| \cdot \lambda_N \leqslant \phi^{-1}(\lambda_N), \tag{14.798}$$

et donc l'égalité

$$|J_\phi| \cdot \lambda_N = \phi^{-1}(\lambda_N), \tag{14.799}$$

c'est-à-dire le point (1).

(2) Le fait que la fonction proposée soit mesurable est le fait que la mesurabilité n'est pas affectée par produit et composition (propositions 14.97 et 14.39), et le fait que pour les mêmes raisons, l'application $J_\phi \colon U \to \mathbb{R}$ est également mesurable. En ce qui concerne la formule nous allons la démontrer dans le cas de fonctions de plus en plus générales.

(i) **Pour les fonctions indicatrices** Soit B un borélien de U. Considérons la fonction $f = \mathbb{1}_{\phi(B)}$. Alors

$$\int_V f d\lambda_N = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_{\phi(B)}(y)\mathbb{1}_V(y) d\lambda_N(y) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbb{1}_{\phi(B)} d\lambda_N = \lambda_N\big(\phi(B)\big). \tag{14.800}$$

parce que $V = \phi(U)$ et $B \subset U$, donc $\mathbb{1}_{\phi(B)}\mathbb{1}_{\phi(U)} = \mathbb{1}_{\phi(B)}$. D'autre part, pour calculer l'autre membre de (14.773) nous remarquons que $f = \mathbb{1}_{\phi(B)} = \mathbb{1}_B \circ \phi^{-1}$, ce qui donne

$$\int_U f\big(\phi(x)\big)|J_\phi(x)| d\lambda_N(x) = \int_U \mathbb{1}_B |J_\phi| d\lambda_N = \int_B |J_\phi| d\lambda_N. \tag{14.801}$$

L'ensemble B étant borélien, il est extrêmement mesurable, ce qui fait que le point (1) s'applique : les expressions (14.800) et (14.801) sont égales.

(ii) **Pour les fonctions étagées** Soit $f \colon V \to \mathbb{R}^+$ une fonction étagée :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}(x) \tag{14.802}$$

Nous pouvons faire le calcul suivant :

$$\int_V f d\lambda_N = \int_V \sum_i a_i \mathbb{1}_{A_i} d\lambda_N \tag{14.803a}$$
$$= \sum_i a_i \int_V \mathbb{1}_{A_i} d\lambda_N \tag{14.803b}$$
$$= \sum_i \int_U (\mathbb{1}_{a_i} \circ \phi)(x) |J_\phi(x)| d\lambda_N(x) \tag{14.803c}$$
$$= \sum_i a_i \int_U \mathbb{1}_{\phi^{-1}(A_i)} |J_\phi(x)| d\lambda_N(x) \tag{14.803d}$$
$$= \int_V \underbrace{\sum_i a_i \mathbb{1}_{\phi^{-1}(A_i)}(x)}_{=(f\circ\phi)(x)} |J_\phi(x)| d\lambda_N(x) \tag{14.803e}$$
$$= \int_V (f \circ \phi) |J_\phi| d\lambda_N. \tag{14.803f}$$

Justifications :

- Pour (14.803b) : linéarité de l'intégrale, théorème 14.171(2) [83]
- Pour (14.803c) : le cas des fonctions indicatrices est utilisé pour chaque i entre 1 et n.

(iii) **Fonction mesurable positive** Soit $f\colon V \to [0, \infty]$. Par le théorème fondamental d'approximation 14.110, il existe une suite croissante de fonctions étagées et mesurables $\varphi_n\colon V \to [0, \infty[$ dont la limite ponctuelle est f. Nous avons alors le calcul suivant :

$$\int_V f d\lambda_N = \lim_{n\to\infty} \int_V \varphi_n d\lambda_N \tag{14.804a}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_U (\varphi_n \circ \phi) |J_\phi| d\lambda_N \tag{14.804b}$$
$$= \int_U \lim_{n\to\infty} (\varphi_n \circ \phi) |J_\phi| d\lambda_N \tag{14.804c}$$
$$= \int_U (f \circ \phi) |J_\phi| d\lambda_N. \tag{14.804d}$$

Justifications :

- Pour (14.804a), c'est le théorème de la convergence monotone 14.166.
- Pour (14.804b), c'est le présent théorème pour la fonction étagée φ_n.
- Pour (14.804c), c'est encore la convergence dominée, justifiée par le fait que $\varphi_n \circ \phi$ est également une suite croissante : si $x \in U$ alors $\varphi_{n+1}\big(\phi(x)\big) \geqslant \varphi_n\big(\phi(x)\big)$.
- Pour (14.804d), c'est la limite ponctuelle $\varphi_n\big(\phi(x)\big) \to f\big(\phi(x)\big)$.

(3) La partie sur l'intégrabilité repose sur le fait que $|f| \circ \phi = |f \circ \phi|$. Ici $|.|$ est le module et non une valeur absolue. Les faits suivants sont équivalents :

- la fonction $f\colon V \to \mathbb{C}$ est intégrable
- la fonction $|f|\colon V \to \mathbb{R}$ est intégtrable
- la fonction $(|f| \circ \phi)|J_\phi|\colon U \to \mathbb{R}$ est intégrable (par le point (2)).
- la fonction $(f \circ \phi)|J_\phi|\colon U \to \mathbb{R}$ est intégrable.

En ce qui concerne la formule, il s'agit seulement d'appliquer le point (2) aux parties positives, négatives, imaginaires et réelles de f.

□

83. Il est remarquable que nous n'utilisons cette linéarité que pour les fonctions étagées.

Notons que la formule peut être écrite sous la forme

$$\langle f, g\rangle_V = \langle f \circ \phi, (g \circ \phi)|J|\rangle_U, \tag{14.805}$$

qui est plus pratique lorsqu'on parle de produits scalaires. Pour rappel, $\phi\colon U \to C$ est un C^1-difféomorphisme.

14.266.
La formule de changement de variables peut être comprise de la façon suivante. Si ϕ est linéaire alors le facteur $|J_\phi|$ est la mesure de l'image par ϕ d'une portion de $\mathbb{R}^p$ de mesure 1, sinon $|J_\phi|$ est le rapport entre la mesure de l'image d'un élément infinitésimale de volume de $\mathbb{R}^p$ et sa mesure originale.

Soit $\phi(u, v) = g(u, v)e_1 + h(u, v)e_2$ un difféomorphisme dans $\mathbb{R}^2$. Soit (x_0, y_0) l'image par ϕ de (u_0, v_0). On considère le petit rectangle R de sommets (u_0, v_0), $(u_0 + \Delta u, v_0)$, $(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$ et $(u_0, v_0 + \Delta v)$. L'image de R n'est pas un rectangle en général, mais peut être bien approximée par le rectangle de sommets (x_0, y_0), $(x_0, y_0) + \phi_u\Delta u$, $(x_0, y_0) + \phi_u\Delta u + \phi_v\Delta v$ et $(x_0, y_0) + \phi_v\Delta v$ et son aire est $\|\phi_u \times \phi_v\|\Delta u\Delta v$. La valeur $|\phi_u \times \phi_v|$ est exactement $|J_\phi|$

14.15.4 Exemples

Énormément d'exemples sont disponibles avec les coordonnées polaires et toutes leurs variations. Cependant les fonctions trigonométriques ne seront vues que plus tard ; les coordonnées polaires, cylindrique et sphériques seront vues en section 18.12 et les exemples d'utilisation pour les intégrales seront dans la section 18.14.

Un exemple avec une exponentielle sera donnée dans l'exemple 15.101.

14.16 Changement d'espace mesuré

Proposition 14.267 ([1]).
Soit un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Soit un ensemble Ω' et une bijection $\varphi\colon \Omega \to \Omega'$. Nous posons

(1) $\mathcal{A}' = \varphi(\mathcal{A})$,

(2) $\mu'(B) = \mu\big(\varphi^{-1}(B)\big)$ pour tout $B \in \mathcal{A}'$.

Soit enfin une fonction mesurable $f\colon \Omega \to X$.

Alors

(1) Le triple $(\Omega', \mathcal{A}', \mu')$ est un espace mesuré.

(2) L'application $f \circ \varphi^{-1}\colon \Omega' \to X$ est mesurable.

(3) Nous avons l'égalité

$$\int_\Omega f d\mu = \int_{\Omega'} (f \circ \varphi^{-1}) d\mu'. \tag{14.806}$$

Démonstration. La proposition 14.54 montre déjà que $(\Omega', \mathcal{A}', \mu')$ est un espace mesuré.

Soit une partie S mesurable dans X. Alors $f^{-1}(S)$ est mesurable dans Ω par hypothèse sur f, c'est-à-dire que $f^{-1}(S) \in \mathcal{A}$. Ensuite $(\varphi \circ f^{-1})(S)$ est mesurable dans Ω' par hypothèse sur φ. Cela prouve que $f \circ \varphi^{-1}$ est une application mesurable.

Nous avons encore à prouver l'égalité d'intégrale. Par la définition 14.156 nous avons

$$\int_\Omega f d\mu = \sup\{\sum_{i=1}^n a_i\mu(A_i)\} \tag{14.807}$$

où le supremum est sur tous les n et tous les choix de $A_i \in \mathcal{A}$, $a_i \in \mathbb{R}^+$ tels que $f|_{A_i} > a_i$. Vu que $\mathcal{A}' = \varphi(\mathcal{A})$, si $A_i \in \mathcal{A}$ et a_i sont choisis, nous avons aussi

$$f \circ^{-1} |_{\varphi(A_i)} \geqslant a_i \tag{14.808}$$

avec $\varphi(A_i) \in \mathcal{A}'$. Donc pour un choix de $\{(A_i, a_i)\}$ donné,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu'\big(\varphi(A_i)\big). \tag{14.809}$$

Au final,

$$\int_\Omega f d\mu = \sup\{\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)\} = \sup\{\sum_i a_i \mu'\big(\varphi(A_i)\big)\} = \int_{\varphi(\Omega)} f \circ \varphi^{-1} d\mu'. \tag{14.810}$$

□

Remarque 14.268 (Ce n'est pas la mesure que nous voulons)**.**
La mesure donnée par la proposition 14.267 n'est pas celle que nous voulons d'habitude sur Ω'. Anticipons un peu pour comprendre. Prenons l'exemple de la partie C de $\mathbb{R}$ donnée par

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y = x^2, x \in]0, 3[\}. \tag{14.811}$$

(1) La façon correcte de définir la longueur de C est de prendre une limite d'approximations par des morceaux de droites, comme fait à la définition 21.4.
(2) Cette définition de la longueur peut être exprimée sous forme intégrale par le théorème 21.10 qui nous assure que

$$l(C) = \int_0^3 \|\varphi'(t)\| dt = \int_0^3 \sqrt{1 + 4t^2} dt \neq \mu'(C). \tag{14.812}$$

En effet, $\mu'(C) = \mu\big(\varphi^{-1}(C)\big) = \mu\big(]0, 3[\big) = 3$, alors que pour tout t nous avons $\sqrt{1 + 4t^2} > 1$ et donc $l(C) > 3$.
(3) Donc μ' n'est pas exactement ce que nous aurions pu vouloir appeler la « mesure » de C.
(4) La mesure à considérer sur C doit donc plutôt être quelque chose comme le produit de la mesure μ' par la fonction $\|\varphi'\|$. Mais cela est une autre histoire qui vous sera contée une autre fois.
(5) Dans le cas de S^1, nous avons $\varphi(x) = e^{ix}$, et $\|\varphi'(x)\| = 1$. Donc la mesure donné ici est probablement bien celle que nous voulons. Peut-être à coefficient $\frac{1}{2\pi}$ près pour avoir une normalisation $\mu'(S^1) = 1$. Cela est également une autre histoire qui vous sera contée une autre fois ; par exemple dans la proposition 18.65.

14.17 Théorème de Fubini-Tonelli et de Fubini

Nous rappelons que $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue est un espace mesuré σ-fini, conformément à la définition 14.16.

Le théorème de Fubini-Tonelli parle de fonctions à valeurs réelles positive et non de fonctions à valeurs complexes. Le truc est que ce théorème va servir de base pour construire les autres. Si nous avons une fonction à valeurs complexes, elle se décompose en parties réelles et imaginaires qui elles-mêmes se décomposent en parties positives et négatives. Au final, les preuves pour $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ se ramènent à appliquer quatre fois le théorème pour $f \colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}^+$.

Théorème 14.269 (Fubini-Tonelli[370])**.**
Soient $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ deux espaces mesurés σ-finis, et $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace produit. Soit une fonction $f \colon \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et positive (valant éventuellement ∞ à certains endroits) Alors :

(1) Les fonction

$$F_1 \colon x \mapsto \int_{\Omega_2} f(x, y) d\mu_2(y) \tag{14.813}$$

et

$$F_2\colon y \mapsto \int_{\Omega_1} f(x,y)d\mu_1(x) \tag{14.814}$$

sont mesurables.

(2) *Toutes les intégrales imaginables existent et sont égales :*

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x,y)d(\mu_1\otimes\mu_2)(x,y) = \int_{\Omega_1}\left[\int_{\Omega_2} f(x,y)d\mu_2(y)\right]d\mu_1(x) \tag{14.815a}$$

$$= \int_{\Omega_2}\left[\int_{\Omega_1} f(x,y)d\mu_1(x)\right]d\mu_2(y) \tag{14.815b}$$

où tous les membres de l'égalité valent éventuellement $+\infty$.

Démonstration. Commençons par prouver le théorème dans le cas d'une fonction caractéristique d'un ensemble mesurable : $f(x,y) = \mathbb{1}_A(x,y)$ pour un certain ensemble $A \subset \Omega_1 \times \Omega_2$. Dans ce cas,

$$F_1(x) = \int_{\Omega_2} \mathbb{1}_A(x,y)d\mu_2(y) = \int_{\Omega_2} \mathbb{1}_{A_1(y)}(x)d\mu_2(y) = \mu_2\big(A_1(x)\big), \tag{14.816}$$

et nous avons déjà vu au théorème 14.216 que cette fonction F_1 était alors mesurable. En utilisant maintenant les égalités (14.631) ainsi que le fait que $\mathbb{1}_A(x,y) = \mathbb{1}_{A_2(x)}(y)$ nous avons

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} \mathbb{1}_A(x,y)d(\mu_1\otimes\mu_2)(x,y) = (\mu_1\otimes\mu_2)(A) \tag{14.817a}$$

$$= \int_{\Omega_1} \mu_2\big(A_2(x)\big)d\mu_1(x) \tag{14.817b}$$

$$= \int_{\Omega_1}\left[\int_{\Omega_2} \mathbb{1}_{A_2(x)}(y)d\mu_2(y)\right]d\mu_1(x) \tag{14.817c}$$

$$= \int_{\Omega_1}\left[\int_{\Omega_2} \mathbb{1}_A(x,y)d\mu_2(y)\right]d\mu_1(x). \tag{14.817d}$$

Le théorème étant valable pour les fonctions caractéristiques, il est valable pour les fonctions simples (définition 14.104) par linéarité de l'intégrale.

Si f n'est pas une fonction simple, alors la proposition 14.110 nous donne une suite croissante de fonctions simples et positives convergeant ponctuellement vers f. La partie du théorème sur les fonctions simples dit que pour chaque n l'intégrale

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f_n(x,y)d(\mu_1\otimes\mu_2)(x,y) \tag{14.818}$$

peut être décomposée comme il faut en suivant la formule (14.815). Il faut pouvoir permuter la limite et l'intégrale dans chacun de cas. D'abord le théorème de la convergence monotone 14.166 appliqué à l'espace $\Omega_1 \times \Omega_2$ dit que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f_n(x,y)d(\mu_1\otimes\mu_2)(x,y) = \int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x,y)d(\mu_1\otimes\mu_2)(x,y). \tag{14.819}$$

Ensuite, pour chaque $x \in \Omega_1$, les fonctions

$$\sigma_n(y) = \int_{\Omega_1} f_n(x,y)d\mu_1(x) \tag{14.820}$$

forment une suite croissante de fonctions mesurables ; nous leur appliquons encore le théorème de la convergence monotone :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_2}\left[\int_{\Omega_1} f_n(x,y)d\mu_1(x)\right]d\mu_2(y) = \lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_2}\sigma_n(y)d\mu_2(y) \tag{14.821a}$$

$$= \int_{\Omega_2}\left[\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_1} f_n(x,y)d\mu_1(x)\right]d\mu_2(y) \tag{14.821b}$$

$$= \int_{\Omega_2}\left[\int_{\Omega_1} f(x,y)d\mu_1(x)\right]d\mu_2(y) \tag{14.821c}$$

où nous avons utilisé une seconde fois Beppo-Levi. □

Remarque 14.270.
Les formules (14.815) sont bien, mais ne garantissent en aucun cas que $f\in L^1(\Omega_1\times\Omega_2)$: il faut encore que ces intégrales soient finies.

Corolaire 14.271 ([388])**.**
Soient $(\Omega_i,\mathcal{A}_i,\mu_i)$ deux espaces mesurés σ-finis, et $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ l'espace produit[84]. Soit une fonction mesurable $f\colon\Omega\to\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes

(1) $f\in L^1(\Omega_1\times\Omega_2)$,

(2)
$$\int_{\Omega_1}\left[\int_{\Omega_2}|f|d\mu_2\right]d\mu_1<\infty, \tag{14.822}$$

(3)
$$\int_{\Omega_2}\left[\int_{\Omega_1}|f|d\mu_1\right]d\mu_2<\infty. \tag{14.823}$$

Démonstration. Nous commençons par supposer que f est à valeurs dans $\mathbb{R}$. La notation $|f|$, pour l'instant, dénote donc bien la valeur absolue et non le module.

La fonction $|f|$ est mesurable et positive par hypothèse et par le fait que si f est mesurable, alors $|f|$ l'est également par le corolaire 14.100. Le théorème 14.269(2) nous dit alors que les intégrales suivantes existent et sont égales :

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2}|f|d(\mu_1\otimes\mu_2)=\int_{\Omega_1}\left[\int_{\Omega_2}|f(x,y)|d\mu_2(y)\right]d\mu_1(x)=\int_{\Omega_2}\left[\int_{\Omega_1}|f(x,y)|d\mu_1(x)\right]d\mu_2(y). \tag{14.824}$$

Attention : rien ne dit encore que ces intégrales sont finies.

(i) **(1) implique (2) et (3)** Si $f\in L^1(\Omega_1\times\Omega_2)$ alors $|f|$ y est également. Cela implique que le membre de droite de (14.824) est fini. Les deux autres sont alors également finis.

(ii) **(2) ou (3) implique (1)** Les expressions à droite de (14.824) sont finies. Donc celle de gauche également. Cele signifie que $|f|\in L^1(\Omega_1\times\Omega_2)$. Par conséquent f est également dans $L^1(\Omega_2\times\Omega_2)$.

Nous passons maintenant au cas où f est à valeurs dans $\mathbb{C}$. Nous décomposons

$$f=f_R+if_I \tag{14.825}$$

où f_R et f_I sont des fonctions réelles. Nous avons

$$\int_\Omega|f|\leqslant\int_\Omega|f_R|+\int_\Omega|f_I|. \tag{14.826}$$

Donc si f_R et f_I sont dans $L^1(\Omega)$, la fonction f le sera aussi. De même,

$$\int_\Omega|f_R|\leqslant\int_\Omega|f|, \tag{14.827}$$

qui donne l'inverse : si $f\in L^1(\Omega)$ alors $f_R,f_I\in L^1(\Omega)$. Bref, f est intégrable sur Ω si et seulement si f_R et f_I le sont.

Supposons que $f\in L^1(\Omega_1\times\Omega_2)$. Alors

$$\int_{\Omega_1}\left[\int_{\Omega_2}|f|d\mu_2\right]d\mu_1\leqslant\int_{\Omega_1}\left[\int_{\Omega_2}|f_R|\right]+\int_{\Omega_1}\left[\int_{\Omega_2}|f_I|\right]<\infty \tag{14.828a}$$

84. Définition 14.218.

où nous avons appliqué (1) implique (2) aux fonctions f_R et f_I qui sont dans $L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ parce que f y est.

Dans l'autre sens, si

$$\int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} |f| \right] < \infty, \tag{14.829}$$

alors en remplaçant $|f|$ par $|f_R|$ ou par $|f_I|$ nous restons fini. En appliquant alors « (2) implique (1) » nous trouvons que f_R et f_I sont dans $L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Et cela implique que $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. □

Théorème 14.272 (Fubini[388]).
Soient $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ deux espaces mesurés σ-finis, et $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace produit. Soit

$$f \in L^1\big((\Omega, \mathcal{A}), \mathbb{C}\big), \tag{14.830}$$

c'est-à-dire une fonction à valeurs mesurable et intégrable sur Ω. Alors :

(1) Pour presque tout $x \in \Omega_1$, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est $L^1(\Omega_2)$.

(2) Si nous posons

$$\varphi_f(x) = \int_{\Omega_2} f(x, y) d\mu_2(y); \tag{14.831}$$

alors $\varphi_f \in L^1(\Omega_1)$.

(3) Nous avons la formule d'inversion d'intégrale

$$\int_{\Omega} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_1} \varphi_f d\mu_1 \tag{14.832a}$$

$$= \int_{\Omega_1} \left[\int_{\Omega_2} f(x, y) d\mu_2(y) \right] d\mu_1(x) \tag{14.832b}$$

$$= \int_{\Omega_2} \left[\int_{\Omega_1} f(x, y) d\mu_1(x) \right] d\mu_2(y). \tag{14.832c}$$

Démonstration. Nous commençons par supposer que f est à valeurs réelles : $f \in L^1\big((\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2), \mathbb{R}\big)$. Nous décomposons la fonction f en parties positives et négatives : $f = f^+ - f^-$ avec f^+ et f^- positives ou nulles. Nous avons évidemment

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |f^+| \leqslant \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |f| < \infty. \tag{14.833}$$

Donc f^+ et f^- sont des éléments de $L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

(i) **Pour (1)** Nous posons

$$\varphi_{f^+}(x) = \int_{\Omega_2} f^+(x, y) d\mu_2(y) \tag{14.834}$$

pour tous les $x \in \Omega_1$ pour lesquels cette intégrale est bien définie. Vu que f^+ est positive et mesurable, le théorème de Fubini-Tonelli 14.269(1) s'applique donc pour nous dire que φ_{f^+} est mesurable.

De plus le résultat (14.815) appliqué à f^+ donne

$$\int_{\Omega_1} \varphi_{f^+} d\mu_1 = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f^+ d(\mu_1 \otimes \mu_2) < \infty. \tag{14.835}$$

Le fait que le tout soit fini est une conséquence du fait déjà mentionné que $f^+ \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2$. Vu que φ_{f^+} est une fonction positive, l'inégalité (14.835) signifie que $\varphi_{f^+} \in L^1(\Omega_1, \mu_1)$.

En particulier, $\varphi_{f^+}(x) < \infty$ pour presque tout $x \in \Omega_1$. C'est-à-dire pour presque tout $x \in \Omega_1$:

$$\int_{\Omega_2} f^+(x, y) d\mu_2(y) < \infty, \tag{14.836}$$

et sachant que $f^+ \geqslant 0$ nous avons $f^+(x, \cdot) \in L^1(\Omega_2)$ pour presque tout x.

(ii) **Pour (2)** Partout où φ_{f^+} et φ_{f^-} sont finies nous avons

$$\varphi_f = \varphi_{f^+} - \varphi_{f^-}, \tag{14.837}$$

et comme cela a lieu presque partout, nous pouvons considérer une partie mesurable $A \subset \Omega_1$ telle que $\mu_1(A) = 0$ et $\varphi_f(x) = \varphi_{f^+}(x) - \varphi_{f^-}(x)$ pour tout x hors de A. Bref, nous posons

$$g(x) = \begin{cases} \varphi_{f^+} - \varphi_{f^-}(x) & \text{si } x \in A^c \\ 0 & \text{si } x \in A. \end{cases} \tag{14.838}$$

Cette fonction g est mesurable et $g = \varphi_f$ presque partout. De plus

$$\int_{\Omega_1} |g| d\mu_1 = \int_{A^c} |g| \leqslant \int_{A^c} \varphi_{f^+} + \int_{A^c} \varphi_{f^-} < \infty. \tag{14.839}$$

La dernière inégalité est le fait que $\varphi_{f\pm}$ sont dans $L^1(\Omega_1)$. Et notons au passage que nous aurions pu laisser toutes les intégrales sur Ω_1 sans faire de précisions sur la distinction entre Ω_1 et A^c parce que la partie de Ω_1 sur laquelle $\varphi_{f\pm}$ sont infinies est trop petite pour changer la valeur de l'intégrale.

Nous avons donc $g \in L^1(\Omega_1)$, et par conséquent également $\varphi_f \in L^1(\Omega_1)$ parce que ces deux fonctions sont égales presque partout (les classes sont égales).

(iii) **Pour (3)** En utilisant l'équation (14.835) nous avons

$$\int_{\Omega_1} \varphi_f d\mu_1 = \int g d\mu_1 = \int_{\Omega_1} \varphi_{f^+} - \int_{\Omega_1} \varphi_{f^-} \tag{14.840a}$$

$$= \int_{\Omega_1 \times} f^+ d\mu - \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f^- d\mu \tag{14.840b}$$

$$= \int_{\Omega_1 \times \Omega 2} f d\mu. \tag{14.840c}$$

Et toutes ces intégrales sont finies.

Et c'est maintenant que nous considérons le cas complexe. Nous décomposons $f = f_R + if_I$ avec des fonctions réelles f_R et f_I. Comme déjà mentionné autour de (14.826), les fonctions f_R et f_I sont intégrables. Nous leur appliquons le théorème.

Les valeurs de x pour lesquelles $f_R(x, \cdot)$ et $f_I(x, \cdot)$ ne sont pas dans $L^1(\Omega_2)$ forment un ensemble de mesure nulle, nommons le A. En posant

$$g(x, y) = \begin{cases} f_R(x, y) + if_I(x, y) & \text{si } x \in A^c \\ 0 & \text{si } x \in A, \end{cases} \tag{14.841}$$

nous avons que $g(x, \cdot)$ est intégrable pour tout $x \in A^c$. Vu que pour ces valeurs de x nous avons $g(x, y) = f(x, y)$ nous en déduisons que pour $x \in A^c$ nous avons aussi $f(x, \cdot) \in L^1(\Omega_2)$.

Les autres points se traitent de la même façon [85]. □

14.273.

En pratique, il n'est pas toujours évident qu'une fonction soit intégrable sur $\Omega_1 \times \Omega_2$. Pour permuter des intégrales sur une fonction à deux paramètres nous faisons comme suit.

(1) Nous testons l'intégrabilité en chaine de $|f|$, et si c'est bon, le corolaire 14.271 nous donne $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

(2) Nous utilisons le théorème de Fubini 14.272 pour séparer et permuter les intégrales comme des ingénieurs.

85. Attention : je n'ai pas vérifié explicitement. C'est juste une intuition. Vérifiez et écrivez-moi pour dire si c'est bon ou non.

Si la fonction $(x,y) \mapsto f(x)g(y)$ satisfait aux hypothèse du théorème de Fubini alors

$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x)g(y)dx \otimes dy = \left(\int_{\Omega_1} f(x)dx\right)\left(\int_{\Omega_2} g(y)dy\right). \tag{14.842}$$

Le théorème de Fubini est souvent utilisé sous cette forme.

Exemple 14.274 (Nécessité d'avoir des mesures σ-finies)**.**
Nous montrons que le théorème ne tient pas si une des deux mesures n'est pas σ-finie. Soit $I = [0,1]$. Nous considérons l'espace mesuré

$$(I, \mathcal{B}\text{or}(I), \lambda) \tag{14.843}$$

où $\mathcal{B}\text{or}(I)$ est la tribu des boréliens sur I et λ est la mesure de Lebesgue (qui est σ-finie). D'autre part nous considérons l'espace mesuré

$$(I, \mathcal{P}(I), m) \tag{14.844}$$

où $\mathcal{P}(I)$ est l'ensemble des parties de I et m est la mesure de comptage. Cette dernière n'est pas σ-finie parce que les seuls ensembles de mesure finie pour la mesure de comptage sont des ensembles finis, or une union dénombrable d'ensemble finis ne peut pas recouvrir l'intervalle I.

Nous allons montrer que dans ce cadre, l'intégrale de la fonction indicatrice de la diagonale sur I^2 ne vérifie pas le théorème de Fubini. Étant donné que $\mathcal{B}\text{or}(I) \subset \mathcal{P}(I)$ nous avons

$$\mathcal{B}\text{or}(I^2) \subset \mathcal{B}\text{or}(I) \otimes \mathcal{P}(I). \tag{14.845}$$

Soit $\Delta = \{(x,x) \text{ tel que } x \in I\}$. La fonction

$$\begin{aligned} g\colon I^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto x - y \end{aligned} \tag{14.846}$$

est continue et $\Delta = g^{-1}(\{0\})$ est donc fermé dans I^2. L'ensemble Δ est donc un borélien de I^2 et par conséquent un élément de la tribu $\mathcal{B}\text{or}(I)\otimes\mathcal{P}(I)$. La fonction indicatrice $\mathbb{1}_\Delta$ est alors mesurable pour l'espace mesuré

$$(I \times I, \mathcal{B}\text{or}(I) \otimes \mathcal{P}(I), \lambda \otimes m). \tag{14.847}$$

Pour x fixé nous avons

$$\mathbb{1}_\Delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = x \\ 1 & \text{si } y \neq x \end{cases} = \mathbb{1}_{\{x\}}(y), \tag{14.848}$$

et donc

$$A_1 = \int_I \left(\int_I \mathbb{1}_\Delta(x,y)dm(y)\right) d\lambda(x) \tag{14.849a}$$
$$= \int_I \left(\int_I \mathbb{1}_{\{x\}}(y)dm(y)\right) d\lambda(x) \tag{14.849b}$$
$$= \int_I \Big(m(\{x\})\Big)d\lambda(x) \tag{14.849c}$$
$$= \int_I 1d\lambda(x) \tag{14.849d}$$
$$= 1. \tag{14.849e}$$

Par contre le support de $\mathbb{1}_\Delta$ étant de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue, nous avons

$$\int_I \mathbb{1}_\Delta(x,y)d\lambda(x) = 0 \tag{14.850}$$

et par conséquent

$$A_2 = \int_I \left(\int_I \mathbb{1}_\Delta(x,y)d\lambda(x)\right) dm(y) = 0. \tag{14.851}$$

Nous voyons donc que le théorème de Fubini ne s'applique pas. △

Exemple 14.275.
Nous nous proposons de calculer l'intégrale suivante en utilisant le théorème de Fubini :

$$G=\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi} \tag{14.852}$$

alors que la fonction $x\mapsto e^{-x^2}$ n'a pas de primitives parmi les fonctions élémentaires.

Nous allons le faire de deux façons. Une première directe en utilisant le théorème de Fubini sur un domaine non borné, et une seconde en utilisant Fubini sur un domaine borné, et en passant à la limite ensuite.

(i) **Fubini, domaine non borné** Par symétrie nous pouvons nous contenter de calculer

$$G_+=\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx. \tag{14.853}$$

L'astuce est de passer par l'intermédiaire

$$\begin{aligned}
H&=\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+}e^{-(x^2+y^2)}dxdy && (14.854a)\\
&=\int_{\mathbb{R}^+}\left(\int_{\mathbb{R}^+}e^{-x^2}e^{-y^2}dx\right)dy && (14.854b)\\
&=\left(\int_{\mathbb{R}^+}e^{-x^2}dx\right)^2 && (14.854c)\\
&=G_+^2 && (14.854d)
\end{aligned}$$

L'intégrale (14.854a) se calcule en passant aux coordonnées polaires et le résultat est $H=\frac{\pi}{4}$. Nous avons alors $G=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et

$$\int_{\mathbb{R}}e^{-x^2}=\sqrt{\pi}. \tag{14.855}$$

(ii) **Fubini, domaine borné, puis limite** Une variante, qui n'applique pas Fubini sur un domaine non borné. Nous commençons par écrire

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx:=\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R}e^{-x^2}dx \tag{14.856}$$

et puis nous faisons le calcul

$$\begin{aligned}
I^2&=\lim_{R\to+\infty}\left((\int_{-R}^{+R}e^{-x^2}dx)(\int_{-R}^{+R}e^{-y^2}dy)\right)\\
&=\lim_{R\to+\infty}\left(\iint_{K_R}e^{-(x^2+y^2)}dxdy\right)\\
&=\lim_{R\to+\infty}\left(\iint_{C_R}e^{-(x^2+y^2)}dxdy\right)
\end{aligned} \tag{14.857}$$

où K est le carré de demi-côté R centré à l'origine et de côtés parallèles aux axes et C_R est le cercle de rayon R centré à l'origine.

La première étape à justifier est simplement l'application de Fubini. Pour le passage de l'intégrale du carré vers le cercle, définissons

$$I_K(r)=\int_{K_r}f,\quad I_C(r)=\int_{C_r}f \tag{14.858}$$

où K_r est la carré de demi-côté r et C_r est le cercle de rayon r. Le demi-côté du carré inscrit à C_r est $\sqrt{2}$, donc pour tout r nous avons

$$I_K(\sqrt{2}r) \leqslant I_C(r) < I_K(r), \tag{14.859}$$

et en prenant la limite, nous avons évidement

$$\lim_{r\to\infty} I_K(\sqrt{2}r) = \lim_{r\to\infty} I_K(r), \tag{14.860}$$

et donc cette limite est également égale à $\lim_{r\to\infty} I_C(t)$.
Il ne reste qu'à calculer la dernière intégrale sur le cercle en passant aux coordonnées polaires :

$$\int_{C_R} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R re^{-r^2} dr = \pi(1 - e^{-R^2}). \tag{14.861}$$

La limite donne π, nous en déduisons que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \tag{14.862}$$

△

Le théorème de Fubini-Tonelli nous permet également d'inverser des sommes et des séries. En effet une somme n'est rien d'autre qu'une intégrale pour la mesure de comptage :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \int_{\mathbb{N}} a_n dm(n). \tag{14.863}$$

La proposition suivante montre comment il faut faire.

Proposition 14.276.
Soient les espaces mesurés $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m)$, $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}or(\mathbb{R}^n), \lambda)$ *où* λ *est la mesure de Lebesgue ainsi qu'une suite de fonctions positives* $f_n\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. *Nous supposons de plus que la fonction* f_n *soit intégrable pour tout* n *et que les résultats forment une suite sommable. Alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)dx. \tag{14.864}$$

Démonstration. Nous pouvons la récrire le membre de gauche sous la forme

$$\int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(n,x)dx \right) dm(n) \tag{14.865}$$

avec la notation évidente $f(n,x) = f_n(x)$. Prouvons que la fonction $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ainsi définie est une fonction mesurable pour l'espace mesuré

$$\big(\mathbb{N} \times \mathbb{R}^d, \mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{B}\mathrm{or}(\mathbb{R}^d), m \otimes \lambda\big). \tag{14.866}$$

Si $A \subset \mathbb{R}$, nous avons

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\} \times f_n^{-1}(A). \tag{14.867}$$

Chacun des ensembles dans l'union appartient à la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{B}\mathrm{or}(\mathbb{R}^d)$ tandis que les tribus sont stables sous les unions dénombrables. La fonction f est donc mesurable. Comme nous avons supposé que f était positive, le théorème de Fubini-Tonelli s'applique et nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{N}} f(n,x)dm(n) \right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)dx. \tag{14.868}$$

□

Théorème 14.277 (Fubini)**.**
Soit $(x,t) \mapsto f(x,y) \in \bar{\mathbb{R}}$ *une fonction intégrable sur* $B_n \times B_m \subset \mathbb{R}^{n+m}$ *où* B_n *et* B_m *sont des ensembles mesurables de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\mathbb{R}^m$*. Alors :*

(1) pour tout $x \in B_n$*, sauf éventuellement en les points d'un ensemble* $G \subset B_n$ *de mesure nulle, la fonction* $y \in B_m \mapsto f(x,y) \in \bar{\mathbb{R}}$ *est intégrable sur* B_m

(2) la fonction

$$\begin{aligned} B_n \backslash G &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_{B_n} f(x,y)dy \end{aligned} \tag{14.869}$$

est intégrable sur $B_n \backslash G$*.*

(3) On a

$$\int_{B_n \times B_m} f(x,y)dxdy = \int_{B_n} \left(\int_{B_m} f(x,y)dy \right) dx. \tag{14.870}$$

Notons en particulier que si $f(x,y) = \varphi(x)\phi(y)$, alors $\int_{B_m} \varphi(y)dy$ est une constante qui peut sortir de l'intégrale sur B_n, et donc

$$\int_{B_n \times B_m} \varphi(x)\phi(y)dxdy = \int_{B_n} \varphi(x)dx \int_{B_m} \phi(y)dy. \tag{14.871}$$

Chapitre 15

Suites et séries de fonctions

Les généralités sur les suites et séries de fonctions, c'est dans la section 12.33.

15.1 Séries de fonctions

15.1.1 Intégration de séries de fonctions

Théorème 15.1.
La somme uniforme de fonctions intégrables sur un ensemble de mesure fini est intégrable et on peut permuter la somme et l'intégrale.

En d'autres termes, supposons que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformément vers F sur A avec $\mu(A) < \infty$. Si F et f_n sont des fonctions intégrables sur A alors

$$\int_A F(x)d\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_A f_n(x)d\mu(x). \tag{15.1}$$

Démonstration. Ce théorème est une conséquence du théorème 14.188. En effet nous définissons la suite des sommes partielles

$$F_N = \sum_{n=0}^{N} f_n. \tag{15.2}$$

La limite $\lim_{N\to\infty} F_N = F$ est uniforme. Par conséquent la fonction F est intégrable et

$$\int_A F = \lim_{N\to\infty} \int_A F_N = \lim_{N\to\infty} \int_A \sum_{n=0}^{N} f_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_A f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_A f_n. \tag{15.3}$$

La première égalité est le théorème 14.188, les autres sont de simples manipulations rhétoriques. □

Le théorème suivant est une paraphrase du théorème de la convergence dominée de Lebesgue (14.190).

Théorème 15.2.
Soient des fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n=0}^{N} f_n$ soit intégrable sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ pour chaque N. Nous supposons que la somme converge simplement vers

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \tag{15.4}$$

et qu'il existe une fonction g telle que

$$\left| \sum_{n=0}^{N} f_n \right| < g \tag{15.5}$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$. Alors

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *est intégrable,*

(2) on peut permuter somme et intégrale :

$$\lim_{N\to\infty} \int_\Omega \sum_{n=0}^{N} f_n d\mu = \int_\Omega \sum_{n=0}^{\infty} f_n, \tag{15.6}$$

(3)

$$\lim_{N\to\infty} \int_\Omega \left| \sum_{n=0}^{N} f_n - \sum_{n=0}^{\infty} f_n \right| = \lim_{N\to\infty} \int_\Omega \left| \sum_{n=N}^{\infty} f_n \right| = 0. \tag{15.7}$$

Théorème 15.3.
Soit f_n *des fonctions* $C^1[a,b]$ *telles que*

(1) la série $\sum_n f_n(x_0)$ *converge pour un certain* $x_0 \in [a,b]$*,*

(2) la série des dérivées $\sum_n f_n'$ *converge uniformément sur* $[a,b]$*.*

Alors la série $\sum_n f_n$ *converge vers une fonction* F *et*

(1) La convergence est uniforme sur $[a,b]$*.*

(2) La fonction F *est dérivable*

(3) $F'(x) = \sum_n f_n'(x)$*.*

15.1.2 Différentiabilité

Lemme 15.4.
Soient E *et* F *deux espaces vectoriels normés. Si la suite* (T_n) *converge vers* T *dans* $\mathcal{L}(E,F)$*, alors pour tout* $v \in E$ *nous avons*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} T_n \right)(v) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(v). \tag{15.8}$$

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 15.5
À mon avis si on a un ouvert connexe par arcs dans un espace vectoriel normé, alors il est connexe par arcs de classe C^1*, c'est-à-dire que deux points peuvent être liés par un chemin de classe* C^1*.*

Je n'en suis pas certain.

Si vous êtes sûr de vous, vous pouvez affaiblir les hypothèses du théorème 15.8 et supprimer la définition 15.6 qui ne sert à rien d'autre.

Définition 15.6.
Soit un espace vectoriel normé E*. Un ouvert* Ω *est dit connexe par arcs de classe* C^1 *si pour tout choix de* $a, b \in \Omega$*, il existe une application* $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ *de classe* C^1 *telle que* $\gamma(0) = a$ *et* $\gamma(1) = b$*.*

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 15.7
Le théorème 15.8 se démontre ici avec des intégrales. Je suis presque certain qu'on doit pouvoir adapter la démonstration du théorème 12.382 pour ne pas avoir à utiliser d'intégrales.

Théorème 15.8 ([392]).
Soient E *et* F *deux espaces vectoriels normés,* Ω *un ouvert connexe par arcs de classe* C^1 *de* E*. Soit* (u_n) *une suite de fonctions* $u_n\colon \Omega \to F$ *telle que*

(1) pour tout n*, la fonction* u_n *est de classe* C^1 *sur* Ω*,*

(2) la série $\sum_n u_n$ *converge simplement sur* Ω*,*

(3) la série des différentielles $\sum_n (du_n)$ *converge normalement sur tout compact de* Ω*.*

Alors la somme $u = \sum_n u_n$ *est de classe* C^1 *sur* Ω *et sa différentielle est donnée par*

$$du = \sum_{n=0}^{\infty} du_n. \tag{15.9}$$

Démonstration. Pour chaque n, la fonction $du_n\colon \Omega \to \mathcal{L}(E,F)$ est une fonction continue parce que u_n est de classe C^1. La série convergeant normalement, la fonction $\sum_{n=0}^{\infty} du_n$ est également continue par la proposition 12.374. La difficulté de ce théorème est donc de prouver que cela est bien la différentielle de la fonction $\sum_n u_n$, c'est-à-dire que

$$d\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} du_n. \tag{15.10}$$

Soient $a, x \in \Omega$. Nous considérerions bien le segment $[a,x]$, mais vu que Ω n'est supposé que connexe par arcs de classe C^1 (définition 15.6), nous ne pouvons pas faire mieux pour joindre a à x que choisir un chemin de classe C^1

$$\gamma\colon [0,1] \to \Omega \tag{15.11}$$

tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

L'astuce est de poser

$$\begin{aligned} f_n\colon [0,1] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto (du_n)_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big), \end{aligned} \tag{15.12}$$

et d'en étudier l'intégrale [1].

(i) **Permuter somme et intégrale** Nous voudrions permuter la somme et l'intégrale dans l'expression $\int_0^1 \sum_i f_i(t)dt$. Pour cela nous commençons par regarder quelques majorations de normes.

D'abord γ est de classe C^1, ce qui fait que γ' est continue. Vu que la norme est une application continue, la fonction $t \mapsto \|\gamma'(t)\|$ est également continue sur le compact $[0,1]$. Elle est donc majorée par une constante que nous nommons M. C'est le théorème de Weierstrass 7.126.

Ensuite nous avons le calcul

$$\|f_i(t)\| = \|(du_i)_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)\| \leqslant \|(du_i)_{\gamma(t)}\|\|\gamma'(t)\| \leqslant M\|du_i\|_{\infty} < \infty. \tag{15.13}$$

Justifications :

— Pour la première inégalité. C'est le lemme 11.58.

— Pour la seconde inégalité. Il s'agit de l'inégalité évidente

$$\|du_i\|_{\infty} = \sup_{x\in\gamma\big([0,1]\big)} \|(du_i)_x\| \tag{15.14}$$

Notons que la norme $\|.\|_{\infty}$ ne réfère pas à un supremum sur E, mais seulement sur l'image de γ. Nous aurions pu faire preuve d'un peu de créativité dans les notations.

— L'application du_i est continue sur le compact $\gamma\big([0,1]\big)$. Donc le supremum est fini et atteint.

Maintenant nous posons

$$g_n(t) = \sum_{i=0}^{n} f_i(t). \tag{15.15}$$

Nous avons la majoration

$$\|g_n(t)\| \leqslant \sum_{i=0}^{n} \|f_i(t)\| \leqslant M \sum_{i=0}^{n} \|du_i\|_{\infty} < \infty. \tag{15.16}$$

Le fait que le tout soit fini est l'hypothèse de convergence normale sur tout compact. Le compact en question est $\gamma\big([0,1]\big)$.

C'est le moment d'utiliser le théorème de la convergence dominée de Lebesgue 14.190. Attention aux notations un peu décalées. Nous avons $g_n \to \sum_{i=1}^{\infty} f_i$ (convergence simple) et

1. Cela revient à étudier l'intégrale de la forme différentielle du_n sur le chemin γ. Voir la définition 20.50 et tout ce qui s'en suit.

$\|g_n(t)\| \leqslant A$ où A est une constante que nous voyons comme une fonction constante intégrable sur le compact $[0,1]$. Nous permutons la limite et l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sum_{i=0}^{\infty} f_i(t)dt &= \int_0^1 (\lim_{n\to\infty} g_n)(t)dt && (15.17a)\\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(t)dt && (15.17b)\\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sum_{i=0}^{n} f_i(t)dt && (15.17c)\\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \int_0^1 f_i(t)dt && (15.17d)\\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^1 f_i(t)dt. && (15.17e)
\end{aligned}$$

(ii) **Accroissements** Nous pouvons maintenant faire le petit calcul suivant :

$$\sum_n \int_0^1 (du_n)_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)dt = \sum_n \Big(u_n\big(\gamma(1)\big) - u_n\big(\gamma(0)\big)\Big) = \sum_n \big(u_n(x) - u_n(a)\big) = u(x) - u(a) \tag{15.18}$$

où nous avons utilisé le théorème fondamental du calcul intégral sous la forme de la proposition 14.253.

Nous retenons l'égalité

$$u(x) = u(a) + \int_0^1 \sum_n (du_n)_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)dt. \tag{15.19}$$

(iii) **Remarque** La formule (15.19) n'est pas une forme de formule des accroissements finis qui parlerait d'évaluer une fonction u en x en partant de a et en intégrant du le long d'un chemin joignant a et x.

Ce serait le cas si nous pouvions permuter la somme et la différentielle qui se trouvent dans l'intégrale. Or permuter somme et différentielle est précisément l'objet du théorème que nous sommes en train de prouver.

(iv) **Différentielle** Forts de la formule (15.19), nous calculons $du_a(v)$, c'est-à-dire la différentielle de u au point a appliquée au vecteur $v \in F$. Pour cela, nous savons que Ω est ouvert, donc Ω contient une boule de rayon r autour de a, ce qui nous permet de dire que pour un a donné, le point $a + sv$ est dans Ω pour tout $s \in B(0,\epsilon)$ lorsque ϵ n'est pas trop grand. Pour chacun de ces s, nous considérons un chemin de classe C^1 joignant a à $a + sv$. Ce chemin sera noté

$$\gamma_s \colon [0,1] \to \Omega \tag{15.20}$$

et $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = a + sv$. Nous avons le calcul

$$
\begin{aligned}
du_a(v) &= \frac{d}{ds}\Big[u(a+sv)\Big]_{s=0} && (15.21a)\\
&= \frac{d}{ds}\Big[\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (du_n)_{\gamma_s(t)}\big(\gamma_s'(t)\big)dt\Big]_{s=0} && (15.21b)\\
&= \frac{d}{ds}\Big[\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (du_n)_{\gamma_s(t)}\big(\gamma_s'(t)\big)dt\Big]_{s=0} && (15.21c)\\
&= \frac{d}{ds}\Big[\sum_n \big(u_n(a+sv) - u_n(a)\big)\Big]_{s=0} && (15.21d)\\
&= \frac{d}{ds}\Big[(\sum_n u_n)(a+sv)\Big]_{s=0} && (15.21e)\\
&= \sum_n \frac{d}{ds}\Big[u_n(a+sv)\Big]_{s=0} && (15.21f)\\
&= \sum_n (du_n)_a(v) && (15.21g)\\
&= \Big(\sum_n (du_n)_a\Big)(v) && (15.21h)\\
&= \Big(\sum_n du_n\Big)_a(v). && (15.21i)
\end{aligned}
$$

Justifications :

— Pour 15.21c. Permuter la somme et l'intégrale comme plus haut.

— Pour 15.21f. Permuter une somme et une dérivée classique des fonctions $\mathbb{R} \to F$ données par $s \mapsto u_n(a+sv)$. Il s'agit d'utiliser le théorème 12.379 sur chaque composantes dans F.

— Pour 15.21i. Chaque du_n est une application $du_n \colon E \to \mathcal{L}(E,F)$. Au fait près que la notation est plus lourde, il s'agit simplement d'une définition de la somme ponctuelle d'une suite de fonctions : $\sum_n f_n(a) = (\sum_n f_n)(a)$. Dans ce cas-ci, le tout est encore un élément de $\mathcal{L}(E,F)$ que nous appliquons à v.

□

Lemme 15.9.
Sur $[\frac{1}{2}, 1]$, étudier la convergence de la série

$$
f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x-1}{x}\right)^n. \tag{15.22}
$$

Étudier la convergence de la série dérivée ; en déduire que

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2). \tag{15.23}
$$

Démonstration. Nous posons $y(x) = \frac{x-1}{x}$, et nous regardons la série

$$
\tilde{f}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} y^n. \tag{15.24}
$$

Cette série de puissance converge absolument pour $|y| < 1$, voir l'exemple 4 de la page 123bis du cours de première. Cette série converge également simplement en $y = -1$, par le corolaire de la page 123 du même cours[2]. Nous sommes dans le cas d'une série de puissance dont le disque de convergence est centré en 0, et dont le rayon est 1, mais qui converge (en plus) simplement sur un des bords du disque. Cela est le cadre du théorème 12.372 qui nous permet de dire que pour tout $\epsilon > 0$, la série (15.24) converge uniformément sur $[-1, 1-\epsilon]$.

La fonction $\tilde f(y)$ est donc continue sur $[-1, 1-\epsilon]$, et donc en particulier sur $[-1, 0]$. Par ailleurs, la fonction $y(x)$ est continue en $x \neq 0$. En tant que composée de fonctions continues, la fonction $f(x) = \tilde f\big(y(x)\big)$ est continue sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

Nous la mettons la série des dérivées sous la forme d'une série de puissances :

$$g(x) = \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{n-1}. \tag{15.25}$$

Afin d'éviter tout malentendu, nous insistons sur le fait que g est la série des dérivée de la série f. Nous ne savons pas encore si g existe (c'est-à-dire si elle converge), ni si sa somme est la dérivée de f. C'est cela que nous allons tenter d'établir maintenant.

Nous posons à nouveau $y(x) = \frac{x-1}{x}$, et nous savons que la série de puissances $\sum_n y^n$ converge uniformément pour $y \in [-1+\epsilon, 1-\epsilon]$ pour tout $\epsilon > 0$. En repassant aux variables x, pour tout $\epsilon > 0$, nous avons convergence uniforme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{n}, \tag{15.26}$$

sur le compact $x \in [\frac{1}{2-\epsilon}, \frac{1}{\epsilon}]$, ou, pour parler plus simplement, sur $x \in [\frac{1}{2}+\epsilon, a]$ pour tout ϵ (petit) et a (grand). Nous avons donc également convergence uniforme de la série des dérivées (15.25) sur le même intervalle. Maintenant, le théorème 15.8 montre que la série des dérivée est bien la dérivée de la série, c'est-à-dire que

$$g(x) = f'(x) \tag{15.27}$$

sur $]\frac{1}{2}, 1]$. Notez que la convergence uniforme *sur tout compact* de la série des dérivées est suffisante.

Une bonne nouvelle est qu'il est possibles de sommer explicitement la série $\sum_k y^k$. En effet, il est montré à la page 115 du cours de première que $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$, donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} y^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-y^{n+1}}{1-y} = \frac{1}{1-y}, \tag{15.28}$$

lorsque $|y| < 1$. Du coup, nous avons simplement

$$f'(x) = g(x) = \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{n-1} = \frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{n} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{x-1}{x}\right)}\right) = \frac{1}{x}, \tag{15.29}$$

donc la fonction f a la forme simple $f(x) = \ln(x) + C$. Notez bien le petit jeu de variables de sommation. Au départ $g(x)$ est une somme qui part de 1 avec un exposant $n-1$, et nous la transformons en une somme qui part de 0 avec un exposant n. C'est cela qui nous permet d'appliquer la formule (15.28).

Étant donné que $f(1) = 0$, nous avons

$$f(x) = \ln(x) \tag{15.30}$$

pour tout $x \in [\frac{1}{2}+\epsilon, 1]$. Mais nous avons vu que la fonction f était continue sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Étant donné que $\ln(x)$ et $f(x)$ sont deux fonctions continues sur $[\frac{1}{2}, 1]$ qui sont égales sur tout compact $[\frac{1}{2}+\epsilon, 1]$, nous déduisons que ces deux fonctions sont en réalité égales sur tout l'entièreté du compact $[\frac{1}{2}, 1]$.

En particulier, en $x = \frac{1}{2}$, nous avons

$$f(\frac{1}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^n = \ln(1/2) = -\ln(2). \tag{15.31}$$

□

2. Un étudiant avait dit se souvenir qu'Abel s'appliquait seulement aux séries alternées ; c'est ce corolaire (critère des séries alternées) qui l'a induit en erreur. En effet, Abel (proposition 5, page 122) est plus général, mais s'applique particulièrement bien aux séries alternées.

15.2 Séries entières

Dans cette section nous allons parler de séries complexes autant que de séries réelles. L'étude des propriétés à proprement parler complexes des séries entières (holomorphie) sera effectuée dans le chapitre dédié, voir le théorème 26.15 et ses conséquences.

15.2.1 Disque de convergence

Une **série de puissance** est une série de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k \tag{15.32}$$

où $z_0 \in \mathbb{C}$ est fixé, (c_k) est une suite complexe fixée, et z est un paramètre complexe. Nous disons que cette série est *centrée* en z_0.

Définition 15.10.
*Une **série entière** est une somme de la forme*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{15.33}$$

avec $a_n, z \in \mathbb{C}$.

Une série entière peut définir une fonction

$$f(z) = \sum_n a_n z^n. \tag{15.34}$$

Le but de cette section est d'étudier des conditions sur la suite (a_n) qui assurent la continuité de f ou la possibilité de dériver ou intégrer la série terme à terme.

Définition 15.11.
*Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. Le **rayon de convergence** de cette série est le nombre*

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\} \in [0, \infty]. \tag{15.35}$$

*La boule $B(0, R)$ est le **disque de convergence** de la série.*

Dans le cas d'une série de la forme $\sum_n a_n(z-z_0)^n$, le disque de convergence est l'ensemble $|z-z_0| < R$.

15.12.
Notez que le disque de convergence proprement dit est ouvert. Donc, pour être correct, on devrait parler de la *frontière* pour parler de la partie $|z| = R$. Toutefois, nous désignerons souvent cette partie en parlant du *bord* du disque.

15.13.
En réalité, il serait plus correct de parler du rayon de convergence de la suite (a_n) parce qu'au moment où on l'étudie, nous ne savons pas encore si la somme existera. Il ne devrait donc pas être autorisé d'écrire « étudions le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^n$ ».

Le rayon de convergence d'une série ne dépend que des réels $|a_n|$, même si à la base $a_n \in \mathbb{C}$.

15.14.
Sur Wikipédia[393], le rayon de convergence est défini par le supremum des $|z|$ tels que la série $\sum_n a_n z^n$ converge. Je vous invite à vous étonner que cela est équivalent à la définition donnée ici.

Il est dingue que demander que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée soit suffisant pour que la série converge. En réalité ce n'est pas tout à fait le cas ; les séries qui convergent sont celles pour $|z|$

strictement plus petit que le rayon de convergence. Et là ça marche. En effet, si $x < R$ alors $x = \epsilon R$ avec $\epsilon < 1$ et nous avons

$$a_n x^n = a_n(\epsilon R)^n = (a_n x^n)\epsilon^n \to 0. \tag{15.36}$$

Le critère d'Abel 15.17 va formaliser ça.

Remarque 15.15.
Si pour tout n nous avons $|b_n| \geqslant |a_n|$ alors le rayon de convergence de la série $\sum_n a_n z^n$ est au moins aussi grand que celui de la série $\sum_n b_n z^n$. Cela y compris lorsque l'un ou l'autre des rayons de convergences est infini.

Lemme 15.16 ([1])**.**
Le rayon de convergence pour la suite $b_n = a_{n+k}$ est le même que celui pour a_n.

Démonstration. Soit $r > 0$. Nous avons $r^k b_n r^n = a_{n+k} r^{n+k}$. Vu que les k premiers termes d'une suite ne changement pas le fait que la suite soit bornée, la suite $(a_n r^n)_{n \geqslant k}$ est bornée si et seulement si la suite $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. □

Lemme 15.17 (Critère d'Abel)**.**
Soit $R > 0$ le rayon de convergence de la somme $\sum_n a_n z^n$ et $z \in \mathbb{C}$.

(1) Si $|z| < R$ alors la série converge absolument.

(2) Si $|z| > R$ alors la série diverge.

Démonstration. Démonstration en deux parties.

(1) Si $|z| < R$ alors la suite $(a_n z^n)$ est bornée et il existe un nombre $M \in \mathbb{R}$ tel que $|a_n| r^n \leqslant M$ pour tout n. Nous considérons alors un r tel que $|z| < r < R$ et nous pouvons calculer :

$$|a_n z^n| = |a_n| r^n \big(\frac{|z|}{r}\big)^n \leqslant M \left(\frac{|z|}{r}\right)^n \tag{15.37}$$

Vu que $|z| < r$ nous tombons sur la série géométrique (11.301) qui converge. Par le critère de comparaison [3] la série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ converge.

(2) Par définition du rayon de convergence, la suite $(a_n z^n)$ n'est donc pas bornée et la série ne peut pas converger à cause de la proposition 11.88.

□

Corolaire 15.18.
Soit une série entière $\sum_n a_n z^n$. Soit un nombre ρ tel que

(1) La série converge pour $|z| < \rho$.

(2) La série diverge pour $|z| > \rho$.

Alors le rayon de convergence est ρ.

Démonstration. Nous notons R le rayon de convergence de la série.

(i) $\underline{R \geqslant \rho}$ Si $R < \rho$, nous prenons r strictement entre R et ρ. Le critère d'Abel 15.17 nous dit, pour $|z| = r$, que la série diverge. Par hypothèse, elle converge ; contradiction.

(ii) $\underline{R \leqslant \rho}$ De même si $R > \rho$, alors nous prenons $\rho < r < R$. Le critère d'Abel nous dit que la série diverge pour $|z| = r$. L'hypothèse nous dit le contraire. Nouvelle contradiction.

□

Le critère d'Abel parle bien de convergence absolue, et non de convergence normale. Pour chaque t, la série $\sum_k |a_n t^k|$ converge. Si par contre nous posons $u_k(t) = a_k t^k$, nous n'avons à priori pas la convergence normale $\sum_k \|u_k\|_\infty$, même pas si la norme est la norme supremum sur $B(0, R)$ [4]. Prenons comme exemple simplement $a_k = 1$ pour tout k. Pour tout $|t| < 1$, la série

3. Lemme 11.112.
4. Il y aurait par contre bien convergence sur tout compact ? Cher lecteur, dites moi ce que vous en pensez

$\sum_k t^k$ converge absolument (série géométrique), mais nous aurions $\|u_k\|_\infty = 1$ et donc divergence évidente de $\sum_k \|u_k\|_\infty$.

La proposition suivante sera surtout utile lorsqu'on parlera de dérivée.

Proposition 15.19 ([394]).
Quel que soit le nombre $\alpha \in \mathbb{R}$, les séries $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Démonstration. Nous posons

$$E = \{r \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } (a_n r^n) \text{ est borné } \} E' = \{r \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } (n^\alpha a_n r^n) \text{ est borné } \} \tag{15.38a}$$

Et aussi $R = \sup(E)$, $R' = \sup(E')$. Le fait que $E' \geqslant E$ est facile. Nous supposons $R > 0$ et nous considérons $r < R$ (c'est-à-dire $r \in E$). Nous allons montrer que $r \in E'$. Pour cela nous prenons un nombre s tel que $r < s < R$. Nous avons

$$n^\alpha a_n r^n = n^\alpha a_n \left(\frac{r}{s}\right)^n s^n = n^\alpha \left(\frac{r}{s}\right)^n a_n s^n. \tag{15.39}$$

Mais $r/s < 1$, donc le lemme 12.415 dit que $n^\alpha (r/s)^n \to 0$. Cela est donc borné par une constante M. Donc

$$n^\alpha a_n r^n \leqslant M a_n s^n. \tag{15.40}$$

Mais la suite $(a_n s^n)$ est bornée. Donc la suite $n^\alpha a_n r^n$ est également bornée, ce qui prouve que $r \in E'$. □

Remarque 15.20.
Au fond, cette proposition n'est rien d'autre que dire que dans $n^\alpha r^n$, l'effet « convergent » est r^n qui est une décroissance exponentielle tandis que l'effet « divergent » est n^α qui a une croissance seulement polynomiale.

Lemme 15.21 ([395]).
Soit une suite (u_n) de réels strictement positifs. Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell, \tag{15.41}$$

alors la suite $(u_n^{1/n})$ a une limite et elle vaut ℓ également.

Démonstration. Nous commençons par supposer que $\ell > 0$; nous ferons le cas $\ell = 0$ après. Soit $\epsilon < \ell$. L'existence de la limite dans l'hypothèse dit qu'il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$ nous ayons

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \in B(\ell, \epsilon). \tag{15.42}$$

Écrivons un produit télescopique :

$$\frac{u_n}{u_N} = \prod_{p=N}^{n-1} \frac{u_{p+1}}{u_p}. \tag{15.43}$$

Mais chacun des facteurs du produit est soumis à l'encadrement (15.42), donc

$$(\ell - \epsilon)^{n-N} \leqslant \frac{u_n}{u_N} \leqslant (\ell + \epsilon)^{n-M}, \tag{15.44}$$

et donc, en multipliant par $u_N > 0$ nous avons

$$u_N(\ell - \epsilon)^{n-N} \leqslant u_n \leqslant u_N(\ell + \epsilon)^{n-M}. \tag{15.45}$$

La fonction $t \mapsto t^{1/n}$ est croissante [5] ; nous pouvons l'appliquer aux inégalités sans changer le sens :

$$u_N^{1/n}(\ell - \epsilon)^{\frac{n-N}{n}} \leqslant u_n^{1/n} \leqslant u_N^{1/n}(\ell + \epsilon)^{\frac{n-N}{n}}. \tag{15.46}$$

5. Proposition 12.407.

Pour rappel, à ce point le N est fixé pour correspondre au $\epsilon < \ell$ que nous avons choisi.

Vu que $1/n \in \mathbb{Q}$ nous invoquons la proposition 12.397 pour dire que $\lim_{n\to\infty} u_N^{1/n} = 1$. De plus $(n-N)/n \to 1$ de telle sorte que

$$(\ell \pm \epsilon)^{\frac{n-N}{n}} \to \ell \pm \epsilon. \tag{15.47}$$

Nous considérons donc un N' tel que pour tout $n \geqslant N'$ nous ayons

$$\left| u_N^{1/n}(\ell - \epsilon)^{\frac{n-N}{n}} - (\ell - \epsilon) \right| < \epsilon \tag{15.48a}$$

$$\left| u_N^{1/n}(\ell + \epsilon)^{\frac{n-N}{n}} - (\ell + \epsilon) \right| < \epsilon. \tag{15.48b}$$

Pour tout $n \geqslant \max(N, N')$ nous avons

$$(\ell - \epsilon) - \epsilon < u_N^{1/n}(\ell - \epsilon)^{\frac{n-N}{n}} \leqslant u_n^{1/n} \leqslant u_N^{1/n}(\ell + \epsilon)^{\frac{n-N}{n}} < (\ell + \epsilon) + \epsilon. \tag{15.49}$$

Donc,

$$\ell - 2\epsilon \leqslant u_n^{1/n} \leqslant \ell + 2\epsilon. \tag{15.50}$$

Cela prouve que la limite $\lim_{n\to\infty} u_n^{1/n}$ existe et vaut ℓ.

Et si $\ell = 0$? Dans ce cas, il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$ nous avons

$$0 \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} < \epsilon. \tag{15.51}$$

Ensuite il faut recommencer tous les calculs, avec pour seule différence que tous les membres de gauche sont 0. □

Lemme 15.22 (Règle de Cauchy[396, 395]).
Soit une suite (x_n) dans un espace vectoriel normé. Nous posons

$$p = \limsup_{n\to\infty} \|x_n\|^{1/n}. \tag{15.52}$$

Alors :

(1) Si $p < 1$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est absolument convergente.

(2) Si $p > 1$, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est ne converge pas.

Démonstration. En deux parties.

(i) **Pour (1)** Soit $\epsilon > 0$ tel que $p + \epsilon < 1$. Le lemme 10.42 nous dit que l'ensemble

$$S_\epsilon = \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \|x_n\|^{1/n} \geqslant p + \epsilon\} \tag{15.53}$$

est fini. Quitte à prendre une queue de suite, nous supposons que S_ϵ est vide, c'est à dire que $\|x_n\| < (p+\epsilon)^n$ pour tout n. En posant $q = p + \epsilon$, nous voyons que $\|x_n\| < q^n$ avec $q < 1$. La comparaison avec la série géométrique 11.119(1) conclu.

(ii) **Pour (2)** Alors en prenant ϵ tel que $p - \epsilon > 1$, nous avons une infinité de termes vérifiant $\|x_n\| > (p-\epsilon)^n > 1$.

□

Théorème 15.23 (Formule de Hadamard[397]).
Le rayon de convergence[6] de la série entière $\sum_n c_n z^n$ est donné par une des deux formules

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[k]{|a_k|} \tag{15.54}$$

ou

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \tag{15.55}$$

lorsque a_k est non nul à partir d'un certain k.

Si une de ces formules donne $1/R = 0$, alors le rayon de convergence est infini.

6. Définition 15.11.

Démonstration. En deux, voire quatre parties. Nous allons utiliser le corolaire 15.18, en commençant par supposer que la limite supérieure n'est ni 0 ni ∞.

(i) **Première formule, si $|z| < R$** Posons $L = \limsup_{n\to\infty} \big(|a_n|^{1/n}\big)$. Si $|z| < \frac{1}{L}$, alors

$$\limsup |a_n z^n|^{1/n} = \limsup |a_n|^{1/n}|z| < L\frac{1}{L} = 1 \tag{15.56}$$

donc la règle de Cauchy du lemme 15.22 conclut à la convergence de la série.

(ii) **Première formule, si $|z| > R$** C'est exactement le même calcul, mais l'inégalité arrive dans l'autre sens :

$$\limsup |a_n z^n|^{1/n} = \limsup |a_n|^{1/n}|z| > L\frac{1}{L} = 1 \tag{15.57}$$

donc la règle de Cauchy du lemme 15.22 conclut à la divergence de la série.

(iii) **Première formule, si la limite est 0** Si $\limsup \sqrt{|a_k|}^{1/k} = 0$, alors toujours le même calcul donne :

$$\limsup |a_n z^n|^{1/n} = 0 \tag{15.58}$$

et donc la série converge pour tout z. D'où le rayon de convergence infini.

(iv) **Première formule, si la limite est ∞** Soit $z \in \mathbb{C}$. La partie

$$S = \{n \in \mathbb{N} \text{ tel que } |a_n|^{1/n} > 1/|z|\} \tag{15.59}$$

est infinie. Pour chaque $n \in S$, nous avons $|a_n z^n| > 1$. La suite des $a_n z^n$ ne convergent pas vers zéro (il y a même une infinité de termes plus grands que 1), la série ne peut pas converger (proposition 11.88).

(v) **Seconde formule** Le lemme 15.21 nous ramène au cas de la première formule.

□

Notons que le critère d'Abel ne dit rien pour les points tels que $|z - z_0| = R$. Il faut traiter ces points au cas par cas. Et le pire, c'est qu'une série donnée peut converger pour certain des points sur le bord du disque, et diverger en d'autres. Le théorème d'Abel radial (théorème 15.38) nous donnera quelques informations sur le sujet.

Il y a un dessin à la figure 15.1.

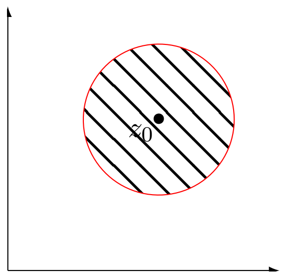


FIGURE 15.1 – À l'intérieur du disque de convergence, la convergence est absolue. En dehors, la série diverge. Sur le cercle proprement dit, tout peut arriver.

Si les suites a_n et b_n sont équivalentes, alors les séries correspondantes auront le même rayon de convergence. Cela ne signifie pas que sur le bord du disque de convergence, elles aient même comportement. Par exemple nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n}. \tag{15.60}$$

En même temps, en $z = -1$ la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}} \tag{15.61}$$

converge par le critère des séries alternées [7]. Par contre la série

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^n}{n}\right)z^n \tag{15.62}$$

ne converge pas pour $z=-1$.

Exemple 15.24.
Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ et considérons la série $\sum_{n\geqslant 1}a_nz^n$ où a_n est la n-ième décimale de α. Si α est un nombre décimal limité, la suite (a_n) est finie et le rayon de convergence est infini. Sinon, pour tout N il existe un $n>N$ tel que $a_n\neq 0$ et la suite (a_n) ne tend pas vers zéro. Par conséquent la série

$$\sum_n a_nz^n \tag{15.63}$$

diverge pour $z=1$ et le rayon de convergence satisfait $R\leqslant 1$. Nous avons aussi $|a_n|\leqslant 9$, de telle manière à ce que la série soit bornée et par conséquent majorée en module par $9z^n$, ce qui signifie que $R\geqslant 1$.

Nous déduisons alors $R=1$. △

15.2.2 Somme et produit de séries

Théorème 15.25.
Soient $\sum_n a_nz^n$ et $\sum b_nz^n$ deux séries de rayon de convergences respectivement R_a et R_b. Si R_s est le rayon de convergence de $\sum_n(a_n+b_n)z^n$, nous avons

$$R_s\geqslant\min\{R_a,R_b\}. \tag{15.64}$$

Théorème 15.26.
Soient $\sum_n a_nz^n$ et $\sum b_nz^n$ deux séries de rayon de convergences respectivement R_a et R_b.

(1) Si $\lambda\neq 0$ la série $\sum_n(\lambda a_n)z^n$ a le même rayon de convergence que la série $\sum_n a_nz^n$

(2) Si $|z|<R_a$ nous avons

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n)z^n=\lambda\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n. \tag{15.65}$$

Lemme 15.27 ([1])**.**
Soient deux suites de nombres complexes (a_n) et (b_n). Soit $n\in\mathbb{N}$. Nous avons :

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}a_lb_{k-l}=\sum_{l=0}^{n}\big(\sum_{j=0}^{n-l}b_j\big)a_l. \tag{15.66}$$

Démonstration. Le problème est qu'à gauche la borne de la somme sur l dépend de k ; cela nous empêche de permuter les sommes [8]. Qu'à cela ne tienne : nous complétons la somme en introduisant

$$\sigma_{lk}=\begin{cases}1 & \text{si } l\leqslant k\\ 0 & \text{sinon .}\end{cases} \tag{15.67}$$

Nous avons alors

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}a_lb_{k-l}=\sum_{k=0}^{n}\sigma_{lk}a_lb_{k-l}=\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\sigma_{lk}a_lb_{k-l}=\sum_{l=0}^{n}\big(a_l\sum_{k=l}^{n}b_k-l\big) \tag{15.68a}$$

$$=\sum_{l=0}^{n}\big(a_l\sum_{j=0}^{n-l}b_j\big)=\sum_{l=0}^{n}\big(\sum_{j=0}^{n-l}b_j\big)a_l. \tag{15.68b}$$

□

7. Théorème 11.124.
8. Vu que toutes les sommes sont finies, ce ne sont certainement pas les questions de convergence qui nous retiennent.

Lemme 15.28 ([1]).
Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a un rayon de convergence R, alors nous avons

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\Big) z = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1} \tag{15.69}$$

et les rayons de convergences sont égaux à R.

Proposition 15.29 ([398]).
Soient (a_n) et (b_n) des suites dans $\mathbb{C}$. Nous supposons que $\sum_n a_n$ est absolument convergente[9] *et que $\sum_n b_n$ est convergente.*

Alors en posant

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \tag{15.70}$$

la série $\sum_n c_n$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \Big(\sum_i a_i\Big)\Big(\sum_j b_j\Big). \tag{15.71}$$

Démonstration. Nous commençons par quelques notations sur les sommes partielles et leurs limites. Nous posons $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_n$ et nous avons, par hypothèse, les convergences $A_n \xrightarrow{\mathbb{C}} A$ et $B_n \xrightarrow{\mathbb{C}} B$.

En ce qui concerne la somme partielle pour les (c_n), en appliquant le lemme 15.27,

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} = \sum_{l=0}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{n-l} b_j\Big) a_l = \sum_{l=0}^{n} a_l B_{n-l}. \tag{15.72}$$

Soit $\epsilon > 0$.

(i) **Des indices assez grands** Nous définissons $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ de la façon suivante :

— Vu que $B_j \to B$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $j \geqslant N_1$, $|B_j - B| \leqslant \epsilon$.

— Vu que $\sum_n a_n$ converge, la proposition 11.88 nous dit que $|a_i| \to 0$ (ce n'est pas ici que nous utilisons la convergence absolue). Il existe donc $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $|a_i| \leqslant \epsilon/N_1$ pour tout $i \geqslant Nfrm{-}e$.

— Nous considérons $N \geqslant N_1 + N_2$.

(ii) **Un majorant** Vu que la série $\sum_n a_n$ converge absolument, la somme $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ est bornée. De même, la suite $j \to |B_j - B|$ est bornée et nous choisissons M assez grand pour majorer les deux en même temps :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < M \tag{15.73a}$$

$$|B_j - B| < M \quad \forall j. \tag{15.73b}$$

(iii) **Et on calcule un peu** Nous avons assez préparé de notations et de majorations. C'est le

9. Définition 11.80.

moment de prouver que $C_n - A_nB \to 0$. Nous avons

$$
\begin{aligned}
|C_n - A_nB| &= |\sum_{l=0}^{n} a_k(B_{n-l-B})| && (15.74a)\\
&\leqslant \sum_{l=0}^{n} |a_l||B_{n-l} - B| && (15.74b)\\
&= \sum_{l=0}^{n-N_1} |a_l||B_{n-l}| + \sum_{l=n-N_1+1}^{n} |a_l||B_{n-l} - B| && (15.74c)\\
&\leqslant \sum_{l=0}^{n-N_1} |a_l|\epsilon + M \sum_{l=n-N_1+1}^{n} |a_l| && (15.74d)\\
&\leqslant \epsilon M + M \sum_{l=n-N_1+1}^{n} \frac{\epsilon}{N_1} && (15.74e)\\
&= 2\epsilon M. && (15.74f)
\end{aligned}
$$

Justifications :

— Pour (15.74d). Dans la première somme, $n-l \geqslant n-(n-N_1) = N_1$, donc $|B_{n-l}-B| \leqslant \epsilon$. Dans la seconde somme nous avons seulement majoré $|N_{n-l} - B| \leqslant M$.

— Pour (15.74e). Dans la première somme, il s'agit de la majoration (15.73a). Dans le seconde somme, $l \geqslant n - N_1 + 1 \geqslant N_1 + N_2 - N_1 + 1 \geqslant N_2 + 1$, ce qui implique $|a_l| \leqslant \epsilon/N_1$.

— Pour (15.74f). La somme contient $n - (n - N_1 + 1) + 1 = N_1$ termes. Chaque terme valant ϵ/N_1.

(iv) **Conclusion** Nous avons prouvé que pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que $|C_n - A_nB| \leqslant \epsilon$. Nous écrivons maintenant

$$C_n = (C_n - A_nB) + A_nB \tag{15.75}$$

Vu que $C_n - A_nB \to 0$ et que $A_nB \to AB$, la somme des deux suites converge vers[10] $0 + AB = A$ et donc

$$C_n \to AB. \tag{15.76}$$

□

Le théorème suivant donne une formule (dit « produit de Cauchy ») pour le produit de deux séries entières. Nous en donnons une adaptation dans le cas de séries de puissances dans une algèbre normée dans la proposition 11.92.

Théorème-Définition 15.30 (Produit de Cauchy dans $\mathbb{C}$[399]).
Soient $\sum_n a_nz^n$ et $\sum b_nz^n$ deux séries de rayon de convergences respectivement R_a et R_b. La série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}\right) z^n. \tag{15.77}$$

*est le **produit de Cauchy** des séries $\sum_n a_nz^n$ et $\sum_n b_nz^n$.*

Nous notons R_p le rayon de convergence de la série.

(1) Nous avons l'inégalité $R_p \geqslant \min\{R_a, R_b\}$.

(2) Si $|z| < \min\{R_a, R_b\}$ alors

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i+j=n} a_ib_j\right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_nz^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_nz^n\right). \tag{15.78}$$

10. C'est la proposition 10.26.

Démonstration. En plusieurs parties.

(i) **Préambule** Nous allons fixer z, et utiliser la proposition 15.29. Ce que nous appelons a_n là-bas est $a_n z^n$ ici. Idem pour les b_n qui sont $b_n z^n$ et c_n qui devient $c_n z^n$. Vu que z sera fixé, tout cela n'est pas très profond.

Ces substitutions sont très courantes lorsque nous prouvons des résultats sur les séries entières comme corolaires de résultats généraux sur les séries.

(ii) **Pour (1)** Si $|z| < \min\{R_a, R_b\}$, alors les séries $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ sont absolument convergentes par lemme d'Abel 15.17. La proposition 15.29 pour les suites $(a_n z^n)$ et $(b_n z^n)$ fait alors le boulot : en posant

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k}, \tag{15.79}$$

la série $\sum_n c_n z^n$ converge et vaut le produit des deux.

Vu que la série $\sum_n c_n z^n$ converge sur $\{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < \min\{R_a, R_b\}\}$. Donc en posant $r < \min\{R_a, R_b\}$, la suite $(c_n r^n)$ est bornée (dans $\mathbb{C}$) et nous avons que $R_p \geqslant r$ (utilisation très littérale de la définition du rayon de convergence). Donc $R_p \geqslant \min\{R_a, R_b\}$.

(iii) **Pour (2)** Le travail est déjà fait.

□

Exemple 15.31.
Montrons un produit de Cauchy dont le rayon de convergence est strictement plus grand que le minimum. D'abord nous considérons

$$A = 1 - z, \tag{15.80}$$

c'est-à-dire $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_{n\geqslant 2} = 0$ avec $R_a = \infty$. Ensuite nous considérons

$$B = \sum_n z^n, \tag{15.81}$$

c'est-à-dire $B = (1-z)^{-1}$ et $R_b = 1$. Le produit de Cauchy de ces deux séries valant 1, le rayon de convergence est infini.

Notons qu'alors l'égalité (15.78) a lieu dans $B(0,1)$, mais pas au-delà.

Donc le « produit de Cauchy » de deux séries peut ne pas être égal au produit des deux séries, au sens où il est possible que le produit existe là où une des deux séries n'existe plus. △

Exemple 15.32.
Nous montrons que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2} \tag{15.82}$$

pour $x \in \left]-1,1\right[$.

Étant donné que pour tout r dans $\left]-1,1\right[$ la suite $(n+1)r^n$ est bornée, le rayon de convergence est correct. Pour les x dans ce domaine nous avons

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)}\frac{1}{(1-x)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} z^m\right). \tag{15.83}$$

Nous devons expliciter ce produit de Cauchy en utilisant le théorème 15.30. Pour tout i nous avons $a_i = b_i = 1$. Par conséquent le produit (15.83) devient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n. \tag{15.84}$$

△

Nous voulons maintenant faire le produit de Cauchy à plus que deux facteurs. Pour cela nous prouvons d'abord un certain nombre de lemmes traitant de la combinatoire du problème.

Nous posons, pour $n, N \in \mathbb{N}$:

$$V_n(N) = \{x \in \mathbb{N}^N \text{ tel que } \sum_{i=1}^{N} x_i = n\}. \tag{15.85}$$

Lemme 15.33.
Nous avons

$$V_n(N+1) = \bigcup_{y=0}^{n} \bigcup_{x \in V_y(N)} (x, n-y). \tag{15.86}$$

Démonstration. En deux parties.

(i) **Première inclusion** Un élément de $\bigcup_{y=0}^{n} \bigcup_{x \in V_u(N)} (x, n-y)$ est un élément $z \in \mathbb{N}^{N+1}$ de la forme $z = (x, n-y)$ tel que $x \in V_y(N)$. Donc

$$\sum_{i=1}^{N+1} z_i = \sum_{i=1}^{N} x_i + (n-y) = y + n - y = n. \tag{15.87}$$

Donc $z \in V_n(N+1)$.

(i) **L'autre inclusion** Un élément de $V_n(N+1)$ est de la forme $z = (x, y)$ avec $x \in \mathbb{N}^N$ et $y \in \mathbb{N}$. Posons $t = \sum_{i=1}^{N} x_i$, de telle sorte que $x \in V_t(N)$.
Vu que $z \in V_n(N+1)$ nous avons d'autre part $y = n - \sum_{i=1}^{N} x_i = n - t$.

□

La proposition suvante généralise le produit de Cauchy du théorème 15.30 au cas de plus de deux facteurs. Nous ne pouvons cependant pas considérer 15.30 comme un cas particulier de 15.34, parce que la démonstration va utiliser le cas à deux facteurs.

Proposition 15.34 (Produit de Cauchy[1])**.**
Soient des nombres complexes a_{ik} tels que les séries entières

$$s_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik} z^k \tag{15.88}$$

soient convergentes avec un rayon de convergence R_i. Nous posons

$$c_n = \sum_{x \in V_n(N)} \prod_{i=1}^{N} a_{ix_i}, \tag{15.89}$$

et nous appelons R_p le rayon de convergence de la série $\sum_n c_n z^n$.

(1) Nous avons l'inégalité $R_p \geqslant \min\{R_i\}$.

(2) Pour $|z| \leqslant \min\{R_i\}$ nous avons l'égalité

$$\prod_{i=1}^{N} s_i(z) = \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{x \in V_n(N)} \prod_{i=1}^{N} a_{ix_i} \right) z^n. \tag{15.90}$$

Démonstration. Nous prouvons cela par récurrence sur N. D'abord pour $N = 1$ nous avons $V_n(1) = \{n\}$. Donc $c_n = \prod_{i=1}^{1} a_{ix_i} = a_{1n}$ et donc la série à droite dans (15.90) est seulement $\sum_{n=0}^{\infty} a_{1n} z^n = s_1(z)$.

Nous supposons le théorème prouvé pour touttes valeurs jusqu'à N et nous prouvons pour $N+1$. Si $|z| < \min\{R_i\}$ alors toutes les séries convergent et en utilisant l'associativité du produit dans $\mathbb{C}$ nous avons :

$$\prod_{i=1}^{N+1} s_i(z) = \left(\prod_{i=1}^{N} s_i(z)\right) s_{N+1}(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{x\in V_n(N)}\prod_{i=1}^{N} a_{ix_i}\right) z^n s_{N+1}(z). \tag{15.91}$$

Nous allons maintenant utilliser le produit de Cauchy à deux termes du théorème 15.29. Notez que c'est bien l'utilisation de ce théorème qui nous permet d'obtenir la convegence dans notre pas de récurrence, et non l'hypothèse de réccurence actuelle. Bref, nous posons

$$b_{1k} = \sum_{x\in V_k(N)}\prod_{i=1}^{N} a_{ix_i} \tag{15.92a}$$

$$b_{2k} = a_{N+1,k}. \tag{15.92b}$$

L'utilisation du produit de Cauchy à deux facteurs donne le coefficient de z^n sous la forme suivante :

$$c_n = \sum_{y\in V_n(2)} b_{1y_1}b_{2y_2} = \sum_{y=V_n(2)}\sum_{x\in V_{y_1}(N)}\prod_{i=1}^{N} a_{ix_i}a_{N+1,y_2} \tag{15.93a}$$

$$= \sum_{y=0}^{n}\sum_{x\in V_n(N)}\prod_{i=1}^{N} a_{ix_i}a_{N+1,n-y} \tag{15.93b}$$

$$= \sum_{(x,y)\in A_n(N+1)}\prod_{i=1}^{N} a_{ix_i}a_{N+1,y} \tag{15.93c}$$

$$= \sum_{x\in V_n(N+1)}\prod_{i=1}^{N+1} a_{ix_i}. \tag{15.93d}$$

Justifications :

— Pour (15.93b). L'ensemble $V_n(2)$ n'est pas très compliqué à expliciter :

$$V_n(2) = \{(y, n-y) \text{ tel que } y = 0,\ldots,n\}. \tag{15.94}$$

— Pour (15.93c). La somme porte sur les (x,t) avec $x\in\mathbb{N}^N$ et $y\in\mathbb{N}$ tels que (x,y) est dans $V_n(N+1)$, et la justification de l'égalité est le lemme 15.33.

□

15.2.3 Convergence normale

Théorème 15.35.
Une série entière converge normalement sur tout disque fermé inclus au disque de convergence.

Démonstration. Toute boule fermée inclue à $B(0,R)$ est inclue à la boule $\overline{B(0,r)}$ pour un certain $r<R$. Nous nous concentrons donc sur une telle boule fermée.

Pour chaque n nous posons $u_n(z) = a_nz^n$ que nous voyons comme une fonction sur $\overline{B(0,r)}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $z\in\overline{B(0,r)}$ nous avons

$$\|u_n\|_\infty \leqslant |a_nz^n| \leqslant |a_n|r^n. \tag{15.95}$$

Étant donné que $r<R$ la série $\sum_n |a_n|r^n$ converge et la série $\sum_n\|u_n\|$ est convergente. La série $\sum_n a_nz^n$ est alors normalement convergente. □

Exemple 15.36.
Encore une fois nous n'avons pas d'informations sur le comportement au bord. Par exemple la série $\sum_n z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$, mais $\sup_{z\in B(0,1)} |z^n| = 1$ et nous n'avons pas de convergence normale sur la boule fermée. △

La convergence normale n'est donc pas de mise sur tout l'intérieur du disque de convergence. La continuité, par contre est effective sur la boule. En effet si $z_0 \in B(0,R)$ alors il existe un rayon $0 < r < R$ tel que $B(z_0,r) \subset B(0,R)$. Sur $B(z_0,r)$ nous avons convergence normale et donc continuité en z_0.

La différence est que la continuité est une propriété locale tandis que la convergence normale est une propriété globale.

Proposition 15.37.
Soit $f(z) = \sum_n a_n z^n$ avec un rayon de convergence R. Si $\sum |a_n| R^n$ converge alors

(1) la série $\sum_n a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{B(0,R)}$,

(2) f est continue sur $\overline{B(0,R)}$.

Démonstration. La conclusion est claire dans l'intérieur du disque de convergence. En ce qui concerne le bord, chacune des sommes partielles est une fonction continue. De plus nous avons $\|u_n\| \leqslant |a_n|R^n$, dont la série converge. Par conséquent nous avons convergence normale sur le disque fermé. □

Le théorème suivant permet de donner, dans le cas de fonctions réelle, des informations sur la convergence en une des deux extrémités de l'intervalle de convergence.

Théorème 15.38 (Convergence radiale de Abel)**.**
Soit $f(x) = \sum_n a_n x^n$ une série réelle de rayon de convergence $0 < R < \infty$.

(1) Si $\sum a_n R^n$ converge, alors f est continue sur $[0,R]$.

(2) Si $\sum_n a_n (-R)^n$ converge, alors f est continue sur $[-R,0]$.

La proposition 15.97 donnera un exemple d'utilisation pour la série de $\ln(1-x)$ (qui n'est pas encore définie à ce moment).

Le résultat suivant permet d'identifier deux séries complexes lorsque leurs valeurs sur $\mathbb{R}$ sont identiques.

Proposition 15.39.
Soient les séries $f(z) = \sum a_n z^n$ et $g(z) = \sum b_n z^n$ convergentes dans $B(0,R)$. Si $f(x) = g(x)$ pour $x \in [0,R[$ alors $a_n = b_n$.

Démonstration. Soit n_0 le plus petit entier tel que $a_{n_0} \neq b_{n_0}$. Pour tout $z \in B(0,R)$ nous avons

$$f(z) - g(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n - b_n) z^n = z^{n_0} \varphi(z) \tag{15.96}$$

où

$$\varphi(z) = \sum_{n\geqslant 0} (a_{n+n_0} - b_{n+n_0}) z^n. \tag{15.97}$$

Par le théorème 15.25 le rayon de convergence de φ est plus grand que R et la fonction φ est continue en 0. Étant donné que $\varphi(0) = a_{n_0} - b_{n_0} \neq 0$ et que φ est continue nous avons un ρ tel que $\varphi \neq 0$ sur $B(0,\rho)$. Or cela n'est pas possible parce que au moins sur la partie réelle de cette dernière boule, φ doit être nulle. □

Proposition 15.40 ([400, 1])**.**
Si la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ a un rayon de convergence R alors

(1) La somme est une fonction holomorphe[11] dans le disque de convergence.

11. Définition 12.316.

(2) La somme est différentiable et

$$du_{z_0}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1} z. \tag{15.98}$$

(3) De plus pour tout $z_0 \in B(0,R)$, on pose[12]

$$S(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n \tag{15.99a}$$

$$T(z) = \sum_{n \geqslant 1} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n. \tag{15.99b}$$

Alors nous avons

$$\lim_{z \to z_0} \frac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0} = T(z_0). \tag{15.100}$$

Démonstration. Nous allons prouver, en utilisant le théorème 15.8, que la somme est une fonction différentiable et que la différentielle est $\mathbb{C}$-linéaire. La proposition 12.322 nous dira alors que la somme est $\mathbb{C}$-dérivable.

Nous posons $u_n(z) = a_n z^n$, qui est une fonction de classe C^1. En ce qui concerne sa différentielle nous considérons $z_0 \in B(0,R)$ et nous avons (si $n = 0$ alors la différentielle est nulle)

$$\begin{aligned}
(du_n)_{z_0}(z) &= \frac{d}{dt}\Big[u_n(z_0 + tz)\Big]_{t=0} && (15.101a)\\
&= \frac{d}{dt}\Big[a_n(z_0 + tz)^n\Big]_{t=0} && (15.101b)\\
&= \frac{d}{dt}\Big[n a_n (z_0^{n-1} tz)\Big]_{t=0} && (15.101c)\\
&= n a_n z_0^{n-1} z. && (15.101d)
\end{aligned}$$

En cours de calcul nous avons développé $(z_0 + tz)^n$ et gardé seulement les termes de degré 1 en t. Il y en a n et ils sont tous égaux à $z_0^{n-1} tz$.

La convergence simple $\sum_n u_n$ est dans les hypothèses. Il reste à prouver que la somme des différentielles converge uniformément sur tout compact autour de z_0 ne débordant pas du disque ouvert de convergence. Soit K un compact autour de z_0. Dans le calcul suivant nous utilisons une première fois la norme uniforme de du_n vu comme fonction de K vers $\mathcal{L}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ et une fois la norme opérateur[13] de $(du_n)_{z_0}$ comme application linéaire $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
\|du_n\|_k &= \sup_{z_0 \in K} \|(du_n)_{z_0}\| && (15.102a)\\
&= \sup_{z_0 \in K} \sup_{|z|=1} |(du_n)_{z_0}(z)| && (15.102b)\\
&= \sup_{z_0 \in K} \sup_{|z|=1} |n a_n z_0^{n-1} z| && (15.102c)\\
&= \sup_{z_0 \in K} n|a_n||z_0|^{n-1}. && (15.102d)
\end{aligned}$$

Vu que $z \mapsto |z|^{n-1}$ est une application continue sur le compact K, elle atteint son maximum (théorème 7.126). Nous considérons z_K, un point qui réalise le supremum. Ce nombre est dans le disque de convergence parce que K est un compact autour de z_0.

Nous devons prouver que $\sum_n n|a_n||z_K|^{n-1}$ converge. Vu que $|z_K|$ est une constante (par rapport à n) nous pouvons étudier la convergence en écrivant $|z_K|^n$ au lieu de $|z_K|^{n-1}$.

La suite $(a_n|z_K|^n)$ est une suite bornée. Soit M tel que $|a_n||z_K|^n < M$ pour tout n. Nous considérons de plus r de telle sorte que $K \subset B(0,r) \subset B(0,R)$. En particulier $|z_K| < r$ et nous avons

$$n|a_n||z_K|^n \leqslant n|a_n|r^n \left(\frac{|z_K|}{r}\right)^n \leqslant nM\left(\frac{|z_K|}{r}\right)^n. \tag{15.103}$$

12. Pour rappel, dans tout ce texte, $B(a,r)$ est une boule *ouverte*.
13. Définition 11.50.

Nous savons que ce qui est dans la parenthèse est plus petit que 1, mais que $\sum_n nx^n$ converge dès que $|x| < 1$. Par conséquent

$$\sum_n \|du_n\|_K \tag{15.104}$$

converge et le théorème 15.8 fonctionne : $du = \sum_{n=1}^{\infty} du_n$ et la somme $\sum_n u_n$ est de classe C^1.

La différentielle de $\sum_n u_n$ s'exprime explicitement par

$$du_{z_0}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z_0^{n-1} z. \tag{15.105}$$

Cette forme montre que du_{z_0} est une application $\mathbb{C}$-linéaire et donc la somme est $\mathbb{C}$-dérivable par la proposition 12.322. Ergo holomorphe sur le disque de convergence par définition 12.316.

En ce qui concerne la formule (15.100), elle provient de la formule (12.863) : $f'(z_0)$ est donné par la facteur multiplicatif de du_{z_0}. En l'occurrence la formule (15.105) nous donne

$$f'(z_0) = \sum_{n\geqslant 1} na_n z_0^{n-1}. \tag{15.106}$$

□

15.2.4 Dérivation

Lemme 15.41.
Soit une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R. Les séries

$$\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} \tag{15.107}$$

et

$$\sum_{n\geqslant 1} na_n z^{n-1} \tag{15.108}$$

ont même rayon de convergence R.

Notons toutefois que nonobstant ce lemme, les séries dont il est question peuvent se comporter différemment sur le bord du disque de convergence. En effet la série

$$\sum \frac{1}{n} z^n \tag{15.109}$$

diverge pour $z = 1$ alors que

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} z^{n+1} \tag{15.110}$$

converge pour $z = 1$.

Les théorèmes de dérivation et d'intégration de séries de fonctions (théorèmes 15.1 et 15.3) fonctionnent bien dans le cas des séries entières. Ils donnent la proposition 15.42 pour la dérivation et 15.47 pour l'intégration.

Proposition 15.42.
Soit la série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{15.111}$$

de rayon de convergence R. Alors la fonction f est C^1 sur $]-R, R[$ et se dérive terme à terme :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \tag{15.112}$$

pour tout $x \in]-R, R[$.

Démonstration. Nous savons que la série $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ a le même rayon de convergente que celui de la série f. En particulier cette série des dérivées converge normalement sur tout compact dans $]-R, R[$ et la somme est continue. Le théorème 15.3 conclu. □

Remarque 15.43.
À part lorsqu'on parle de fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la notion de classe C^k s'entend au sens de la différentielle, et non de la dérivée, voir les définitions 11.170. C'est cela qui explique la structure de la démonstration de la proposition 15.40.

Corolaire 15.44 ([400, 1])**.**
La somme d'une série entière est de classe C^∞ sur le disque ouvert de convergence.

Démonstration. La proposition 15.40 a démontré en réalité nettement plus : sur le disque ouvert de convergence, la somme est une fonction holomorphe. Il n'est cependant pas possible de conclure ainsi parce que le fait qu'une fonction holomorphe est C^∞ ne sera démontré qu'au coût de nombreux efforts dans le théorème 26.15(3).

(i) **Cas réel** Nous considérons la série entière $\sum_n a_n x^n$ pour $x \in \mathbb{R}$ de rayon de convergence R. Une simple récurrence sur la proposition 15.42 donne le résultat.

(ii) **Cas complexe** Attention : le fait d'être de classe C^k est le fait d'être k fois *différentiable.* Rien à voir avec la $\mathbb{C}$-dérivabilité.

En ce qui concerne la différentiabilité nous avons la proposition 15.40 qui dit que dans le disque de convergence, la fonction $u(z) = \sum_n a_n z^n$ a pour différentielle l'application $du \colon \mathbb{C} \to \mathcal{L}_\mathbb{C}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} du \colon \mathbb{C} &\to \mathcal{L}_\mathbb{C}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \\ du_{z_0}(z) &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z_0^n \Big) z. \end{aligned} \tag{15.113}$$

Nous allons éviter de considérer la différentielle seconde comme une application

$$d^2 u \colon \mathbb{C} \to \mathcal{L}\big(\mathbb{C}, \mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{C})\big) \tag{15.114}$$

parce que ça nous mènerait trop loin pour parler de la différentielle k^{e}. Au lieu de cela nous allons considérer l'isomorphisme d'espace vectoriel

$$\begin{aligned} \psi \colon \mathbb{C} &\to \mathcal{L}_\mathbb{C}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \\ z_0 &\mapsto \psi(z_0) z = z_0 z. \end{aligned} \tag{15.115}$$

Dans cette optique nous écrivons :

$$du_{z_0} = \psi\Big(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z_0^n \Big) \tag{15.116}$$

ou encore :

$$(\psi^{-1} \circ d) u(z_0) = \sum_{n \geqslant 0} (n+1) a_{n+1} z_0^n. \tag{15.117}$$

Nous allons prouver par récurrence que l'égalité suivante est vraie (y compris le fait que la somme converge) :

$$(\psi^{-1} \circ d)^k u(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} z_0^n. \tag{15.118}$$

Prouvons d'abord que cette somme converge pour tout k. Nous avons $(n+k)!/n! < (n+k)^k$ et donc il suffit de prouver que la série de coefficients $n^k a_n$ converge. C'est le cas par la proposition 15.19.

Nous pouvons calculer la différentielle de $(\psi^{-1}\circ d)^k u$ en dérivant terme à terme en utilisant (encore) la proposition 15.40(2) :

$$d\big((\psi^{-1}\circ d)^k u\big)_{z_0}(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+k)!}{n!}a_{n+k}na_0^{n-1}z \tag{15.119a}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k+1)!}{n!}a_{n+k+1}z_0^n z. \tag{15.119b}$$

Nous appliquons ψ^{-1} à cela :

$$(\psi^{-1}\circ d)^{k+1}u(z_0) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k+1)!}{n!}a_{n+k+1}z_0^n. \tag{15.120}$$

(iii) **<u>Dérouler à l'envers</u>** Nous allons maintenant utiliser la proposition 12.284 pour montrer que u est de classe C^k pour tout k. Nous avons démontré que $(\psi^{-1}\circ d)^k u$ était différentiable. Par conséquent, $d\big((\psi^{-1}\circ d)^{k-1}u\big)$ est différentiable et donc $(\psi^{-1}\circ d)^{k-1}$ est de classe C^1. En continuant ainsi, $(\psi^{-1}\circ d)^{k-l}u$ est de classe C^l et u est de classe C^k.

□

Le lemme suivant est encore essentiellement valable dans un espace de Banach (proposition 11.201).

Lemme 15.45.
Plusieurs choses sur des séries entières.

(1) *La série entière $\sum_{n\geqslant 0} z^{nk}$ a un rayon de convergence 1 et converge vers la fonction*

$$\sum_{n\geqslant 0} z^{nk} = \frac{1}{1-z^k}. \tag{15.121}$$

(2) *Lorsque $|\omega| = 1$, la série*

$$\frac{1}{\omega - z} = \sum_{k\geqslant 0}\frac{z^k}{\omega^{k+1}}. \tag{15.122}$$

a un rayon de convergence égal à 1.

(3) *Si $|\omega| = 1$, la série*

$$\frac{1}{(\omega-z)^k} = \frac{1}{(k-1)!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(s+k-1)!}{s!}\frac{z^s}{\omega^{s+k+1}} \tag{15.123}$$

a un rayon de convergence égal à 1.

Démonstration. Les coefficients de la série sont $a_n = 1$ lorsque n est multiple de k et $a_n = 0$ autrement. Donc pour $r = 1$ la suite $r^n a_n$ reste bornée [14]. Cela prouve que le rayon de convergence est au moins 1. Par ailleurs si $r > 1$ alors clairement la suite $(a_n r^n)$ n'est pas bornée. Cela prouve le rayon de convergence égal à 1.

Soit donc $z \in B(0,1)$. Nous avons, par le lemme 15.28,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{nk}\right)(1-z^k) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{nk} - \sum_{n=0}^{\infty} z^{(n+1)k} \tag{15.124a}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^{nk} - \sum_{n=0}^{\infty} z^{(n+1)k} \tag{15.124b}$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^{(n+1)k} - \sum_{n=0}^{\infty} z^{(n+1)k} \tag{15.124c}$$

$$= 1 \tag{15.124d}$$

14. Utilisation directe de la définition 15.11.

En ce qui concerne la série (15.122), elle s'obtient facilement :

$$\frac{1}{\omega - z} = \frac{1}{\omega}\frac{1}{1-\frac{z}{\omega}} = \frac{1}{\omega}\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\omega}\right)^s = \sum_s \omega^{-s-1}z^s. \tag{15.125}$$

La troisième série s'obtient en dérivant la seconde, ce qui est permis dans le disque de convergence par la proposition 15.42. □

Remarque 15.46.
Sur le bord du disque de convergence, la série $\sum_n z^{nk}$ ne converge pas. En effet le rayon étant 1, sur le bord nous avons la série $\sum_n e^{ink\theta}$ dont la norme du terme général ne tend pas vers zéro.

15.2.5 Intégration

Proposition 15.47.
Soit la série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R.

(1) Pour tout segment $[a,b] \subset]-R,R[$ nous pouvons intégrer terme à terme :

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx. \tag{15.126}$$

(2) La série entière obtenue en intégrant terme à terme a le même rayon de convergence que celui de la série de départ.

Démonstration. La première assertion est un cas particulier du théorème général 15.1. Pour le rayon de convergence, le lemme 15.41 fait le travail. □

Vu que le rayon de convergence ne varie pas par la dérivation ou par l'intégration et qu'une série entière est de classe C^∞ sur son disque de convergence, nous pouvons dériver terme à terme autant de fois que nous le voulons sans faire de fautes dans le disque de convergence.

15.3 Séries de Taylor

15.48.
Avant de commencer, une petite formule de dérivation toute simple que nous allons utiliser souvent :

$$(z^k)^{(l)} = \begin{cases} 0 & \text{si } l > k \\ \frac{k!}{(k-l)!}z^{k-l} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{15.127}$$

Dans les cas où il est permis de dériver terme à terme, nous avons la formule

$$f^{(p)}(x) = \sum_k a_k (x^k)^{(p)} = \sum_{k=p}^{\infty} a_k \frac{k!}{(k-p)!}x^{k-p} \tag{15.128}$$

15.3.1 Polynôme de Taylor d'une série entière

Le polynôme de Taylor d'une fonction définie par une série entière s'obtient en tronquant la série. Cela est une assez bonne nouvelle que nous allons démontrer maintenant.

Proposition 15.49 ([1]).
Soit une série entière

$$f(x) = \sum_k a_k x^k \tag{15.129}$$

de rayon de convergence $R > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction α telle que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \alpha(x) x^n \tag{15.130}$$

et

$$\lim_{t\to 0} \alpha(t) = 0. \tag{15.131}$$

Tout ceci étant convenu que

- *l'égalité (15.130) est uniquement valable sur le disque de convergence,*
- *La fonction α dépend de n.*

Démonstration. Le corolaire 15.44 nous indique que f est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et que nous pouvons dériver terme à terme.

En utilisant la formule (15.128) et en l'évaluant en $x = x_0$, tous les termes s'annulent sauf $k = p$:

$$f^{(p)}(0) = p! a_p. \tag{15.132}$$

Le théorème de Taylor 12.447 nous indique alors qu'il existe $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{t\to 0} \alpha(t) = 0$ et

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \alpha(x) x^n. \tag{15.133}$$

□

15.3.2 Une majoration pour le reste

Lemme 15.50.
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable $n+1$ fois sur $B(a, R)$. Alors pour tout $x \in B(a, r)$,

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \ldots \int_a^{u_{n-1}} f^{(n)}(u_n) du_n \ldots du_1. \tag{15.134}$$

Démonstration. Nous allons intensivement utiliser le théorème fondamental du calcul intégral 14.247 sous la forme de la formule (14.719). Nous avons d'abord

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(u_1) du_1 = \int_a^x \big[f'(a) + \int_a^{u_1} f''(u_2) du_2\big] du_1. \tag{15.135}$$

Toute l'astuce de ce théorème est de continuer à substituer $f^{(k)}(t)$ par $f^{(k)}(a)$ plus une intégrale de a à t de $f^{(k+1)}(u)$. Nous démontrons ainsi par récurrence que

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \ldots \int_a^{u_{n-1}} f^{(n)}(u_n) du_n \ldots du_1. \tag{15.136}$$

La preuve de cela se fait en substituant

$$f^{(n)}(u_n) = f^{(n)}(a) + \int_a^{u_n} f^{(n+1)}(u_{n+1}) du_{n+1} \tag{15.137}$$

et en remarquant (encore par récurrence par exemple) que

$$\int_a^x \ldots \int_a^{u_{n-1}} du_n \ldots du_1 = \frac{(x-a)^n}{n!}. \tag{15.138}$$

□

Le théorème suivant donne majoration du reste du polynôme de Taylor. Il est un premier pas dans la démonstration de formules comme

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x) \tag{15.139}$$

lorsque P_n est un polynôme de Taylor autour d'un point $a \neq x$. Nous ne saurions trop insister sur le fait que de telles formules ne seraient valables que pour une classe relativement restreintes de fonctions.

Théorème 15.51 (Inégalité de Taylor[401])**.**
Soit une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable $n+1$ fois et telle que $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M_N$ sur $B(a,d)$. Alors

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_n}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \tag{15.140}$$

où $R(x) = f(x) - P_n(x)$ et où P_n sont les polynômes de Taylor autour de $a \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Nous pouvons écrire la formule du lemme 15.50 pour $n+1$ au lieu de n ; cela donne

$$f(x) = P_n(x) + \int \cdots, \tag{15.141}$$

et donc

$$|R_n(x)| = |P_n(x) - f(x)| = \int_a^x \ldots \int_a^{u_n} f^{(n+1)}(x) du_n \cdots du_1 \tag{15.142}$$

En effectuant toutes les intégrales nous trouvons [15]

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_n}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}. \tag{15.143}$$

□

Cette formule pour le reste est très bien, mais pour l'exploiter au maximum de ses possibilités, il faudra la notion de convergence de suite de fonctions, et en particulier la notion de série de fonctions, pour pouvoir écrire

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} x^k \tag{15.144}$$

lorsque cela est possible. Nous renvoyons donc aux séries de Taylor, section 15.3, et en particulier aux fonctions analytiques de la sous-section 15.3.3.

15.3.3 Fonctions analytiques

Nous avons vu les polynômes de Taylor et déjà noté qu'il n'est pas en général vrai que $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$ pour des x même proches du point autour duquel les polynômes de Taylor P_n sont calculés.

Nous allons maintenant étudier la classe des fonctions pour lesquelles la série de Taylor est égale à la fonction de départ. D'abord une proposition montrant que les coefficients de Taylor sont les seuls pour lesquels il est possible d'espérer avoir une telle propriété.

Proposition 15.52 ([402])**.**
Soit une fonction donnée par la série entière

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \tag{15.145}$$

sur la boule de convergence $B(a,R)$ avec $R > 0$ (hypothèse : le rayon de convergence est strictement positif). Alors

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \tag{15.146}$$

15. Je me demande si je n'ai pas une faute entre n et $n+1$ quelque part. Relisez attentivement et écrivez-moi si vous trouvez une faute.

Démonstration. Par hypothèse, nous avons un rayon de convergence $R > 0$, et le corolaire 15.44 nous indique que f y est de classe C^∞. Et nous pouvons dériver terme à terme par la proposition 15.42. Cela pour dire qu'il nous est autorisé d'utiliser la formule (15.128) pour calculer les dérivées de f au point a. Nous avons d'abord

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} c_n \frac{n!}{(n-p)!}(x-a)^{n-p}, \tag{15.147}$$

et donc

$$f^{(p)}(a) = c_p p! \tag{15.148}$$

qui donne immédiatement le résultat. □

Proposition 15.53.
Soit l'intervalle $I = B(a,r)$. Si il existe M tel que

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{M}{r^n} n! \tag{15.149}$$

pour tout $x \in B(a,r)$. Alors nous avons la convergence simple

$$P_n \to f \tag{15.150}$$

sur $B(a,r)$. Ici, P_n est le polynôme de Taylor d'ordre n pour la fonction f autour du point a[16].

Démonstration. Vu que nous avons $|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{M}{r^n} n!$ pour tout x, nous pouvons poser

$$M_n = \frac{M}{r^n} n! \tag{15.151}$$

dans le théorème 15.51 pour le faire fonctionner. Nous avons alors

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{r^n} n! \frac{1}{(n+1)!} |x-a|^{n+1} = \frac{M}{n+1} |x-a| \left| \frac{x-a}{r} \right|^n. \tag{15.152}$$

Vu que $x \in B(a,r)$ nous avons $|x-a| < r$ et donc $|(x-a)/r|^n < 1$. Nous pouvons aussi majorer $|x-a|$ par r et écrire

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{rM}{n+1}. \tag{15.153}$$

Nous avons donc bien $\lim_{n\to\infty} R_n(x) \to 0$. □

15.4 Algèbre engendrée par une matrice

Nous allons en dire le strict minimum indispensable pour notre propos. Pour plus de détails, voir [403], et pour nettement plus de détails, [404].

Définition 15.54.
*Si $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$, alors l'**algèbre engendrée** par A est l'intersection de toutes les sous-algèbres de $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ contenant A.*

Lemme 15.55 ([403, 1])**.**
Si le polynôme minimal[17] *de A est de degré p, alors la partie $\{\mathbb{1}, A, A^2, \ldots, A^{p-1}\}$ est une base de $\mathrm{Alg}(A)$.*

16. Pour être complet, il faut préciser que P_n est calculé dans ZFC. C'est pour cela que nous n'écrivons pas des lourdeurs comme $P_{n,a}(f)(x)$; si il fallait donner tout le contexte dans la notation, on n'en sortirait pas.

Ah, et tant que j'y suis si vous ne savez pas ce qu'est ZFC, je vous déconseille fortement de répéter cela à un jury d'agrég, entre autres parce que vous allez attirer la question « vraiment ? Vous utilisez C ? Où ? Pourquoi ? ». Et là, bonne chance.

17. Toute matrice a un polynôme minimal par le lemme 9.90.

Démonstration. La partie proposée est libre parce qu'une combinaison linéaire de ses éléments est un polynôme de degré $p-1$ en A. Une annulation d'un tel polynôme serait contraire au fait que le polynôme minimal est de degré p.

Cette partie est génératrice parce que, étant elle-même une sous-algèbre de $\mathbb{M}(n)$ contenant A, elle contient $\mathrm{Alg}(A)$. □

Corolaire 15.56 ([1]).
L'algèbre $\mathrm{Alg}(A)$ *est commutative.*

Démonstration. Écrire deux combinaisons linéaires d'éléments de la base donnée par le lemme 15.55, et notez que les produits ne font intervenir que des produits de A. □

Une bonne question est de savoir si e^{tA} est dans $\mathrm{Alg}(A)$. Pour le savoir il va falloir d'abord définir l'exponentielle ; rendez-vous donc au lemme 15.59.

15.5 Exponentielle sur une algèbre normée

15.5.1 Définition

Dans ce qui suit, nous considérons une algèbre commutative.

Proposition-Définition 15.57 (Exponentielle[1]).
Soit $(A, \|.\|)$ *une algèbre*[18] *commutative de dimension finie sur* $\mathbb{C}$ *munie d'une norme d'algèbre. Pour* $x \in A$ *nous définissons*

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \tag{15.154}$$

Cette définition a les propriétés suivantes :

(1) *C'est bien défini pour tout* $x \in A$. *C'est-à-dire que pour chaque* x, *la série* (15.154) *converge.*
(2) *Cela donne une application continue* $\exp\colon A \to A$.
(3) *La fonction* $\exp$ *est différentiable et*

$$(d\exp)_x(y) = \exp(x)y, \tag{15.155}$$

le dernier produit étant la structure d'algèbre sur A.

Démonstration. Pour la différentiabilité de exp, nous voulons utiliser le théorème 15.8. Pour cela nous posons

$$u_k(x) = \frac{x^k}{k!} \tag{15.156}$$

(i) **Convergence simple** Nous prouvons la convergence simple, c'est-à-dire pour chaque x séparément, de la série (15.154) dans deux buts. D'abord de nous assurer que la définition posée de exp a un sens, et ensuite pour commencer à vérifier les hypothèses du théorème 15.8.

Nous montrons que les sommes partielles forment une suite de Cauchy. Nous fixons $x \in A$ et nous posons

$$s_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \tag{15.157}$$

Soient $p > q$, deux entiers. Nous avons :

$$\|s_p - s_q\| = \|\sum_{k=q+1}^{p} \frac{x^k}{k!}\| \leqslant \sum_{k=q+1}^{p} \frac{\|x^k\|}{k!} \leqslant \sum_{k=q+1}^{p} \frac{\|x\|^k}{k!} \tag{15.158}$$

où nous avons utilisé le fait que la norme sur A soit une norme d'algèbre.

18. Définition 1.291.

C'est le moment d'utiliser la série exponentielle donnée dans l'exemple 11.121 que nous appliquons avec $t = \|x\|$. La série donnée par les coefficients $a_k = \|x\|^k/k!$ converge et ses sommes partielles forment en particulier une suite de Cauchy. Donc ce que nous avons à droite dans (15.158) peut être rendu arbitrairement petit lorsque p et q sont grands.

(ii) **u_k est continue** Il s'agit de remarquer que $(x+h)^k = x^k + hC(x,h)$ où C est une fonction bornée de h (lorsque h est dans un voisinage de $0 \in A$). Donc

$$\|(x+h)^k - x^k\| \leqslant \|h\|\|C(x,h)\| \to 0. \tag{15.159}$$

(iii) **Candidat différentielle de u_k** Nous trouvons à présent un candidat à être différentielle de u_k. Pour cela nous faisons le calcul suivant, sans trop nous soucier de la rigueur :

$$(du_k)_x(y) = \frac{d}{dt}\Big[u_k(x+ty)\Big]_{t=0} = k\frac{1}{k!}x^{k-1}y = u_{k-1}(x)y. \tag{15.160}$$

(iv) **u_k est différentiable** Nous fixons $x \in A$ et nous posons $T(y) = u_{k-1}(x)y$. Ensuite nous vérifions que cela vérifie la définition de la différentielle : nous devons calculer

$$\lim_{h\to 0} \frac{u_k(x+h) - u_k(x) - T(h)}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^k - x^k - kx^{k-1}h}{k!\|h\|} = \clubsuit. \tag{15.161}$$

Vous vous souvenez de la formule pour $(x+h)^k$? Essayez de vous en souvenir. Le premier terme est x^k, et le second est $kx^{k-1}h$. Pour le reste c'est un polynôme dont tous les termes contiennent au moins h^2. Nous avons donc

$$\clubsuit = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 P(x,h)}{k!\|h\|} = 0. \tag{15.162}$$

Nous en concluons que u_k est différentiable et que

$$(du_k)_x(y) = u_{k-1}(x)y. \tag{15.163}$$

(v) **u_k est de classe C^1** Nous devons démontrer que la différentielle est continue ; cela est la continuité de l'application

$$\begin{aligned} du_k \colon A &\to \mathcal{L}(A,A) \\ x &\mapsto (du_k)_x. \end{aligned} \tag{15.164}$$

La topologie sur A est celle de la norme, et celle sur $\mathcal{L}(A,A)$ est celle de la norme opérateur associée à la norme sur A. Nous avons [19] :

$$\lim_{h\to 0} \|(du_k)_{x+h} - (du_k)_x\| = \lim_{h\to 0} \sup_{\|y\|=1} \|u_{k-1}(x+h)y - u_{k-1}(x)y\| \tag{15.165a}$$
$$\leqslant \lim_{h\to 0} \sup_{\|y\|=1} \|u_{k+1}(x+h) - u_{k-1}(x)\|\|y\| \tag{15.165b}$$
$$= \lim_{h\to 0} \|u_{k+1}(x+h) - u_{k-1}(x)\|. \tag{15.165c}$$

Le fait que cette limite valle zéro est maintenant la continuité de u_{k-1}.

(vi) **Convergence normale sur tout compact** Soit un compact K de A. Par le théorème de Borel-Lebesgue 10.21, K est fermé et borné. C'est pour ceci que nous avons supposé que A était de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Soit donc $R > 0$ tel que $\|y\| < R$ pour tout $y \in K$. Nous avons

$$\|du_k\|_K = \sup_{x\in K} \|(du_k)_x\| = \sup_{x\in K} \frac{\|x^{k-1}\|}{(k-1)!} \leqslant \sup_{x\in K} \frac{\|x\|^{k-1}}{(k-1)!} \leqslant \frac{R^{k-1}}{(k-1)!}. \tag{15.166}$$

Mais la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^k}{k!}$ converge. Nous avons donc la convergence normale demandée.

19. N'oubliez pas de faire à part le cas $k = 0$ parce que ce qui suit n'est correct que pour $k \geqslant 1$.

(vii) **Conclusion** Le théorème 15.8 conclu que l'exponentielle est de classe C^1 et que sa différentielle est donnée par la formule

$$(d\exp)_x(y) = \sum_{k=0}^{\infty}(du_k)_x(y) = \sum_{k=1}^{\infty}(du_k)_x(y) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)y = \exp(x)y. \tag{15.167}$$

Notez le jeu d'indices : $du_k = 0$ lorsque $k = 0$ (ce qui permet de faire commencer la somme à 1) et ensuite du_k fait intervenir u_{k-1} (ce qui fait revenir le départ de la somme à $k = 0$).

□

15.58.
Lorsque nous disons que la différentielle de l'exponentielle est l'exponentielle elle-même, nous référons au point 15.57(3) : la différentielle de exp en x est l'opérateur de multiplication par $\exp(x)$.

Nous pouvons comprendre maintenant que exp est même de classe C^∞ parce qu'à chaque différentiation nous tombons sur la même fonction, laquelle est de classe au moins C^1.

Cependant, pour formaliser ça, il faut un peut travailler. Le cauchemar des différentielles successives d'une application $A \to A$ est que les espaces en jeu sont des emboîtements terribles de $\mathcal{L}(A, \mathcal{L}(A, \mathcal{L}(A, A)))$.

Ce qui nous sauve est que l'espace $\mathcal{L}(A, V)$ est un A-module, quel que soit V. En particulier lorsque V est lui-même déjà un emboîtement. Faisons un lemme pour voir comment ça fonctionne.

Lemme 15.59 ([1]).
Si $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, nous considérons l'algèbre $\mathrm{Alg}(A)$ engendrée par A[20]*. Alors*

$$e^{\mathrm{Alg}(A)} \subset \mathrm{Alg}(A). \tag{15.168}$$

Démonstration. Le lemme 15.55 nous dit que $\mathrm{Alg}(A)$ est une algèbre de dimension finie. Elle est commutative par le corolaire 15.56. Donc la proposition 15.57 s'applique. □

15.5.2 Différentielles

Lemme 15.60 ([1]).
Soient deux espaces vectoriels normés E et V tels que V soit un E-module[21]*. Nous supposons les normes soient telles que $\|xv\|_V \leqslant \|x\|_E \|v\|_V$.*

Soit une fonction différentiable $f\colon E \to V$ telle que la différentielle $df\colon E \to \mathcal{L}(E, V)$ soit de la forme

$$df_x(y) = yg(x) \tag{15.169}$$

pour une certains fonction différentiable $g\colon E \to V$.

Alors f est C^1, et deux fois différentiable telle que

$$\begin{aligned} d^2f\colon E &\to \mathcal{L}\big(E, \mathcal{L}(E, V)\big) \\ (d^2f)_x(y)z &= z(dg_x)(y) \end{aligned} \tag{15.170}$$

pour tout $x, y, z \in E$.

Démonstration. En plusieurs étapes.

(i) <u>**f est C^1**</u> Nous savons, par hypothèse, que f est différentiable. Il faut montrer que sa différentielle est continue, en remarquant déjà que g est continue parce que différentiable.

20. Définition 15.54.
21. Définition 1.274.

Soit $x_k \xrightarrow{E} x$, et calculons $\|df_{x_k} - df_x\|$:

$$\begin{aligned}
\|df_{x_k} - df_x\| &= \sup_{\|y\|=1} \|df_{x_k}(y) - df_x(y)\| \\
&= \sup_{\|y\|=1} \|\big(g(x_k) - g(x)\big)y\| \\
&\leqslant \sup_{\|y\|=1} \|g(x_k) - g(x)\|\|y\| \\
&= \|g(x_k) - g(x)\|.
\end{aligned} \tag{15.171}$$

Donc nous avons bien $df_{x_k} \xrightarrow{\mathcal{L}(E,V)} df_x$, ce qui signifie la continuité de df. Donc f est de classe C^1.

(ii) <u>f **est deux fois différentiable**</u> Pour montrer que df est différentiable, nous mettons directement dans la définition (11.169) le candidat

$$\begin{aligned}
T_x(h)\colon R &\to V \\
T_x(h)z &= zdg_x(y).
\end{aligned} \tag{15.172}$$

Nous devons vérifier la limite suivante :

$$\lim_{h \xrightarrow{E} 0} \frac{df_{x+h} - df_x - T_x(h)}{\|h\|} = 0. \tag{15.173}$$

Étudions la norme du numérateur :

$$\|df_{x+h} - df_x - T_x(h)\| = \sup_{\|y\|=1} \|df_{x+h}(y) - df_x(y) - T_x(h)y\| \tag{15.174a}$$

$$= \sup_{\|y\|=1} \|yg(x+h) - yg(x) - ydg_x(h)\| \tag{15.174b}$$

$$\leqslant \sup_{\|y\|=1} \|y\|\|g(x+h) - g(x) - dg_x(h)\|. \tag{15.174c}$$

La limite (15.173) se déduit donc de la différentiabilité de g.

Note : la partie démontrant que f est C^1 n'est pas strictement obligatoire parce qu'en vérifiant que f est deux fois différentiable, nous vérifions de facto que df est en particulier continue. □

Lemme 15.61 ([1]).
Soient des algèbres normées A et V telles que V soit un A-module vérifiant $\|xv\| \leqslant \|x\|\|v\|$ pour tout $x \in A$ et $v \in V$. Alors $\mathcal{L}(A, V)$ est un A-module vérifiant $\|x\alpha\| \leqslant \|x\|\|\alpha\|$ pour tout $x \in A$ et $\alpha \in \mathcal{L}(A, V)$.

Démonstration. C'est un simple calcul utilisant la norme opérateur :

$$\|x\alpha\| = \sup_{\|y\|=1} \|(x\alpha)y\| = \sup_{\|y\|=1} \|x\alpha(y)\| \leqslant \sup_{\|y\|=1} \|x\|\|\alpha(y)\| = \|x\| \sup_{\|y\|=1} \|\alpha(y)\| = \|x\|\|\alpha\|. \tag{15.175}$$

□

Proposition 15.62 ([1]).
La fonction $\exp\colon A \to A$ est de classe C^∞ et vérifie, pour tout $k \geqslant 1$ la récurrence

$$(d^k \exp)_x(y) = y(d^{k-1} \exp)_x. \tag{15.176}$$

Démonstration. La formule proposée fonctionne avec $k = 1$:

$$(d\exp)_x(y) = y\exp(x). \tag{15.177}$$

C'est la relation 15.155.

Nous considérons $k > 1$, nous supposons que exp est de classe C^{k-1} et k fois différentiable. Nous allons prouver que exp est alors de classe C^k et $k+1$ fois différentiable, et que la différentielle de $d^k \exp$ est donné par la formule

$$(d^{k+1}\exp)_x(y) = y(d^k \exp)_x. \tag{15.178}$$

Pour nous mettre au clair avec les espaces en présence, nous supposons que

$$d^{k-1}\exp\colon A \to \mathcal{L}(A, V) \tag{15.179a}$$

$$d^k \exp\colon A \to \mathcal{L}\big(A, \mathcal{L}(A, V)\big) \tag{15.179b}$$

pour un certain espace vectoriel normé V, lequel est un de ces terrifiants emboîtement de type $\mathcal{L}\Big(A, \mathcal{L}\big(A, \mathcal{L}(A, A)\big)\Big)$. Il est bien un espace vectoriel normé, et également un A-module parce qu'on peut toujours définir la multiplication d'un élément $v \in V$ par un élément $x \in A$ comme étant la multiplication par x du résultat final de l'évaluation emboîtée, laquelle se termine par un élément de A. Donc tout se met bien.

Quoi qu'il en soit, nous posons

$$T_x(y) = y(d^k \exp)_x \tag{15.180}$$

et nous vérifions ce que cela donne dans la définition de la différentielle. Si nous avons

$$\lim_{h\to 0} \frac{(d^k \exp)_{x+h} - (d^k \exp)_x - T_x(h)}{\|h\|} = 0 \tag{15.181}$$

alors nous aurons prouvé tout ce qu'il nous faut.

Le numérateur est une application $A \to \mathcal{L}(A, V)$; nous en écrivons la norme comme il se doit :

$$\|(d^k \exp)_{x+h} - (d^k \exp)_x - T_x(h)\| = \sup_{\|y\|=1} \|(d^k \exp)_{x+h}(y) - (d^k \exp)_x(y) - h(d^k \exp)_x y\| \tag{15.182a}$$

$$= \sup_{\|y\|=1} \|y(d^{k-1}\exp)_{x+h} - y(d^{k-1}\exp)_x - h(d^k \exp)_x y\| \tag{15.182b}$$

$$= \sup_{\|y\|=1} \|y(d^{k-1}\exp)_{x+h} - y(d^{k-1}\exp)_x - hy(d^{k-1}\exp)_x\| \tag{15.182c}$$

$$\leqslant \|(d^{k-1}\exp)_{x+h} - (d^{k-1}\exp)_x - h(d^{k-1}\exp)_x\| \tag{15.182d}$$

$$= \|(d^{k-1}\exp)_{x+h} - (d^{k-1}\exp)_x - (d^k \exp)_x(h)\|. \tag{15.182e}$$

Dans ce calcul nous avons utilisé le lemme 15.61 et $T_x(h)y = h(d^k \exp)_x y$. Maintenant, la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|(d^{k-1}\exp)_{x+h} - (d^{k-1}\exp)_x - (d^k \exp)_x(h)\|.}{\|h\|} \tag{15.183}$$

n'est rien d'autre que la limite arrivant dans la définition du fait que $d^k \exp$ est la différentielle de $d^{k-1}\exp$. Cette limite est donc zéro comme nous voulions le prouver. □

Le théorème suivant est très important parce qu'il permet de définir l'exponentielle d'une matrice. Et les exponentielles de matrices sont utiles, entre très nombreuses autres choses pour résoudre certaines équations différentielles.

Théorème-Définition 15.63 ([1]).
Soit une algèbre normée A (pas spécialement commutative). La formule

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{15.184}$$

définit une fonction différentiable dont la différentielle est donnée par[22]

$$(d\exp)_x(y) = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \frac{x^i y x^j}{(i+j+1)!} \tag{15.185}$$

15.64.
Nous ne démontrons pas cela ici.

Il s'agit d'une adaptation de la proposition 15.57. Là où il faut faire attention, c'est dans l'équation (15.161) : il n'y a pas k termes $x^{k-1}h$ dans $(x+h)^k$, mais k termes de la forme $x^i hx$. C'est pour cela que la différentielle n'est pas donnée par $T(y) = u_{k-1}(x)y$, mais bien par la somme (15.185).

M'est avis en réalité que toute la démonstration du théorème 15.142 passe facilement au cas présent.

15.5.3 Exponentielle de matrice

Proposition 15.65 ([405]).
Soient des matrices $A, P \in \mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ telle que P soit inversible. Alors[23]

$$e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P. \tag{15.186}$$

Démonstration. Pour chaque $m \in \mathbb{N}$ nous avons $(P^{-1}AP)^m = P^{-1}A^m P$. Ensuite,

$$e^{P^{-1}AP} = \sum_k \frac{(P^{-1}AP)^k}{k!} = \sum_k \frac{P^{-1}A^k P}{k!} = P^{-1}\sum_k \frac{A^k}{k!}P. \tag{15.187}$$

Nous avons utilisé la proposition 11.91 pour sortir P^{-1} à gauche et P à droite de la somme. □

Proposition 15.66 ([405]).
L'exponentielle de matrice vérifie

(1) $e^0 = \mathrm{Id}$
(2) $A^m e^A = e^A A^m$
(3) $(e^A)^t = e^{(A^t)}$
(4) *Si $AB = BA$ alors $Ae^B = e^B A$ et $e^A e^B = e^B e^A$.*

Démonstration. Point par point.

(i) **Pour (1)** Juste substituer $A = 0$ dans la définition. Tous les termes tombent sauf le premier. Il faut utiliser le fait que $A^0 = \mathrm{Id}$.

(ii) **Pour (2)** Il faut utiliser la proposition 11.91 pour écrire

$$A^m \sum_k \frac{A^k}{k!} = \sum_k \frac{A^m A^k}{k!} = \sum_k \frac{A^k A^m}{k!} = \sum_k \frac{A^k}{k!}A^m. \tag{15.188}$$

(iii) **Pour (3)** Pour chaque k nous avons l'égalité $(A^k)^t = (A^t)^k$. En utilisant encore le coup de la queue de suite qui converge vers zéro,

$$\|\sum_{k=0}^{N} \frac{(A^t)^k}{k!} - (e^A)^t\| = \|\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{(A^t)^k}{k!}\| \to 0. \tag{15.189}$$

22. La fonction exponentielle est, j'en suis quasiment certain, de classe C^∞. Si vous connaissez un moyen pas trop douloureux de prouver cela, faites-le moi savoir.

23. La définition de l'exponentielle de matrice est 15.57 où la convergence de la somme est celle de la norme opérateur 11.50.

(iv) **Pour (4)** Pour prouver $Ae^B = e^B A$, c'est le même genre de manipulations que (15.188). Maintenant, vu que A et e^B commutent, l'égalité à peine prouvée montre que e^A et e^B commutent.

□

Proposition 15.67 ([405]).
Soient $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ ainsi que $s, t \in \mathbb{C}$. Alors

$$e^{sA} e^{tA} = e^{(s+t)A}. \tag{15.190}$$

Démonstration. Nous calculons le produit $e^{sA}e^{tA}$ par le produit de Cauchy de la proposition 11.92 :

$$\clubsuit = \left(\sum_k \frac{t^k}{k!} A^k\right)\left(\sum_l \frac{s^l}{l!} A^l\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{t^m}{m!} \frac{s^{n-m}}{(n-m)!} A^n. \tag{15.191}$$

À ce point, nous multiplions et divisons par $n!$ et nous réarrangons la somme de la façon suivante :

$$\clubsuit = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} t^m s^{n-m}. \tag{15.192}$$

Nous reconnaissons la somme sur m comme étant un binôme de Newton [24] pour $(t+s)^n$. Nous avons donc finalement

$$\clubsuit = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\big((t+s)A\big)^n}{n!} = e^{(t+s)A}. \tag{15.193}$$

□

La proposition suivante dit que les exponentielles de matrices sont inversibles. Elle ne dit pas que toutes les matrices inversibles sont des exponentielles. Ce sera la proposition 15.122.

Proposition 15.68 ([405]).
Si $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$, alors e^A est inversible et

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}. \tag{15.194}$$

Démonstration. Il suffit de prendre $s = 1$ et $t = -1$ dans la proposition 15.67 et nous avons

$$e^A e^{-A} = e^0 = \mathbb{1}. \tag{15.195}$$

Cela prouve que e^A est inversible et que son inverse est e^{-A}. □

Proposition 15.69 ([405, 1]).
Soit $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$. Nous considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{M}(n, \mathbb{C}) \\ t &\mapsto e^{tA}. \end{aligned} \tag{15.196}$$

Nous avons la formule de dérivation

$$\varphi'(t) = Ae^{tA}. \tag{15.197}$$

Démonstration. L'application φ est une fonction composée de

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{M}(n, \mathbb{R}) \\ t &\mapsto tA \end{aligned} \tag{15.198}$$

24. Proposition 3.40.

et

$$\begin{aligned} \exp\colon \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) &\to \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \\ A &\mapsto e^A. \end{aligned} \tag{15.199}$$

Et nous avons $\varphi = \exp\circ f$. Il y a un choix difficile à faire. Soit nous travaillons dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$ et nous allons devoir invoquer le théorème 15.63, soit nous travaillons dans l'algèbre $\operatorname{Alg}(A)$ engendrée par A (définition 15.54) qui est une algèbre commutative [25] qui nous permet de n'utiliser que 15.155, qui est quand même plus basique.

Coup de théâtre, nous prenons la seconde solution et nous réécrivons les fonctions f et exp de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{R} &\to \operatorname{Alg}(A) \\ t &\mapsto e^{tA} \end{aligned} \tag{15.200}$$

se décompose en

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \operatorname{Alg}(A) \\ t &\mapsto tA \end{aligned} \tag{15.201}$$

et

$$\begin{aligned} \exp\colon \operatorname{Alg}(A) &\to \operatorname{Alg}(A) \\ A &\mapsto A. \end{aligned} \tag{15.202}$$

Le fait que ces applications soient bien définies est le lemme 15.59 qui assure que les espaces d'arrivée sont bien dans $\operatorname{Alg}(A)$. Et c'est parti pour le calcul :

$$\varphi'(u) = d\varphi_u(1) \tag{15.203a}$$
$$= d\exp_{f(u)}\big(df_u(1)\big) \tag{15.203b}$$
$$= \exp\big(f(u)\big)df_u(1) \tag{15.203c}$$
$$= e^{uA}A \tag{15.203d}$$

Justifications :

— Pour 15.203a. Pour la dérivée, nous utilisons le corolaire 12.263.

— Pour 15.203b. La règle de la différentielle en chaine du théorème 11.183.

— Pour 15.203c. La formule (15.155).

— Pour 15.203d. Parce que $f(u) = uA$ et que $df_u(1) = A$.

□

Le théorème suivant montre que le produit d'exponentielle de matrices suit la règle usuelle tant que les matrices commutent. Cela est cependant plutôt l'exception que la règle. À priori nous avons $e^Ae^B \neq e^{A+B}$.

Théorème 15.70 ([405]).
Soient $A, B \in \mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$. Alors

$$e^{A+B} = e^Ae^B. \tag{15.204}$$

Démonstration. Vu que A et B commutent nous avons $Ae^{tB} = e^{tB}A$ (proposition 15.66(4)). Ensuite nous posons

$$g(t) = e^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA}. \tag{15.205}$$

Nous calculons la dérivée de g en utilisant la règle de Leibnitz et la proposition 15.69 :

$$\begin{aligned} g'(t) = (A+B)&e^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA} \\ &+ e^{t(A+B)}(-B)e^{-tB}e^{-tA} \\ &+ e^{t(A+B)}e^{-tB}(-A)e^{-tA}. \end{aligned} \tag{15.206}$$

25. Corolaire 15.56.

Vu que A, B et $A+B$ commutent, nous pouvons réarranger les facteurs en

$$\begin{aligned} g'(t) = (A+B)&e^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA} \\ &- Be^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA} \\ &- Ae^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA}. \end{aligned} \tag{15.207}$$

Enfin, cela fait

$$g'(t) = (A+B-B-A)e^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA} = 0. \tag{15.208}$$

Donc g est constante et nous avons

$$e^{t(A+B)}e^{-tB}e^{-tA} = g(0) = \mathbb{1}. \tag{15.209}$$

En multipliant à droite par $e^{tA}e^{tB}$ nous trouvons

$$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB} \tag{15.210}$$

comme annoncé. □

15.6 Exponentielle et logarithme dans les réels

Pour avoir une vue synthétique du plan, voir le thème 48.

15.6.1 L'équation différentielle

Pour la suite nous notons y une solution de l'équation $y' = y$, $y(0) = 1$, et nous allons en donner des propriétés indépendamment de l'existence, donnée par le théorème 15.73.

Proposition 15.71.
Quelques propriétés de y (si elle existe) :

(1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons $y(x)y(-x) = 1$.

(2) $y(x) > 0$ pour tout x.

(3) y est strictement croissante.

Démonstration. Nous posons $\varphi(x) = y(x)y(-x)$ et nous dérivons :

$$\varphi'(x) = y'(x)y(-x) - y(x)y'(-x) = 0. \tag{15.211}$$

Donc φ est constante[26]. Vu que $\varphi(0) = 1$ nous avons automatiquement $y(x)y(-x) = 1$ pour tout x.

Les deux autres allégations sont simples : si $y(x_0) < 0$ alors il existe $t \in \left]x_0, 1\right[$ tel que $y(t) = 0$, ce qui est impossible parce que $y(t)y(-t) = 1$. La stricte croissance de y s'ensuit. □

Proposition 15.72.
Quelques formules pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$:

(1) $y(a+b) = y(a)y(b)$

(2) $y(na) = y(a)^n$

(3) $y\left(\frac{a}{n}\right) = \sqrt[n]{y(a)}$.

Démonstration. Nous posons $h(x) = y(a+b-x)y(x)$ et nous avons encore $h'(x) = 0$ dont nous déduisons que h est constante. De plus

$$h(0) = y(a+b)y(0) = y(a+b) \tag{15.212}$$

26. Proposition 12.184.

et

$$h(b) = y(a)y(b). \tag{15.213}$$

Vu que h est constante, ces deux expressions sont égales : $y(a+b) = y(a)y(b)$.

Forts de cette relation, une récurrence donne $y(na) = y(a)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus

$$y(a) = y\left(\frac{a}{n} \times n\right) = y\left(\frac{a}{n}\right)^n, \tag{15.214}$$

ce qui donne $y(a) = y(a/n)^n$ ou encore $y(a/n) = \sqrt[n]{y(a)}$.

Enfin pour les négatifs, si $n \in \mathbb{N}$,

$$y(-na) = \frac{1}{y(na)} = \frac{1}{y(a)^n} = y(a)^{-n}. \tag{15.215}$$

Et de la même façon,

$$y\left(-\frac{a}{n}\right) = \frac{1}{y\left(\frac{a}{n}\right)} = \sqrt[n]{\frac{1}{y(a)}} = \sqrt[-n]{y(a)}. \tag{15.216}$$

□

15.6.2 Existence

Jusqu'ici nous avons donné des propriétés d'une éventuelle fonction y qui vérifierait l'équation différentielle. Il est temps de montrer qu'une telle fonction existe.

Théorème 15.73.
La série entière

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{15.217}$$

définit une fonction dérivable solution de

$$\begin{cases} y' = y & (15.218a)\\ y(0) = 1. & (15.218b) \end{cases}$$

Démonstration. La formule de Hadamard (théorème 15.23) donne le rayon de convergence de la série (15.217) par

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0. \tag{15.219}$$

Donc nous avons un rayon de convergence infini. La fonction y est définie sur $\mathbb{R}$ et la proposition 15.42 nous dit que y est dérivable. Nous pouvons aussi dériver terme à terme :

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = y(x). \tag{15.220}$$

Notez le petit jeu d'indice de départ de k. Dans un premier temps, nous remarquons que $k = 0$ donne un terme nul et nous le supprimons, et dans un second temps nous effectuons la simplification des factorielles (qui ne fonctionne pas avec $k = 0$). □

15.74.
Nous savons que la fonction y existe parce qu'une solution de l'équation différentielle $y' = y$, $y(0) = 1$ est donnée par la fameuse série (théorème 15.73). À part cela, ce qui a été fait avec cette équation différentielle ne permet pas de prouver l'existence de y. Donc, du point de vue de « définir l'exponentielle par son équation différentielle », c'est pas encore gagné. Notons au passage que le nombre e n'est pas encore bien défini via l'équation différentielle.

15.6.3 Le nombre de Neper e

Nous savons par le théorème 15.73 que $x \mapsto \exp(x)$ est une solution de l'équation différentielle exponentielle (avec la bonne condition initiale). Or une telle solution est unique par la proposition 12.432.

Définition 15.75 (Le nombre de Neper)**.**
Nous notons e le nombre $\exp(1)$*.*

Proposition 15.76.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\exp(x) = e^x. \tag{15.221}$$

Démonstration. Soit y vérifiant la fameuse équation différentielle. Nous savons que $y = \exp$ parce que c'est l'unique solution (proposition 12.432). Nous avons :

$$y(x) = y(1)^x. \tag{15.222}$$

Si $q \in \mathbb{Q}$ alors $q = a/b$ et

$$y(q) = y\left(\frac{a}{b}\right) = y\left(a \times \frac{1}{b}\right) = y\left(\frac{1}{b}\right)^a = \left(\sqrt[b]{y(1)}\right)^a = y(1)^{a/b} = y(1)^q. \tag{15.223}$$

Le résultat est prouvé pour les rationnels.

En ce qui concerne un élément général $x \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto y(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et la fonction $x \mapsto e^x$ également (proposition 12.401). Ces deux fonctions étant égales sur $\mathbb{Q}$, elles sont égales sur $\mathbb{R}$ par la proposition 7.221). □

Une conséquence des propositions 15.76 et 12.396 est que

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \tag{15.224a}$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty, \tag{15.224b}$$

et en particulier,

$$\begin{aligned} \exp\colon \mathbb{R} &\to \left]0, \infty\right[\\ x &\mapsto e^x \end{aligned} \tag{15.225}$$

est une bijection.

Proposition 15.77 ([406])**.**
Le nombre e est irrationnel.

Démonstration. En vertu de la proposition 15.76, nous avons $e^x = \exp(x)$ pour tout réel x. En particulier pour $x = 1$,

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}. \tag{15.226}$$

Supposons que $e = p/q$ pour certains $p, q \in \mathbb{N}$ avec $q \neq 0$ (notez que ça signifie $q \geqslant 1$).

Nous avons

$$q!e = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} + \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!}. \tag{15.227}$$

Dans le membre de gauche,

$$q!e = q!\frac{p}{q} = (q-1)!p \in \mathbb{N}. \tag{15.228}$$

Dans la première somme du membre de droite, vu que $q \geqslant k$, nous avons

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} \in \mathbb{N}. \tag{15.229}$$

Nous devons donc avoir $\sum_{k=q+1}^{\infty}\frac{q!}{k!}\in\mathbb{N}$. Nous allons maintenant prouver que ce n'est pas le cas. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q!}{(q+k)!} &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\prod_{l=q+1}^{q+k}l} && (15.230a)\\
&= \frac{1}{q+1}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\prod_{l=q+1}^{q+k}l} && (15.230b)\\
&= \frac{1}{q+1}\left[1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\prod_{l=q+2}^{q+k}l}\right] && (15.230c)\\
&< \frac{1}{q+1}\left[1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(q+1)^{(q+k)-(q+2)+1}}\right] && (15.230d)\\
&= \frac{1}{q+1}\left[1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(q+1)^{k-1}}\right] && (15.230e)\\
&= \frac{1}{q+1}\left[1+\sum_{k+1}^{\infty}\frac{1}{(q+1)^{k}}\right] && (15.230f)\\
&= \frac{1}{q+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(q+1)^{k}}. && (15.230g)
\end{aligned}$$

C'est le moment d'utiliser la série géométrique de la proposition 11.119(2). Vu que $q\geqslant 1$ nous avons $1/(q+1)<1$ et la somme fonctionne :

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q!}{(q+k)!}<\frac{1}{q+1}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q+1}}\right)=\frac{1}{q}. \tag{15.231}$$

Nous avons donc

$$0<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q!}{(q+k)!}<\frac{1}{q}<1. \tag{15.232}$$

Donc ce terme n'est pas un nombre entier, ce que nous avions énoncé. □

15.6.4 Application réciproque : logarithme

Proposition-Définition 15.78.
L'application $\exp\colon\mathbb{R}\to\,]0,\infty[$ *est une bijection. L'application réciproque*

$$\ln\colon\,]0,\infty[\,\to\mathbb{R} \tag{15.233}$$

est le ***logarithme****.*

Démonstration. Le fonction exponentielle est dérivable, toujours strictement positive, donc strictement croissante. Les limites en $\pm\infty$ sont 0 et $+\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires 10.82 nous dit que c'est une bijection. En effet, l'injectivité est la stricte croissance. En ce qui concerne la surjection, soit $y\in\,]0,\infty[$. Vu que la limite en $-\infty$ est zéro, il existe $A\in\mathbb{R}$ tel que $\exp(x)<y$ pour tout $x<A$, et de la même façon, il existe $B\in\mathbb{R}$ tel que $\exp(x)>y$ pour tout $x>B$. Si $a<A$ et $b>B$ alors $\exp(a)<y$ et $\exp(b)>y$, donc y est dans l'image de $[a,b]$ par l'exponentielle. □

Lemme 15.79 ([1])**.**
Le logarithme est une fonction continue.

Démonstration. C'est une conséquence du théorème de la bijection 12.52(4), et de la continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, qui est une partie du théorème 15.73. □

Proposition 15.80 (Dérivée du logarithme).
Pour tout $s \in \mathbb{R}^+$ nous avons
$$\ln'(s) = \frac{1}{s}. \tag{15.234}$$

Démonstration. L'application $\exp\colon \mathbb{R} \to]0,\infty[$ est une bijection continue dérivable [27]. La proposition 12.176 s'applique donc et pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons
$$\ln'\big(\exp(x)\big) = \frac{1}{\exp'(x)}. \tag{15.235}$$

Le théorème 15.73 nous indique que $\exp'(x) = \exp(x)$. Donc pour tout x nous avons $\ln'\big(\exp(x)\big) = \frac{1}{\exp(x)}$. Vu que x est arbitraire et que exp est surjective sur $\mathbb{R}^+$, pour tout $s \in]0,\infty[$ nous avons
$$\ln'(s) = \frac{1}{s}. \tag{15.236}$$

□

Proposition 15.81 ([1]).
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et pour $a > 0$ nous avons
$$\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x), \tag{15.237}$$
et
$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \tag{15.238}$$
et
$$\ln(a^x) = x\ln(a) \tag{15.239}$$
et
$$a^x = e^{x\ln(a)}. \tag{15.240}$$

Démonstration. Nous avons, par la proposition 12.402,
$$e^{-\ln(x)} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}. \tag{15.241}$$

En prenant le logarithme des deux côtés nous trouvons
$$-\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right). \tag{15.242}$$

Nous pouvons continuer avec la suivante.

Par définition, $\ln(xy)$ est donné par $\exp\big(\ln(xy)\big) = xy$. Mais nous avons aussi, par la proposition 12.402 :
$$e^{\ln(x)+\ln(y)} = e^{\ln(x)}e^{\ln(y)} = xy. \tag{15.243}$$

Nous avons donc démontré (15.238).

La relation (15.239) de démontre d'abord pour $x \in \mathbb{N}$, puis pour $x \in \mathbb{Q}$ et enfin pour $x \in \mathbb{R}$. Si $n \in \mathbb{N}$ alors la relation (15.238) donne immédiatement
$$\ln(a^n) = n\ln(a). \tag{15.244}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Si $m, n \in \mathbb{N}$, le nombre $a^{n/m}$ est par définition le $x > 0$ tel que
$$x^m = a^n. \tag{15.245}$$

27. Dérivable (et donc continue) par le théorème 15.73. Bijection par la proposition 15.78.

En prenant le logarithme des deux côtés : $\ln(x^m) = \ln(a^n)$ et en utilisant la relation déjà démontrée pour $\mathbb{N}$ nous trouvons $m\ln(x) = n\ln(a)$ et donc

$$\ln(a^{m/n}) = \ln(x) = \frac{m}{n}\ln(a). \tag{15.246}$$

La relation est donc démontré pour $\ln(a^q)$ avec $q \in \mathbb{Q}^+$.

Nous passons à $q = -m/n \in \mathbb{Q}^-$, c'est-à-dire toujours $m, n \in \mathbb{N}$. Nous avons, en utilisant la proposition 15.81,

$$\ln(a^{-q}) = \ln(\frac{1}{a^q}) = -\ln(a^q) = -q\ln(a). \tag{15.247}$$

Enfin si $x \in \mathbb{R}$ nous considérons une suite de rationnels $x_k \to x$. Pour chaque k nous avons

$$\ln(a^{x_k}) = x_k\ln(a). \tag{15.248}$$

Nous prenons la limite deux deux côtés. À droite nous avons tout de suite $x\ln(a)$, et à gauche, par continuité de la fonction ln (lemme 15.79) et de la fonction puissance (définition 12.401) nous trouvons $\ln(a^x)$. □

Lemme 15.82.
Si $a, b \in \,]0, \infty[$ alors

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \tag{15.249}$$

et

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b). \tag{15.250}$$

Démonstration. Nous posons $f(x) = \ln(ax)$ qui est une fonction dérivable[28]. Alors $f'(x) = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$. Cette fonction f est donc une primitive de $\frac{1}{x}$ et il existe une constante K telle que

$$f(x) = \ln(x) + K. \tag{15.251}$$

Vu que $\ln(1) = 0$ nous avons $K = f(1) = \ln(a)$. Donc

$$\ln(ax) = \ln(x) + \ln(a). \tag{15.252}$$

En ce qui concerne la seconde formule à démontrer, nous avons

$$\ln(1) = \ln\left(\frac{1}{b}b\right) = \ln\left(\frac{1}{b}\right) + \ln(b). \tag{15.253}$$

Étant donné que $\ln(1) = 0$ nous en déduisons la formule (15.250). □

15.83.
La formule (15.239) en particulier est pratique pour réexprimer des fonctions puissances compliquées en écrivant

$$a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x\ln(a)}. \tag{15.254}$$

Cela aide à calculer la dérivée de $x \mapsto a^x$.

Notons que certains prennent (15.254) comme définition de la fonction puissance.

28. Dérivée du logarithme, proposition 15.80.

15.6.5 Approximations numériques de e

Nous donnons maintenant quelques approximations numériques de e, particulièrement inefficaces.

Lemme 15.84.
Nous avons

$$2 < e < 3. \tag{15.255}$$

Démonstration. Nous savons que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$. La fonction y est strictement croissante (et donc sa dérivée aussi). Nous avons donc $y'(x) > 1$ pour tout $x \in]0, 1]$, et donc

$$y(1) > 1 + 1 \times 1 = 2. \tag{15.256}$$

Sachant que $2 > y'(x)$ pour tout $x \in]0, 1[$ nous pouvons refaire le coup de l'approximation affine, cette fois en majorant :

$$y(1) < 1 + 2 \times 1 = 3. \tag{15.257}$$

□

De la même façon nous savons que

$$y(\frac{1}{n}) > 1 + \frac{1}{n} \tag{15.258}$$

parce que y' est minoré par 1 sur $]0, \frac{1}{n}[$. Avec cela nous avons aussi la majoration

$$y(\frac{1}{n}) < 1 + \frac{1}{n} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}. \tag{15.259}$$

Et enfin nous pouvons donner l'encadrement, valable pour tout n :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < y(1) < \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n. \tag{15.260}$$

Pour $n = 10$ nous trouvons

$$2.50 < e < 2.83. \tag{15.261}$$

Bien que ce soit à mon avis humainement pas possible à faire à la main nous avons, pour $n = 100$:

$$2.70 < e < 2.7317 \tag{15.262}$$

Cela reste un encadrement très modeste.

Une méthode plus efficace consiste à calculer directement le développement de définition

$$e = \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \tag{15.263}$$

```python
def u(k):
    """
    return the kth term in the expansion of 'e'
    """
    return 1/factorial(k)

def sum_u(n):
    """
    return the sum of the 'n' first terms, that is with
    k froim 0 to n-1.
    """
```

```
    L=[  u(k) for k in range(0,n)  ]
    return sum(L)

s = sum_u(5)          # This is a fraction
print(s)
print( numerical_approx(s)  )
```

tex/sage/sageSnip013.sage

¡¡ Avertissement/question au lecteur !! 15.85
Comment trouver, avec cette méthode, un encadrement pour e ?

Ce petit programme, avec 5 termes donne $e \simeq 65/24 \simeq 2.708$. Avouez que c'est déjà bien mieux.

15.6.6 Résumé des propriétés de l'exponentielle

Théorème 15.86.
Les choses que nous savons sur l'exponentielle :

1. *Il y a unicité de la solution à l'équation différentielle*

$$\begin{cases} y' = y & (15.264a)\\ y(0) = 1. & (15.264b) \end{cases}$$

2. *L'équation différentielle (15.264) possède une solution donnée par la série entière*

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{15.265}$$

3. *Cette solution est une bijection $y\colon \mathbb{R} \to]0, \infty[$.*
4. *La fonction y ainsi définie est de classe C^∞.*
5. *Elle est également donnée par la formule*

$$\exp(x) = e^x \tag{15.266}$$

où e est définit par $e = \exp(1)$.

6. *Elle vérifie*

$$e^{a+b} = e^a e^b \tag{15.267}$$

Nous nommons **exponentielle** cette fonction.

Démonstration. Point par point.

1. C'est la proposition 12.432.
2. C'est le théorème 15.73.
3. Le rayon de convergence de la série (15.265) est infini (théorème 15.73) ; elle est donc définie sur $\mathbb{R}$. Le fait que ce soit une bijection est dû au fait qu'elle est strictement croissante (proposition 15.71) ainsi qu'aux limites (15.224).
4. Vu que $y = y'$, y est dérivable. Mais comme y' est alors égale à une fonction dérivable, y' est dérivable. En dérivant l'égalité $y' = y$ nous obtenons $y'' = y'$ et le jeu continue.
5. C'est la proposition 15.76.
6. C'est la proposition 15.72(1).

□

Exemple 15.87 (Un endomorphisme sans polynôme annulateur[227]).
l'exponentielle permet de donner un exemple d'un endomorphisme n'ayant pas de polynôme annulateur [29] : l'endomorphisme de dérivation

$$\begin{aligned} D\colon C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) &\to C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f &\mapsto f' \end{aligned} \tag{15.268}$$

n'a pas de polynôme annulateur. En effet supposons que $P=\sum_{k=0}^p a_kX^k$ en soit un, et considérons les fonctions $f_\lambda\colon t\mapsto e^{\lambda t}$. Nous avons

$$0=P(D)f_\lambda=\sum_k a_kD^k(f_\lambda)=\sum_k a_k\lambda^kf_\lambda=P(\lambda)f_\lambda. \tag{15.269}$$

Par conséquent λ est une racine de P pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$. Cela implique que $P=0$.

D'ailleurs si on y pense bien, cet exemple n'est qu'un habillage de l'exemple 9.94. △

Proposition 15.88.
Quelques propriétés du logarithme.

(1) Le logarithme est une application dérivable et strictement croissante.

(2) Le logarithme est la primitive de $x\mapsto\frac{1}{x}$ qui s'annule en $x=1$.

Démonstration. Elle est donc bijective, d'inverse continue et dérivable par le théorème 12.52 et la proposition 12.176.

La dérivée de la fonction logarithme peut être calculée en utilisant la formule (12.466), mais aussi de façon plus piettone en écrivant l'expression suivante, valable pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\ln\big(\exp(x)\big)=x, \tag{15.270}$$

que nous pouvons dériver en utilisant le théorème de dérivation des fonctions composées :

$$\ln'\big(\exp(x)\big)\exp'(x)=1. \tag{15.271}$$

Mais $\exp'(x)=\exp(x)$, donc

$$\ln'(y)=\frac{1}{y} \tag{15.272}$$

pour tout y dans l'image de exp, c'est-à-dire pour tout y dans l'ensemble de définition de ln.

Par ailleurs, $\exp(0)=1$ donc

$$\ln(1)=\ln\big(\exp(0)\big)=0. \tag{15.273}$$

En ce qui concerne l'unicité d'une primitive s'annulant en $x=1$, c'est le corolaire 12.199. □

15.6.7 Dérivée de la fonction puissance

Exemple 15.89.
Soit la fonction $f(x,y)=x^y$, définie en 12.401. Nous allons en calculer les dérivées partielles au point $(1,2)$. Notons que f n'est pas définie pour $x<0$, mais que cela n'a pas d'importance parce que nous pouvons nous restreindre à un voisinage du point $(1,2)$. La première dérivée partielle est facile :

$$\partial_xf(1,2)=(yx^{y-1})_{(x,y)=(1,2)}=2.$$

Pour la seconde, il faut utiliser les propriétés de l'exponentielle et du logarithme. D'abord le logarithme est par définition l'application réciproque de l'exponentielle (définition 15.78), donc

$$x^y=\exp\big(\ln(x^y)\big). \tag{15.274}$$

Ensuite nous calculons en utilisant la proposition 15.81 :

$$\partial_yf(1,2)=\partial_y\left(e^{y\ln x}\right)_{(x,y)=(1,2)}=\left(\ln xe^{y\ln x}\right)_{(x,y)=(1,2)}=\ln\left(1-e^{2\ln(1)}\right)=0.$$

△

29. En dimension finie, le lemme 9.90 dit qu'il y en a toujours un.

Cet exemple est facilement généralisable aux fonctions de la forme $x \mapsto u(x)^{v(x)}$. Voici une proposition qui dit comment faire.

Proposition 15.90 ([1]).
Soit une fonction dérivable $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a > 0$. Nous avons

$$(a^u)' = u' \ln(a) a^u. \tag{15.275}$$

Si de plus $u(x) > 0$ pour tout x, nous avons

$$(u^a)' = a u' u^{a-1}. \tag{15.276}$$

Démonstration. Nous considérons la fonction $f(x) = a^{u(x)}$. Vu que $f(x) > 0$ pour tout x, nous pouvons en prendre le logarithme et écrire l'égalité, valable pour tout x :

$$f(x) = e^{\ln(a^{u(x)})} = \exp\big(u(x)\ln(a)\big). \tag{15.277}$$

Sachant la dérivée de l'exponentielle, cela n'est rien d'autre que la dérivée d'une fonction composée :

$$f'(x) = \ln(a) u'(x) e^{u(x)\ln(a)}. \tag{15.278}$$

Pour l'autre, nous posons

$$g(x) = u(x)^a, \tag{15.279}$$

qui peut encore s'écrire sous la forme

$$g(x) = e^{a \ln\big(u(x)\big)}. \tag{15.280}$$

Ici encore, c'est la dérivée de fonctions composées qui donne le résultat. □

15.6.8 Dérivée du logarithme

Lemme 15.91.
Si $u\colon \mathbb{R} \to \,]0,\infty[$ est dérivable alors $\ln(u)' = \dfrac{u'}{u}$.

Démonstration. Cela est une conséquence du théorème de dérivation des fonctions composées : si $g(x) = \ln(u(x))$ alors

$$g'(x) = \ln'\big(u(x)\big) u'(x) = \frac{1}{u(x)} u'(x). \tag{15.281}$$

□

15.6.9 Taylor pour l'exponentielle

Proposition 15.92 (Développement de l'exponentielle).
Pour tout entier n, il existe une fonction $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{t\to 0} \alpha(t) = 0$ et

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^n \alpha(x). \tag{15.282}$$

Démonstration. Il s'agit de la proposition 15.49 appliquée à la série entière (15.57). □

15.6.10 Analycité

Vu que $\exp(x)$ est défini par une série entière (définition 15.57) et vu la proposition 15.52, il n'est pas étonnant que exp soit analytique. Traitons ce cas.

Exemple 15.93 (Analycité de l'exponentielle)**.**
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $R > 0$. Nous démontrons que exp est analytique sur $B(a, R)$. Si $f(x) = e^x$, alors $f^{(n)}(x) = e^x$ pour tout n (équation (15.218a)). Nous avons donc

$$|f^{(n)}(x)| < e^{a+R} \tag{15.283}$$

pour tout $x \in B(a, R)$. Nous partons de l'expression (15.51) du reste :

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_n}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \leqslant \frac{e^{a+R}}{(n+1)!}R^{n+1}. \tag{15.284}$$

Mais nous avons la limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \tag{15.285}$$

pour tout R.

Donc avec les polynômes de Taylor P_n calculés en a, nous avons $P_n \to \exp$ simplement sur $\mathbb{R}$.

Nous pouvons donc développer la fonction exponentielle autour de n'importe quel point, et avoir convergence des polynômes vers l'exponentielle sur tout $\mathbb{R}$. Vous accepterez cependant que si a et x sont éloignés, la convergence $P_n(x) \to \exp(x)$ peut être extrêmement lente. △

15.6.11 Autres propriétés et petits calculs

Lemme 15.94.
Si les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes[30] *et si (v_n) admet une limite l différente de 1, alors les suites $(\ln u_n)$ et $(\ln v_n)$ sont équivalentes.*

Démonstration. En effet si $u_n = v_n\alpha(n)$ alors en utilisant la formule du lemme 15.82,

$$\ln(u_n) = \ln(v_n) + \ln\big(\alpha(n)\big) = \ln(v_n)\left(1 + \frac{\ln\big(\alpha(n)\big)}{\ln(v_n)}\right), \tag{15.286}$$

et comme $\alpha(n) \to 1$, la parenthèse tend vers 1. □

15.6.12 Taylor pour le logarithme

Vu que $\ln(0)$ n'existe pas, il n'est pas question de développer ln autour de $x = 0$. À la place, nous allons le développer autour de $x = 1$ et plus précisément nous allons étudier Taylor pour la fonction $f(x) = \ln(1 + x)$. Les résultats seront résumés dans la proposition 15.97.

Proposition 15.95 ([1])**.**
Soit la fonction

$$\begin{aligned} f\colon]-1, \infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(1 + x). \end{aligned} \tag{15.287}$$

Pour tout n, il existe une fonction $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{t\to 0} \alpha(t) = 0$ et

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k + \alpha(x)x^n \tag{15.288}$$

pour tout x dans le domaine de f.

Notez la somme qui part de $k = 1$ et non $k = 0$.

30. Définition 10.30.

Démonstration. Nous utilisons la formule de Taylor-Young (proposition 12.463). La première dérivée de f se calcule en utilisant le lemme 15.91 :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}. \tag{15.289}$$

Pour les dérivées suivantes, c'est juste du calcul et nous pouvons prouver par récurrence que

$$f^{(k)}(x) = \frac{(k-1)!(-1)^{k+1}}{(1+x)^k}. \tag{15.290}$$

En ce qui concerne l'évaluation en zéro :

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \\ (k-1)!(-1)^{k+1} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{15.291}$$

Du fait que $f^{(0)}(0) = \ln(1) = 0$, la somme commence à $k = 1$ et non $k = 0$. Nous avons

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \alpha(x)x^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + \alpha(x)x^n. \tag{15.292}$$

□

Nous étudions les polynômes de la série de Taylor pour

$$\begin{aligned} f\colon]-1,\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(1+x). \end{aligned} \tag{15.293}$$

Les dérivées successives de f ont déjà été calculées en (15.290). Nous développons autour de $x = 0$. Donc $f(0) = \ln(1) = 0$ et pour les autres,

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)!. \tag{15.294}$$

Pour les polynômes de Taylor, nous avons

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \tag{15.295}$$

où vous noterez la somme qui part de $k = 1$ et non de $k = 0$. Nous avons aussi la série de Taylor de f donnée par

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k. \tag{15.296}$$

La somme est une limite ponctuelle, là où elle existe.

Jusqu'à présent, la seule certitude à props de T est que $T(0) = f(0) = 0$. Pour le reste :

— Rien ne dit que $T(x)$ existe pour d'autres x que $x = 1$.

— Et même si $T(x)$ existait pour d'autres x (c'est-à-dire si le rayon de convergence de (15.296) était strictement plus grand que zéro), rien n'assurerait que la valeur serait celle de f.

— Et même si $T(x)$ convergeait vers f sur son disque de convergence, ce ne serait pas encore assez pour dire que f est analytique, parce que l'analycité demande que les séries de Taylor autour de *chaque* point converge vers f. Or ici nous ne parlons encore que de T qui est la série autour de $x = 0$.

Lemme 15.96.
La série de Taylor de $x \mapsto \ln(1+x)$ autour de $x = 0$ converge sur $]-1,1]$. Elle ne converge pas pour $x = -1$.

Démonstration. En ce qui concerne le rayon de convergence de T, nous utilisons la formule de Hadamard [31] avec

$$a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}. \tag{15.297}$$

Ce que nous trouvons est

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1. \tag{15.298}$$

Le rayon de convergence de T est donc 1. Nous avons donc que $P_n \to T$ sur $]-1,1[$, et peut-être que $P_n \to T$ en $x = \pm 1$.

Pour $x = -1$. L'intuition nous dit que ce serait $\ln(0)$ qui n'est pas défini. C'est le cas parce que

$$P_n(-1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}(-1)^k}{k} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}. \tag{15.299}$$

La limite $n \to \infty$ diverge. Donc T n'est pas définie en $x = -1$.

Pour $x = 1$ par contre,

$$P_n(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}. \tag{15.300}$$

Le critère des séries alternées [32] nous donne la convergence de cette série. □

Nous savons maintenant que la série de Taylor T converge sur $]-1,1]$, et que $T(0) = f(0) = \ln(1) = 0$. Le premier gros morceau intéressant vient maintenant : nous allons prouver que $T(x)$ converge vers ce que nous croyons, c'est-à-dire $\ln(1+x)$ en personne.

Proposition 15.97.
Pour tout $x \in]-1,1]$ nous avons

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \tag{15.301}$$

De plus nous avons

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2). \tag{15.302}$$

Démonstration. Il s'agit d'utiliser l'expression du reste fourni par le théorème 12.450. Pour tout $x \in]-1,\infty[$, il existe un $c \in]0,x[$ (le c dépend de x) tel que

$$P_n(x) - f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}. \tag{15.303}$$

Cela est parce que f est de classe C^∞. Calculons un peu :

$$\begin{aligned} P_n(x) - f(x) &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} && (15.304a)\\ &= \frac{(-1)^n n!}{(1+c)^{n+1}} \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} && (15.304b)\\ &= \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{x}{1+c}\right)^{n+1}. && (15.304c) \end{aligned}$$

Lorsque $x > 1$, il n'y a aucune garantie sur la convergence de cela pour $n \to \infty$. Pour rappel, $c \in]0,x[$. Si par contre $x \in]-1,1[$, alors nous savons que

$$\left|\frac{x}{1+c}\right| < 1, \tag{15.305}$$

31. Théorème 15.23.
32. Théorème 11.124.

et donc convergence $P_n(x) - f(x) \to 0$.

Jusqu'ici nous avons prouvé que pour la série de Taylor converge vers $\ln(1+x)$ pour $x \in]-1,1[$. Nous avons également vu que la série converge pour $x = 1$. Donc la fonction

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \tag{15.306}$$

est de continue sur $]-1,1]$ et égale à $\ln(x+1)$ sur $]-1,1[$. Vu que $f\colon x \mapsto \ln(x+1)$ est continue sur $]-1,\infty[$, nous avons également $g(1) = f(1) = \ln(2)$.

Ceci nous mène au dernier point de notre proposition : $g(1) = \ln(2)$ s'écrit précisément

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2). \tag{15.307}$$

□

15.98.
La formule (15.302) peut sembler très chouette pour trouver des approximations de $\ln(2)$. Le problème est qu'elle ne donne aucune idée de l'erreur commise en tronquant la série.

Vous pouvez, certes, écrire ceci :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60} \simeq 0.78. \tag{15.308}$$

Hélas, ce calcul n'a aucune valeur pour affirmer que $\ln(2)$ doit être proche de 0.78. Ni même pour affirmer que $\ln(2) < 1$.

Avoir des valeurs numériques de $\ln(2)$ (c'est-à-dire que « chiffres corrects devant ou derrière la virgule ») demande d'avoir un encadrement. Cela doit donc se faire avec des formules de séries avec reste ; les formules exactes qui demandent de sommer jusqu'à l'inifini sont inutiles pour avoir des approximations numériques.

Dans le cas de $\ln(2)$, une approximation numérique sera donnée à l'aide de Taylor avec reste intégrale dans la proposition 20.149.

Lemme 15.99.
Soit la fonction[33]

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \tag{15.309}$$

(1) *Elle admet un prolongement de classe C^∞ sur $]-1,\infty[$.*
(2) $f(0) = 1$.

La seconde condition étant évidemment avec un abus de notation entre f et son prolongement, parce que f n'est pas définie en zéro.

Démonstration. La difficulté étant de voir que f a un prolongement en zéro et qu'elle y est de classe C^∞.

La 15.97 nous donne l'égalité

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \tag{15.310}$$

pour tout $x \in]-1,0]$; en particulier pour $x = 0$. Nous faisons le petit calcul suivant :

$$\frac{1}{x}\ln(1+x) = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \tag{15.311a}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^{n-1} \tag{15.311b}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{k+1} x^{k}. \tag{15.311c}$$

33. Pour la définition du logarithme, c'est la définition 15.78.

Ce calcul n'est pas valable pour $x = 0$, mais ça ne nous empèche pas de poser

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^k, \tag{15.312}$$

qui, lui, est bien définie en zéro. Le rayon de convergence de la série T est égal à 1, de telle sorte que

$$T\colon \left]-1,1\right[\to \mathbb{R} \tag{15.313}$$

de classe C^∞, et est égale à f sur $\left]-1,1\right[\setminus\{0\}$.

La série T est donc le prolongement demandé. En ce qui concerne $f(0)$, c'est un abus pour écrire $T(0)$ qui vaut immédiatement 1. □

Notons qu'un calcul de limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \tag{15.314}$$

donnait la valeur $f(0) = 1$. Donc prolonger avec $f(0) = 1$ était la seule possibilité pour avoir une fonction continue. De là à dire que le prolongement ainsi créé est de classe C^∞, c'est une autre histoire, qui est résoue par les séries entières.

15.6.13 Développements et calcul de limites

Lors d'un calcul de limite, développer une partie d'une expression peut être utile.

Exemple 15.100.
À calculer :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}. \tag{15.315}$$

Cela est une indétermination de type $\frac{0}{0}$. Le développement limité du numérateur [34] nous donne une fonction $\alpha(x)$ telle que $\lim_{x\to 0} \alpha(x) = 0$ et

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + x^2\alpha(x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + x\alpha(x). \tag{15.316}$$

Sur le membre de droite la limite est facile à calculer :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \Big(1 - \frac{x}{2} + x\alpha(x)\Big) = 1. \tag{15.317}$$

△

15.6.14 Une petite intégrale

Exemple 15.101.
Soit V la région trapézoïdale de sommets $(0,-1)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,-2)$, comme à la figure 15.2(a). Calculons ensemble l'intégrale double

$$\int_V e^{\frac{x+y}{x-y}}\, dV,$$

avec le changement de variable [35] $\psi(x,y) = (x+y, x-y)$. C'est-à-dire que nous considérons les nouvelles variables

$$\begin{cases} u = x + y & (15.318a)\\ v = x - y. & (15.318b)\end{cases}$$

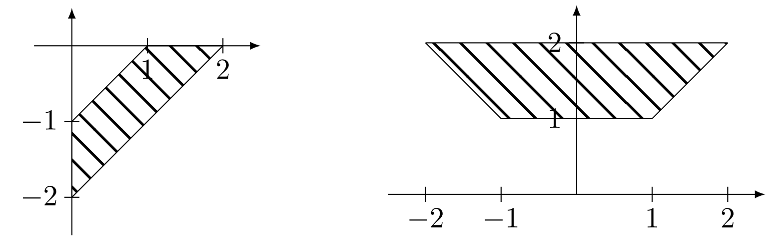
34. Proposition 15.95.
35. Théorème 14.265.

Il faut remarquer d'abord que le changement de variable proposé est dans le mauvais sens. On écrit alors $\phi(u,v) = \psi^{-1}(u,v) = \big((u+v)/2, (u-v)/2\big)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} & (15.319a)\\ y = \dfrac{u-v}{2}. & (15.319b)\end{cases}$$

La région qui correspond à V est U, le trapèze de sommets $(-1,1)$, $(1,1)$, $(2,2)$ et $(-2,2)$, qu'on voit sur la figure 15.2(b) et qu'on décrit par

$$U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leqslant v \leqslant 2,\ -v \leqslant u \leqslant v\}.$$



(a) La région V

(b) La région $U = \phi^{-1}(V)$

FIGURE 15.2 – Avant et après le changement de variables

Le déterminant de la matrice jacobienne de ψ^{-1} est $J_{\psi^{-1}}$,

$$J_{\psi^{-1}}(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}. \tag{15.320}$$

On a alors, en utilisant le fait que $F(x) = ae^{x/a}$ est une primitive de $f(x) = e^{x/a}$ (proposition 15.73) ainsi que le théorème fondamental de l'analyse (théorème 14.247),

$$\int_V e^{\frac{x+y}{x-y}}\, dV = \int_U e^{\frac{u}{v}}\, \frac{1}{2}\, dV = \int_1^2 \int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\, \frac{1}{2}\, du\, dv = \frac{3}{4}(e - e^{-1}).$$

△

15.7 Vitesses des puissances, de l'exponentielle et du logarithme

15.7.1 Un peu de théorie

Voici une série de résultats qui lient les vitesses des polynômes, du logarithme et de l'exponentielle.

Lemme 15.102.
Si P est un polynôme et si $a > 0$, alors

$$\lim_{x\to\infty} e^{-ax} P(x) = 0 \tag{15.321}$$

Démonstration. Nous prouvons par récurrence que pour tout n, nous avons $e^{-ax}x^n \to 0$. D'abord nous écrivons[36]

$$f(x) = e^{-ax}x = \frac{x}{e^{ax}}, \tag{15.322}$$

et ensuite la règle de l'Hospital 12.195 nous donne

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{ax}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{ae^{ax}} = 0. \tag{15.323}$$

36. En utilisant 12.402(3).

En ce qui concerne la récurrence, c'est encore la règle de l'Hospital :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^{ax}}=\frac{n}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n-1}}{e^{ax}}=0. \tag{15.324}$$

□

Proposition 15.103.
Nous avons :

(1) *Pour tout $\alpha>0$, il existe N tel que $\ln(n)\leqslant n^\alpha$ pour tout $n\geqslant N$.*
(2) *Pour tout $p>0$ et tout $\alpha>0$, il existe N tel que*

$$\ln(n)^p<n^\alpha \tag{15.325}$$

pour tout $n\geqslant N$.
(3) *Pour tout $n\geqslant 1$ nous avons la limite*

$$\lim_{x\to 0^+}x^n\ln(x)=0. \tag{15.326}$$

(4) *Nous avons*

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1-x)}{x}=-1. \tag{15.327}$$

(5) *L'exponentielle croit plus vite que tout polynôme, et plus vite que que logarithme :*

$$\lim_{x\to\infty}e^{-x}(\ln x)^n x^\alpha=0 \tag{15.328}$$

pour tout n et pour tout α.
(6) *Pour tout $n>0$, nous avons la limite*

$$\lim_{x\to 0^+}x^n e^{1/x}=\infty. \tag{15.329}$$

Le point (1) et sa généralisation (2) nous font dire que le logarithme croît moins vite que n'importe quel polynôme.

Démonstration. En plusieurs parties.

(i) **Pour (1)** En effet, nous avons, par la règle de l'Hospital (proposition 12.194),

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{\ln(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{1/x}=\lim_{x\to\infty}\alpha x^\alpha=\infty \tag{15.330}$$

quand $\alpha>0$. La dérivée du logarithme est dans la proposition 15.88.

(ii) **Pour (2)** Il faut prendre le N qui convient à l'item (1) pour $n^{\alpha/p}$. Ainsi nous avons $\ln(n)<n^{\alpha/p}$ et donc $\ln(n)^p\leqslant n^\alpha$.

(iii) **Pour (3)** Lorsque $x\neq 0$ nous avons

$$x^n\ln(x)=\frac{\ln(x)}{1/x^n}, \tag{15.331}$$

qui est un cas $\frac{\infty}{\infty}$. Nous nous en remettons à la règle de l'Hospital 12.195. D'abord nous nous assurons de la limite des dérivées :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-nx^{-n-1}}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{1}{n}\frac{x^{n+1}}{x}=0. \tag{15.332}$$

La règle de l'Hospital conclu à l'existence de la limite demandée et à son égalité à 0.

(iv) **Pour (4)** En effet, par la règle de l'Hospital 12.194,

$$\lim_{x\to 0} -\frac{\ln(1-x)}{x} = \lim_{x\to 0} -\frac{\frac{-1}{1-x}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1-x} = 1 \tag{15.333}$$

(v) **Pour (5)** Notons $f_1(x) = e^{-x/2}(\ln x)^n$ et $f_2(x) = e^{-x/2}x^\alpha$. Le lemme 15.102 donne tout de suite $\lim_{x\to\infty} f_2(x) = 0$.

En ce qui concerne f_1, l'item (2) nous indique que nous avons

$$f_2(x) = e^{-x/2}(\ln x)^n \leqslant e^{-x/2}x \tag{15.334}$$

dès que x est assez grand. Le lemme 15.102 nous dit alors que $\lim_{x\to\infty} f_2(x) = 0$.

Enfin, nous avons

$$e^{-x}(\ln x)^n x^\alpha = f_1(x)f_2(x) \tag{15.335}$$

et donc la limite demandée.

(vi) **Pour (6)** Nous passons au logarithme :

$$\ln(x^n e^{1/x}) = \ln(x^n) + \ln(e^{1/x}) = n\ln(x) + \frac{1}{x} = \frac{nx\ln(x)+1}{x}. \tag{15.336}$$

Grâce à la limite déjà prouvée en (3), le numérateur tend vers 1 lorsque $x \to 0^+$. Donc le tout tend vers $+\infty$. Au final,

$$\lim_{x\to 0^+} x^n e^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln(x^n e^{1/x})} = \infty. \tag{15.337}$$

□

Exemple 15.104.
Le lemme 12.415 a déjà prouvé la limite

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha a^n \tag{15.338}$$

pour tout $\alpha > 0$ et $a < 1$.

L'utilisation de propriétés de l'exponentielle nous permet de donner une nouvelle preuve, plus courte[37].

Le théorème 15.86 et la proposition 15.81 nous permettent de passer à l'exponentielle. Pour chaque n nous avons :

$$n^\alpha a^n = e^{\alpha\ln(n)+n\ln(a)}. \tag{15.339}$$

Ce qui est dans l'exponentielle est

$$\alpha\ln(n) + n\ln(a) = n\big(\alpha\frac{\ln(n)}{n} + \ln(a)\big). \tag{15.340}$$

Dans la parenthèse, $\ln(a) < 0$ et $\frac{\ln(n)}{n} \to 0$. Donc ce qui est dans l'exponentielle (15.339) tend vers $-\infty$ et au final l'expression demandée tend vers zéro. △

Remarque 15.105.
Vous ne pouvez pas à priori considérer l'exemple 15.104 comme une preuve alternative au lemme 12.415, parce que vous n'êtes pas sûr que dans toute la théorie permettant de définir l'exponentielle (en particulier la convergence de $\sum_k x^k/k!$), le lemme n'est pas utilisé[38].

37. C'est toujours facile de prétendre qu'une preuve est plus courte qu'une autre lorsqu'on utilise en une ligne des très gros théorèmes qui ont mis dix pages à être démontrés.
38. Faites la vérification et dites moi si c'est bon.

Lemme 15.106.
*La **fonction de Riemann***

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \tag{15.341}$$

est de classe C^∞ sur $]1, \infty[$.

Démonstration. Afin de faire le coup du compact, nous étudions la convergence uniforme de la série sur tout compact de $]1, \infty[$. Soit $\epsilon > 0$, et regardons ce qu'il se passe sur un compact dont le minimum[39] est $1+\epsilon$. Dans ce cas, $n^x \geqslant n^{1+\epsilon}$, et donc $f_n(x) = \frac{1}{n^x} \leqslant \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$. Étant donné que la série numérique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$ converge, la fonction de Riemann converge uniformément par le critère de Weierstrass (théorème 12.377). Nous avons donc convergence uniforme de la série sur tout compact de $]1, \infty[$, ce qui fait que ζ est une fonction continue pour $x > 1$ par le théorème 12.375.

Nous allons à présent utiliser le théorème 12.379 pour prouver que la fonction de Riemann est C^1. Il faut donc prouver que la série des dérivées $(n^{-x})' = -\ln(n)n^{-x}$ converge uniformément sur tout compact de $]1, \infty[$.

Nous prenons encore une fois un compact K dont le minimum est $1+\epsilon$. D'abord, nous majorons le logarithme par un x^α : lorsque n est assez grand, nous avons

$$\ln(n)n^{-x} \leqslant n^\alpha n^{-x}; \tag{15.342}$$

la proposition 15.103(1) nous dit que pour tout $\alpha > 0$, il existe un n à partir duquel cette inégalité est valide. Étant donné que $1 + \epsilon$ est le minimum du compact, nous pouvons encore majorer en remplaçant x par $1 + \epsilon$:

$$\ln(n)n^{-x} \leqslant \frac{1}{n^{1+\epsilon-\alpha}}. \tag{15.343}$$

Afin de pouvoir utiliser le critère de Weierstrass, nous devons nous assurer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon-\alpha}}$ converge. Cela n'est vrai que si $1 + \epsilon - \alpha > 1$, mais le choix de α étant encore arbitraire, nous choisissons $0 < \alpha < \epsilon$.

Ainsi, la série des dérivées converge uniformément sur tout compact et nous en déduisons que cette série est bien la dérivée de la fonction de Riemann qui est C^1.

Afin de traiter les dérivées d'ordre supérieur, il faut calculer

$$(n^{-x})^{p/} = (-1)^p \big(\ln(n)\big)^p n^{-x}, \tag{15.344}$$

et remarquer que $\lim_{x\to\infty} x^\alpha/(\ln(x))^p = \infty$. Par conséquent y a encore moyen de remplacer le logarithme par un x^α. Le reste de la preuve est la même. □

Ici se termine la preuve de ce lemme. Nous restons cependant sur notre faim en ce qui concerne la convergence uniforme de la série sur l'ouvert $]1, \infty[$. En effet, nous avons prouvé la convergence uniforme sur tout compact (et cela nous a suffit pour prouver le lemme), mais nous n'avons pas prouvé que la série n'était pas uniformément convergente sur $]1, \infty[$ pour autant.

Nous allons montrer qu'il n'y a pas uniforme convergence en prouvant que si x est assez proche de 1, alors la suite des sommes partielles de $\zeta(x)$ est aussi proche que l'on veut de la suite des sommes partielles de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ qui, elle, diverge.

Lemme 15.107.
Nous avons

$$\lim_{x\to 1^+} \zeta(x) = \infty \tag{15.345}$$

où la limite est une limite à droite : la limite à gauche n'existe pas.

Démonstration. Soit $M > 0$. Prouvons que $\exists\epsilon$ tel que $\zeta(1+\epsilon) \geqslant M$. D'abord, choisissons un k tel que

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} > M, \tag{15.346}$$

39. Pour rappel, un compact dans $\mathbb{R}$ a *toujours* un minimum.

et choisissons un ϵ tel que

$$\max_{n\in\{1,\ldots,k\}}\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n^{1+\epsilon}}\right|<\alpha. \tag{15.347}$$

Un tel choix de ϵ est possible pour tout α. Maintenant, nous choisissons α de façon à avoir $k\alpha<\sigma$. Avec ça, nous avons

$$\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^{1+\epsilon}}=\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^{1+\epsilon}}\right)<k\alpha<\sigma. \tag{15.348}$$

En prenant σ tel que $M-\sum_{n=1}^{k}(1/n)<\sigma$, nous trouvons ainsi un ϵ tel que $\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n^{1+\epsilon}}>M$. Cela prouve le lemme. □

Armé de ce lemme, il est maintenant aisé de prouver que la série définissant la fonction de Riemann n'est pas uniformément convergente sur $]1,\infty[$. Prenons la $k$ième somme partielle $s_k(x)=\sum_{n=1}^{k}(1/n^x)$. Pour chaque k, cela est une fonction bornée de x (y compris en $x=1$), donc $\sup_{x\in]1,\infty[}s_k(x)=M_k$. Armé de cette majoration, nous faisons

$$\|s_k-\zeta\|_\infty=\sup_{x\in]1,\infty[}\big(\zeta(x)-s_k(x)\big)>\sup\big(\zeta(x)-M_k\big)=\infty, \tag{15.349}$$

il n'y a donc pas moyen que la limite de $\|\zeta-s_k\|_\infty$ quand $k\to\infty$ soit nulle. Il n'y a donc pas uniforme convergence de ζ sur l'intervalle $]1,\infty[$.

Proposition 15.108.
Pour tout polynôme P et pour tout $a>0$ la fonction $f(x)=P(x)e^{-ax}$ est intégrable[40] *sur* $[0,\infty[$.

Démonstration. Nous avons $f(x)=P(x)e^{-ax/2}e^{-ax/2}$, et par la vitesse comparée des exponentielles et polynômes[41], pour un certain $M>0$ nous pouvons affirmer que $P(x)e^{-ax/2}<1$ sur $[M,0[$. Dès lors

$$|f(x)|<e^{-ax/2}, \tag{15.350}$$

qui est intégrable. □

Exemple 15.109.
La fonction logarithme (définition 15.78) n'est pas définie pour $x\leqslant 0$. Par conséquent la fonction $f(x)=x\ln(|x|)$ n'est pas définie en $x=0$. Elle est bien définie pour $x<0$ et vérifie

$$\lim_{x\to 0}x\ln(|x|)=0. \tag{15.351}$$

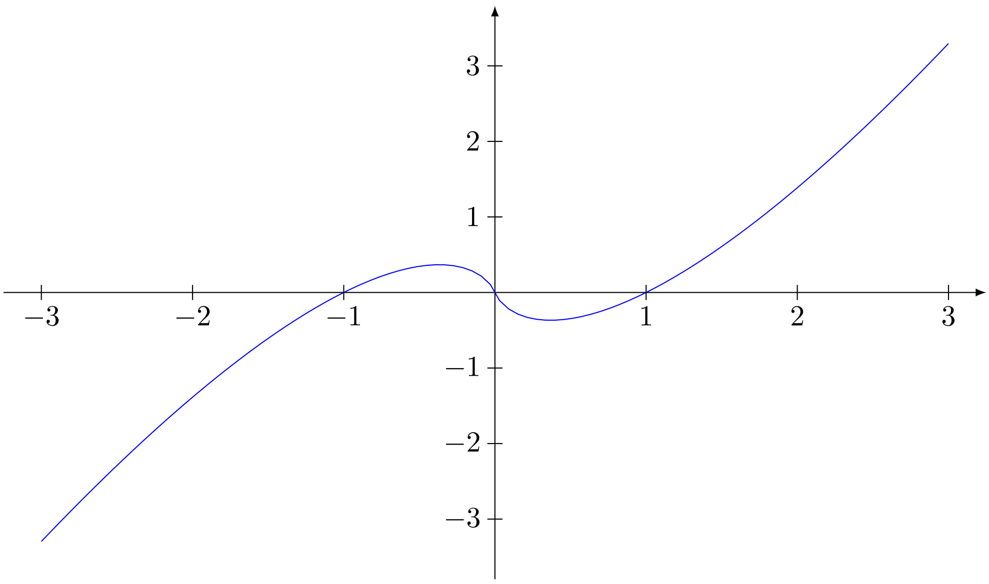
Nous pouvons donc définir la fonction

$$\begin{aligned}\tilde f\colon \mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto\begin{cases}x\ln(|x|) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}\end{aligned} \tag{15.352}$$

Contrairement à la fonction initiale f, cette fonction $\tilde f$ est définie et continue en 0.

Notez que sur le graphe de la fonction $\tilde f$, la courbe est bien régulière en $x=0$.

40. Définition 14.174.
41. Voir 15.103 et 15.102.



△

Exemple 15.110.

Prenons deux suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ qui tendent toutes les deux vers l'infini (resp. 0). On dira que la suite $\{a_n\}$ converge plus vite (resp. plus lentement) que la suite $\{b_n\}$ si $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$, aussi vite si $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ existe et est finie, et plus lentement (resp. plus vite) si $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$.

(1) Montrer qu'il existe deux suites qui tendent vers ∞ (ou 0) mais qui n'ont pas la même vitesse d'approche.

(2) Montrer que pour toute suite qui tend vers ∞ (ou 0), il existe une suite qui tend vers ∞ (ou 0) plus vite.

(3) Donner une suite non exponentielle qui tend vers l'infini plus vite que la suite $x_k=e^k$.

Voici quelques éléments de réponse.

(1) $x_n=n$ et $y_n=n^2$, et les inverses pour des suites qui tendent vers zéro.

(2) Si $x_n\to\infty$, la suite x_n^2 tend plus vite.

(3) La suite $x_n=n!$ tend vers ∞ vite que l'exponentielle. En effet, le nombre e^k n'est rien d'autre que le produit itéré $e\,\cdot\,e\,\cdot\,\ldots\,\cdot\,e$. Comparez

$$e\cdot e\cdot e\cdot\ \ldots\ \cdot e \tag{15.353}$$

avec

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot 10. \tag{15.354}$$

Étant donné que $e<3$, nous avons

$$\frac{e^k}{k!}<\frac{e^2}{2}\cdot\left(\frac{e}{3}\right)^{k-2}\to 0. \tag{15.355}$$

△

15.7.2 Nombres premiers

Le théorème suivant dit que la somme des inverses des nombre premiers diverge. Cela est à comparer avec la proposition 11.120 qui dit que la somme des inverses des carrés converge.

Théorème 15.111.

Soit P, l'ensemble des nombres premiers. Alors la somme $\sum_{p\in P}\frac{1}{p}$ diverge et plus précisément,

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\in P}}\frac{1}{p}\geqslant \ln(\ln(x))-\ln(2). \tag{15.356}$$

Démonstration. Nous posons

$$S_x = \{q \leqslant x \text{ avec } q \text{ sans facteurs carrés}\} \tag{15.357}$$

et

$$P_x = \{p \in P \text{ tel que } p \leqslant x\}. \tag{15.358}$$

Si

$$K_x = \{(q, m) \text{ tels que } q \text{ n'a pas de facteurs carrés et } qm^2 \leqslant x\}, \tag{15.359}$$

alors nous avons

$$K_x = \bigcup_{q\in S_x} \bigcup_{m\leqslant\sqrt{x/q}} (q, m). \tag{15.360}$$

Par définition et par le lemme 3.26 nous avons aussi

$$\{n \leqslant x\} = \{qm^2 \text{ tel que } (q, m) \in K_x\}. \tag{15.361}$$

Tout cela pour décomposer la somme

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{1}{n} = \sum_{q\in S_x} \sum_{m\leqslant\sqrt{x/q}} \frac{1}{m^2} \leqslant \sum_{q\in S_x} \frac{1}{q} \underbrace{\sum_{m\geqslant 1} \frac{1}{m^2}}_{=C}. \tag{15.362}$$

Nous avons aussi

$$\prod_{p\in P_x} \left(1 + \frac{1}{p}\right) = 1 + \sum_{p\in P_x} \frac{1}{p} + \sum_{\substack{p,q\in P_x\\ p<q}} \frac{1}{pq} + \sum_{\substack{p,q,r\in P_x\\ p<q<r}} \frac{1}{pqr} + \ldots \tag{15.363a}$$

$$\geqslant 1 + \sum_{p\in P_x} \frac{1}{p} + \sum_{\substack{p,q\in P_x\\ pq\leqslant x}} \frac{1}{pq} + \sum_{\substack{p,q,r\in P_x\\ pqr\leqslant x}} \frac{1}{pqr} + \ldots \tag{15.363b}$$

Les sommes sont finies. Les sommes s'étendent sur toutes les façons de prendre des produits de nombres premiers distincts de telle sorte de conserver un produit plus petit que x ; c'est-à-dire que les sommes se résument en une somme sur les éléments de S_x :

$$\exp\left(\sum_{p\in P_x} \frac{1}{p}\right) \geqslant \prod_{p\in P_x} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \geqslant \sum_{q\in S_x} \frac{1}{q}. \tag{15.364}$$

La première inégalité est simplement le fait que $1 + u \leqslant e^u$ si $u \geqslant 0$ (directe de la définition 15.86). Les inégalités suivantes proviennent du fait que le logarithme est une primitive de la fonction inverse (proposition 15.88) :

$$\ln(x) \leqslant \sum_{n\geqslant x} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{n\geqslant x} \frac{1}{n}. \tag{15.365}$$

Nous prolongeons ces inégalités avec les inégalités (15.362) et (15.364) :

$$\ln(x) \leqslant \sum_{n\geqslant x} \frac{1}{n} \leqslant C \sum_{q\in S_x} \frac{1}{q} \leqslant C \leqslant \exp\left(\sum_{p\in P_x} \frac{1}{p}\right). \tag{15.366}$$

En passant au logarithme,

$$\ln\big(\ln(x)\big) \leqslant \ln(C) + \sum_{p\in P_x} \frac{1}{p}. \tag{15.367}$$

Ceci montre la divergence de la série de droite. Nous cherchons maintenant une borne pour C. Pour cela nous écrivons

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\leqslant 1+\sum_{n=2}\frac{1}{n(n-1)} \tag{15.368a}$$

$$=1+\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) \tag{15.368b}$$

$$=1+1-\frac{1}{N} \tag{15.368c}$$

$$\leqslant 2. \tag{15.368d}$$

Donc $C\leqslant 2$. □

Ce théorème prend une nouvelle force en considérant le théorème de Müntz 17.7 qui dit qu'alors l'ensemble $\mathrm{Span}\{x^p$ tel que p est premier$\}$ est dense dans les fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la norme uniforme ou $\|.\|_2$.

15.7.3 Quelques limites

Nous voyons à présent quelques calculs de limite et de développements mettant en scène des logarithmes et exponentielles.

Exemple 15.112.
Pour trouver le développement de la fonction $f(x) = e^{-2x}$, il suffit d'écrire celui de e^t et de remplacer ensuite t par $-2x$. Le développement à l'ordre 3 de la fonction exponentielle est :

$$e^t = 1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+t^3\alpha(t). \tag{15.369}$$

Le développement de $f(x) = e^{-2x}$ sera donc

$$f(x) = 1-2x+\frac{4x^2}{2}-\frac{8x^3}{6}-8x^3\alpha(-2x). \tag{15.370}$$

Donc le polynôme de degré 3 partie régulière de g est :

$$1-2x+2x^2-\frac{4}{3}x^3, \tag{15.371}$$

et la fonction reste correspondante est :

$$\alpha_g(x) = -8\alpha(-2x). \tag{15.372}$$

△

Exemple 15.113.
Nous savons les développements

$$f(x) = \ln(1+x)\sim x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3} \tag{15.373}$$

et

$$\sin(x)\sim x-\frac{x^3}{6}. \tag{15.374}$$

Nous obtenons le développement d'ordre 3 de la fonction $x\mapsto \ln\big(1+\sin(x)\big)$ en écrivant

$$\ln\big(1+\sin(x)\big)\sim (x-\frac{x^3}{6})-\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^2+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^3. \tag{15.375}$$

Il s'agit maintenant de trouver les termes qui sont de degré inférieur ou égale à 3.

D'abord

$$\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^2 = x^2-\frac{x^4}{3}+\frac{x^6}{36}\sim x^2 \tag{15.376}$$

Nous avons alors aussi

$$\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^6 \sim x^2\left(x-\frac{x^3}{6}\right)\sim x^3. \tag{15.377}$$

En replaçant tout ça dans (15.375) nous trouvons

$$\ln\big(1+\sin(x)\big)\sim x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}. \tag{15.378}$$

$\triangle$

Exemple 15.114.
Calculer

$$\lim_{x\to\infty} e^{1/x}\sqrt{1+4x^2}-2x. \tag{15.379}$$

Nous allons effectuer un développement asymptotique de la partie « difficile » de l'expression posant d'abord $x=1/h$. Si $f(x)=e^{1/x}\sqrt{1-4x^2}$ alors

$$g(h)=\frac{1}{|h|}e^h\sqrt{h^2+4}=\frac{1}{h}\big(1+h+h\alpha(h)\big)\big(2+h\beta(h)\big). \tag{15.380}$$

La première parenthèse est le développement de e^h et la seconde celui de $\sqrt{h^2+4}$. Nous nous apprêtons à faire la limite $x\to\infty$ qui correspond à $h\to 0^+$, nous pouvons donc supposer que $h>0$ et omettre la valeur absolue. En effectuant le produit et en regroupant tous les termes contenant h^2, $\alpha(h)$ ou $\beta(h)$ dans un seul terme $h\gamma(h)$,

$$f(h)=\frac{1}{h}\big(2+2h+h\gamma(h)\big)=\frac{2}{h}+2+\gamma(h)=2x+2+\gamma(1/x) \tag{15.381}$$

où γ est une fonction vérifiant $\lim_{t\to 0}\gamma(t)=0$.

Nous sommes maintenant en mesure de calculer la limite (15.379) :

$$\lim_{x\to\infty} e^{1/x}\sqrt{1+x^2}-2x=\lim_{x\to\infty}\big(2x+2+\gamma(1/x)-2x\big)=2. \tag{15.382}$$

$\triangle$

15.8 Trigonométrie hyperbolique

Définition 15.115.
*Les fonctions **cosinus hyperbolique** et **sinus hyperbolique** sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les formules suivantes :*

$$\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \tag{15.383a}$$

$$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}. \tag{15.383b}$$

Si vous ne vous rappelez plus la définition de e^x, c'est 15.57.

Proposition 15.116.
Quelques propriétés algébriques des fonctions trigonométriques hyperboliques.

(1) $\cosh(-x)=\cosh(x)$

(2) $\sinh(-x)=-\sinh(x)$

(3) $\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$

(4) $\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \cosh(2x)$

(5) $\cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) = \cosh(x + y)$

(6) $\cosh(x)\cosh(y) - \sinh(x)\sinh(y) = \cosh(x - y)$

(7) $\cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y) = \sinh(x + y)$

(8) $\cosh(x)\sinh(y) - \sinh(x)\cosh(y) = -\sinh(x - y)$.

Démonstration. Si s'agit simplement de remplacer les définitions et d'utiliser les formules concernant les puissances, dont la formule (12.1122). □

Proposition 15.117.
Quelques propriétés analytiques des fonctions trigonométriques hyperboliques.

(1) $\cosh'(x) = \sinh(x)$

(2) $\sinh'(x) = \cosh(x)$.

(3) $\cosh(x) \geqslant 1$.

Démonstration. Pour les dérivées, il s'agit d'utiliser la dérivation de l'exponentielle, laquelle est facile par le théorème 15.86(1).

Pour (3), nous commençons par les $x \geqslant 0$. D'abord $\cosh(0) = 1$. Ensuite $\cosh'(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Vu que $x > 0$ nous avons $e^x > e^{-x} > 0$. Donc la dérivée de cosh est strictement positive sur $]0, \infty[$. La fonction y est donc partout plus grande que $\cosh(0) = 1$.

Pour les $x < 0$, nous avons la fait que cosh est paire. □

Proposition 15.118.
La fonction $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est bijective.*

Démonstration. En deux parties.

(i) **Injective** Si $\sinh(a) = \sinh(b)$, alors le théorème de Rolle 12.189 affirme qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\sinh'(c) = 0$. Mais la proposition 15.117 nous dit que $\sinh'(x) = \cosh(c) \geqslant 1$. Donc impossible.

(ii) **Surjective** Nous avons
$$\lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty \tag{15.384}$$
et
$$\lim_{x\to\infty} \sinh(x) = \infty. \tag{15.385}$$
Soit $y \in \mathbb{R}$. Il existe $m < 0$ tel que $\sinh(m) < y$ et $M > 0$ tel que $\sinh(M) > y$. Le théorème des valeurs intermédiaires 10.82 nous enseigne qu'il existe $x \in [m, M]$ tel que $\sinh(x) = y$.

□

Proposition 15.119 ([1])**.**
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que* $a - b^2 = 1$. *Il existe un unique* $(x, \sigma) \in \mathbb{R} \times \{\pm 1\}$ *tel que*

$$\begin{cases} a = \sigma\cosh(x) & (15.386a)\\ b = \sinh(x). & (15.386b)\end{cases}$$

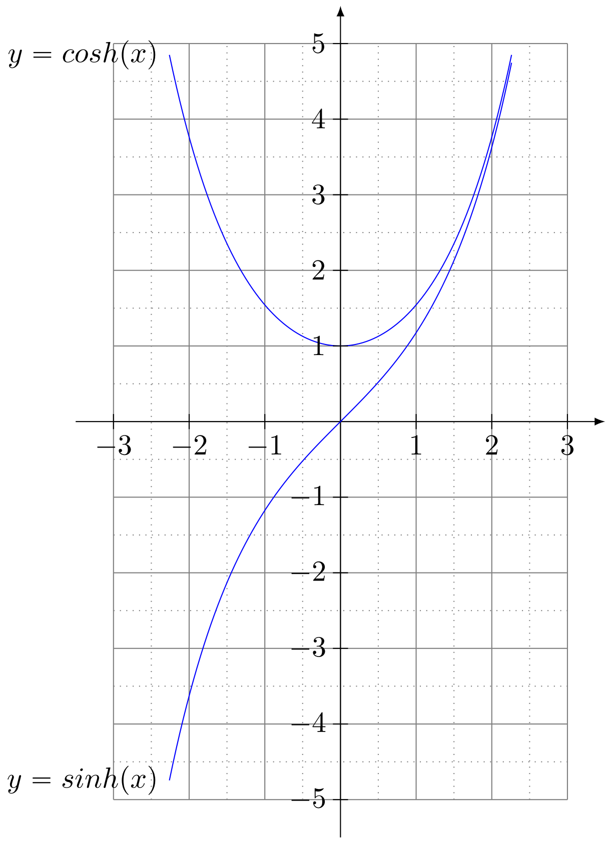
Démonstration. Vu que le sinus hyperbolique est une bijection [42], il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sinh(x) = b$. Maintenant un petit calcul :

$$a^2 = 1 + \sinh(x)^2 = 1 + \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} = \cosh(x)^2. \tag{15.387}$$

Vu que $\cosh(x)^2 = a^2$, il existe un unique $\sigma \in \{\pm 1\}$ tel que $\sigma\cosh(x) = a$. □

Les représentations graphiques sont ceci :

42. Proposition 15.118.



La **tangente hyperbolique** est donnée par le quotient

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}. \tag{15.388}$$

15.9 Séries entières de matrices

15.9.1 Différentiabilité

Proposition 15.120.
Soit (a_n) une suite dans $\mathbb{C}$ de rayon de convergence R et la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) &\to \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \\ A &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k \end{aligned} \tag{15.389}$$

Alors

(1) La différentielle de f sur $B(0,R)$ est

$$df_A(U) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{l=0}^{k-1} A^l U A^{k-1-l}, \tag{15.390}$$

c'est-à-dire que l'on peut différentier terme à terme. (Ici c'est A qui est dans $B(0,R)$)

(2) La convergence de la somme 15.390 est absolue.

(3) La convergence de la somme 15.390 est normale sur tout compact.

(4) La fonction f est de classe C^1 sur $B(0,R)$, c'est-à-dire que la fonction $A \mapsto df_A$ est continue.

Notons que df_A n'est pas tout à fait une série entière. Cependant, en ce qui concerne les normes, c'est tout comme si ça l'était.

Démonstration. Nous posons $u_k(A) = a_k A^k$, qui est une fonction de classe C^∞ et dont la différentielle est donnée par

$$(du_k)_A(U) = \frac{d}{dt}\Big[u_k(A+tU)\Big]_{t=0} = a_k \frac{d}{dt}\Big[(A+tU)^k\Big]_{t=0}; \tag{15.391}$$

en distribuant le produit nous trouvons tout un tas de termes dont seuls ceux contenant exactement une fois tU ne vont pas s'annuler. Étant donné que U et A ne commutent pas nous avons l'expression un peu moche

$$(du_k)_A(U) = \sum_{l=0}^{k-1} a_k A^l U A^{k-1-l}. \tag{15.392}$$

En ce qui concerne la norme, nous regardons celle de $(du_k)_A$ pour un A fixé ; c'est-à-dire que nous en regardons la norme opérateur :

$$\|(du_k)_A\| = \sup_{\|U\|=1} \|\sum_{l=0}^{k-1} a_k A^l U A^{k-1-l}\| \leqslant \sum_{l=0}^{k-1} |a_k| \|A\|^l \|A\|^{k-1-l} \leqslant k|a_k|\|A\|^{k-1}. \tag{15.393}$$

Pour donner la convergence nous considérons un nombre r tel que $\|A\| < r < R$, de telle sorte que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée par un nombre M et que nous puissions écrire

$$\|(du_k)_A\| \leqslant k|a_k|\|A\|^{k-1} = \frac{k|a_k|\|A\|^k}{\|A\|} = \frac{k|a_k|}{\|A\|} r^k \left(\frac{\|A\|}{r}\right)^k \leqslant \frac{M}{\|A\|} k \left(\frac{\|A\|}{r}\right)^k, \tag{15.394}$$

dont la série converge. Nous avons donc convergence absolue de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} (du_k)_A. \tag{15.395}$$

Passons à la convergence normale sur tout compact. Nous nous fixons $r < R$ et nous nous intéressons à la norme de du_k sur $\overline{B(0,r)}$, c'est-à-dire

$$\|du_k\|_\infty = \sum_{x \in \overline{B(0,r)}} \|(du_k)_A\|. \tag{15.396}$$

Vu que $\overline{B(0,r)}$ est compact, ce supremum est un maximum et nous pouvons noter A_k la matrice qui le réalise. Nous réalisons alors les mêmes manipulations que pour (15.394) :

$$\|du_k\|_\infty = \|(du_k)_{A_k}\| \leqslant k|a_k|\|A_k\|^{k-1} \leqslant k|a_k|r^{k-1} = \frac{1}{r} k|a_k|r^k. \tag{15.397}$$

Nous prenons maintenant $r < r_0 < R$ et M, un majorant de $(a_n r_0^n)$, de telle sorte qu'en multipliant et divisant par r_0^k,

$$\|du_k\|_\infty \leqslant \frac{k|a_k|r_0^k}{r} \frac{r^k}{r_0^k} \leqslant \frac{kM}{r} \left(\frac{r}{r_0}\right)^k, \tag{15.398}$$

dont la série converge. Nous avons donc convergence normale sur tout compact. Par voie de ~~fait~~ conséquences nous avons continuité de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} (du_k)_A \tag{15.399}$$

et convergence vers df_A par le théorème 15.8. □

Proposition 15.121.
Si le rayon de convergence de la série $u(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ est R, alors

(1) elle converge normalement sur tout compact de $B(0,R)$;

(2) la fonction u y est de classe C^∞.

Démonstration. Nous posons

$$\begin{aligned} u_k \colon \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) &\to \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \\ A &\mapsto a_k A^k \end{aligned} \tag{15.400}$$

qui est évidemment une fonction de classe C^∞. Nous étudions la j^{e} différentielle en m, pour $k > j$ (dans une série, nous ne nous intéressons pas aux premiers termes). La j^{e} différentielle appliquée à v_1 appliquée à v_2, etc s'exprime de la façon suivante :

$$(d^j u_k)_m(v_1,\ldots,v_j) = \frac{d}{dt_1}\ldots\frac{d}{dt_j}\Big(u_k(m+t_1v_1+\cdots+t_jv_j)\Big)_{t_i=0}. \tag{15.401}$$

Dans le produit $(m+t_1v_1+\cdots+t_jv_j)^k$, seuls les termes contenant exactement une fois chacun des t_i ne s'annulera pas après avoir fait la dérivée et évalué en $t_i = 0$. Combien de termes cela fait ? Parmi les k facteurs, il faut en placer j qui ne sont pas m (cela fait $\binom{k}{j}$ possibilités), et puis il faut ordonner ces j termes, cela fait encore $j!$ possibilités. Au final,

$$\|(d^j u_k)_m\| \leqslant |a_k|\binom{k}{j} j!\|m\|^{k-j} = |a_k| P(k)\|m\|^{k-j} \tag{15.402}$$

où $P(k) = \frac{k!}{(k-j)!}$ est un polynôme de degré j.

Afin d'étudier la convergence normale sur tout compact de la série des $d^j u_k$, nous considérons $r < r_0 < R$ et nous allons prouver la convergence normale sur $\overline{B(0,r)}$. Vu que c'est un compact, il existe une matrice $m_k \in \overline{B(0,r)}$ telle que

$$\begin{aligned} \|d^j u_k\|_\infty &= \|(d^j u_k)_{m_k}\| && (15.403a)\\ &\leqslant |a_k|P(k)\|m_k\|^{k-j} && (15.403b)\\ &\leqslant |a_k|P(k)r^{k-j} && (15.403c)\\ &= \frac{|a_k|P(k)}{r^j}r^k && (15.403d)\\ &= \frac{|a_k|r_0^kP(k)}{r^j}\left(\frac{r}{r_0}\right)^k && (15.403e)\\ &\leqslant \frac{M}{r^j}P(k)\left(\frac{r}{r_0}\right)^k && (15.403f) \end{aligned}$$

où M est un majorant de $a_n r^n$. Vu que $r_0/r < 1$, la somme sur k converge et nous avons convergence normale sur tout compact de

$$d^j\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k = \sum_{k=0}^{\infty} d^j(a_k A^k) \tag{15.404}$$

avec un peu d'abus de notation. □

15.10 Exponentielle de matrices

Proposition 15.122.
Une matrice complexe est inversible si et seulement si elle est une exponentielle.

Autrement dit :

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) = e^{\mathbb{M}(n,\mathbb{C})}. \tag{15.405}$$

Démonstration. Nous avons déjà prouvé dans la proposition 15.68 que toutes les exponentielles étaient inversibles. Ici nous nous concentrons sur la réciproque.

Soit $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$; nous allons donner une matrice $B \in \mathbb{M}(n,\mathbb{C})$ telle que $A = \exp(B)$. D'abord remarquons qu'il suffit de prouver le résultat pour une matrice par classe de similitude. En effet si

$A = \exp(B)$ et si M est inversible alors

$$\exp(MBM^{-1}) = \sum_k \frac{1}{k!}(MBM^{-1})^k \tag{15.406a}$$
$$= \sum_k \frac{1}{k!} MB^k M^{-1} \tag{15.406b}$$
$$= M\exp(B)M^{-1}. \tag{15.406c}$$

Donc $MAM^{-1} = \exp(MBM^{-1})$. Nous pouvons donc nous contenter de trouver un logarithme pour les blocs de Jordan. Nous supposons donc que $A = (\mathbb{1} + N)$ avec $N^m = 0$. En nous inspirant de (15.301), nous posons[43]

$$D(t) = tN - \frac{t^2}{2}N^2 + \cdots + (-1)^m \frac{t^{m-1}}{m-1} N^{m-1} \tag{15.407}$$

et nous allons prouver que $e^{D(1)} = \mathbb{1} + N$. Notons que N étant nilpotente, cette somme ainsi que toutes celles qui viennent sont finies. Il n'y a donc pas de problèmes de convergences dans cette preuve (si ce n'est les passages des équations (15.406)).

Nous posons $S(t) = e^{D(t)}$ (la somme est finie), et nous avons

$$S'(t) = D'(t)e^{D(t)} \tag{15.408}$$

Afin d'obtenir une expression qui donne S' en termes de S, nous multiplions par $(\mathbb{1} + tN)$ en remarquant que $(\mathbb{1} + tN)D'(t) = N$ nous avons

$$(\mathbb{1} + tN)S'(t) = NS(t). \tag{15.409}$$

En dérivant à nouveau,

$$(\mathbb{1} + tN)S''(t) = 0. \tag{15.410}$$

La matrice $(\mathbb{1} + tN)$ est inversible parce que son noyau est réduit à $\{0\}$. En effet si $(\mathbb{1} + tN)x = 0$, alors $Nx = -\frac{1}{t}x$, ce qui est impossible parce que N est nilpotente. Ce que dit l'équation (15.410) est alors que $S''(t) = 0$. Si nous développons $S(t)$ en puissances de t nous nous arrêtons au terme d'ordre 1 et nous avons

$$S(t) = S(0) + tS'(0) = \mathbb{1} + tD'(0) = 1 + tN. \tag{15.411}$$

En $t = 1$ nous trouvons $S(1) = \mathbb{1} + N$. La matrice $D(1)$ donnée est donc bien un logarithme de $\mathbb{1} + N$. □

15.10.1 Diagonalisabilité d'exponentielle

Proposition 15.123 ([101]).
Si $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ a un polynôme caractéristique scindé, alors A est diagonalisable si et seulement si e^A est diagonalisable.

Démonstration. Si A est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible M telle que $D = M^{-1}AM$ soit diagonale (c'est la définition 9.200). Dans ce cas nous avons aussi $(M^{-1}AM)^k = M^{-1}A^kM$ et donc $M^{-1}e^AM = e^{M^{-1}AM} = e^D$ qui est diagonale.

La partie difficile est donc le contraire.

43. Le logarithme d'un nombre n'est pas encore définit à ce moment, mais cela ne nous empêche pas de poser une définition ici pour une application des réels vers les matrices.

(i) **Qui est diagonalisable et comment ?** Nous supposons que e^A est diagonalisable et nous écrivons la décomposition de Dunford (théorème 9.245) :
$$A = S + N \tag{15.412}$$
où S est diagonalisable, N est nilpotente, $[S, N] = 0$. Nous avons besoin de prouver que $N = 0$.
Les matrices A est S commutent ; en passant au développement nous en déduisons que A et e^S commutent, puis encore en passant au développement que e^A et e^S commutent. Vu que S est diagonalisable, e^S l'est et par hypothèse e^A est également diagonalisable. Donc e^A et e^{-S} sont simultanément diagonalisables par la proposition 9.207.
Étant donné que A et S commutent, nous avons $e^N = e^{A-S} = e^A e^{-S}$, et nous en déduisons que e^N est diagonalisable vu que les deux facteurs e^A et e^{-S} sont simultanément diagonalisables.

(ii) **Unipotence** Si r est le degré de nilpotence de N, nous avons
$$e^N - \mathbb{1} = N + \frac{N^2}{2} + \cdots + \frac{N^{r-1}}{(r-1)!}. \tag{15.413}$$
Donc
$$(e^N - \mathbb{1})^k = \left(N + \frac{N^2}{2} + \cdots + \frac{N^{r-1}}{(r-1)!} \right)^k \tag{15.414}$$
où le membre de droite est un polynôme en N dont le terme de plus bas degré est de degré k. Donc $(e^N - \mathbb{1})$ est nilpotente et e^N est unipotente.
Si M est la matrice qui diagonalise e^N, alors la matrice diagonale $M^{-1}e^N M$ est tout autant unipotente que e^N elle-même. En effet,
$$\begin{aligned}
(M^{-1}e^N M - \mathbb{1})^r &= \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^{r-k} M^{-1} (e^N)^k M && (15.415a)\\
&= M^{-1} \left(\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^{r-k} (e^N)^k \right) M && (15.415b)\\
&= M^{-1}(e^N - \mathbb{1})^r M && (15.415c)\\
&= 0. && (15.415d)
\end{aligned}$$
La matrice $M^{-1}e^N M$ est donc une matrice diagonale et unipotente ; donc $M^{-1}e^N M = \mathbb{1}$, ce qui donne immédiatement que $e^N = \mathbb{1}$.

(iii) **Polynômes annulateurs** En reprenant le développement (15.413) sachant que $e^N = \mathbb{1}$, nous savons que
$$N + \frac{N^2}{2} + \cdots + \frac{N^{r-1}}{(r-1)!} = 0. \tag{15.416}$$
Dit en termes pompeux (mais non moins porteurs de sens), le polynôme
$$Q(X) = X + \frac{X^2}{2} + \cdots + \frac{X^{r-1}}{(r-1)!} \tag{15.417}$$
est un polynôme annulateur de N.
La proposition 9.95 stipule que le polynôme minimal d'un endomorphisme divise tous les polynômes annulateurs. Dans notre cas, X^r est un polynôme annulateur et donc le polynôme minimal de N est de la forme X^k. Donc il est X^r lui-même.
Nous avons donc $X^r \mid Q$. Mais Q est un polynôme contenant le monôme X donc X^r ne peut diviser Q que si $r = 1$. Nous en concluons que X est un polynôme annulateur de N. C'est-à-dire que $N = 0$.

(iv) **Conclusion** Vu que Dunford[44] dit que $A = S + N$ et que nous venons de prouver que $N = 0$, nous concluons que $A = S$ avec S diagonalisable.

□

44. Théorème 9.245.

15.11 Étude d'asymptote

Lorsqu'une fonction tend vers l'infini pour $x \to \infty$, une question qui peut venir est : à quelle vitesse tend-t-elle vers l'infini ?

Il est « visible » que la fonction logarithme ne tend pas très vite vers l'infini : certes

$$\lim_{x\to\infty} \ln(x) = +\infty, \tag{15.418}$$

mais par exemple $\ln(100000) \simeq 11.5$ tandis que $e^{100000} \simeq 10^{43429}$. Sans contestations possibles, l'exponentielle croit plus vite que le logarithme.

Soient f et g deux fonctions dont la limite $x \to \infty$ est ∞. Si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \tag{15.419}$$

nous disons que g tend vers ∞ plus vite que f ; si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty \tag{15.420}$$

nous disons que f tend vers ∞ plus vite que g, et si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = a \in \mathbb{R} \tag{15.421}$$

avec $a \neq 0$ alors nous disons que f tend vers l'infini à la même vitesse que $ag(x)$.

Exemple 15.124.
La fonction $x \mapsto x^2$ tend vers l'infini plus vite que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$. △

Dans cette section nous allons nous contenter de déterminer les fonctions qui tendent vers l'infini aussi vite qu'une droite oblique, que nous appellons asymptote et que nous voulons déterminer.

Exemple 15.125.
Déterminer les asymptotes obliques (s'ils existent) de la fonction

$$f(x) = e^{1/x}\sqrt{1+4x^2}. \tag{15.422}$$

Tout d'abord nous remarquons que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Nous sommes donc en présence d'une branche du graphe qui tend vers l'infini. Ensuite,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{1/x}\sqrt{\frac{1}{x^2}+4} = 2. \tag{15.423}$$

Donc le graphe de f tend vers l'infini à la même vitesse que le graphe de la fonction $y = 2x$. Nous aurons donc une asymptote oblique de coefficient directeur 2. De façon imagée, nous pouvons penser que le graphe de f et celui de $y = 2x$ sont presque parallèles si x est assez grand. Afin de déterminer l'ordonnée à l'origine de l'asymptote, il nous reste à voir quelle est la « distance » entre le graphe de f et celui de $y = 2x$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to\infty} e^{1/x}\sqrt{1+4x^2} - 2x. \tag{15.424}$$

Cette limite a été calculée dans l'exemple 15.114 et vaut 2.

Nous concluons que le graphe de la fonction f admet l'asymptote

$$y = 2x + 2. \tag{15.425}$$

△

15.12 Développement en série

15.12.1 Série génératrice d'une suite

Soit u_n une suite telle que le rayon de convergence de

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n \tag{15.426}$$

soit strictement positif. Alors la série f est la **série génératrice** de la suite (u_n).

Grâce au théorème 15.42 nous pouvons la dériver terme à terme autour de $z = 0$. En utilisant la petite formule (15.127) nous trouvons

$$f^{(l)}(z) = \sum_{n=l}^{\infty} u_n \frac{n!}{(n-l)!} z^{n-l}, \tag{15.427}$$

et donc

$$u_l = \frac{f^{(l)}(0)}{l!}. \tag{15.428}$$

D'où le nom de série génératrice. Cela est évidemment intéressant seulement si nous connaissons une autre forme pour f par ailleurs.

Nous en utiliserons une pour déterminer les partitions d'un nombre en parts fixes, proposition 26.53.

15.12.2 Développement en série et Taylor

Définition 15.126.
Soit une fonction $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. Nous disons que f est ***développable en série entière*** *dans un voisinage de z_0 si il existe une série $\sum_n a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et $r \leqslant R$ tel que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{15.429}$$

pour tout $z \in B(z_0, r)$.

Proposition 15.127.
Si V est un ouvert dans $\mathbb{C}$ alors l'ensemble des fonctions $V \to \mathbb{C}$ développables en série entière forme une $\mathbb{C}$-algèbre.

Démonstration. Les séries entières passent aux sommes et aux produits en gardant des rayons de convergence non nuls. □

Proposition 15.128.
Si f est développable en série entière à l'origine alors elle est C^∞ sur un voisinage de l'origine et le développement est celui de ***Taylor*** *:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \tag{15.430}$$

pour tout x dans un voisinage de 0.

Démonstration. Si $f(x) = \sum a_n x^n$, nous savons que f est C^1 et que nous pouvons dériver terme à terme (au moins dans un voisinage). De plus le fait de dériver ne change pas le domaine. Par récurrence, la fonction est C^∞ sur le voisinage. En dérivant k fois la série $\sum a_n x^n$ nous trouvons

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1) a_n x^{n-k}. \tag{15.431}$$

En calculant en $x = 0$ nous trouvons

$$f^{(k)}(0) = k!a_k, \tag{15.432}$$

d'où le terme général

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}. \tag{15.433}$$

□

Si f est une fonction et si la série

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \tag{15.434}$$

converge, alors cette série est la **série de Taylor** de f.

Remarque 15.129.
La série de Taylor d'une fonction n'est pas liée à sa fonction de façon aussi raide qu'on pourrait le croire. Même dans le cas d'une fonction C^∞ il peut arriver que $T_f(x) \neq f(x)$.

Il peut aussi arriver que f ne soit pas développable en série entières.

Exemple 15.130.
Nous considérons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{15.435}$$

Nous avons

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{15.436}$$

Note : pour la seconde ligne nous devons faire explicitement le calcul

$$f'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} e^{-1/t^2} = 0. \tag{15.437}$$

Plus généralement nous avons $f^{(k)}(0) = 0$, et par conséquent la série de Taylor converge (trivialement) vers la fonction identiquement nulle.

Cette fonction n'est donc pas développable en série entière vu qu'il n'existe aucun voisinage de zéro sur lequel la série de f coïncide avec f. △

Exemple 15.131.
Développement de $f(x) = \arctan(x)$. Nous savons que

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \tag{15.438}$$

alors que nous connaissons le développement

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \tag{15.439}$$

pour tout $x \in B(0, 1)$. Nous avons donc successivement

$$\frac{1}{1 + x} = \sum_{n=0} (-x)^n \tag{15.440a}$$

$$\frac{1}{1 + x^2} = \sum_{n=0} (-1)^n x^{2n} \tag{15.440b}$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n + 1} + C. \tag{15.440c}$$

Notons que dans la dernière nous avons évité d'écrire la somme depuis $n = 0$ (qui serait un terme constant) et nous avons écris explicitement « $+C$ ». Étant donné que $\arctan(0) = 0$, nous devons poser $C = 0$ et donc

$$\arctan(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \tag{15.441}$$

△

15.12.3 Resommer une série

Nous avons vu comment trouver la série correspondant à une fonction donnée. Un exercice difficile consiste à trouver la fonction qui correspond à une somme donnée.

15.12.3.1 Les sommes du type $\sum_n P(n)x^n$

Pour calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n)x^n \tag{15.442}$$

où P est un polynôme de degré m nous commençons par écrire

$$P(n) = \alpha_0 + \alpha_1(n+1) + \alpha_2(n+1)(n+2) + \cdots + \alpha_m(n+1)\ldots(n+m). \tag{15.443}$$

Nous décomposons alors la somme en m sommes de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_k \frac{(n+k)!}{n!} x^n = \alpha_k \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+k} \right)^{(k)}. \tag{15.444}$$

Effectuons par exemple

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+3} = \frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2 \tag{15.445}$$

Notons que dans un usage pratique, ce terme devra être ensuite dérivé trois fois, de telle manière que les termes « correctifs » n'interviennent pas. Cette méthode ne demande donc que de calculer les dérivées successives de $1/(1-x)$.

Exemple 15.132.
Calculons la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n. \tag{15.446}$$

D'abord nous écrivons

$$n^3 = -1 + 7(n+1) - 6(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)(n+3). \tag{15.447}$$

Nous avons

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \right)' = \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)' = \frac{1}{(x-1)^2}. \tag{15.448}$$

De la même façon,

$$\sum_n (n+1)(n+2)x^n = \left(\sum x^{n+2} \right)'' = \frac{-2}{(x-1)^3} \tag{15.449a}$$

$$\sum_n (n+1)(n+2)(n+3)x^n = \frac{6}{(x-1)^4}. \tag{15.449b}$$

En remettant tout ensemble nous obtenons

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n = -\frac{1}{1-x} + \frac{7}{(x-1)^2} + \frac{12}{(x-1)^3} + \frac{6}{(x-1)^4}. \tag{15.450}$$

Nous pouvons vérifier ce résultat en traçant les deux courbes et en remarquant qu'elles coïncident.

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.7.1, Release Date: 2011-08-11                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: n=var('n')
sage: S(x)=sum(  [ n**3*x**n for n in range(0,30)  ]   )
sage: f(x)=-1/(1-x)+7/((x-1)**2)+12/((x-1)**3)+6/( (x-1)**4  )
sage: S(0.1)
0.214906264288980
sage: f(0.1)
0.214906264288981
sage: f.plot(-0.5,0.5)+S.plot(-0.5,0.5)
```

$\triangle$

15.12.3.2 Les sommes du type $\sum_n x^n/P(n)$

Si $P(n)$ a des racines entières, nous pouvons le décomposer en fractions simples et utiliser la somme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x). \tag{15.451}$$

Nous avons par exemple

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}\frac{x^{n+1}}{n+1} \tag{15.452a}$$

$$=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\frac{\ln(1-x)}{x}. \tag{15.452b}$$

Notez le changement de point de départ de la somme au passage.

Autre exemple :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+3}=\frac{1}{x^3}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-x-\frac{x^2}{2}\right) \tag{15.453a}$$

$$=-\frac{\ln(x-1)}{x^3}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x}. \tag{15.453b}$$

Si le polynôme possède des racines non entières, les choses se compliquent.

Exemple 15.133.
Calculons

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2n+1}. \tag{15.454}$$

Si $x\geqslant$, en posant $t=\sqrt{x}$ nous trouvons

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2n+1}=\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{2n+1}. \tag{15.455}$$

Étudions

$$H(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{2n+1}. \tag{15.456}$$

Nous avons

$$H'(t)=\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}=\sum_{n=0}(t^2)^n=\frac{1}{1-t^2}. \tag{15.457}$$

Une primitive de cette fonction est

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|. \tag{15.458}$$

En $t=0$, cette fonction vaut 0 qui est la bonne valeur. Donc nous avons bien

$$H(t)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|. \tag{15.459}$$

Notons que ce que l'équation (15.457) nous dit est que $H(t)$ est une primitive de $1/(1-t^2)$. Il faut choisir la bonne primitive en fixant une valeur.

Nous avons donc

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2n+1}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left|\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right| \tag{15.460}$$

pour $x>0$. Nous devons encore trouver ce que cela vaut pour $x<0$.

Nous posons successivement $X=-x$ puis $g(X)=f(-X)$. Ce que nous devons calculer est

$$g(t)=\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nt^{2n+1}}{2n+1}. \tag{15.461}$$

Si nous posons

$$h(t)=\sum\frac{(-1)^nt^{2n+1}}{2n+1}, \tag{15.462}$$

alors

$$h'(t)=\sum(-1)^nt^{2n}=\sum(-t^2)^n=\frac{1}{1+t^2}, \tag{15.463}$$

par conséquent $h(t)=\arctan(t)$ (cela avait déjà été déduit à l'envers dans l'exemple 15.131).

Au final

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left|\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right| & \text{si } x>0\\ \frac{\arctan(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}} & \text{si } x<0\\ 1 & \text{si } x=0.\end{cases} \tag{15.464}$$

Notons qu'elle est continue en zéro à gauche et à droite.

△

Exemple 15.134.
Nous considérons l'exemple suivant :

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3n+2}. \tag{15.465}$$

Nous posons $t=\sqrt[3]{x}$, et nous substituons :

$$\frac{x^n}{3n+2}=\frac{t^{3n}}{3n+2}=\frac{1}{t^2}\frac{t^{3n+2}}{3n+2}. \tag{15.466}$$

Nous devons étudier la fonction

$$g(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{3n+2}}{3n+2} \tag{15.467}$$

Nous avons

$$g'(t)=\sum_{n=0}t^{3n+1}=t\sum_{n=0}t^{3n}=\frac{t}{1-t^3}. \tag{15.468}$$

Notons que $g(0)=0$.

△

Exemple 15.135.
Calculer le nombre

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}. \tag{15.469}$$

Nous aurions envie de dire que cela est $f(-1)$ pour la fonction f donnée en (15.464). Le problème est que le rayon de convergence de f étant 1, rien n'est garantit quand au fait que la fonction y soit continue en $x=-1$. En particulier nous devons justifier le fait que

$$\lim_{x\to -1}\sum_n\frac{x^n}{2n+1}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{\sqrt{-x}}\arctan(\sqrt{-x}). \tag{15.470}$$

Ce qui nous sauve est le critère d'Abel radial (théorème 15.38). En effet la série

$$\sum\frac{r^n}{2n+1} \tag{15.471}$$

étant convergente avec $r=-1$, la série correspondante est continue sur $[-1,0]$. Nous pouvons donc calculer la série (15.469) en posant $x=-1$ dans (15.464) :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}. \tag{15.472}$$

Note : la série (15.471) ne converge pas avec $r=1$. La fonction f n'est pas continue en $x=1$. △

Exemple 15.136.
Nous avons

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}. \tag{15.473}$$

En effet si nous désignons par f la somme à gauche, nous trouvons que $f=g'$ avec

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n. \tag{15.474}$$

Nous savons par ailleurs que $g(x)=1/(1-x)$. Par conséquent

$$f(x)=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}. \tag{15.475}$$

△

15.12.3.3 Sage, primitives et logarithme complexe

15.137.
Attention : Sage pourrait nous induire en erreur si nous n'y prenions pas garde. En effet ce que vous ne savez pas mais que Sage sait, c'est que

$$\ln(-1)=i\pi. \tag{15.476}$$

Par conséquent Sage se permet de donner des primitives sans valeurs absolues dans le logarithme :

```
sage: f(x)=1/x
sage: f.integrate(x)
x |--> log(x)
```

La primitive à laquelle on s'attend d'habitude est $\ln(|x|)$. Ici la réponse est correcte parce que si x est négatif nous avons

$$\ln(x) = \ln\big((-1)|x|\big) = \ln(-1) + \ln(|x|). \tag{15.477}$$

Cette fonction est donc décalée de la primitive usuelle seulement de la constante $\ln(-1)$.

Un exemple plus élaboré :

```
sage: h(x)=1/(1-x**2)
sage: H=h.integrate(x)
sage: H
x |--> -1/2*log(x - 1) + 1/2*log(x + 1)
sage: H(0)
-1/2*I*pi
```

Exemple 15.138.
Encore une fois il faut faire attention en demandant la primitive à Sage :

```
----------------------------------------------------------------------
| Sage Version 4.7.1, Release Date: 2011-08-11                       |
| Type notebook() for the GUI, and license() for information.        |
----------------------------------------------------------------------
sage: f(x)=x/(1-x**3)
sage: F=f.integrate(x)
sage: F(0)
-1/3*I*pi - 1/3*sqrt(3)*arctan(1/3*sqrt(3))
```

Cette fois la primitive proposée diffère de celle qu'on cherche de la constante complexe

$$-\frac{\pi}{3}i. \tag{15.478}$$

Mais il y a pire si nous voulons tracer. Nous voudrions définir la fonction $F_2(x) = F(x) - F(0)$. Mathématiquement c'est bien de cette fonction que nous parlons, mais :

```
sage: F2(x)=F(x)-F(0)
sage: F2(x)
1/3*I*pi - 1/3*sqrt(3)*arctan(1/3*(2*x + 1)*sqrt(3)) +
    +1/3*sqrt(3)*arctan(1/3*sqrt(3)) - 1/3*log(x - 1) + 1/6*log(x^2 + x + 1)
sage: F2.plot(x,-0.1,0.1)
verbose 0 (4101: plot.py, generate_plot_points)
        WARNING: When plotting, failed to evaluate function at 200 points.
verbose 0 (4101: plot.py, generate_plot_points)
        Last error message: 'unable to simplify to float approximation'
```

Il refuse de tracer. Pourquoi ? La partie complexe de l'expression de F_2 est mathématiquement nulle, mais elle est en deux parties :

$$\frac{\pi}{3} + \text{la partie imaginaire de} -\frac{1}{3}\ln(x-1). \tag{15.479}$$

Lorsque Sage tente de tracer, il donne à x un certain nombre de valeurs et calcule une *valeur approchée* de $\ln(x-1)$. Cette dernière ne se simplifie pas avec le nombre *exact* $\pi/3$. Sage reste donc avec une partie imaginaire qu'il ne peut pas tracer.

Notez la nuance :

```
sage: ln(-0.1)
-2.30258509299405 + 3.14159265358979*I
sage: ln(-1/10)
I*pi + log(1/10)
```

Du coup nous avons aussi

```
sage: F2(-0.1)
1/3*I*pi - 1/3*sqrt(3)*arctan(0.266666666666667*sqrt(3))
    + 1/3*sqrt(3)*arctan(1/3*sqrt(3)) - 0.0474885065133152 - 1.04719755119660*I
```

△

15.12.3.4 Nombres de Bell

Ici nous montrerions bien le théorème 15.160 sur les nombres de Bell parce que c'est essentiellement un résultat sur les séries entières et leurs manipulations. Hélas, il demande un tout petit peu d'équation différentielle (presque rien). Donc il est postposé jusqu'en page 1288.

15.13 Séries entières de matrices

Nous nous proposons d'étudier des séries de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k \tag{15.480}$$

où A est une matrice. L'essentiel de la théorie va rester. Nous considérons une norme algébrique (définition 11.55), c'est-à-dire $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

15.13.1 Rayon de convergence

La notion de rayon de convergence de cette série reste la même : c'est la définition 15.11 qui ne dépend que des coefficients a_k et pas du tout de ce qu'on met à côté dans la somme. Évidemment il faudra montrer que dans le cas des matrices, le nom « rayon de convergence » n'est pas usurpé.

Proposition 15.139.
Soit (a_n) une suite dans $\mathbb{C}$ de rayon de convergence R et $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{R})$ une matrice vérifiant $\|A\| < R$. Alors la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k \tag{15.481}$$

converge absolument, c'est-à-dire que $\sum_k \|a_k A^k\| < \infty$.

Démonstration. Nous avons les majorations

$$\|a_n A^n\| \leqslant |a_n|\|A^n\| \leqslant |a_n|\|A\|^n. \tag{15.482}$$

Par hypothèse $\|A\| < R$ et R est un supremum, donc il existe r tel que $\|A\| < r < R$ avec $(a_n r^n)$ borné. Nommons M un majorant de la suite $(a_n r^n)$. Alors nous avons

$$\|A_n A^n\| \leqslant |a_n| r^n \frac{\|A\|^n}{r^n} \leqslant M \left(\frac{\|A\|}{r}\right)^n. \tag{15.483}$$

La série du membre de droite converge parce que c'est une série géométrique de raison plus petite que 1, proposition 11.119. □

15.13.2 Convergence et rayon spectral

Le concept de rayon spectral permet aussi de donner des informations sur la convergence de séries de matrices. Pour rappel le rayon spectral d'une matrice est le maximum du module de ses valeurs propres (définition 11.56). Le rayon spectral de la matrice A est noté $\rho(A)$.

La proposition suivante sera redémontrée indépendamment dans le théorème 15.141.

Proposition 15.140 ([101]).
Si $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{C})$ est telle que $\rho(A) < 1$, alors $A^n \to 0$.

Démonstration. Nous nous plaçons dans une base des espaces caractéristiques [45] de A, c'est-à-dire que nous supposons que la matrice A a la forme

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbb{1} + N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_s \mathbb{1} + N_s \end{pmatrix} \tag{15.484}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de A et les N_i sont nilpotentes. En effet nous savons que l'espace caractéristique F_{λ_i} est l'espace de nilpolence de $A - \lambda_i \mathbb{1}$. Si nous notons A_i la restriction de A à cet espace, la matrice $N_i = A_i - \lambda_i \mathbb{1}$ est nilpotente. Du coup $A_i = \lambda_I \mathbb{1} + N_i$ et nous avons bien la décomposition (15.484).

Nous avons donc $A^n \to 0$ si et seulement si $(N_i + \lambda_i \mathbb{1})^n \to 0$ pour tout i. Soit donc N nilpotente et $\lambda < 1$ (parce que nous savons que toutes les valeurs propres de A sont inférieures à un). Nous avons

$$(\lambda \mathbb{1} + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k = \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k. \tag{15.485}$$

Nous voyons que le nombre de termes dans la somme ne dépend pas de n. De plus pour chacun de termes, la puissance de N ne dépend pas non plus de n. Le terme

$$\binom{n}{k} \lambda^{n-k} \leqslant P(n) \lambda^{n-k} \tag{15.486}$$

où P est un polynôme tend vers zéro lorsque n devient grand parce que c'est un cas polynôme fois exponentielle. □

Théorème 15.141 (Thème 39[322]).
Soit $A \in \mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Les affirmations suivantes sont équivalentes.

(1) $\lim_{k \to \infty} A^k = 0$

(2) $\rho(A) < 1$

(3) $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ *converge.*

Dans le cas où ces conditions sont vérifiées, nous avons aussi

— $\mathbb{1} - A$ *est inversible,*

— $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (\mathbb{1} - A)^{-1}$

Démonstration. Nous supposons qu'une norme est donnée sur $\mathbb{K}^n$ et nous considérons sur $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ la topologie associée à la norme subordonnée [46]. Nous subdivisons la preuves en différentes implications.

(i) **(1) implique (2)** Si $\rho(A) \leqslant 1$, en combinant la proposition 12.110 avec la proposition 12.112, nous avons

$$\|A^m\| \geqslant \big(\rho(A)\big)^m \geqslant 1 \tag{15.487}$$

Mais la limite $A^k \xrightarrow{\mathbb{M}(n,\mathbb{K})} 0$ signifie la limite $\|A^k\| \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$. Le fait que tous les éléments de la suite soient plus grand que 1 empêche cette limite.

(ii) **(2) implique (1)** Vu que $\rho(A) < 1$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\rho(A) + \epsilon < 1$. Par le lemme 12.111 il existe une norme N sur $\mathbb{M}(n, \mathbb{K})$ telle que $N(A) \leqslant \rho(A) + \epsilon < 1$. Notons que cette norme N dépend de A et de ϵ.

Avec cette norme nous avons

$$N(A^k) \leqslant N(A)^k \xrightarrow{\mathbb{R}} 0. \tag{15.488}$$

45. Voir le théorème 9.243

46. Si on parle de convergence d'une suite, c'est qu'il y a une topologie quelque part.

Cela signifie que $A^k \xrightarrow{N} 0$. L'équivalence entre toutes les normes sur $\mathbb{M}(n,\mathbb{K})$ donne alors la convergence $A^k \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$.

Pour une preuve alternative de cette implication, voir la proposition 15.140.

(iii) **(3) implique (1)** La convergence d'une série implique que la norme du terme général converge vers zéro par la proposition 11.88. Nous avons donc $\|A^k\| \to 0$, ce qui signifie $A^k \to 0$, et donc $\rho(A) < 1$ parce que (1) implique (2).

(iv) **$\rho(A) < 1$ implique $\mathbb{1} - A$ est inversible** Si μ est une valeur propre de $\mathbb{1} - A$ alors

$$\det\big((\mathbb{1} - A) - \mu\mathbb{1}\big) = \det\big(A - (1-\mu)\mathbb{1}\big), \tag{15.489}$$

donc $1-\mu$ est une valeur propre de A. Donc les valeurs propres de $\mathbb{1} - A$ sont les nombres $1 - \lambda_i$ où les λß sont les valeurs propres de A. Par hypothèse, nous avons $\lambda_i < 1$ pour tout i, donc les valeurs propres de $\mathbb{1} - A$ sont toutes non nulles. Donc $\mathbb{1} - A$ est inversible (pas de noyau).

(v) **Le reste** Nous montrons à présent que si $\rho(A) < 1$ alors $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ converge vers $\mathbb{1} - A$. Pour cela nous savons déjà que $\mathbb{1} - A$ est inversible. Nous posons

$$B_m = \mathbb{1} + A + \ldots + A^m, \tag{15.490}$$

ce qui donne immédiatement $AB_m = A + A^2 + \ldots + A^{m+1}$. Nous avons donc

$$(\mathbb{1} - A)B_m = \mathbb{1} - A^{m+1}. \tag{15.491}$$

Nous savons que $\lim_{m\to 0} A^m = 0$, donc

$$(\mathbb{1} - A)\sum_{k=0}^{\infty} A^k = \lim_{k\to\infty}(\mathbb{1} - A)B_k = \lim_{k\to\infty}(\mathbb{1} - A^{k+1}) = \mathbb{1}. \tag{15.492}$$

Notez au passage que nous avons permuté la somme avec le produit matriciel (voir 11.5.2).

□

15.13.3 Exponentielle et logarithme de matrice

La définition de l'exponentielle dans le cas des matrices est celle sur les algèbres normées non commutatives, 15.63.

Proposition 15.142.
L'application

$$\begin{aligned} \exp\colon \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) &\to \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \\ A &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \end{aligned} \tag{15.493}$$

est une application de classe C^∞. Sa différentielle en zéro est l'identité : $(d\exp)_0 = \mathrm{Id}$.

Démonstration. En ce qui concerne la continuité, nous savons que le rayon de convergence de la suite $\frac{1}{k!}$ est infini ; la proposition 15.121 conclu.

Pour la différentielle, c'est la proposition 15.120 qui nous permet d'écrire

$$d\exp_0(U) = \frac{d}{dt}\Big[\exp(tU)\Big]_{t=0} = \frac{d}{dt}\Big[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kU^k}{k!}\Big]_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{kt^{k-1}U^k}{k!}\Big|_{t=0} = U \tag{15.494}$$

parce que seul le terme $k = 1$ n'est pas nul. □

Nous avons vu par la proposition 15.122 que toute matrice complexe inversible a un logarithme. Nous allons maintenant parler de logarithme de matrices réelles avec une condition sur la norme. La formule ci-dessous montre explicitement que le logarithme est réel.

$$\begin{aligned} \ln\colon \{A \in \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \text{ tel que } \|A-\mathbb{1}\| < 1\} &\to \mathbb{M}(n,\mathbb{R}) \\ A &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(A-\mathbb{1})^{k+1}}{k+1}. \end{aligned} \tag{15.495}$$

Lemme 15.143.
Si $\|m\| < 1$ dans $\mathbb{M}(n,\mathbb{R})$, alors nous posons

$$\ln(\mathbb{1}+m) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{m^{k+1}}{k+1}. \tag{15.496}$$

Cette fonction a les propriétés suivantes.

(1) Elle est de classe C^∞.

(2) Elle est un bon logarithme au sens où

$$e^{\ln(\mathbb{1}+m)} = \mathbb{1}+m. \tag{15.497}$$

(3) Elle vérifie l'approximation

$$\ln(1+m) = m + \sigma(m) \tag{15.498}$$

où σ a la propriété que

$$\lim_{k\to\infty} k\sigma\left(\frac{m}{k}\right) = 0. \tag{15.499}$$

Démonstration. Le rayon de convergence de la suite $a_k = \frac{(-1)^k}{k+1}$ est 1. Donc l'application donnée est C^∞ sur $B(0,1)$ par le théorème 15.121.

D'après la formule (15.496) nous avons

$$\sigma(m) = \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{m^{l+1}}{l+1}. \tag{15.500}$$

Nous avons alors

$$k\sigma(\frac{m}{k}) = \sum_{l=1}^{\infty}(-1)^l\frac{m^{l+1}}{k^l(l+1)}, \tag{15.501}$$

et donc

$$\|k\sigma(\frac{m}{k})\| \leqslant \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\|m\|^{l+1}}{k^l(l+1)} \leqslant \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\|m\|^{l+1}}{l+1} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{15.502}$$

Cela prouve la dernière assertion. □

Proposition 15.144.
Soit V un espace vectoriel de dimension finie et $A \in \operatorname{End}(V)$. Nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \operatorname{End}(V) \\ t &\mapsto e^{tA}. \end{aligned} \tag{15.503}$$

Cette fonction vérifie

$$f'(t) = \big(e^{tA}\big)' = Ae^{tA}. \tag{15.504}$$

Démonstration. Si nous posons $f_k(t) = \frac{t^k A^k}{k!}$ alors la fonction f est la somme : $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$. Nous allons permuter la somme et la dérivation à l'aide du théorème 15.8. Vu que

$$f_k'(t) = \frac{kt^{k-1}A^k}{k!}, \tag{15.505}$$

la suite suite des dérivées converge normalement sur $\mathbb{R}$, nous pouvons dériver terme à terme pour obtenir

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{A^k}{k!}\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} kt^{k-1}\frac{A^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} kt^{k-1}\frac{A^k}{k!} = A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} = Ae^{tA}. \tag{15.506}$$

Notez le jeu au niveau du point départ de la somme : elle passe de 0 à 1 parce que le terme zéro est nul, mais la simplification $\frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!}$ n'a pas de sens pour $k = 0$. □

Lemme 15.145 ([407]).
Soit $A \in \operatorname{End}(V)$ où V est un espace vectoriel réel de dimension finie. Si nous notons λ_i ($i = 1, \ldots, r$) les valeurs propres distinctes de A alors il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\|e^{tA}\| \leqslant P\big(|t|\big)\sum_{i=1}^{r} e^{t\operatorname{Re}(\lambda_i)}. \tag{15.507}$$

Démonstration. Le polynôme caractéristique de A se note, d'après le corolaire 12.106 de la façon suivante :

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{m_i} \tag{15.508}$$

où m_i est la multiplicité de la valeur propre λ_i. Le lemme des noyaux 9.85 nous dit qu'en posant

$$V_i = \ker(A-\lambda_i\mathbb{1})^{m_i} \tag{15.509}$$

nous avons $V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i$. Nous nommons $p_i \colon V \to V$ la projection canonique de E sur V_i ainsi que x_i la composante de $x \in V$ dans l'espace caractéristique V_i et nous posons $A_i = p_i \circ A$. Les espaces caractéristiques sont stables par A (lemme 9.240), donc $(Ax_i)_i = Ax_i$. Par conséquent $\sum_i A_i p_i = A$ parce que

$$\Big(\sum_i p_i A p_i\Big)(x) = \sum_i (Ax_i)_i = \sum_i Ax_i = A\sum_i x_i = Ax. \tag{15.510}$$

En ce qui concerne les puissances de A nous avons de même

$$A_i^n x_I = A_i \underbrace{A_i^{n-1}x_i}_{\in V_i} = AA_i^{n-1}x_i = A^n x_i, \tag{15.511}$$

et donc

$$\sum_{i=1}^{r} A_i^n p_i = A^n. \tag{15.512}$$

En particulier,

$$e^{tA} = \sum_i e^{tA_i}p_i. \tag{15.513}$$

C'est de cette exponentielle de matrice que nous devons étudier la norme.

La décomposition de Dunford du théorème 9.245 est toujours un bon plan pour traiter avec les exponentielles : nous avons $A = s + n$ avec

$$s = \sum_k \lambda_k p_k, \quad n = \sum_k (A-\lambda_k\mathbb{1})p_k. \tag{15.514}$$

Nous montrons que la décomposition de Dunford de $p_i A$ est $p_i A = p_i s + p_i n$. Nous avons

$$p_i s = \sum_k \lambda_k p_i p_k = \lambda_i p_i \tag{15.515}$$

qui est bien diagonalisable. De plus les espaces caractéristiques sont stables par n, donc $p_i n$ est nilpotent. Enfin ils commutent :

$$[p_i s, p_i n] = \lambda_i (p_i n - p_i n p_i). \tag{15.516}$$

Vu que n préserve les espaces caractéristiques, lorsque $v \in V_k$ avec $k \neq i$ nous avons $p_i n p_i v = 0$ et $p_i n v = 0$. Mais si $v \in V_i$ alors

$$p_i n p_i v = p_i n v = n v \tag{15.517}$$

et $p_i n v = n v$, donc les opérateurs $p_i n$ et $p_i n p_i$ sont égaux et (15.516) donne bien zéro. En ce qui concerne l'exponentielle de A_i nous avons

$$e^{p_i A} = e^{p_i s} e^{p_i n} = e^{\lambda_i p_i} \exp\big((A - \lambda_i \mathbb{1}) p_i\big). \tag{15.518}$$

Nous pouvons maintenant sérieusement nous attaquer à la norme de e^{tA} de l'équation (15.513). D'abord nous avons $\|p_i\| = 1$ parce que l'opérateur p_i est l'identité sur au moins un vecteur (en fait tout ceux de l'espace caractéristique V_i). En utilisant les propriétés de la norme opérateur [47], nous trouvons dans un premier temps [48] :

$$\|e^{tA}\| \leqslant \sum_{i=1}^{r} \|e^{tA_i}\| \leqslant \sum_{i=1}^{r} |e^{t\lambda_i}| \underbrace{\sum_{k=0}^{m_i} \frac{|t|^k}{k!} \|A - \lambda_i \mathbb{1}_i\|^k}_{=P_i(|t|} \tag{15.519}$$

où $\mathbb{1}_i$ est l'opérateur identité sur V_i. Petit détail dans le calcul :

$$\|e^{\lambda_i p_i}\| \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^l}{k!} \|p_i\|^l = e^{\lambda_i}. \tag{15.520}$$

Notons que tous les termes de $P_i(|t|)$ et $P_i\big(|t|\big)$ sont positifs, de telle sorte que nous pouvons majorer en ajoutant des termes partout. À la place d'avoir $P_i(|t|)$ comme coefficient de $|e^{t\lambda_i}|$ nous majorons en mettant $\sum_{j=1}^{r} P_j(|t|)$ comme coefficient :

$$\|e^{tA}\| \leqslant \sum_{i=1}^{r} |e^{t\lambda_i}| P_i\big(|t|\big) = \sum_{i=1}^{r} |e^{t\lambda_i}| \sum_{j=1}^{r} P_j\big(|t|\big) = P\big(|t|\big) \sum_{i=1}^{r} e^{t\,\mathrm{Re}(\lambda_i)}. \tag{15.521}$$

L'arrivée de la partie réelle est une égalité usuelle pour les nombres complexes : $|e^{a+bi}| = e^a |e^{bi}| = e^a$. □

15.13.4 Calcul effectif de l'exponentielle d'une matrice

Nous reprenons l'exemple de [408]. Soit A une matrice dont le polynôme minimum s'écrit

$$P(X) = (X - 1)^2 (X - 2). \tag{15.522}$$

Par le théorème 9.85 de décomposition des noyaux nous avons

$$E = \ker(A - 1)^2 \oplus \ker(A - 2). \tag{15.523}$$

En suivant les notations de ce théorème nous avons $P_1(X) = (X - 1)^2$, $P_2(X) = X - 2$ et

$$Q_1(X) = X - 2 \tag{15.524a}$$
$$Q_2(X) = (X - 1)^2. \tag{15.524b}$$

47. Surtout le fait que ce soit une norme d'algèbre, lemme 11.60.
48. Si les valeurs propres de A sont λ_i, celles de tA sont $t\lambda_i$.

Les polynômes R_i dont l'existence est assurée par le théorème de Bézout sont

$$\begin{aligned}R_1(X) &= -X\\ R_2(X) &= 1.\end{aligned} \tag{15.525}$$

Nous avons

$$R_1Q_1 + R_2Q_2 = 1. \tag{15.526}$$

Le projecteur p_i sur $\ker P_i$ est R_iQ_i :

$$\begin{aligned}p_1 &= -A(A-2) = \mathtt{proj}_{\ker(u-1)^2}\\ p_2 &= (A-1)^2 = \mathtt{proj}_{\ker(u-2)}\,.\end{aligned} \tag{15.527}$$

Passons maintenant au calcul de l'exponentielle [49]. Nous avons évidemment

$$e^A = e^Ap_1 + e^Ap_2. \tag{15.528}$$

Étant donné que p_1 est le projecteur sur le noyau de $(A-1)^2$, nous avons

$$e^Ap_1 = ee^{A-1}p_1 = ep_1 + e(u-1)1 = ep_1 = -Ae(A-2). \tag{15.529}$$

En effet $e^{A-1}p_1 = \sum_{k=0}^{\infty}(A-1)^k \circ p_1$. De la même façon nous avons

$$e^Ap_2 = e^2e^{A-2}p_2 = e^2p_2 = e^2(A-1)^2. \tag{15.530}$$

Au final,

$$e^A = -Ae(A-2) + e^2(A-1)^2. \tag{15.531}$$

15.14 Lemme de Borel

15.14.1 Fonctions plateaux, Urysohn, partition de l'unité

Vous voulez une fonction de classe C^∞ nulle sur un ouvert, mais qui n'est pas nulle partout ? En voici une.

Lemme 15.146.
La fonction

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases} \tag{15.532}$$

est de classe C^∞.

Démonstration. Pour tout polynôme P nous avons la limite [50]

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x}}{P(x)} = 0. \tag{15.533}$$

De là, en écrivant les dérivées successives de φ, il est facile de voir qu'elles sont continues en $x = 0$. □

Lemme 15.147.
Soit $m > 0$. Il existe une application $\psi_m \in C^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\psi_m(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0\\ 0 & \text{si } x > m\\ \text{positive} & \text{si } x \in [0, m].\end{cases} \tag{15.534}$$

49. Définition 15.63. Thème 48
50. Voir la proposition 15.103(3).

Démonstration. Nous partons de la fonction φ du lemme 15.146. Ensuite nous considérons

$$\psi_m(x) = 1 - \frac{\int_0^x \varphi(t)dt}{\int_0^m \varphi(t)dt} \tag{15.535}$$

Cette fonction est encore de classe C^∞. En effet, le dénominateur $\int_0^m \varphi(t)dt$ est un simple nombre strictement positif sans histoires tandis que la proposition 14.246 dit que $x \mapsto \int_0^x \varphi(t)dt$ est une primitive de φ. Vu que φ est déjà de classe C^∞, sa primitive l'est également. □

Lemme 15.148 ([204]).
Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que

(1) $0 \leqslant f \leqslant 1$,
(2) $f = 0$ *sur* $]-\infty, a]$,
(3) $f = 1$ *sur* $[b, \infty[$.

Démonstration. C'est une variation sur le thème de la fonction du lemme 15.147 ; il s'agit de la retourner, dilater et décaler. Posez successivement $f_1(x) = \psi_m(-x)$, $f_2(x) = f_1\big(mx/(b-a)\big)$ et $f_3(x) = f_2(x-a)$ et je crois que le compte est bon. La fonction f_3 est celle que nous cherchons. □

Proposition 15.149.
Soient $a < b < c < d$ dans $\mathbb{R}$. Il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ à valeurs positives telle que

(1) $f(x) = 1$ *si* $x \in [b, c]$
(2) $\operatorname{supp}(f) \subset [a, d]$.

Démonstration. Nous considérons la fonction ψ_m du lemme 15.147, et nous considérons les fonctions

$$f_1(x) = \psi_{d-c}(x-c) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < c \\ 0 & \text{si } x > d \\ \text{positive} & \text{si } x \in [c, d]. \end{cases} \tag{15.536a}$$

$$f_2(x) = \psi(b-a)(b-x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x > b \\ \text{positive} & \text{si } x \in [a, b]. \end{cases}, \tag{15.536b}$$

et finalement la fonction suivante répond à la question des fonctions plateaux sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = f_1(x)f_2(x). \tag{15.537}$$

□

Une variation sur le même thème est l'existence de fonctions infiniment dérivables à support compact, c'est-à-dire des fonctions dans $C^\infty_c(\mathbb{R}^d) = \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$.

Lemme 15.150 ([1]).
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{e^{-1/(1-x^2)}}{(1-x^2)^n} = 0. \tag{15.538}$$

Démonstration. D'abord le lemme 15.102 nous indique que

$$\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0. \tag{15.539}$$

Nous prouvons ensuite que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^n} = 0. \tag{15.540}$$

Pour cela nous considérons $\epsilon > 0$. Soit $M > 0$ tel que $x^n e^{-x} < \epsilon$ pour tout $x > M$. Nous considérons δ tel que $0 < x < \delta$ implique $1/x > M$.

Pour de tels x, nous avons $e^{-1/x}/n^n < \epsilon$.

Nous montrons enfin que

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{e^{-1/(1-x^2)}}{(1-x^2)} = 0. \tag{15.541}$$

Pour cela, soit $\epsilon > 0$. Soit δ tel que $0 < x < \delta$ implique $e^{-1/x}/x^n < \epsilon$. Soit δ' tel que $1 < x < 1+\delta'$ implique $1 - x^2 < \delta$. Avec ça, nous avons

$$1 < x < 1+\delta' \Rightarrow \frac{e^{-1/(1-x^2)}}{(1-x^2)^n} < \epsilon. \tag{15.542}$$

□

<++>

Proposition 15.151.
La fonction $\xi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\xi(x) = \begin{cases} e^{-1/(1-\|x\|^2)} & \text{si } x \in B(0,1) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{15.543}$$

est de classe C^∞ et à support compact.

Démonstration. Le fait que le support soit compact est le fait qu'un support est toujours fermé (c'est dans la définition) et que le support de ξ est borné, contenu dans $B(0,1)$. Le vrai travail est de montrer que cette fonction est de classe C^∞.

Nous commençons par voir en dimension 1. C'est à dire la fonction

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} e^{-1/(1-x^2)} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \tag{15.544}$$

Le lemme 15.150 dit que f est continue. En ce qui concerne les dérivées de f, vous pouvez montrer par récurrence que

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{P_(x)}{(x^1-1)} f(x) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{15.545}$$

où P_n est un polynôme. Le lemme 15.150 (encore lui) nous indique que $f^{(n)}$ est continue.

Pour que ξ soit de classe C^∞, il suffit maintenant d'invoquer la proposition 7.145 qui dit que la norme est une application de classe C^∞. □

Corolaire 15.152.
Il existe une fonction $\xi \in \mathscr{D}\big(B(0,R)\big)$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \xi(x)dx = 0$.

Démonstration. Prenez la fonction de la proposition 15.151. Si $R < 1$, faites une redéfinition $\xi_2 = \xi(\lambda x)$ pour que le support soit dans $B(0,R)$. Ensuite, si l'intégrale n'est pas 1, encore une redéfinition $\xi_3 = \mu\xi_2$. □

Il ne faudrait pas croire pour autant que tout est toujours rose au pays des fonctions C^∞ à support compact.

Proposition 15.153.
Si ϕ est une fonction C^∞ non nulle à support compact sur $\mathbb{R}$, alors ϕ'/ϕ n'est pas bornée.

Plus présisément, nous posons $D = \{x \in \mathbb{R}$ tel que $\phi(x) \neq 0\}$. Alors la fonction

$$\begin{aligned} f\colon D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \phi'(x)/\phi(x) \end{aligned} \tag{15.546}$$

n'est pas bornée.

Démonstration. Quitte à décaller et à multiplier, nous supposons que $\phi(0) = 1$. Sinon vous considérez x_0 tel que $\phi(x_0) = y_0 \neq 0$ et vous adaptez tout le reste de la démonstration à vos frais.

Vu que ϕ est continue, la partie $Z = \{x \geqslant 0 \in \mathbb{R}$ tel que $\phi(x) = 0\}$ est fermée. Elle est également bornée vers le bas par 0. Donc elle possède un minimum que nous nommons a :

$$a = \min\{x \geqslant 0 \text{ tel que } \phi(x) = 0\}. \tag{15.547}$$

Les valeurs de ϕ qui vons nous intéresser sont :

$$\phi(x) = \begin{cases} > 0 & \text{si } x \in [0, a[\\ = 0 & \text{si } x = a. \end{cases} \tag{15.548}$$

Enfin, nous posons

$$M = \sup\{\phi'(x)/\phi(x)\}_{x \in [0,a[}. \tag{15.549}$$

Nous supposons que $M < \infty$[51].

Nous posons

$$\begin{aligned} F\colon [0, a[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^x \frac{\phi'(t)}{\phi(t)} dt. \end{aligned} \tag{15.550}$$

Vu que ϕ est de classe C^∞ et que x est dans $[0, a[$ sur lequel ϕ ne s'annule pas, cette intégrale n'a rien d'exceptionnel.

Nous pouvons majorer F de la façon suivantes :

$$F(x) = \int_0^x \frac{\phi'(t)}{\phi(t)} dt \leqslant \in_0^x M dt = Mx < Ma. \tag{15.551}$$

La proposition 14.246 lie primitive et intégrale ; celle de $\phi'(x)/\phi(x)$ est $\ln\big(\phi(x)\big)$ nous avons donc

$$F(x) = \ln(\phi(x)) - \ln(\phi(0)) = \ln\big(\phi(x)\big). \tag{15.552}$$

Mais vu que $\lim_{x\to a} \phi(x) = 0$, nous avons $\lim_{x\to a} F(x) = \infty$, d'où la contradiction. □

Notez que l'expression 15.552 montre que $\phi'(x)/\phi(x)$ tend vers $-\infty$, ce qui est logique : la dérivée est négative alors que ϕ reste positive. Ce que dit la proposition est qu'une fonction C^∞ à support compact tend plus vite vers zéro que sa dérivée.

15.14.2 Lemme de Urysohn

Le lemme d'Urysohn comprend de nombreuses variantes plus ou moins générales. En voici une parmi les plus simples.

Lemme 15.154 (Lemme d'Urysohn)**.**
Soient un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}$ et un compact K inclus dans $\mathcal{U}$. Il existe une fonction $f\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ de classe C^∞ telle que

(1) $f(x) = 1$ *pour* $x \in K$,

(2) $\operatorname{supp}(f) \subset \mathcal{U}$.

51. Vous pouvez ne pas supposer cela et voir le reste de la preuve comme une démonstration que $M = \infty$. Ici nous allons faire par l'absurde et montrer une contradiction en supposant que $M < \infty$.

Démonstration. Vu que K est compact, il est borné (théorème 10.21). Nous posons $b = \min(K)$ et $c = \max(K)$. En particulier b et c sont des éléments de K et donc de $\mathcal{U}$. Comme $\mathcal{U}$ est ouvert, il existe des boules centrées en b et c contenues dans $\mathcal{U}$. Soit r le rayon de telles boules :

$$B(b, r) \subset \mathcal{U} \tag{15.553a}$$

$$B(c, r) \subset \mathcal{U}. \tag{15.553b}$$

Nous posons $a = b - r \in \mathcal{U}$ et $d = c + r \in \mathcal{U}$. Nous considérons à présent la fonction plateau f de la proposition 15.149. Elle est de classe C^∞ et vérifie $f(x) = 1$ pour $x \in [b, c] = K$ ainsi que $f(x) = 0$ hors de $[a, d] \subset \mathcal{U}$. □

15.155.
Notons que la fonction du lemme d'Urysohn 15.154 n'épouse pas spécialement très bien la forme de K. Si par exemple $K = [0, 1] \cup [10, 11]$, la fonction f sera égale à 1 au moins sur $[0, 11]$.

Une généralisation à plus de dimensions.

Proposition 15.156 (Urysohn, Fonctions plateau[204])**.**
Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ainsi qu'un compact K dans Ω. Il existe une fonction $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que

(1) $\operatorname{supp}(\phi)$ *est compact dans* Ω*,*

(2) $0 \leqslant \phi \leqslant 1$

(3) $\phi = 1$ *sur un voisinage de* K*.*

15.14.3 Partition de l'unité

Théorème 15.157 (Partition de l'unité[204])**.**
Soient un compact $K \subset \mathbb{R}^d$ et des ouverts $\{\Omega_i\}_{i=1,\ldots,n}$ recouvrant K. Alors il existe des fonctions $\phi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ $(i = 1, \ldots, n)$ telles que

(1) $0 \leqslant \phi_k \leqslant 1$

(2) $\operatorname{supp}(\phi_k) \subset \Omega_k$*,*

(3) $\sum_{k=1}^{n} \phi_k = 1$ *sur un voisinage de* K*.*

Ces fonctions ϕ_i sont une ***partition de l'unité*** *subordonnée aux ouverts Ω_i.*

Démonstration. Nous considérons des compacts $\{K_i\}_{i=1,\ldots,n}$ comme dans le lemme 7.268. Pour chaque i nous avons $K_i \subset \Omega_i$, de telle sorte à ce que nous pouvions utiliser la proposition 15.156. Nous avons donc des fonctions $\psi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que $\operatorname{supp}(\psi_j)$ est compact dans Ω_j, $\psi_j \geqslant 0$ et $\psi_j = 1$ sur V_j qui est un voisinage ouvert de K_j.

Nous posons $V = V_1 \cup \ldots \cup V_n$. C'est un ouvert qui contient K parce que

$$K \subset \bigcup_j K_j \subset \bigcup_j \Omega_j \subset \bigcup_j V_j. \tag{15.554}$$

Nous faisons de même pour K lui-même. Il exist une fonction $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que

— $\operatorname{supp}(\theta)$ est compact dans Vn

— $\theta = 1$ sur un voisinage de K,

— $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Vu que $\psi_j = 1$ sur V_j, nous avons $\sum_{j=1}^{n} \psi_j > 0$ sur V.

Nous prouvons à présent que

$$1 - \theta + \sum_{k=1} (x)\psi_k > 0 \tag{15.555}$$

sur $\mathbb{R}^d$.

(i) **Si** $x \in V$ Alors $1-\theta(x) \geqslant 0$ et donc

$$1-\theta(x)+\sum_{k=1}^{n}\psi_k(x) \geqslant \sum_{k=1}^{n}\psi_k(x) > 0. \tag{15.556}$$

(ii) **Si** $x \notin V$ Vu que le support de θ est dans V, nous avons $\theta(x)=0$. Quant aux fonctions ψ_k, elles font un peu ce qu'elles veulent, mais elles sont positives [52] et donc

$$1-\theta(x)+\sum_{k=1}^{n}\psi_k(x) \geqslant 1-\theta(x)=1. \tag{15.557}$$

Vu que (15.555) est prouvé, nous pouvons poser

$$\phi_j=\frac{\psi_j}{1-\theta+\sum_{k=1}^{n}\psi_k} \tag{15.558}$$

sans peur pour le dénominateur. Nous avons $\phi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Nous savons que $\theta=1$ sur un voisinage de K. Su ce voisinage nous avons

$$\sum_{j=1}^{n}\phi_j(x)=\frac{\sum_j\psi_j(x)}{1-\theta(x)+\sum_k\psi_k(x)}=1. \tag{15.559}$$

De plus $\phi_j \geqslant 0$ parce que chacun des ψ_j l'est et parce que nous avons montré que le dénominateur était toujours strictement positif.

En enfin,

$$\operatorname{supp}(\phi_j)=\operatorname{supp}(\psi_j)\subset\Omega_j. \tag{15.560}$$

Donc les fonctions ϕ_j sont celles que dont nous avions besoin. □

15.14.4 Le lemme de Borel

Lemme 15.158 (Lemme de Borel[89]).
Soit (a_n) une suite dans $\mathbb{R}$. Il existe une fonction $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $u^{(k)}(0)=a_k$ pour tout $k \geqslant 0$.

Démonstration. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ une fonction telle que $\varphi(x)=1$ si $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ et telle que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset]-1,1[$.

Nous commençons par considérer une suite de réels strictement positifs (λ_k) dont nous fixerons une valeur précise plus tard, et nous posons

$$f_k(x)=\varphi(\lambda_k x)\frac{a_k}{k!}x^k. \tag{15.561}$$

Nous allons étudier la convergence et les propriétés de $u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}f_k(x)$.

Calculons (formellement) la $m$edérivée de f_k :

$$f_k^{(m)}(x)=\frac{a_k}{k!}\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\lambda_k^{m-l}\varphi^{(m-l)}(\lambda_k x)(x^k)^{(l)} \tag{15.562a}$$

$$=a_k\sum_{l=0}^{m}\binom{l}{m}\lambda_k^{m-l}\varphi^{(m-l)}(\lambda_k x)\frac{x^{k-l}}{(k-l)!}. \tag{15.562b}$$

Notons que nous travaillons à m fixé et que nous ne nous intéressons qu'aux termes avec k assez grand ; nous pouvons donc supposer $k \geqslant m$. De toutes façons pour $\sum_{k=0}^{m}f_k$, on a la classe C^∞, et

52. Dans le Frido, « positif » signifie dans $[0,\infty]$.

la permutation de la somme avec tout ce qu'on veut. Vu que φ est continue à support compact nous pouvons poser

$$M_m = \max_{0\leqslant j\leqslant m} \|\varphi^j\|_\infty = \max_{0\leqslant j\leqslant m}\max_{x\in\mathbb{R}} |\varphi^{(j)}(x)|. \tag{15.563}$$

Nous continuons en nous fixant un $x \in \mathbb{R}$ et un $k \geqslant m$.

Si $|x| > \frac{1}{\lambda_k}$, alors $\varphi^{(m)}(\lambda_k x) = 0$ parce que $\lambda_k x$ est strictement hors du support de φ qui est $]-1,1[$. Donc pour $|x| > \frac{1}{\lambda_k}$.

Si par contre $|x| \leqslant \frac{1}{\lambda_k}$, nous avons les majorations

$$|f_k^{(m)}(x)| \leqslant |a_k| \sum_{l=0}^{m} \binom{l}{m} |\lambda_k|^{m-l} \underbrace{\varphi^{(m-l)}(\lambda_k x)}_{\leqslant M_m} \frac{1}{(k-l)!} \underbrace{|x|^{k-l}}_{\leqslant (1/\lambda_k)^{k-l}} \tag{15.564a}$$

$$\leqslant |a_k| M_m |\lambda_k|^{m-k} \frac{1}{(k-m)!} \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \tag{15.564b}$$

$$\leqslant \frac{|a_k| M_m |\lambda_k|^{m-k} 2^m}{(k-m)!} \tag{15.564c}$$

$$= \frac{|a_k| M_m 2^m}{(k-m)! |\lambda_k|^{k-m}} \tag{15.564d}$$

où pour faire disparaitre la somme de coefficients binomiaux, nous avons remarqué que $\sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l}$ est le nombre total de termes dans le développement de $(a+b)^m$, c'est-à-dire 2^m. Nous voulons, pour m fixé, étudier la convergence de la somme de cela. Notons que le 2^m n'a en particulier strictement aucune importance parce qu'on travaille à m fixé.

Nous fixons maintenant la valeur des λ_k :

$$\lambda_k = \max\{|a_k|, 1\}. \tag{15.565}$$

Avec cela, en nous souvenant que nous n'étudions que les termes $k > m$, le dénominateur de (15.564d) est réellement croissant en k, donc nous avons la majoration

$$|f_k^{(m)}(x)| \leqslant \frac{M_m 2^m}{(k-m)!}. \tag{15.566}$$

Au final nous avons

$$\|f_k^{(m)}\|_\infty \leqslant \frac{2^m M_m}{(k-m)!}. \tag{15.567}$$

Et la somme de cela converge sans difficultés. Donc la série

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(m)}(x) \tag{15.568}$$

converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$. Nous pouvons alors permuter la somme et la dérivation par le théorème 15.3. Donc

$$u^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(m)} \tag{15.569}$$

est continue. En particulier, pour évaluer en zéro, on peut faire

$$u^{(m)}(0) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(m)}(0). \tag{15.570}$$

Nous avons

$$f_k(x) = \varphi(\lambda_k x) \frac{a_k}{k!} x^k. \tag{15.571}$$

Pour calculer la dérivée en zéro, il suffit de la calculer sur un voisinage sur lequel $\varphi(\lambda_k x)$ est la constante 1 ; un tel voisinage existe pour tout k. À ce moment le calcul est classique :

$$f_k^{(m)}(x) = \begin{cases} a_k & \text{si } k = m \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{15.572}$$

Finalement nous avons bien

$$u^{(m)}(0) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(m)}(0) = a_k. \tag{15.573}$$

□

Remarque 15.159.
Pour prouver le lemme de Borel, la première chose qui passe par la tête est la fonction toute simple

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} x^k. \tag{15.574}$$

Évidemment si on calcule les dérivées successives de cette fonction, nous trouvons les bons résultats. Le problème est la convergence. Rien qu'en prenant $a_k = k!k^k$, la série ne converge pour aucun x positif. L'idée de multiplier chacun de f_k par une fonction plateau sur un petit intervalle autour de zéro a plusieurs avantages. D'abord on conserve les dérivées correctes parce qu'on ne touche pas à la valeur des f_k sur un petit voisinage. Ensuite cela ne modifie pas la continuité ; et enfin en multipliant par $\varphi(\lambda_k x)$, ça calme méchamment les divergences parce que $\lambda_k x$ passe vite au dessus de 1 (et donc en dehors du support de φ) si λ_k est grand. D'où le fait qu'il soit normal que les λ_k soient de l'ordre des a_k.

15.15 Nombres de Bell

Théorème 15.160 (Nombres de Bell[89])**.**
Soient $n \geqslant 1$ et B_n le nombre de partitions distinctes de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ avec la convention que $B_0 = 0$. Alors

(1) La série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \tag{15.575}$$

a un rayon de convergence $R > 0$ et sa somme est donnée par

$$f(x) = e^{e^x - 1} \tag{15.576}$$

pour tout $x \in \left]-R, R\right[$.

(2) Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}. \tag{15.577}$$

(3) Le rayon de convergence de la série (15.575) est en réalité infini : $R = \infty$.

Démonstration. (1) Soient $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant k \leqslant n$. Nous notons E_k l'ensemble des partitions de $\{1, \ldots, n+1\}$ pour lesquelles le « paquet » contenant $n+1$ soit de cardinal $k+1$. Calculons le cardinal de E_k.

Pour construire un élément de E_k, il faut d'abord prendre le nombre $n+1$ et lui adjoindre k éléments choisis dans $\{1, \ldots, n\}$, ce qui donne $\binom{n}{k}$ possibilités. Ensuite il faut trouver une partition des $(n+1) - (k+1) = n - k$ éléments restants, ce qui fait B_{n-k} possibilités. Donc

$$\operatorname{Card}(E_k) = \binom{n}{k} B_{n-k}. \tag{15.578}$$

L'intérêt des ensembles E_k est que $\{E_0, \ldots, E_n\}$ est une partition de l'ensemble des partitions de $\{1, \ldots, n+1\}$, c'est-à-dire que $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(E_k)$, ce qui va nous donner une relation de récurrence pour les B_n :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(E_k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{n-l} B_l = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} B_l. \tag{15.579}$$

où nous avons utilisé un petit changement de variables $l = n-k$. Afin d'étudier la convergence de la série (15.575), nous allons montrer par récurrence que pour tout n, $B_n < n!$. D'abord pour $n = 0$ c'est bon : $B_1 = 1$ parce que la seule partition de $\{1\}$ est $\{1\}$. Supposons que l'inégalité soit vraie pour une certaine valeur k, et montrons qu'elle est vraie pour la valeur $k+1$:

$$B_{k+1} = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \leqslant \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{k} k! = k! \sum_{l=0}^{k} \underbrace{\frac{1}{(n-k)!}}_{\leqslant 1} \leqslant n!(n+1) = (n+1)! \tag{15.580}$$

où nous avons utilisé la formule $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons

$$0 \leqslant \frac{B_n}{n!} |x^n| \leqslant |x|^n, \tag{15.581}$$

et donc la série a un rayon de convergence au moins aussi grand que celui de la série géométrique, c'est-à-dire que 1. Donc $R \geqslant 1$. Nous nommons R ce rayon de convergence.

(2) Soit $x \in \,]-R, R[$. Pour une telle valeur de x à l'intérieur du disque de convergence, la proposition 15.42 nous permet de dériver terme à terme la série [53]

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} x^{k+1}, \tag{15.582}$$

pour obtenir

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{k+1}}{(k+1)} (k+1) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{k+1}}{k!} x^k \tag{15.583a}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} B_l \right) \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} \frac{B_l}{l!(l-k)!} \right) x^k. \tag{15.583b}$$

En cette expression, nous reconnaissons un produit de Cauchy (proposition 15.30) avec $a_l = \frac{B_l}{l!}$ et $b_n = \frac{1}{n!}$. Vu que ce sont deux séries ayant un rayon de convergence plus grand que zéro, le produit a encore un rayon de convergence plus grand que zéro et nous pouvons prendre le produit des séries :

$$f'(x) = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{l!} x^l \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \right) = f(x) e^x. \tag{15.584}$$

Étudions l'équation différentielle $y' = ye^x$. D'abord par un argument en lacet de chaussure [54], une solution est de classe C^∞. Ensuite si une solution est non nulle, elle est de signe constant. En effet si $y(x_0) < 0$ et $y(x_1) = 0$ (on choisit x_1 minimum pour cette propriété parmi les nombres plus grands que x_0) alors il existe [55] un $t \in \,]x_0, x_1[$ tel que $y'(t) > 0$, ce qui donnerait $y(t) > 0$, ce qui contredirait la minimalité de x_1.

53. C'est ici qu'on utilise la convention $B_0 = 0$ et ça aura une influence sur le choix de la constante K plus bas.
54. Genre ce qui est fait pour prouver 15.86(4).
55. Théorème de Rolle 12.189.

Nous prétendons[56] que cette équation différentielle a un espace de solutions de dimension 1. En effet, si $y' = ye^x$ et $g' = ge^x$ alors en posant $\varphi = y/g$ nous obtenons tout de suite $\varphi' = 0$, ce qui signifie que φ est constante, ou encore que y et g sont multiples l'un de l'autre.

Si nous en trouvons une non nulle par n'importe quel moyen, c'est bon. Une solution étant dérivable est continue, donc l'équation $f' = fe^x$ nous indique que f' est continue. Une solution non nulle va automatiquement accepter un petit voisinage sur lequel la manipulation suivante a un sens :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = e^x, \tag{15.585}$$

donc $\ln\big(|f(x)|\big) = e^x + C$ et $f(x) = Ke^{e^x}$ pour une certaine constante. Il est vite vérifié que cette fonction est une solution de l'équation différentielle $y'(x) = y(x)e^x$ et par unicité, toutes les solutions sont de cette forme. Autrement dit, l'espace des solutions est l'espace vectoriel $\mathrm{Span}\{x \mapsto e^{e^x}\}$. Étant donné que $f(0) = 0$, nous devons choisir $K = \frac{1}{e}$ et donc

$$f(x) = \frac{1}{e}e^{e^x} = e^{e^x - 1}. \tag{15.586}$$

(3) Nous commençons par écrire la fonction f comme une série de puissance. La partie simple du calcul : pour $x \in \left]-R, R\right[$, nous avons

$$e^{e^x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(kx)^l}{l!} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{k^l}{k!}\frac{x^l}{l!}. \tag{15.587}$$

Notons que cela n'est pas une série de puissance en x parce qu'il y a la double somme. Nous allons inverser les sommes au moyen du théorème de Fubini sous la forme du corolaire 14.271. Pour cela nous considérons la fonction

$$\begin{aligned} a\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ (k, l) &\mapsto \frac{(kx)^l}{k!l!} \end{aligned} \tag{15.588}$$

et nous mettons la mesure de comptage[57] sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$. Nous commençons donc à vérifier l'intégrabilité variable par variable de $|a|$:

$$\int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{N}} |a(k,l)| dm(l) \right) dm(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{(k|x|)^l}{l!} \tag{15.589a}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} e^{k|x|}. \tag{15.589b}$$

Nous devons montrer que cette dernière somme va bien. Pour cela nous posons $u_k = \frac{e^{k|x|}}{k!}$ et nous remarquons que $\frac{u_{k+1}}{u_k} \to 0$. Donc la double intégrale (15.589) converge, ergo $a \in L^1(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, ce qui nous permet d'utiliser le théorème de Fubini 14.272 pour inverser les ~~sommes~~ ~~intégrales~~ sommes dans l'équation (15.587) :

$$\frac{1}{e}e^{e^x} = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\frac{1}{l!}(kx)^l = \sum_{l=0} \frac{1}{e}\frac{1}{l!} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^l}{k!} \right) x^l. \tag{15.590}$$

Cela est un développement en série entière pour la fonction $\frac{1}{e}e^{e^x}$, dont nous savions déjà le développement (15.575) ; par unicité du développement nous pouvons identifier les coefficients :

$$B_l = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^l}{k!}. \tag{15.591}$$

56. Ou alors on utilise le théorème 32.15 avec $M(x) = e^x$ dans les cas $n = 1$ et $I = \left]-R, R\right[$.

57. Nous passons outre les avertissements et menaces de Arnaud Girand.

(4) Le développement (15.587) étant en réalité valable pour tout x et tous les calculs subséquents l'étant aussi, le développement

$$e^{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n \tag{15.592}$$

est en fait valable pour tout x, ce qui donne à la série entière un rayon de convergence infini.

□

Chapitre 16

Représentations et caractères

16.1 Représentations et caractères

Définition 16.1.
Si G est un groupe, l'ensemble des homomorphismes $\operatorname{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ *est un groupe pour la multiplication. Un élément de* $\operatorname{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ *est un* ***caractère abélien****. Le nom « abélien » vient du fait que le caractère prenne ses valeurs dans* $\mathbb{C}^*$*. Nous notons* $\hat{G} = \operatorname{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$.

Théorème 16.2.
Soit G un groupe abélien fini. Alors G est isomorphe à $\hat{G}$.

L'isomorphisme n'est pas canonique.

Démonstration. Étant donné la structure des groupes abéliens finis donnée par le théorème 5.23, nous commençons par nous concentrer sur $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Nous allons montrer que

$$\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{U}_n = \{\xi \in \mathbb{C} \text{ tel que } \xi^n = 1\}. \tag{16.1}$$

Pour cela nous avons l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \psi\colon \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*) &\to \mathbb{C}^* \\ f &\mapsto f(1). \end{aligned} \tag{16.2}$$

Notons que si $f \in \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*)$, alors $f(k) = f(1)^k$, donc ψ est bien un isomorphisme. Cela nous amène à définir

$$\begin{aligned} \varphi\colon \operatorname{Hom}\Big((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +), (\mathbb{C}^* n\ \cdot\ )\Big) &\to \mathrm{U}_n \\ g &\mapsto f(1). \end{aligned} \tag{16.3}$$

Remarquons que pour tout $f \in \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*)$ on a bien $f(1)^n = 1$. En effet si $[k] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, alors $f\big([k]\big) = f(1)^k$ et en particulier

$$f(1)^n = f([n]) = f(0) = 1. \tag{16.4}$$

Donc $f(1) \in \mathrm{U}_n$. Le φ est injective parce que si $f(1) = g(1)$ alors $f = g$ du fait que $f(k) = f(1)^k = g(1)^k = g(k)$.

Nous en sommes à avoir prouvé que $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*) \simeq \mathrm{U}_n$ (introduit au lemme 19.2). Il faudrait encore montrer que $\mathrm{U}_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Pour cela nous nous rappelons du lemme 19.5 nous ayant raconté que le groupe U_n des racines de l'unité était cyclique et d'ordre n. Il est donc bien isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Passons au cas où

$$G \simeq \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z}. \tag{16.5}$$

Dans ce cas nous montrons que

$$\begin{aligned}\alpha\colon \bigtimes_{i=1}^{k} \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*) &\to \operatorname{Hom}(G, \mathbb{C}^*)\\ \alpha(\chi_1,\ldots,\chi_k)(g_1,\ldots,g_k) &= \chi_1(g_1)\ldots\chi_k(g_k).\end{aligned} \tag{16.6}$$

Ce α est injectif parce qu'en appliquant l'égalité

$$\alpha(\chi_1,\ldots,\chi_k) = \alpha(\chi_1',\ldots,\chi_k') \tag{16.7}$$

à l'élément $g = (9,\ldots,1,\ldots,0)$ alors nous trouvons $\chi_i(1) = \chi_i'(1)$ parce que $\chi_j(0) = 1$. Du coup $\chi_i = \chi_i'$.

L'application α est en plus surjective. En effet si $\chi \in \operatorname{Hom}(G,\mathbb{C}^*)$, alors nous définissons

$$\chi_i(g_i) = \chi(0,\ldots,g_i,\ldots,0), \tag{16.8}$$

et nous avons alors $\alpha(\chi_1,\ldots,\chi_k) = \chi$.

Nous devons encore montrer que α est un homomorphisme. Si $\chi,\chi' \in \bigtimes_{i=1}^{k} \operatorname{Hom}(\mathbb{F}_{d_i},\mathbb{C}^*)$, alors

$$\alpha(\chi\chi')(g_1,\ldots,g_k) = (\chi_1\chi_1')(g_1)\ldots(\chi_k\chi_k')(g_k) \tag{16.9a}$$
$$= \chi_1(g_1)\ldots\chi_k(g_k)\chi_1'(g_1)\ldots\chi_k'(g_k) \tag{16.9b}$$
$$= \alpha(\chi)(g_1,\ldots,g_k)\alpha(\chi')(g_1,\ldots,g_k) \tag{16.9c}$$
$$= \big(\alpha(\chi)\alpha(\chi')\big)(g_1,\ldots,g_k). \tag{16.9d}$$

Donc $\alpha(\chi\chi') = \alpha(\chi)\alpha(\chi')$. □

Théorème 16.3.
Soit G un groupe abélien fini. Les groupes G et $\hat{\hat{G}}$ sont isomorphes et un isomorphisme canonique est donné par $\alpha\colon g \mapsto f_g$ donné par

$$f_g(\chi) = \chi(g). \tag{16.10}$$

Démonstration. D'abord f_g est bien un caractère de $\hat{G}$ parce que

$$f_g(\chi\chi') = (\chi\chi')(g) = \chi(g)\chi'(g) = f_g(\chi)f_g(\chi'). \tag{16.11}$$

Le fait que α soit un homomorphisme de groupes est direct :

$$f_{gg'}(\chi) = \chi(gg') = \chi(g)\chi(g') = f_g(\chi)f_{g'}(\chi) = (f_gf_{g'})(\chi). \tag{16.12}$$

D'autre part nous savon que G et $\hat{\hat{G}}$ ont le même cardinal. Il suffit donc de prouver l'injectivité de α pour être sûr de la bijectivité. Pour cela nous devons prouver que si $g \neq e$ alors $f_g \neq f_e$. Nous savons que pour tout caractère $\chi \in \hat{G}$, $f_e(\chi) = \chi(e) = 1$. Donc pour tout $g \in G\backslash\{e\}$, nous devons trouver $\chi \in \hat{G}$ tel que $\chi(g) \neq 1$.

En vertu de ce que nous connaissons sur la structure des groupes abéliens finis (théorème 5.23), nous commençons $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et considérons le caractère donné par $\chi([1]) = e^{2i\pi/n}$. Ce χ est un isomorphisme entre G et $\mathrm{U}(n)$; nous n'avons $\chi([k]) = 0$ que si $[k] = [n] = [0]$. Pour rappel dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, le neutre est $e = 0$ et non $e = 1$.

Passons au cas général :

$$G \simeq \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z} \tag{16.13}$$

Si $g = (g_1,\ldots,g_k)$ est non nul dans G, alors il existe i tel que $g_i \neq 0$ et on prend

$$\chi(g_1,\ldots,g_k) = \chi_i(g_i) \tag{16.14}$$

où χ_i est le caractère $\chi_i([1]) = e^{2\pi i/n_i}$. Ce χ est alors un caractère non trivial de G.

□

16.1.1 Crochet de dualité et transformée de Fourier

Si G est un groupe abélien, nous définissons le crochet de dualité entre G et $\hat{G}$ par

$$\begin{aligned}\langle.,.\rangle\colon G \times \hat{G} &\to \mathbb{C}^* \\ \langle g, \chi\rangle &= \chi(g).\end{aligned} \tag{16.15}$$

Notons que l'image de ce crochet n'est pas $\mathbb{C}^*$ entier, mais seulement le groupe unitaire $\mathrm{U}(n)$ où n est l'exposant [1] de G.

Si f, g sont des applications de G dans $\mathbb{C}$, alors on leur associe le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{s\in G} f(s)\overline{g(s)}. \tag{16.16}$$

Lemme 16.4.
Les caractères de G forment une base orthonormée de $\mathbb{C}^G$ pour ce produit scalaire.

Démonstration. Étant donné que les $\chi(s)$ sont des nombres complexe de module 1, nous avons $\chi(s)\overline{\chi(s)} = 1$ et par conséquent $\langle\chi, \chi\rangle = 1$.

Si par contre $\chi \neq \chi'$, alors il existe $s_\in G$ tel que $\chi(s_0) \neq \chi'(s_0)$. Dans ce cas en effectuant un changement de variable $s \to s_0 s$ dans la sommation,

$$\langle\chi, \chi'\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{s\in G}\chi(s)\overline{\chi'(s)} \tag{16.17a}$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{s\in G}\chi(s_0 s)\overline{\chi'(s_0 s)} \tag{16.17b}$$

$$= \frac{1}{|G|}\chi(s_0)\chi'(s_0)\sum_{s\in G}\chi(s)\overline{\chi'(s)}. \tag{16.17c}$$

Donc nous avons trouvé

$$\langle\chi, \chi'\rangle\big(1 - \chi(s_0)\overline{\chi'(s_0)}\big) = 0. \tag{16.18}$$

Mais vu que $\chi(s_0) \neq \chi(s_0')$, la parenthèse est non nulle (pour rappel $\chi(s_0)$ est un complexe de module 1) et par conséquent $\langle\chi, \chi'\rangle = 0$.

Nous déduisons immédiatement que les caractères forment une famille libre parce que si $\sum_i \chi_i = 0$ (la somme est sur tous les caractères), alors en prenant le produit scalaire avec χ_k,

$$\sum_i a_i\langle\chi_k, \chi_i\rangle = 0, \tag{16.19}$$

et donc $a_k = 0$.

Les caractères forment donc un système libre orthonormé. De plus l'espace engendré à la bonne dimension parce que le cardinal de l'ensemble des caractères est la dimension (complexe) de l'espace des fonctions de G dans $\mathbb{C}$ parce que, en utilisant l'isomorphisme entre G et $\hat{G}$,

$$\operatorname{Card}\hat{G} = \operatorname{Card}(G) = \dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^G. \tag{16.20}$$

La première □

Du fait que les caractères forment une base orthonormée, nous pouvons écrire, pour toute application $f\colon G \to \mathbb{C}$,

$$f = \sum_{\chi\in\hat{G}}\langle\chi, f\rangle\chi. \tag{16.21}$$

À une fonction $f\colon G \to \mathbb{C}$ nous associons la **transformée de Fourier**

$$\begin{aligned}\hat{f}\colon \hat{G} &\to \mathbb{C} \\ \chi &\mapsto \langle\chi, f\rangle.\end{aligned} \tag{16.22}$$

1. Définition 1.176.

Nous avons donc aussi une espèce de formule d'inversion

$$f = \sum_{\chi\in\hat G} \hat f(\chi)\chi \tag{16.23}$$

qui n'est qu'une réécriture de 16.21.

16.1.2 Groupes non abéliens

Nous avons vu que le groupe des caractères $\hat G$ contenait toute l'information sur un groupe abélien. Malheureusement, pour les groupes non abéliens, ça ne va pas suffire, et nous allons introduire la notion de représentations, dont les caractères seront un cas particulier de dimension un.

Proposition 16.5.
Soit G un groupe (pas spécialement abélien). Nous avons

$$\hat G \simeq \operatorname{Hom}\big(G/D(G), \mathbb{C}^*\big). \tag{16.24}$$

Démonstration. Ce qui fait fonctionner la preuve est le fait que si $f\colon G\to\mathbb{C}^*$ est un homomorphisme, alors f s'annule sur $D(G)$. L'isomorphisme est

$$\begin{aligned} \psi\colon \hat G &\to \operatorname{Hom}\big(G/D(G), \mathbb{C}^*\big)\\ \psi(f)[g] &= f(g). \end{aligned} \tag{16.25}$$

Cette application est bien définie parce que si f est un homomorphisme,

$$f(gklk^{-1}l^{-1}) = f(g). \tag{16.26}$$

D'autre part ψ est un homomorphisme de groupe parce que

$$\psi(f_1f_2)[g] = (f_1f_2)(g) = f_1(g)f_2(g) = \psi(f_1)[g]\psi(f_2)[g] = \big(\psi(f_1)\psi(f_2)\big)[g]. \tag{16.27}$$

Pour l'injectivité de ψ, soit f_1 et f_2 telles que $\psi(f_1)=\psi(f_2)$. Alors pour tout $g\in G$ nous avons

$$\psi(f_1)[g] = \psi(f_2)[g] \tag{16.28}$$

et donc $f_1(g) = f_2(g)$.

Enfin ψ est surjective. En effet, soit $\bar f\in\operatorname{Hom}\big(G/D(G), \mathbb{C}^*\big)$. Alors nous obtenons $\psi(f)=\bar f$ en posant

$$f(g) = \bar f[g]. \tag{16.29}$$

Il faut juste vérifier que le f ainsi défini est dans $\hat G$, c'est-à-dire que $f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2)$. □

Cette proposition nous montre que

$$\hat G = \widehat{G/D(G)}, \tag{16.30}$$

alors que $G/D(G)$ est abélien ; il n'est donc pas tellement possible que $\hat G$ contienne beaucoup d'informations intéressantes sur G.

16.1.3 Représentations linéaires des groupes finis

Si $\dim V = 1$, alors $\mathrm{GL}(V) = \mathbb{C}^*$ et les représentation sont les caractères abéliens.

Exemple 16.6.
Considérons le triangle équilatéral A, B, C donné par les points

$$\begin{cases} A = 1 & (16.31a) \\ B = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) & (16.31b) \\ C = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) & (16.31c) \\ & (16.31d) \end{cases}$$

Dans la base (pas orthonormée) $\{A, B\}$ de $\mathbb{R}^2$, ces trois points sont donnés par

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{16.32}$$

Le groupe symétrique S_3 agit sur le triangle par permutation des sommets. Vues dans la base $\{A, B\}$, les transpositions correspondent aux matrices

$$\rho(AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{16.33a}$$

$$\rho(AC) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{16.33b}$$

$$\rho(BC) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{16.33c}$$

Cherchons la matrice correspondante à la permutation (A, B, C). Vu que A est envoyé sur B, la première colonne sera[2] $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et comme B est envoyé sur C, la deuxième colonne sera $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Nous avons donc

$$\rho(ABC) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{16.34}$$

Nous vérifions que $\rho(ABC)C = A$:

$$\rho(ABC)C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \tag{16.35}$$

Par ailleurs, la permutation (A, B, C) se décompose en $(A, B, C) = (A, C)(A, B)$ et nous pouvons vérifier que

$$\rho(AC)\rho(AB) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \rho(ABC). \tag{16.36}$$

$\triangle$

Définition 16.7.
Si (V, ρ) et (V', ρ') sont deux représentations du groupe G, alors nous définissons la ***somme directe*** *par $\big(V \oplus V', \rho \oplus \rho'\big)$ donné par*

$$(\rho \oplus \rho')(g) = \begin{pmatrix} \rho(g) & 0 \\ 0 & \rho'(g) \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(V \oplus V'). \tag{16.37}$$

Nous noterons souvent $2V$ pour la représentations $(V, \rho) \oplus (V, \rho)$ et plus généralement l'écriture

$$V = \bigoplus_i k_i W_i \tag{16.38}$$

signifiera la représentation somme de k_i termes de la représentation W_i. Ici encore un abus est commis entre la représentation (ρ_i, W_i) et l'espace W_i.

2. Les colonnes sont les images des vecteurs de base.

16.1.4 Module

Nous considérons la $\mathbb{C}$-algèbre $G[\mathbb{C}]$ des combinaisons (formelles) d'éléments de G à coefficients dans G, c'est-à-dire l'ensemble

$$\mathbb{C}[G] = \{\sum_{s\in G} a_s s\} \tag{16.39}$$

avec le produit hérité de la bilinéarité :

$$\sum_{s\in G}\sum_{t\in G} a_s b_t st = \sum_s \sum_t a_s b_{s^{-1}t} t, \tag{16.40}$$

et la somme

$$(\sum_s a_s s) + \sum_t b_t t = \sum_{s\in G} (a_s + b_s)s. \tag{16.41}$$

Le tout est une $\mathbb{C}$-algèbre agissant sur V par

$$\left(\sum_s a_s s\right) v = \sum_{s\in G} a_s \rho(s) v \in V \tag{16.42}$$

Les sous-modules indécomposables seront les représentations irréductibles.

Définition 16.8.
La représentation (V, ρ) du groupe G est ***irréductible*** *si les seuls sous-espaces invariants de V sous $\rho(G)$ sont V et $\{0\}$.*

Exemple 16.9.
La représentation de S_3 sur $\mathbb{R}^2$ donnée par les permutations des sommets d'un triangle équilatéral donnée dans l'exemple 16.6 est irréductible. △

La question qui vient est de savoir si une représentation possédant des sous-espaces invariants peut être écrite comme la somme de représentations irréductibles.

Proposition 16.10.
Soit (V, ρ) une représentation linéaire de dimension finie d'un groupe fini[3]*. Si W_1 est un sous-espace stable*[4]*, alors il existe un sous-espace W_2 également stable et tel que $V = W_1 \oplus W_2$.*

Toute représentation linéaire est décomposable en représentations irréductibles.

Démonstration. Soit $P\colon V \to V$ un projecteur sur W_1, c'est-à-dire que $P^2 = P$ et $P(V) = W_1$. Pour construire un tel projecteur, on peut par exemple prendre un supplémentaire de W_1 dans V puis utiliser la décomposition[5]. Nous considérons l'opérateur

$$P_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \rho(g)\circ P\circ \rho(g)^{-1}. \tag{16.43}$$

Prouvons que ce P_G est encore un projecteur. D'abord pour tout $g \in G$ nous avons

$$\rho(g)P_G\rho(g)^{-1} = \frac{1}{|G|}\sum_{s\in G} \rho(gs)P\rho(gs)^{-1} = P_G. \tag{16.44}$$

La dernière égalité est un changement de variables dans la somme[6]. Cela signifie que $P_G\rho = \rho P_G$.

3. La démonstration marche aussi pour les groupes compacts, mais il faudrait des intégrales.
4. c'est-à-dire si ρ n'est pas irréductible.
5. Ou encore prendre une base de W_1, l'étendre en une base de V et définir P comme l'annulation des coefficients des vecteurs « complétant » la base.
6. Et c'est ça qui demande un peu de technique pour écrire la preuve dans le cas d'un groupe compact : il faut une mesure de Haar.

Nous avons même $P_G P = P$ parce que si $v \in W_1$, alors

$$P_G(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{s\in G}\rho(s)P\underbrace{\rho(s)^{-1}v}_{\in W_1} \tag{16.45a}$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{s}\rho(s)\rho(s)^{-1}v \tag{16.45b}$$

$$= v. \tag{16.45c}$$

Avec cela nous pouvons conclure que $P_G^2 = P_G$ parce que

$$P_G \circ P_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g} P_G\rho(g)P\rho(g)^{-1} \tag{16.46a}$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g}\rho(g)P_G P\rho(g)^{-1} \tag{16.46b}$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g}\rho(g)P\rho(g)^{-1} \tag{16.46c}$$

$$= P_G. \tag{16.46d}$$

Donc P_G est un projecteur, est stable sous les conjugaisons par $\rho(g)$ et commute avec $\rho(g)$. Nous décomposant Id de façon évidente en

$$\mathrm{Id} = P_G + (\mathrm{Id} - P_G). \tag{16.47}$$

Étant donné que l'opérateur P_G commute avec tous les $\rho(g)$, les noyaux de P_G et $\mathrm{Id} - P_G$ sont des sous-espaces invariants. Vu que P_G est un projecteur, nous avons $q(P_G) = 0$ avec $q(X) = X^2 - X$. Pour appliquer le lemme des noyaux (théorème 9.85), nous remarquons que $q(X) = X(X-1)$ et donc

$$V = \ker P_G \oplus \ker(P_G - \mathbb{1}). \tag{16.48}$$

Si nous posons $W_2 = \ker P_G$, il reste à voir que $\ker(P_G\mathbb{1}) = W_1$. D'abord $W_1 \subset \ker(P_G - \mathrm{Id})$ parce que si $w \in W_1$, ce dernier étant stable,

$$P_G w = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)P\underbrace{\rho(g)^{-1}w}_{\in W_1} \tag{16.49a}$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} w \tag{16.49b}$$

$$= w. \tag{16.49c}$$

Pour prouver l'inclusion inverse, nous savons que P_G et P sont des projecteurs tels que $P_G P = P$, ce qui signifie que l'image de P_G est inclue à celle de P, c'est-à-dire à W_1. Mais $\mathrm{Image}(P_G) = \ker(\mathbb{1} - P_G)$, donc

$$\ker(\mathbb{1} - P_G) = \mathrm{Image}(P_G) \subset \mathrm{Image}(P) = W_1. \tag{16.50}$$

La représentation ρ se décompose donc en deux sous-représentations (ρ, W_1) et ρ, W_2. Si l'une des deux n'est pas irréductible, le processus peut recommencer. Vu que la dimension de V est finie, toute représentation se décompose en une somme finie de représentation irréductibles. □

16.1.5 Structure hermitienne

Soit (ρ, V) une représentation de G sur un espace vectoriel complexe V. Nous voulons munir V d'un produit scalaire hermitien (définition 9.163) tel que les opérateurs $\rho(g)$ soient tous des isométries. C'est-à-dire que nous voudrions définir $\langle u, v\rangle_G$ de telle sorte à avoir

$$\langle \rho(g)u, \rho(g)v\rangle_G = \langle u, v\rangle_G \tag{16.51}$$

pour tout $g \in G$. Nous commençons par considérer un produit hermitien $\langle .,. \rangle$ quelconque et puis nous définissons
$$\langle u, v\rangle_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle \rho(g)u, \rho(g)v\rangle. \tag{16.52}$$
Nous devons vérifier que c'est un produit. La seule des conditions dont la vérification n'est pas immédiate est celle de positivité. Pour tout $g \in G$ et tout $v \in V$, nous avons $\langle \rho(g)v, \rho(g)v\rangle$ est positif et nul si et seulement si $\rho(g)v = 0$. Étant donné que $\rho(e)v = v$, parmi les termes de la somme
$$\langle u, u\rangle_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle \rho(g)v, \rho(g)v\rangle, \tag{16.53}$$
au moins un est strictement positif (pourvu que $v \neq 0$) ; les autres sont positifs ou nuls. Par conséquent $\langle v, v\rangle_G = 0$ si et seulement si $v = 0$.

Donc les groupes finis peuvent être vus comme des parties de groupes d'isométrie. De la même façon, en utilisant une mesure de Haar pour faire la moyenne, nous pouvons plonger les groupes compacts dans des groupes unitaires.

16.1.6 Caractères

Définition 16.11.
Soit (V, ρ) une représentation linéaire du groupe G. Le ***caractère*** *de ρ est la fonction*

$$\begin{aligned} \chi_\rho \colon G &\to \mathbb{C} \\ s &\mapsto \operatorname{Tr}\big(\rho(s)\big). \end{aligned} \tag{16.54}$$

Par invariance cyclique de la trace, nous avons

$$\chi_\rho(sts^{-1}) = \chi_\rho(t), \tag{16.55}$$

ce qui fait que le caractère est une fonction constante sur les classes de conjugaison.

D'après sa fiche wikipédia, le marquis de Sade, passionné de théâtre, faisait des représentations qui avaient du caractère.

Un **caractère irréductible** est un caractère d'une représentation irréductible.

Définition 16.12.
Une application $f \colon G \to \mathbb{C}$ est ***centrale*** *si elle est constante sur les classes de conjugaison.*

Les traces sont des applications centrales.

L'ensemble des fonctions centrales sur un groupe fini (ou tout au moins ayant un nombre fini de classes de conjugaison) est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension égale au nombre de classes, et nous pouvons mettre le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{s\in G} f(s)\overline{g(s)}. \tag{16.56}$$

C'est une forme hermitienne sur l'espace des fonctions centrales.

16.2 Équivalence de représentations et caractères

Cette section prend des éléments des articles lemme de Schur, caractère d'une représentation, fonction centrale et trace de wikipédia.

Définition 16.13.
Nous disons que les deux représentations (V, ρ) et (V', ρ') sont ***équivalentes*** *si il existe une bijection linéaire $f \colon V \to V'$ telle que*
$$f \circ \rho = \rho' \circ f. \tag{16.57}$$
Nous disons alors que f ***entrelace*** *ρ et ρ'.*

Théorème 16.14 (Théorème de Schur)**.**
Si (V, ρ) et (V', ρ') sont des représentations irréductibles non équivalentes alors la seule application linéaire $f\colon V \to V'$ entrelaçant ρ et ρ' est la fonction nulle.

En d'autres termes, soit les représentations sont équivalentes (et il y a un isomorphisme), soit il n'y a même pas un homomorphisme.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{L}(V, V')$ telle que $f \circ \rho = \rho' \circ f$. Alors $\ker f$ est un sous-espace stable sous $\rho(G)$, et $\text{Image}(f)$ est un sous-espace de V' stable par $\rho'(G)$. Par irréductibilité, nous avons que $\ker(f) = \{0\}$ ou V. Même chose pour $\text{Image}(f)$. Il y a deux possibilités.

(1) Si $\ker(f) = \{0\}$, alors $\text{Image}(f) \neq \{0\}$ et alors $\text{Image}(f) = V'$. Du coup f est injective et surjective, c'est-à-dire est un isomorphisme.
(2) Si $\ker(f) = V$, alors $f = 0$.

□

Corolaire 16.15 (Schur pour les représentations sur $\mathbb{C}$)**.**
Soit (V, ρ) une représentation irréductible, alors l'ensemble

$$\text{End}_G(V, \rho) = \{f \in \text{End}(V) \textit{ tel que } \rho \circ f = f \circ \rho\} \tag{16.58}$$

est l'ensemble des homothéties.

Démonstration. Soit $f \in \text{End}_G(V, \rho)$. Vu que l'espace est sur $\mathbb{C}$, l'endomorphisme f a une valeur propre λ. L'opérateur $g = f - \lambda\mathbb{1}$ est aussi un opérateur d'entrelacement de ρ alors que $\ker(g) \neq \{0\}$ par définition de valeur propre. Du coup $\ker(g) = V$, ce qui signifie que f est l'isométrie de rapport $\lambda : f = \lambda\,\text{Id}$. □

Lemme 16.16.
Si (ρ, V) et (ρ', V') sont des représentations équivalentes de caractères χ et χ', alors $\chi = \chi'$.

Démonstration. Si $A\colon V \to V'$ est un isomorphisme d'espace vectoriel entrelaçant ρ et ρ', c'est-à-dire si pour tout g, $\rho'(g)A = A\rho(g)$, alors $\rho'(g) = A\rho(g)A^{-1}$ et

$$\chi'(g) = \text{Tr}\left(\rho'(g)\right) = \text{Tr}\left(A\rho(g)A^{-1}\right) = \text{Tr}\left(\rho(g)\right) \tag{16.59}$$

parce que la trace est un invariant de similitude (lemme 9.195). □

Lemme 16.17.
Si χ est le caractère de la représentation complexe (V, ρ) du groupe fini G, alors pour tout $g \in G$ nous avons $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$.

Démonstration. Par le corolaire 2.14 au théorème de Lagrange, nous avons $g^{|G|} = e$ et donc en tant qu'opérateur, $\rho(g)^{|G|} = \mathbb{1}$. Les valeurs propres de $\rho(g)$ sont donc des racines de l'unité. Si nous notons λ_i ces valeurs propres, alors $\chi(g) = \sum_i \lambda_i$, et en considérant la matrice dans sa base de diagonalisation (lemme de Schur complexe, 12.96), nous voyons que

$$\chi(g^{-1}) = \text{Tr}\left(\rho(g)^{-1}\right) = \sum_i \frac{1}{\lambda_i}. \tag{16.60}$$

Mais λ_i étant une racine de l'unité nous avons $\frac{1}{\lambda_i} = \bar{\lambda}_i$, ce qui fait que

$$\chi(g^{-1}) = \sum_i \bar{\lambda}_i = \overline{\chi(g)}. \tag{16.61}$$

□

Proposition 16.18.
Soient deux représentations irréductibles complexes (V, ρ) et (V', ρ') du même groupe fini G, et χ et χ' leurs caractères respectifs. Nous avons

(1) $\langle \chi, \chi' \rangle = 0$ *si* ρ *et* ρ' *ne sont pas équivalentes.*

(2) $\langle \chi, \chi' \rangle = 1$ *si les représentations sont équivalentes.*

Démonstration. Nous considérons les bases $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V et $\{f_1, \ldots, f_m\}$ de V'. Puis nous considérons la matrice $F(k,l) = E_{kl} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ où pour rappel, E_{kl} est la matrice de composantes $(E_{kl})_{ij} = \delta_{ki}\delta_{lj}$. Nous posons

$$F_G(k,l) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ F(k,l) \circ \rho'(g)^{-1}. \tag{16.62}$$

En nous permettant de ne pas réécrire les indices k et l de F et F_G, nous montrons que F_G entrelace ρ et ρ' :

$$\begin{aligned}
F_G \circ \rho'(t) &= \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \rho(s) \circ F \circ \rho'(s^{-1}) \circ \rho(t) && (16.63a)\\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{s} \rho(s) F \rho'(s^{-1}t) && (16.63b)\\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{k} \rho(tk) F \rho'(k^{-1}) && (16.63c)\\
&= \frac{1}{|G|} \rho(t) \sum_{k} \rho(k) F \rho'(k^{-1}) && (16.63d)\\
&= \rho(t) \circ F_G. && (16.63e)
\end{aligned}$$

Dans ce calcul nous avons effectué le changement de variables $k = (s^{-1}t)^{-1}$ qui donne $s = tk$.

Par ailleurs nous avons

$$\begin{aligned}
\Big(\rho(g) F(k,l) \rho'(g^{-1})\Big)_{ij} &= \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{m} \rho(g)_{ir} F(k,l)_{rs} \rho'(g^{-1})_{sj} && (16.64a)\\
&= \sum_{rs} \rho(g)_{ir} \delta_{kr} \delta_{ls} \rho'(g^{-1})_{sj} && (16.64b)\\
&= \rho(g)_{ik} \rho'(g^{-1})_{lj}, && (16.64c)
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$F_G(k,l)_{ij} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)_{ik} \rho'(g^{-1})_{lj}. \tag{16.65}$$

Si χ et χ' sont les caractères de ρ et ρ', alors nous avons le produit (16.56) qui donne

$$\begin{aligned}
\langle \chi, \chi' \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\chi'(g)} && && (16.66a)\\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g} \chi(g) \chi'(g^{-1}) && \text{lemme 16.17} && (16.66b)\\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \rho(g)_{ii} \rho'(g^{-1})_{jj} && && (16.66c)\\
&= \sum_{ij} F_G(i,j)_{ij} && \text{par (16.65).} && (16.66d)
\end{aligned}$$

Si les représentations ρ et ρ' ne sont pas équivalentes, le fait que F_G en soit un opérateur d'entrelacement implique par le théorème de Schur 16.14 que $F_G = 0$ et donc $\langle \chi, \chi' \rangle = 0$.

Si au contraire les représentation sont équivalentes, alors le lemme 16.16 nous dit que $\chi = \chi'$ et nous reprenons la définition :

$$\langle \chi, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g} \chi(g) \overline{\chi(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} 1 = 1 \tag{16.67}$$

parce que les nombres $\chi(g)$ sont des racines de l'unité. $\square$

16.2.1 Représentation régulière

Nous notons λ la **représentation régulière gauche**, agissant sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions $G \to \mathbb{K}$ par

$$\Big(\lambda(g)f\Big)(g) = f(g^{-1}h). \tag{16.68}$$

D'autre part nous considérons les fonctions $\delta_g\colon G \to \mathbb{K}$ (ici $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou pire) définie par

$$\delta_g(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } g = h \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{16.69}$$

La représentation régulière agit sur les fonctions δ_s de la façon suivante :

$$\lambda(g)\delta_s = \delta_{gs} \tag{16.70}$$

parce que $\big(\lambda(g)\delta_s\big)(h) = \delta_s(g^{-1}h) = \delta_{gs}(h)$.

Lemme 16.19.
Le caractère de la représentation régulière gauche est donné par

$$\chi_\lambda = |G|\delta_e. \tag{16.71}$$

Démonstration. Appliquer l'équation (16.71) fonctionne parce que $\chi_\lambda(e)$ est la dimension de l'espace des fonctions sur G, c'est-à-dire $|G|$. Si par contre $g \neq e$, alors $\lambda(g)$ est une matrice de permutation (dans la base des δ_h) et a donc tous ses éléments diagonaux nuls. □

Si ρ est une représentation et si f est une fonction sur le groupe, alors nous considérons l'opérateur

$$\rho_f = \sum_{g\in G} f(g)\rho(g). \tag{16.72}$$

Proposition 16.20 ([409]).
Si (ρ, V) est une représentation irréductible et si f est une fonction centrale sur G, alors l'opérateur ρ_f est une homothétie de V de rapport

$$\frac{1}{\dim V}\sum_{g\in G} f(g)\chi(g) \tag{16.73}$$

où χ est le caractère de ρ.

Démonstration. Nous commençons par voir que ρ_f entrelace ρ. En effet,

$$\begin{aligned}
\rho(t)^{-1}\circ\rho_f\circ\rho(t) &= \sum_g f(g)\rho(t^{-1}gt) && \text{(16.74a)}\\
&= \sum_h f(tht^{-1})\rho(g) \qquad\qquad h = t^{-1}gt && \text{(16.74b)}\\
&= \sum_h f(h)\rho(h) && \text{(16.74c)}\\
&= \rho_f && \text{(16.74d)}
\end{aligned}$$

où en écrivant $f(tht^{-1}) = f(h)$, nous avons utilisé le fait que f était centrale. Étant donné que ρ_f entrelace une représentation irréductible, le lemme de Schur (16.14) nous indique que ρ_f est une homothétie. Soit k le facteur d'homothétie. Alors d'une part $\operatorname{Tr}(\rho_f) = nk$. D'autre part,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}(\rho_f) &= \operatorname{Tr}\big(\sum_g f(g)\rho(g)\big) && \text{(16.75a)}\\
&= \sum_g f(g)\operatorname{Tr}\big(\rho(g)\big) && \text{(16.75b)}\\
&= \sum_g f(g)\chi(g). && \text{(16.75c)}
\end{aligned}$$

Du coup effectivement

$$k = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} f(g)\chi(g). \tag{16.76}$$

□

16.2.2 Caractères et représentations : suite et fin

Lemme 16.21.
Un groupe fini n'a (à équivalence près) qu'un nombre fini de représentations irréductibles.

Démonstration. Les caractères irréductibles forment un système orthonormé (proposition 16.18) et donc libre parmi les fonctions centrales. Donc il y a au plus autant de caractères irréductibles que la dimension de l'espace des fonctions centrales ; et ce dernier est de dimension finie donnée par le nombre de classes de conjugaison de G. □

Nous savons que les caractères de deux représentations irréductibles sont égaux. Étant donné qu'il n'existe qu'un nombre fini de représentations irréductibles, il existe un nombre fini de caractères irréductibles. Nous pouvons donc fixer les notations suivantes. Les caractères irréductibles seront notés $\{\varphi_i\}_{i=1,\ldots,h}$ et nous noterons (σ_i, W_i) une représentation ayant le caractère φ_i.

Théorème 16.22 ([409])**.**
Soit (ρ, V) une représentation de G de caractère χ. Alors sa décomposition en représentations irréductibles est donnée par

$$(V, \rho) = \bigoplus_{i=1}^{h} k_i(W_i, \sigma_i) \tag{16.77}$$

avec $k_i = \langle \chi, \varphi_i \rangle$. En particulier, à permutation près des facteurs, la décomposition d'une représentation en représentations irréductibles est unique.

Démonstration. La décomposition de χ en caractères irréductibles est donnée par $\chi = \sum_i k_i\varphi_i$; en prenant le produit de cette égalité avec φ_j et en tenant compte de l'othonormalité des caractères irréductibles,

$$\langle \chi, \varphi_j \rangle = \sum_i k_i \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = k_j. \tag{16.78}$$

□

Le théorème suivant est ce qui nous permet de dire que l'étude des caractères et l'étude des représentations, c'est la même chose.

Théorème 16.23.
Soit G un groupe fini[7]*.*

(1) Deux représentations sont équivalentes si et seulement si elles ont même caractères.

(2) Si χ est le caractère d'une représentation, alors

(2a) $\langle \chi, \chi \rangle \in \mathbb{N}$

(2b) $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ si et seulement si la représentation est irréductible.

Démonstration. Nous démontrons chaque point séparément.

(1) Le fait que deux représentations équivalentes aient même caractère est le lemme 16.16. Nous montrons l'autre sens. Si (ρ, V) et (ρ', V') sont deux représentations irréductibles de décompositions

$$V = \bigoplus_i k_i W_i \tag{16.79a}$$

$$V' = \bigoplus_i k'_i W_i, \tag{16.79b}$$

7. Nous sommes depuis longtemps dans l'étude des représentations des groupes finis.

alors si $\chi = \chi'$, nous avons $k_i = k'_i$ et les représentations sont identiques.

(2) Soit (ρ, V) une représentation ayant χ comme caractère. En posant $k_i = \langle \chi, \varphi_i \rangle$ nous avons la décomposition en représentations irréductibles

$$V = \bigoplus_i k_i W_i, \tag{16.80}$$

et aussi

$$\langle \chi, \chi \rangle = \langle \sum_i k_i \varphi_i, \sum_j k_j \varphi_j \rangle = \sum_i k_i^2 \in \mathbb{N}. \tag{16.81}$$

Ce nombre est de plus égal à 1 si et seulement si tous les termes de la somme sont nuls sauf un qui vaudrait 1. Ce cas donne une représentation irréductible.

□

Proposition 16.24.
Si (λ, R) est la représentation régulière gauche de décomposition en représentations irréductibles

$$R = \bigoplus_i k_i W_i, \tag{16.82}$$

alors

(1) $k_i = \dim W_i$,
(2) $\sum_i (\dim W_i)^2 = |G|$,
(3) pour tout $g \in G$, $\sum_i (\dim W_i)\varphi_i(g) = 0$ [8].
(4) Si $\{(n_i, \varphi_i)\}$ *est la liste des couples dimension,caractère des représentations irréductibles non équivalentes, alors pour tout* $s \in G\backslash\{e\}$ *nous avons* $\sum_{i=1}^{p} n_i \varphi_i(s) = 0$ *où la somme porte sur les représentations irréductibles non équivalentes.*

Démonstration. Nous notons r le caractère de la représentation régulière gauche. Nous avons

$$k_i = \langle r, \varphi_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} r(s) \overline{\varphi_i(s)} = \overline{\varphi_i(e)}. \tag{16.83}$$

Mais $\varphi_i(e) = \dim W_i \in \mathbb{R}$, donc nous avons bien $k_i = \dim W_i$. Le caractère de la représentation régulière peut alors s'exprimer de deux façons :

$$|G|\delta_e = \sum_i (\dim W_i)\varphi_i. \tag{16.84}$$

En évaluant cette égalité en e nous trouvons directement

$$|G| = \sum_i (\dim W_i)^2, \tag{16.85}$$

et en l'évaluant en $s \neq e$, nous trouvons

$$0 = \sum_i (\dim W_i)\varphi_i(s). \tag{16.86}$$

□

Le théorème suivant est valable pour les groupes finis (comme toute cette section).

Théorème 16.25 ([409])**.**
Les caractères irréductibles $\chi_1, \ldots, \chi_h$ forment une base orthonormé des fonctions centrales sur G.

8. Cette propriété est appelée « orthogonalité des colonnes » pour une raison qui apparaîtra au moment de compléter le tableau (16.111).

Démonstration. Nous savons déjà qu'ils forment un système orthonormé. Considérons le sous-espace $H = \text{Span}\{\varphi_i\}_{i=1,\ldots,h}$ de l'espace des fonctions centrales sur G. En vertu de la proposition 4.125, il nous suffit de prouver que $H^\perp = 0$. Soit donc f, une fonction centrale appartenant à $H^\perp$. Pour tout i, nous avons $\langle f, \varphi_i\rangle = 0$ et donc aussi $\langle \bar f, \bar\varphi_i\rangle = 0$.

Considérant une représentation irréductible (σ, W) de caractère φ, nous savons par la proposition 16.20 que l'opérateur

$$\sigma_{\bar f} = \sum_g \bar f(g)\varphi(g) \tag{16.87}$$

est une homothétie de rapport $\langle \bar f, \bar\varphi\rangle / \dim W = 0$. Étant donné que toutes les représentations sont des sommes directes de représentations irréductibles, en réalité l'opérateur $\rho_{\bar f}$ est nul pour toute représentation ρ. En particulier pour la représentation régulière,

$$0 = \lambda_{\bar f}(\delta_t) = \sum_{g\in G} \bar f(g)\lambda(g)(\delta_t) = \sum_g \bar f(g)\delta_{ft}. \tag{16.88}$$

En écrivant cette égalité avec $t = e$ et puis en appliquant à $k \in G$ nous trouvons

$$0 = \sum_g \bar f(g)\delta_g(k) = \bar f(k). \tag{16.89}$$

Donc $\bar f = 0$ et f est nulle. □

Corolaire 16.26.
Le nombre de représentations irréductibles non équivalentes d'un groupe fini est égal à son nombre de classes de conjugaison.

Démonstration. Le nombre de classes de conjugaison est la dimension de l'espace des fonctions centrales qui elle-même est égale au nombre de caractères irréductibles par le théorème 16.25. Enfin deux caractères irréductibles sont égaux si et seulement si les représentations sous-jacentes sont équivalentes. □

Corolaire 16.27.
Toutes les représentations irréductibles d'un groupe abélien sont de dimension 1*.*

Démonstration. Le corolaire 16.26 nous dit qu'il y a autant de représentations unitaires qu'il n'y a de représentations irréductibles (non équivalentes). Mais les classes de conjugaisons sont des singletons (lemme 1.163). Nous avons donc exactement $|G|$ représentations irréductibles lorsque G est abélien.

Mais d'autre part la proposition 16.24(2) donne $\sum_i (\dim W_i)^2 = |G|$ lorsque la somme parcours les représentations irréductibles. Il y a $|G|$ termes à la somme, donc tous les termes doivent être 1. □

16.3 Représentation produit tensoriel

Définition 16.28.
Soient ρ et ϕ, deux représentations d'un groupe G sur des espaces vectoriels V et W. La représentation ***produit tensoriel*** *est la représentation*

$$\begin{aligned} \rho\otimes\phi\colon G &\to \mathrm{GL}(V\otimes W)\\ (\rho\otimes\phi)(g)(v\otimes w) &= \rho(g)v\otimes\phi(g)w. \end{aligned} \tag{16.90}$$

L'espace $V\otimes W$ est le produit tensoriel de V et W, défini en 11.151.

Pour trouver son caractère, nous considérons une base $\{e_i\}$ de V et une base $\{e_\alpha\}$ de W, et la base $\{e_i\otimes e_\alpha\}$ de $V\otimes W$. Donc

$$(\rho\otimes\phi)(g)(e_i\otimes e_\alpha) = \rho(g)e_i\otimes\phi(g)e_\alpha. \tag{16.91}$$

Nous devons savoir quelle est la composante « $e_i \otimes e_\alpha$ » de cette dernière expression, et c'est évidemment

$$\rho(g)_{ii}\rho_{\alpha\alpha}, \tag{16.92}$$

ce qui nous amène à dire que

$$\operatorname{Tr}(\rho\otimes\phi)(g) = \sum_i\sum_\alpha \rho(g)_{ii}\phi(g)_{\alpha\alpha} = \operatorname{Tr}\big(\rho(g)\big)\operatorname{Tr}\big(\phi(g)\big), \tag{16.93}$$

c'est-à-dire au final que

$$\chi_{\rho\otimes\phi} = \chi_\rho\chi_\phi. \tag{16.94}$$

16.4 Exemple sur le groupe symétrique

Soit $G = S_3$, un des premiers groupes finis non abéliens. On en a une représentation de dimension deux en tant que permutation des sommets d'un triangle équilatéral, donnée dans l'exemple 16.6 ; nous notons ρ cette représentation.

Nous y avons aussi la représentation de signature donnée par

$$\begin{aligned} \epsilon\colon S_3 &\to \mathrm{GL}(\mathbb{C}) \\ \sigma &\mapsto \epsilon(\sigma)\,\mathrm{Id}\,. \end{aligned} \tag{16.95}$$

Et enfin il y a la représentation triviale. Ce sont les trois représentations irréductibles ; pour rappel il y a autant de représentations irréductibles que de classes de conjugaison (corolaire 16.26).

Classe de conjugaison	taille	χ_1	χ_ϵ	χ_ρ
Id	1	1	1	2
(A,B)	3	1	-1	0
(A,B,C)	2	1	1	-1

Nous calculons par exemple le produit scalaire

$$\langle\chi_1,\chi_\epsilon\rangle = \frac{1}{6}\Big(1\cdot\chi_1(\mathrm{Id})\overline{\chi_\epsilon(\mathrm{Id})} + 3\cdot\chi_1(A,B)\overline{\chi_\epsilon(A,B)} + 2\cdot\chi_1(A,B,C)\overline{\chi_\epsilon(A,B,C)}\Big) \tag{16.96a}$$

$$= 0. \tag{16.96b}$$

D'autre part nous avons aussi

$$\langle\chi_\rho,\chi_\rho\rangle = \frac{1}{6}(1\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot 0 + 2\cdot 1) = 1. \tag{16.97}$$

16.5 Table des caractères du groupe symétrique S_4

Pour la table des caractères de S_4, voir [89]. Et si vous voulez la table des caractères du groupe diédral, vu que ce sont de isométries de $\mathbb{R}^n$, il faudra voir plus bas en la section 18.16.

16.5.1 Calculs à partir de rien ou presque

Nous savons que les classes de conjugaison dans S_4 sont caractérisées par la structure des décompositions en cycles (proposition 1.196). Elles sont données dans l'exemple 1.199.

Nous avons donc 5 classes de conjugaison, et il nous faut donc 5 représentations irréductibles non équivalentes (corolaire 16.26) dont nous allons chercher les caractères.

La première est la représentation triviale de dimension 1 ; nous notons χ_1 son caractère et nous avons la ligne

	dimension	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1	1

(16.98)

Ensuite nous avons la signature qui est un morphisme non trivial $\epsilon\colon S_n \to \{-1,1\}$. Nous avons alors la ligne

	dimension	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_ϵ	1	1	-1	1	-1	1

(16.99)

Une troisième représentation pas trop compliquée à trouver est celle

$$\begin{aligned} \rho_p\colon S_4 &\to \mathrm{GL}(4,\mathbb{C}) \\ \rho_p(\sigma)e_i &= e_{\sigma(i)}. \end{aligned} \tag{16.100}$$

Cela n'est pas une représentation irréductible parce que $\mathbb{C}^4$ se décompose en deux sous-espaces stables :

$$D = \mathrm{Span}(1,1,1,1) \tag{16.101a}$$
$$H = \{x \in \mathbb{C}^4 \text{ tel que } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}. \tag{16.101b}$$

La représentation induite sur D est la représentation triviale. Puis sur H, elle induit une autre représentations que nous allons noter ρ_s.

Nous allons à présent déduire le caractère de la représentation ρ_s et prouver qu'elle est irréductible. Il est cependant possible de sauter cette étape en échange d'un certain travail sur les isométries du tétraèdre. Voir la proposition 18.188 et ensuite

Nous avons la décomposition $\rho_p = \rho_1 \oplus \rho_s$ et donc

$$\chi_p = \chi_1 + \chi_s. \tag{16.102}$$

Nous savons déjà χ_1. Le caractère χ_p n'est pas très compliqué parce que $\chi_p(\sigma)$ est une matrice de permutations des vecteurs de base. Donc la matrice $\rho_p(\sigma)$ a un 1 sur la diagonale pour les i tels que $\sigma(i) = i$. Nous avons donc

$$\chi_p(\mathrm{Id}) = 4 \qquad \chi_p(12) = 2 \tag{16.103a}$$
$$\chi_p\big((12)(34)\big) = 0 \qquad \chi_p(123) = 1 \tag{16.103b}$$
$$\chi_p(1234) = 0. \tag{16.103c}$$

Le caractère χ_s peut être calculé par simple soustraction :

	dimension	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_s	3	3	1	0	-1	-1

(16.104)

Avant d'ajouter cette ligne au tableau des représentations irréductibles nous devons savoir si ρ_s en est une. Pour cela, tant que nous avons son caractère nous pouvons utiliser le critère du théorème 16.23 :

$$\langle \chi_s, \chi_s \rangle = \frac{1}{|S_4|} \sum_{\sigma \in S_4} \chi_s(\sigma)^2. \tag{16.105}$$

Nous avons tout de suite $|S_4| = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ et puis

$$24\langle \chi_s, \chi_s \rangle = 3^2 + 6 \cdot 1^2 + 8 \cdot 0^2 + 6 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1)^2 = 24, \tag{16.106}$$

donc oui, le caractère est irréductible parce que $\langle \chi_s, \chi_s \rangle = 1$. Et nous pouvons donc ajouter la ligne (16.104) à notre tableau. Par ailleurs, nous notons qu'elle est de dimension 3.

Pour le reste nous savons qu'il y a autant de représentations irréductibles que de classes de conjugaison, de telle sorte qu'il ne manque que deux représentations irréductibles. De plus la proposition 16.24 nous dit que si n_i est la dimension de la i^{e} représentation irréductible, alors

$$|S_4| = \sum_i n_i^2. \tag{16.107}$$

Dans notre situation, si nous nommons n_1 et n_2 les dimensions des deux représentations qui nous manquent, nous avons $24 = n_1^2 + n_2^2 + (1^2 + 1^2 + 3^2)$, c'est-à-dire $n_1^2 + n_2^2 = 13$. Il n'y a pas des tonnes de sommes de deux carrés qui font 13. Il y a $n_1 = 2$ et $n_2 = 3$, et c'est tout.

Nous recherchons donc encore une représentation de dimension 2 et une de dimension 3. Pour cela nous allons un peu regarder les produits tensoriels qui s'offrent à nous. Pour faire une dimension 3, il faut faire le produit d'une de dimension 1 par une de dimension 3. Là encore le choix est très limité et nous demande d'essayer

$$\rho_W = \rho_s \otimes \rho_\epsilon \tag{16.108}$$

qui agit sur l'espace $V_2 \otimes V_\epsilon$ par

$$\rho_W(g)(v \otimes x) = \rho_s(g)v \otimes \rho_\epsilon(g)x. \tag{16.109}$$

Pour savoir son caractère nous utilisons la petite formule toute simple (16.94) : nous multiplions case par case les tableaux (16.104) et (16.99) :

	dimension	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_W	3	3	-1	0	1	-1

(16.110)

Avant de réellement ajouter cette ligne au tableau, nous devons nous assurer qu'elle est bien irréductible. Nous utilisons le même critère : $\langle \chi_W, \chi_W \rangle = 1$, donc c'est bon.

Pour trouver le dernier caractère, que nous nommerons χ_u, il ne faut pas beaucoup d'imagination. Il suffit d'utiliser les relations d'orthogonalité du théorème 16.25, en sachant que la dimension est 2 et qu'alors $\chi_W(\text{Id}) = 2$, c'est pas trop compliqué :

	dimension	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_ϵ	1	1	-1	1	-1	1
χ_s	3	3	1	0	-1	-1
χ_W	3	3	-1	0	1	-1
χ_u	2	2	b	c	d	e

(16.111)

Les relations d'orthogonalité des colonnes de la propriété 16.24 nous permettent de calculer les coefficients manquants. En pratique, il suffit de prendre le produit scalaire de chaque ligne avec la première et d'égaler avec zéro. Nous trouvons $b = 0$, $c = 1$, $d = 0$, et $e = 2$. Le tableau final est :

	dimension	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_ϵ	1	1	-1	1	-1	1
χ_s	3	3	1	0	-1	-1
χ_W	3	3	-1	0	1	-1
χ_u	2	2	0	-1	0	2

(16.112)

Notons que nous sommes parvenus à remplir la dernière ligne sans rien savoir de la représentation qui va avec. Nous allons cependant donner une interprétation géométrique et fixer cette représentation comme agissant sur le triangle équilatéral en 16.32.

16.5.2 À propos de la représentation ρ_s

Une des représentations trouvées (la représentation ρ_s) peut être vue comme le groupe $\text{Iso}(T)$ des isométries affine du tétraèdre[9] grâce à la proposition 18.188 qui donne un isomorphisme de groupe $S_4 \simeq \text{Iso}(T)$ lorsque T est un tétraèdre régulier de $\mathbb{R}^3$.

Nous verrons donc ça plus en détail dans la section 18.9.19.

9. Définition 12.143.

16.5.3 À propos de la représentation ρ_u

Nous nous penchons à présent sur la représentations ρ_u dont nous ne savons rien à part qu'elle est de dimension 2 et son caractère.

Lemme 16.29.
Nous avons $\rho_u(s) = \mathrm{Id}$ *pour tout* $s \in V_4$.

Démonstration. Tous les éléments de V_4 sont conjugués (à part l'identité, mais pour elle le résultat est clair), donc il suffit de prouver le résultat pour un élément quelconque.

L'endomorphisme $\rho_u\big((12)(34)\big)$ est un endomorphisme d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^2$ dont la trace est 2. Imposons donc

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{16.113}$$

sous la contrainte $a + d = 2$. La résolution est assez rapide et donne $b = c = 0$, $a = d = 1$.

Vous voulez une démonstration plus technologique ? Oui ? Alors commencez par remarquer que l'opérateur $A = \rho_u\big((12)(34)\big)$ vérifie $A^2 = 1$, donc le polynôme $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de A. Il est peut-être minimal ou peut être pas, mais en tout cas le polynôme minimal divise celui-là et donc est soit $X - 1$ soit $X + 1$ soit $X^2 - 1$. Dans les trois cas il est scindé à racines simples, et l'endomorphisme A est diagonalisable par le théorème 9.204(3).

Mais comme $A^2 = 1$, les valeurs propres (ce qui est sur la diagonale) de A ne peuvent être que ± 1. La trace étant 2, les éléments diagonaux ne peuvent être que 1. Et $A = \mathrm{Id}$. □

Le groupe V_4 définit en 5.41 est normal dans S_4, donc le quotient S_4/V_4 est un groupe par le lemme 2.10.

Lemme 16.30.
L'application

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_u \colon S_4/V_4 &\to \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \\ [g] &\mapsto \rho_u(g) \end{aligned} \tag{16.114}$$

est bien définie et donne une représentation irréductible de S_4/V_4.

Démonstration. Montrons que c'est bien définit. Si $s \in V_4$ nous devons prouver que $\rho_u(gs) = \rho_u(g)$. Vu que ρ_u est un homomorphisme (c'est une représentation), et que $\rho_u(s) = \mathrm{Id}$ nous avons directement

$$\rho_u(gs) = \rho_u(g)\rho_u(s) = \rho_u(g). \tag{16.115}$$

Nous devons prouver que la représentation $\tilde{\rho}_u$ est irréductible. Si un sous-espace non trivial $\mathrm{Span}(x)$ était stabilisé par $\tilde{\rho}_u$, il serait également stabilisé par ρ_u. Mais comme ρ_u est irréductible, elle ne stabilise personne. □

Lemme 16.31.
Le groupe S_4/V_4 *est un groupe non-abélien, isomorphe à* S_3.

Démonstration. Le groupe S_4/V_4 a une représentation irréductible de dimension 2, et n'est donc pas abélien par le corolaire 16.27.

Il contient $|S_4|/|V_4| = 24/4 = 6$ éléments (théorème de Lagrange 2.13). Or $6 = 3 \times 2$, donc le groupe S_4/V_4 est dans le cas non-abélien du théorème 5.25(2). Cette partie parle d'unicité du groupe non-abélien d'ordre 6. Or S_3 est un groupe non-abélien d'ordre 6, donc S_4/V_4 est isomorphe à S_3. □

Attention : il n'est pas correct de dire que S_4/V_4 est un sous-groupe de S_4 juste parce que c'est un quotient de S_4 ; ce n'est en général pas vrai (exemple 2.11).

16.32.
Nous sommes maintenant aptes à identifier la représentation ρ_u. D'abord nous nous rappelons de la

représentation $\rho_s\colon S_4 \to \mathrm{Iso}(T)$ de S_4 sur le tétraèdre. Ensuite si A est un sommet dudit tétraèdre et que $S_3 \subset S_4$ est la partie qui fixe A alors nous avons une représentation

$$\rho_s\colon S_3 \to \mathrm{Iso}(T) \tag{16.116}$$

qui agit en réalité sur le triangle équilatéral T' opposé au sommet A.

Nous avons finalement la chaine d'homomorphismes de groupes

$$S_4 \xrightarrow{\texttt{proj}} S_4/V_4 \xrightarrow{\simeq} S_3 \xrightarrow{\rho_s} \mathrm{Iso}(T') \tag{16.117}$$

Cela est donc une représentation $S_4 \to \mathrm{Iso}(T')$. Elle est de dimension 2 et est irréductible (elle contient les rotations d'angle $2\pi/3$ qui ne fixent aucune direction). Elle est donc la représentation ρ_u qui est la seule irréductible de dimension 2.

Nous avons donc montré que la représentation ρ_u dont nous ne savions rien est la représentation de S_4 sur un triangle équilatéral obtenue à partir de celle de S_4 sur le tétraèdre, en fixant un point.